arXiv:2303.03636v1 [math.DS] 7 Mar 2023

重标度分离可微向量场的中心化子

BO HAN 和 XIAO WEN

Abstract. 我们引入一种新的扩张性概念，与流的分离性质类似。设 M 是一个无边界的紧致黎曼流形， X 是 M 上的一个向量场，并生成 M 上的流 φ_t 。如果存在 $\delta > 0$，使得对于任意 x、$y \in \Lambda$，若对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均有 $d(\varphi_t(x)\ \varphi_t(y)) \leq \delta\|X(\varphi_t(x))\|$，则 $y \in$Orb(x)，我们称 X *rescaling separating* 在 X 的紧不变集 Λ 上具有该性质。我们证明，若 X 在 Λ 上重标度分离，且 X 在 Λ 中的每个奇点都是双曲的，那么对于任意向量场 C^1 Y，若 Y 生成的流与 φ_t 在 Λ 上可交换，则 Y 在 Λ 上与 X 共线。作为该结果的应用，我们证明，不含非双曲奇点的重标度分离向量场 C^1 的中心化子是拟平凡的；并且存在一个开稠密集 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^1(M)$，使得对于任意星向量场 $X \in \mathcal{U}$， X 的中心化子在 X 的链递归集上与 X 共线。

1. Introduction

本文研究含有奇点的 C^1 向量场的中心化子。自1970年代以来，伴随着大量双曲动力学研究成果的涌现，动力系统中心化子的研究也随之兴起。1970年，Walters [20] 研究了具有离散中心化子和不稳定中心化子的度量空间上的连续变换，并证明扩张同胚具有不稳定中心化子。1973年，Kato-Morimoto [10] 证明了Anosov流的中心化子是伪平凡的。随后在1976年，Oka [14] 将上述结论推广到扩张流，证明扩张流具有在开稠密意义下的拟平凡中心化子。接着，Palis-Yoccoz [15] 和Sad [17] 证明，满足Axiom A及强横截条件的 C^∞ 系统，在一个 C^∞ 开稠密子集上具有平凡中心化子。

本文着重研究具有较弱扩张性质的流的中心化子。沿袭 Oka 的思想，2018年，Bonomo-Rocha-Varandas [5] 研究了 Komuro扩张流的中心化子，并证明Komuro扩张传递流的中心化子，加上奇点双曲性和非共振条件，是平凡的。Martin Leguil、Davi Obata 和 Bruno Santiago [8] 证明，若三维流形上的运动学扩张流的奇点是双曲的，则该向量场的中心化子是平凡的。在此，我们将通过弱化上述

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37D20、37C10、37C20。*Key words and phrases.* 中心化子、扩张性、双曲性。X.W. 的研究部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12071018）、国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1005801）以及中央高校基本科研业务费专项资金的资助。

扩张性的定义，推广上述结论。在较弱的扩张性定义中，我们将考察奇点附近的流的速度。

设 M 是一个无边界的紧黎曼流形。记 $\mathcal{X}^r(M)$ 为 M 上的 C^r $(r \geq 1)$ 向量场。设 $\varphi_t = \varphi_t^X$ 是由向量场 $X \in \mathcal{X}^1(M)$ 生成的流。设 Λ 是 φ_t 的一个紧不变集。如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意 x 和 $y \in \Lambda$ 以及任意连续函数 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，若对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $d(\varphi_t(x), \varphi_{\theta(t)}(y)) \leq \delta$，则对于某个 $t \in \mathbb{R}$ 有 $\varphi_{\theta(t)}(y) \in \varphi_{[-\epsilon,\epsilon]}(\varphi_t(x))$，那么称流 $\varphi_t|_\Lambda$ 具有扩张性。在 [14], 中证明了，如果 $\varphi_t|_\Lambda$ 具有扩张性，则 $\varphi_t|_\Lambda$ 具有某种平凡的中心化子：如果 Λ 上的流 ψ_t 满足 $\psi_t \circ \varphi_t|_\Lambda = \varphi_t \circ \psi_t|_\Lambda$，那么存在连续函数 $A\colon \Lambda \to \mathbb{R}$，使得对于任意 $x \in \Lambda$ 和 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\psi_t(x) = \varphi_{A(x)t}(x)$。已知扩张性流的每个不动点都应当是孤立的（[3]），因此 Oka 的工作不适用于一些著名的混沌动力系统，例如 Cherry 流、Lorenz吸引子等。在 [5] 和 [1], 中，通过 Komuro 胀性以及运动学胀性加上奇点的双曲性，推广了 Oka 结论中的扩张性条件。在这里，如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得以下条件成立：对任意 x、$y \in \Lambda$ 以及任意递增同胚 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，若对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $d(\varphi_t(x), \varphi_{\theta(t)}(y)) < \delta$，则对于某个 $t \in \mathbb{R}$ 有 $\varphi_{\theta(t)}(y) \in \varphi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\varphi_t(x))$，那么称 $\varphi_t|_\Lambda$ 具有 Komuro 胀性。如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得以下条件成立：对任意 x、$y \in \Lambda$，若对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \delta$，则 $y \in \varphi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)$，那么称 $\varphi_t|_\Lambda$ 具有运动学胀性。在 [8], 中指出，如果我们希望得到关于中心化子平凡性的类似结果，就可以通过考虑如下分离性质进一步弱化扩张性。若存在常数 $\delta > 0$，使得对任意 x、$y \in \Lambda$，只要对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \delta$，就有 $y \in \mathrm{Orb}(x)$，那么称流 $\varphi_t|_\Lambda$ 具有分离性质。在本文中，我们将通过对 C^1 向量场考虑重标度分离性质，而非分离性质，来改进 [5, 8, 14] 的结论。

定义1.1. 设 $X \in \mathcal{X}^1(M)$，且 φ_t 是由 X 生成的流，Λ 是 φ_t 的一个紧不变集。若存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 x、$y \in \Lambda$，只要 $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \leq \varepsilon \|X(\varphi_t(x))\|$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立，则 $y \in \mathrm{Orb}(x)$，我们称 $\varphi_t|_\Lambda$ 是重标度分离的。

记

$$\mathcal{Z}^r(\varphi_t|_\Lambda) = \{Y \in \mathcal{X}^r(M) : \psi_t(\Lambda) = \Lambda, \quad \psi_s \circ \varphi_t|_\Lambda = \varphi_t \circ \psi_s|_\Lambda, \text{ for all } t, s \in \mathbb{R},$$

$$\text{where } \psi_t \text{ is the flow generated by } Y\}.$$

并且对于任意正整数 $r \geq 1$，$\mathcal{Z}^r(X) = \mathcal{Z}^r(\varphi_t|_M)$。通常，记 $\mathrm{Sing}(X) = \{x \in M\colon X(x) = 0\}$ 为 X 的奇点集。在本文中，我们首先证明以下定理。

定理A. 设 $X \in \mathcal{X}^1(M)$，且 φ_t 是由 X 生成的流，Λ 是 φ_t 的一个紧不变集，且 $\varphi_t|_\Lambda$ 是重标度分离的。若 X 在 Λ 中的每个奇点都是双曲的，则对于任意 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda)$，存在一个连续映射 $A\colon \Lambda \setminus \mathrm{Sing}(X) \to \mathbb{R}$，它沿 φ_t 的轨道为常数，使得

$$\psi_t(x) = \varphi_{A(x)t}(x)$$

对于任意 $x \in \Lambda \setminus \mathrm{Sing}(X)$，其中 ψ_t 是由 Y生成的流。

回顾一下，如果对于任意 $Y \in \mathcal{Z}^k(X)$，都存在一个 C^1 函数 $f: M \to \mathbb{R}$ with$X(f) \equiv 0$使得 $Y = f \cdot X$，那么我们称 $X \in \mathcal{X}^r(M)$具有拟平凡的 C^k-中心化子（$1 \leq k \leq r$）。这里，我们可以通过应用定理A得到以下推论，从而改进 [8] 的定理A。

推论 B. 若 $X \in \mathcal{X}^1(M)$具有重标度分离性质，且 X的每个奇点都是双曲的，则 X 具有拟平凡的 C^k-中心化子。

在三维情形下，在满足足够正则性假设的条件下， [8] 在运动学扩张性的假设下证明了中心化子的平凡性。这里我们可以给出一个较弱版本的运动学扩张性，它与重标度分离性质类似。

定义1.2. 设 φ_t是由向量场 $X \in \mathcal{X}^1(M)$生成的流，且Λ 是 φ_t的一个紧不变集。若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ ，使得对任意 $x \in \Lambda$、$y \in \Lambda$，若 $d(\varphi_t(x)\ \varphi_t(y)) \leq \delta \|X(\varphi_t(x))\|$ 对每个 $t \in \mathbb{R}$都成立，则$y \in \varphi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)$，那么我们称 Λ 具有重标定运动学扩张性。若 M 对 φ_t具有重标定运动学扩张性，则称 X 或 φ_t 具有重标定运动学扩张性。

如果对任意 $Y \in \mathcal{Z}^k(X)$，都存在常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $Y = cX$，那么我们称 X 具有平凡的 C^k-中心化子。以下是对 [8]中定理F的推广。

推论C. 设 M 是一个无边界的三维紧黎曼流形，且 $X \in \mathcal{X}^3(M)$。如果 X是重标定运动学扩张的，且 X 的每个奇点都是双曲的，那么 X 具有平凡的 C^3-中心化子。

重标度分离性质或重标度运动学扩张性的动机，源于 [21]提出的重标度扩张性。众所周知，对于可微动力系统，扩张性与双曲性密切相关。为统一Anosov流和Lorenz吸引子的双曲性，C. Morales、M. Pacifico和E. Pujals [13] 提出了奇异双曲性的概念。虽然Anosov流和Lorenz吸引子不满足标准的扩张性和运动学扩张性，但人们知道每个奇异双曲集都是重标度扩张的（[21]），因而也是重标定运动学扩张的。因此，定理A可应用于奇异双曲集或星系统，如下所示。

回顾一下，如果向量场 $X \in \mathcal{X}^1(M)$ 具有邻域 $\mathcal{U}$，且该邻域位于 $\mathcal{X}^1(M)$ 中，并且其中每个 $Y \in \mathcal{U}$都只有有限个奇点和至多可数个周期轨道（或者等价地，每个 $Y \in \mathcal{U}$ 的所有奇点和周期轨道都是双曲的 $[11, 12]$），那么称向量场 $X \in \mathcal{X}^1(M)$ 为星系统或 $X \in \mathcal{X}^{*1}(M)$。由星向量场生成的流称为星流。

回顾一下，对于流 φ_t，如果对每个 $\{x_i \in M$ ，一对序列 $0 \leq i \leq k\}$ 和 $\{t_i \in \mathbb{R}: 0 \leq i \leq k-1\}$, $k \geq 1$ 是从 x_0 到 x_k 的 ε-拟轨道，那么

$$t_i \geq 1 \text{ and } d(x_{i+1}, \varphi_{t_i}(x_i)) < \varepsilon,$$

对每个 $0 \leq i \leq k-1$都成立。我们称 $x \in M$ 为链递归的，如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一条从 x 到 x的 ε-拟轨道。我们将链递归点的集合称为链递归集，并记作 $\mathcal{R}(X)$；其中 X 是生成流 φ_t的向量场。这里我们也可以通过应用定理A得到以下推论。

推论 D：存在一个 C^1 开放且稠密的子集 $\mathcal{U}$，它属于 $\mathcal{X}^1(M)$，使得如果$X \in \mathcal{U}$ 是星流，那么对于任意 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_{\mathcal{R}(X)})$，在链递归集 $\mathcal{R}(X)$上， Y 与 X 共线。

2. Proof of Theorem A

按照惯例，记

$$T_xM(r)=\{v\in T_xM:\|v\|<r\},$$
$$B_r(x)=\exp_x(T_xM(r)).$$

根据 M 的紧致性，我们可以固定一个常数 $a>0$，使得

$$m(D_p\exp_x)>2/3,\ \|D_p\exp_x\|<3/2$$

对于任意 $p\in T_xM(a)$。由 X 的 C^1 光滑性，存在常数 $L>0$ 和一个 X 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$，使得对于任意 $Y\in\mathcal{U}_0$ 和 $x\in M$，向量场

$$\bar{Y}=(\exp_x^{-1})_*(Y|_{B_a(x)})$$

在 $T_xM(a)$ 中是局部 Lipschitz 向量场，且 Lipschitz 常数为 L。我们称 L 为 X 关于邻域 $\mathcal{U}_0$ 的局部 Lipschitz 常数。

引理 2.1. 设 $X\in\mathcal{X}^1(M)$ 和 $\mathcal{U}_0$ 如上所述。则对于任意 $\delta>0$，存在 $\mu>0$，使得对于任意 $Y\in\mathcal{U}_0$、$|t|\le\mu$ 以及任意 $x\in M$，有

$$d(\psi_t(x),x)\le\delta\|Y(x)\|,$$

其中，ψ_t 是由 Y生成的流。

证明。设 L 是 X 关于 $\mathcal{U}_0$的一个局部 Lipschitz 常数。设 Y 是 $\mathcal{U}_0$ 中的一个向量场，ψ_t 是由 Y生成的流。众所周知，对任意 $t\in\mathbb{R}$，有$\|Y(\psi_t(x))\|\le e^{L|t|}\|Y(x)\|$。给定 $\delta>0$，我们可以找到满足$\mu e^{L\mu}<\delta$的 $\mu>0$。对任意 $Y\in\mathcal{U}_0$、$|t|\le\mu$，若 x 是 Y的一个奇点，则显然有$d(\psi_t(x)\ x)\le\delta\|Y(x)\|$。现在假设 x 不是 Y的奇点，且 $t\ge0$，则有

$$\begin{aligned}d(\psi_t(x),x)&\le\int_0^t\|\frac{d\psi_s(x)}{ds}\|ds=\int_0^t\|Y(\psi_s(x))\|ds\\&\le\int_0^t e^{Ls}\|Y(x)\|ds\le te^{Lt}\|Y(x)\|\\&\le\mu e^{L\mu}\|Y(x)\|\le\delta\|Y(x)\|.\end{aligned}$$

当 $t\le0$时，也有类似的估计。这就完成了该引理的证明。

□

回顾一下，Sing(X)是 X的奇点集。若 $x\in M\setminus$Sing(X)，则称 $x\in M$ 为一个正则点。对于 X的一个正则点 $x\in M$，记 $X(x)$的法空间为

$$N_x=N_x(X)=\{v\in T_xM:v\perp X(x)\}.$$

给定一个常数 $r>0$，我们可以取一个盒子

$$U_x(r\|X(x)\|)=\{v+tX(x)\in T_xM:v\in N_x,\|v\|\le r\|X(x)\|,|t|\le r\}$$

在 T_xM 中。定义一个 C^1 映射

$$F_x:U_x(r\|X(x)\|)\to M$$

为

$$F_x(v+tX(x))=\varphi_t(\exp_x(v)).$$

这个映射 F_x 称为 X 在 x处的流盒。在 [21], 中证明了流盒定理的以下相对一致版本。

命题1（[21], 命题 2.2）。对于实数集 M上的任意 C^1 向量场 X，存在$0 < r_0 \leq \frac{1}{10L}$，使得对于 X的任意正则点 x， F_x： U_x（$r_0\|X$（x）$\|$） $\to M$是一个嵌入，其像不包含 X的任何奇点， m（D_pF_x） $> 1/3$，并且对于每个 $p \in U_x$（$r_0\|X$（x）$\|$），$\|D_pF_x\| < 3$。

由上述命题可容易看出，对于任意 t_1、$t_2 \in [-r_0, r_0]$ 以及任意 $x \in M \setminus$奇点集(X)，当 $t_1 \neq t_2$时，有 $\varphi_{t_1}(x) \neq \varphi_{t_2}(x)$。

引理 2.2. 设 $x \in M \setminus$奇点集(X)。假设连续曲线 ζ：$[0,1] \to B_{\frac{r_0}{6}\|X(x)\|}(x)$ 满足 $\zeta(0) = x$，且对所有 $t \in [0,1]$， $\zeta(t) \in$轨道(x)，那么对任意$t \in [0,1]$，存在 $\eta \in [-\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}]$ 使得 $\zeta(t) = \varphi_\eta(x)$。

证明. 对任意 $x \in M \setminus$奇点集(X)，记 π_x： $T_xM \to N_x$ 为从 T_xM 到 N_x 的正交投影。于是我们可以定义可微映射 $P_x = \pi_x \circ F_x^{-1}$： $F_x(U_x(r_0\|X(x)\|)) \to N_x$。注意，对任意 $p \in U_x(r_0\|X(x)\|)$，我们有 $m(D_pF_x) \geq 1/3$，因此 $B_{\frac{r_0}{6}\|X(x)\|}(x) \subset F_x(U_x(r_0\|X(x)\|)) \to N_x$。因此我们可以得到一条位于 N_x 中的连续曲线 $P_x \circ \zeta$。另一方面，我们知道

$$\{t \in \mathbb{R} : \varphi_t(x) \in B_{\frac{r_0}{6}\|X(x)\|}(x)\}$$

是实数集中的一个开集，因此是可数个开区间 $\{I_j\}$ 的并，并且每个$P_x(\varphi_{I_j}(x))$都是 N_x中的一个单点。因此我们可以看出， $P_x \circ \zeta$的像至多是可数的，所以 $P_x \circ \xi$ 的像应为 $\{0_x\}$。于是我们知道$\zeta(t) \in P_x^{-1}(0_x) \subset \varphi_{[-\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}]}(x)$。这就证明了引理。□

引理 2.3. 设 $X \in \mathcal{X}^1(M)$，且 φ_t是由 X生成的流， Λ是 $\varphi_t|_\Lambda$的一个紧不变集。对于任意 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda)$以及 X的任意双曲奇点 $\sigma \in \Lambda$，有 $\sigma \in \mathrm{Sing}(Y)$。

证明. 设 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda)$，且 ψ_t 是由 Y生成的流。由于

$$\psi_s(\sigma) = \psi_s(\varphi_t(\sigma)) = \varphi_t(\psi_s(\sigma))$$

对于所有 $t \in \mathbb{R}$，因此 $\psi_s(\sigma)$ 是 φ_t 的不动点，由于 σ 是 φ_t 的孤立不动点，我们知道 $\psi_s(\sigma) = \sigma$ 对于所有 $s \in \mathbb{R}$。□

引理 2.4. 设 $X \in \mathcal{X}^1(M)$ 和 φ_t 是由 X 生成的流，且 Λ 是 $\varphi_t|_\Lambda$ 的一个紧不变集。假设每个 $\sigma \in \mathrm{Sing}(X) \cap \Lambda$ 都是双曲的，则存在 Λ 的一个邻域 U，以及 X 的一个 C^1 邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^1(M)$ 和一个常数 $C > 0$，使得对于任意 $Y \in \mathcal{U}$ 和任意 $z \in U$，有

$$C^{-1}d(z, \mathrm{Sing}(Y|_U)) \leq \|Y(z)\| \leq Cd(z, \mathrm{Sing}(Y|_U)).$$

证明. 由于 X 是 C^1 向量，且 X 在 Λ 中的奇点全都是双曲的，根据每个双曲奇点都是孤立的这一事实，可以找到 Λ 的一个邻域U，使得 $\mathrm{Sing}(X|_{\bar{U}}) = \mathrm{Sing}(X) \cap \Lambda$ 中仅存在有限个元素。令 $\mathrm{Sing}(X) \cap \Lambda = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k\}$。令 $a > 0$ 为满足下式的常数

$$m(D_p \exp_x) > 2/3, \ \|D_p \exp_x\| < 3/2$$

对于任意的 $p \in T_xM(a)$ 和 $x \in M$。对于任意的 $\sigma_i(i = 1, \cdots, k)$，记为

$$\bar{X}_i = (\exp_{\sigma_i}^{-1})_*(X|_{B_a(\sigma_i)}).$$

注意， σ_i 是双曲的，因此对于任意的 $i = 1$、$\cdots$、k， D_0X_i 都是可逆的。令

$$C_0 = \max\{\max\{\|(D_0\bar{X}_i)^{-1}\|, \|D_0\bar{X}_i\|\} : i = 1, \cdots, k\}.$$

¯我们可以取 σ_i 的一个邻域 $U_i \subset B_a(\sigma_i) \cap U$，使得 $\exp_{\sigma_i}^{-1}(U_i)$ 上的向量场 X_i 满足

$$\|(D_v\bar{X}_i)^{-1}\| < 2C_0, \quad \|D_v\bar{X}_i\| < 2C_0$$

对于任意 $v \in \exp_{\sigma_i}^{-1}(U_i)$。不失一般性，我们还可以假设，对于任意 $i \neq j \in \{1, \cdots, k\}$, U_i的直径小于 U_i, U_j之间的距离。令

$$m = \min\{\|X(x)\| : x \in \bar{U} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} U_i)\}, \quad K = \max\{\|X(x)\| : x \in M\}$$

以及 $\rho = \min\{d(\sigma_i, M \setminus U_i) : i = 1, \cdots, k\}$。那么我们可以取 X 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得对于任意 $Y \in \mathcal{U}$，都有:

(1) $\|(D_v\bar{Y}_i)^{-1}\| < 4C_0, \|D_v\bar{Y}_i\| < 4C_0$，对于任意 $v \in \exp_{\sigma_i}^{-1}(U_i)$，其中

$$\bar{Y}_i = (\exp_{\sigma_i}^{-1})_*(Y|_{B_a(\sigma_i)})$$

对于 $i = 1, 2, \cdots, k$

; (2) 奇点集$(Y|_U) = \{\sigma_i^Y : i = 1, \cdots, k\}$，其中 $\sigma_i^Y \in U_i$ 是关于 Y 的 σ_i 的延拓;

(3) $\min\{\|Y(x)\| : x \in \bar{U} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} U_i)\} > \frac{m}{2}$，$\max\{\|Y(x)\| : x \in M\} < 2K$和 $\min\{d(\sigma_i^Y, M \setminus U_i) : i = 1, \cdots, k\} > \frac{\rho}{2}$;

令 $C = \max\{9C_0, \frac{4K}{\rho}, \underbrace{^2\mathrm{diam}(M)}_{m}\}$。那么对于任意 $z \in U$，若 $z \in U \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} U_i)$，则有

$$\|Y(z)\| \leq 2K \leq C \cdot \frac{\rho}{2} < Cd(z, \mathrm{Sing}(Y|_U)),$$

$$\|Y(z)\| > \frac{m}{2} \geq C^{-1}\mathrm{diam}(M) \geq C^{-1}d(z, \mathrm{Sing}(Y|_U));$$

若 $z \in U_i$对某些 $i = 1, \cdots, k$ 成立，一方面

$$\|Y(z)\| = \|(\exp_{\sigma_i})_*(\bar{Y}_i(\exp_{\sigma_i}^{-1}(z)))\| \leq \frac{3}{2}\|\bar{Y}_i(\exp_{\sigma_i}^{-1}(z))\|$$

$$\leq \frac{3}{2} \cdot 4C_0\|\exp_{\sigma_i}^{-1}(z) - \exp_{\sigma_i}^{-1}(\sigma_i^Y)\|$$

$$\leq \frac{3}{2} \cdot 4C_0 \cdot \frac{3}{2}d(z, \sigma_i^Y) \leq Cd(z, \mathrm{Sing}(Y|_U)),$$

另一方面 an h d

$$\|Y(z)\| = \|(\exp_{\sigma_i})_*(\bar{Y}_i(\exp_{\sigma_i}^{-1}(z)))\| \geq \frac{2}{3}\|\bar{Y}_i(\exp_{\sigma_i}^{-1}(z))\|$$

$$\geq \frac{2}{3} \cdot (4C_0)^{-1}\|\exp_{\sigma_i}^{-1}(z) - \exp_{\sigma_i}^{-1}(\sigma_i^Y)\|$$

$$\geq \frac{2}{3} \cdot (4C_0)^{-1} \cdot \frac{2}{3}d(z, \sigma_i^Y) \geq C^{-1}d(z, \mathrm{Sing}(Y|_U))$$

根据广义中值定理。引理的证明至此结束。 □

引理 2.5。设 φ_t是由 $X \in \mathcal{X}^1(M)$生成的流， Λ是关于 φ_t重标度分离的紧不变集。若 Λ 中的每个奇点都是双曲的，则存在 C^1 的一个邻域 $\mathcal{U}$ 及常数 $\mu > 0$，使得对于任意由 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda) \cap \mathcal{U}$生成的流 ψ_t，都存在唯一的函数 z: $[-\mu, \mu] \times (\Lambda \setminus$ 奇点集$(X)) \to [-\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}]$，使得对任意$(s, x) \in [-\mu, \mu] \times (\Lambda \setminus$ 奇点集$(X))$，有 $\psi_s(x) = \varphi_{z(s,x)}(x)$。此外,

(1) z 是连续的；(2) 对任意 $x \in \Lambda \setminus$ 奇点集(X)以及满足 $t+s \in [-\mu,\mu]$的 t, $s \in [-\mu,\mu]$，有 $z(t+s,x) = z(t,x) + z(s,\psi_t(x))$；(3) 对任意 $x \in \Lambda \setminus$ 奇点集(X)以及 $s \in [-\mu,\mu]$和 $t \in \mathbb{R}$，有 $z(s,\varphi_t(x)) = z(s,x)$；(4) 对任意 $x \in \Lambda \setminus$ 奇点集(X)和 $s \in [-\mu,\mu]$，有 $z(s,x) = A(x)s$，其中

$$A(x) = \mu^{-1} z(\mu, x).$$

证明。由引理 2.4，我们可以固定 $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ 的一个邻域和U 的一个邻域，常数 C 使得对于任意 $Y \in \mathcal{U}$，有

$$C^{-1} d(z, \mathrm{Sing}(Y|_U)) \le \|Y(z)\| \le C d(z, \mathrm{Sing}(Y|_U)), \quad \forall z \in U.$$

如有必要，缩小 $\mathcal{U}$ 和 U。由于每个奇点 $\sigma \in \mathrm{Sing}(X) \cap \Lambda$ 都是双曲的，我们可以假设 $\mathrm{Sing}(Y|_U)$ 的基数等于 $\mathrm{Sing}(X|_U) = \mathrm{Sing}(X) \cap \Lambda$ 的基数。于是由引理 2.3 可知，对于任意 $Y \in \mathcal{Z}^r(\varphi_t|_\Lambda) \cap \mathcal{U}$，$\mathrm{Sing}(Y|_U) = \mathrm{Sing}(X|_U)$。因此我们有

$$\|Y(z)\| \le C d(z, \mathrm{Sing}(Y|_U)) = C d(z, \mathrm{Sing}(X|_U)) \le C^2 \|X(z)\|$$

对于任意 $z \in U$。这里请注意，我们考虑的是 $\Lambda \cap \mathrm{Sing}(X)$ 非空的情况；如果 $\Lambda \cap \mathrm{Sing}(X) = \emptyset$，我们也可以很容易地找到 C、U 和 $\mathcal{U}$，使得

$$\|Y(z)\| \le C^2 \|X(z)\|$$

对任意 $z \in U$和 $Y \in \mathcal{U}$均成立。

令 $\delta > 0$ 为重标度分离性质定义中的常数。不失一般性，我们可以假设 $\delta < \frac{r_0}{6}$。由引理 2.1，存在$\mu > 0$，使得对于由向量场 $Y \in \mathcal{U}$ 生成的任意流 ψ_t 以及任意 $|t| \le \mu$，对于任意 $x \in M$，均有 $d(\psi_t(x), x) \le C^{-2}\delta \|Y(x)\|$。

现在令 ψ_t 为由向量场 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda) \cap \mathcal{U}$生成的流。由事实$\psi_s \circ \varphi_t|_\Lambda = \varphi_t \circ \psi_s|_\Lambda$ 对任意 t、$s \in \mathbb{R}$均成立，我们知道

$$d(\varphi_t(x), \varphi_t(\psi_s(x))) = d(\varphi_t(x), \psi_s(\varphi_t(x))) \le C^{-2}\delta \|Y(\varphi_t(x))\| \le \delta \|X(\varphi_t(x))\|$$

对所有 $x \in \Lambda$、$t \in \mathbb{R}$ 和 $|s| \le \mu$均成立。

固定 $x \in \Lambda \setminus \mathrm{Sing}(X)$。由 Λ的重标度分离性质，我们知道，对于所有 $s \in [-\mu,\mu]$, $\psi_s(x) \in \mathrm{Orb}(x)$。注意，对所有 $s \in [-\mu,\mu]$，且 $\psi_0(x) = x$，均有 $\psi_s(x) \in B_{\delta\|X(x)\|}(x) \subset B_{\frac{r_0}{6}\|X(x)\|}(x)$；由引理 2.2，我们知道存在 $\eta = z(s,x) \in [-\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}]$，使得

$$\psi_s(x) = \varphi_\eta(x)$$

对所有 $s \in [-\mu,\mu]$均成立。由命题1可知，对于任意 $t_1, t_2 \in [-\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}] \subset [-r_0, r_0]$, 当 $t_1 \ne t_2$ 时，对于任意 $x \in M \setminus \mathrm{Sing}(X)$，都有 $\varphi_{t_1}(x) \ne \varphi_{t_2}(x)$。因此，$\eta = z(s,x)$ 在 $(s,x) \in [-\mu,\mu] \times (\Lambda \setminus \mathrm{Sing}(X))$ 上唯一确定。这给出了函数

$$z : [-\mu,\mu] \times (\Lambda \setminus \mathrm{Sing}(X)) \to [-\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}].$$

$$(s,x) \mapsto \eta = z(s,x)$$

若 $\eta = z(s,x)$ 不连续，则可以找到一列 $\{(s_n, x_n)\}$ in$[-\mu,\mu] \times (\Lambda \setminus$ 奇点集$(X))$, 使得 $(s_n, x_n) \to (s_0, x_0) \in [-\mu,\mu] \times$(奇点集$(X))$，且 $n \to \infty$

$$|z(s_n, x_n) - z(s_0, x_0)| \not\to 0.$$

通过选取一个子序列，我们可以假设 $z(s_n,x_n)-z(s_0,x_0)\to\eta_0\in[-r_0,r_0]$。由于 $\eta_0\neq 0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_0),\varphi_{z(s_0,x_0)}(x_0))=d(\varphi_{z(s_0,x_0)+\eta_0}(x_0),\varphi_{z(s_0,x_0)}(x_0))\neq 0.$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&d(\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_0),\varphi_{z(s_0,x_0)}(x_0))\\ \leq\ & d(\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_n),\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_0))+d(\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_n),\varphi_{z(s_0,x_0)}(x_0))\\ =\ & d(\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_n),\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_0))+d(\psi_{s_n}(x_n),\psi_{s_0}(x_0))\end{aligned}$$

由于 $|z(s_n,x_n)|$ 有界，且 $d(x_n,x_0)\to 0$，我们知道

$$d(\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_n),\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_0))\to 0.$$

由于 $s_n\to s_0$ 和 $x_n\to x_0$，我们有

$$d(\psi_{s_n}(x_n),\psi_{s_0}(x_0))\to 0,$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi_{z(s_n,x_n)}(x_0),\varphi_{z(s_0,x_0)}(x_0))=0,$$

矛盾。由此证明，$\eta=z(s,x)$ 在 $[-\mu,\mu]\times(\Lambda\backslash\mathrm{Sing}(X))$ 上连续。注意

$$\begin{aligned}&\varphi_{z(t+s,x)}(x)=\psi_{t+s}(x)=\psi_s(\psi_t(x))\\ =\ &\varphi_{z(s,\psi_t(x))}(\psi_t(x))=\varphi_{z(s,\psi_t(x))}(\varphi_{z(t,x)}(x))\\ =\ &\varphi_{z(t,x)+z(s,\psi_t(x))}(x),\end{aligned}$$

且 $z(t,x)+z(s,\psi_t(x))\in[-r_0,r_0]$，因此我们可以看到

$$z(t+s,x)=z(t,x)+z(s,\psi_t(x))$$

对于任意的 $x\in\Lambda\setminus\mathrm{Sing}(X)$ 以及满足 $t+s\in[-\mu,\mu]$ 的 $t,s\in[-\mu,\mu]$。这证明了引理的第 (2) 项。

固定 $s\in[-\mu,\mu]$ 和 $t\in[-\frac{r_0}{2},\frac{r_0}{2}]$，并取 $x\in\Lambda\setminus\mathrm{Sing}(X)$。注意到

$$\begin{aligned}&\varphi_{t+z(s,\varphi_t(x))}(x)=\varphi_{z(s,\varphi_t(x))}(\varphi_t(x))\\ =\ &\psi_s(\varphi_t(x))=\varphi_t(\psi_s(x))\\ =\ &\varphi_t(\varphi_{z(s,x)}(x))=\varphi_{t+z(s,x)}(x).\end{aligned}$$

由 $|t+z(s,\varphi_t(x))|\leq r_0$ 且 $|t+z(s,x)|\leq r_0$ 这一事实，我们知道

$$t+z(s,\varphi_t(x))=t+z(s,x)$$

于是 $z(s,\varphi_t(x))=z(s,x)$。给定 $s\in[-\mu,\mu]$、$t\in\mathbb{R}$ 以及 $x\in\Lambda\setminus\mathrm{Sing}(X)$。我们可以找到充分大的 $n\in\mathbb{N}$，使得 $|n^{-1}t|\leq\frac{r_0}{2}$，那么我们可以看到

$$z(s,\varphi_t(x))=z(s,\varphi_{\frac{n-1}{n}t}(x))=\cdots=z(s,\varphi_{\frac{1}{n}t}(x))=z(s,x).$$

这就证明了引理的第 (3) 项。

由第 (2) 项和第 (3) 项可知，对于任意 s、$t\in[-\mu,\mu]$ 以及任意 $x\in\Lambda\setminus$奇点集(X)，有

$$z(s+t,x)=z(t,x)+z(s,\psi_t(x))=z(t,x)+z(s,\varphi_{z(t,x)}(x))=z(t,x)+z(s,x).$$

固定 $x\in\Lambda\setminus$奇点集(X)。对于任意 $n\in\mathbb{Z}^+$，我们有 $nz(n^{-1}\mu,x)=z(\mu,x)$，于是有

$$z(n^{-1}\mu,x)=n^{-1}z(\mu,x)=\mu A(x).$$

于是有

$$z(\frac{m}{n}\mu, x) = \frac{m}{n}\mu A(x)$$

对于任意有理数 $\frac{m}{n} \in [0,1]$。注意到 $z(-t,x) = -z(t,x)$，我们可以看到

$$z(\frac{m}{n}\mu, x) = \frac{m}{n}\mu A(x)$$

对于任意有理数 $\frac{m}{n} \in [-1,1]$，由 $z(s,x)$ 的连续性可知

$$z(s,x) = A(x)s$$

对于任意 $s \in [-\mu, \mu]$。这证明了第 (4) 项。 □

命题 2。设 φ_t 是由 $X \in \mathcal{X}^1(M)$ 生成的流，且 Λ 是关于 X 重标度分离的紧不变集。若 Λ 中的每个奇点都是双曲的，则存在 X 的一个 C^1 邻域 $\mathcal{U}$，使得对于任意由 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda) \cap \mathcal{U}$ 生成的流 ψ_t，存在连续函数 $A\colon \Lambda \setminus \mathrm{Sing}(X) \to \mathbb{R}$，该函数沿 φ_t 的轨道为常数，使得

$$\psi_t(x) = \varphi_{A(x)t}(x)$$

对于任意 $x \in \Lambda \setminus$实数集(X) 和 $t \in \mathbb{R}$。

证明。设 $\mathcal{U}$ 如引理 2.5 中所给定。固定由向量场 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda) \cap \mathcal{U}$ 生成的流 ψ_t。于是，对于任意 $(s,x) \in [-\mu,\mu] \times (\Lambda \setminus$实数集$(X))$，我们可以取如引理 2.5 中的 $z(s,x) = A(x)s$。由 $z(s,x)$ 的连续性可知，$A(x)$ 在 $\Lambda \setminus$ 实数集 (X) 上连续。设 $x \in \Lambda \setminus$ 实数集 (X) 且 $t \in \mathbb{R}$ 已给定，则有

$$A(\varphi_t(x)) = \mu^{-1} z(\mu, \varphi_t(x)) = \mu^{-1} z(\mu, x) = A(x).$$

因此，$A(x)$ 沿着 φ_t 的轨道为常数。

由 $\psi_t(x) = \varphi_{z(t,x)}(x)$ 这一事实，我们很容易看出，对于任意 $x \in \Lambda \setminus$实数集(X) 和 $t \in [-\mu,\mu]$，$\psi_t(x) = \varphi_{A(x)t}(x)$ 成立。任取 $x \in \Lambda \setminus$实数集(X) 和 $t \in \mathbb{R}$，我们可以取足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $|n^{-1}t| \le \mu$。记为 $\tau = n^{-1}t$，则有

$$\begin{aligned}
\psi_{2\tau}(x) &= \psi_\tau(\psi_\tau(x)) = \varphi_{A(\psi_\tau(x))\tau}(\varphi_{A(x)\tau}(x)) \\
&= \varphi_{A(\varphi_{A(x)\tau}(x))\tau}(\varphi_{A(x)\tau}(x)) = \varphi_{2A(x)\tau}(x), \\
\psi_{3\tau}(x) &= \psi_\tau(\psi_{2\tau}(x)) = \varphi_{A(\psi_{2\tau}(x))\tau}(\varphi_{2A(x)\tau}(x)) \\
&= \varphi_{A(\varphi_{2A(x)\tau}(x))\tau}(\varphi_{2A(x)\tau}(x)) = \varphi_{3A(x)\tau}(x),
\end{aligned}$$

然后由归纳法可得

$$\psi_t(x) = \psi_{n\tau}(x) = \varphi_{nA(x)\tau}(x) = \varphi_{A(x)t}(x).$$

至此，命题 2 的证明完成。 □

引理 2.6. 设 φ_t 是由 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 生成的流，且 Λ 是 φ_t 的一个紧不变集。对于任意 $Y \in \mathcal{Z}^k(\varphi_t|_\Lambda)$ 和 $c \in \mathbb{R}(1 \le k \le r)$，有 $X + cY \in \mathcal{Z}^k(\varphi_t|_\Lambda)$。

~证明. 设 ψ_t 是由 Y 生成的流。考虑一个流 $\psi_t|_\Lambda = \varphi_t \circ \psi_{ct}|_\Lambda$。由于 φ_t, ψ_s 在 Λ 上可交换，我们有

~ ~$\psi_{t+s}(x) = \varphi_{t+s} \circ \psi_{ct+cs}(x) = \varphi_t \circ \varphi_s \circ \psi_{ct} \circ \psi_{cs}$(x) = $\varphi_t \circ \psi_{ct} \circ \varphi_s \circ \psi_{cs}(x) = \psi_t \circ \psi_s(x)$,

~对于任意 t、$s \in \mathbb{R}$、$x \in \Lambda$，因此 $\psi_t|_\Lambda$ 确实是 Λ上的一个流。对于任意 $x \in \Lambda$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\psi}_t(x)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(\psi_{ct}(x))|_{t=0} = X(x) + cY(x),$$

˜因此， $\psi_t|_\Lambda$ 是由 $X+cY$ 在 Λ 上生成的流的限制。对于任意 s、$t\in\mathbb{R}$，我们有

$$\tilde{\psi}_s\circ\varphi_t|_\Lambda=\varphi_s\circ\psi_{cs}\circ\varphi_t|_\Lambda=\varphi_s\circ\varphi_t\circ\psi_{cs}|_\Lambda=\varphi_t\circ\varphi_s\circ\psi_{cs}|_\Lambda=\varphi_t\circ\tilde{\psi}_s|_\Lambda,$$

因此 $X+cY\in\mathcal{Z}^k(\varphi_t|_\Lambda)$。 □

定理A的证明。设 φ_t 是由 $X\in\mathcal{X}^1(M)$ 生成的流，且 Λ 是关于 φ_t 重标度分离的紧不变集。假设每个 $\sigma\in\Lambda\cap\mathrm{Sing}(X)$ 都是双曲的。令 $Y\in\mathcal{Z}^1(\varphi_t|_\Lambda)$。取命题 2 中给出的 X 的邻域 $\mathcal{U}$。于是我们可以取足够小的 $c>0$，使得 $Y'=X+cY\in\mathcal{U}$。设 ψ'_t 是由 Y' 生成的流。由命题 2 可知，存在连续函数 $A'\colon\Lambda\setminus\mathrm{Sing}(X)\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x\in\Lambda\setminus\mathrm{Sing}(X)$ 和 $t\in\mathbb{R}$，$\psi'_t(x)=\varphi_{A'(x)t}(x)$。于是我们有

$$Y'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi'_t(x)|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{A'(x)t}(x)|_{t=0}=A'(x)X(x)$$

对任意 $x\in\Lambda\setminus\mathrm{Sing}(X)$。于是我们有

$$Y(x)=c^{-1}(Y'(x)-X(x))=c^{-1}(A'(x)-1)X(x)$$

对任意 $x\in\Lambda\setminus\mathrm{Sing}(X)$。取 $A(x)=c^{-1}(A'(x)-1)$，可以看出 $A(x)$ 满足定理A的要求。定理A的证明至此结束。

3. Proof of Corollaries

固定 $1\le k\le r$。我们称 $X\in\mathcal{X}^r(M)$ 具有共线的 C^k-中心化子，如果对任意 $Y\in\mathcal{Z}^k(X)$，都有

$$\dim\langle X(x),Y(x)\rangle\le 1$$

对任意 $x\in M$。下面的引理是 [8] 的定理 3.4。

引理 3.1. [8] 设 $X\in\mathcal{X}^1(M)$。若 X 具有共线中心化子，且 X 的所有奇点都是双曲的，则 X 具有拟平凡的 C^1-中心化子。

现在我们给出推论 B 的证明。

推论 B 的证明。由于 $X\in\mathcal{X}^1(M)$ 是重标度分离的，且 X 的每个奇点都是双曲的，由定理A可知 X 有共线中心化子，进而由引理 3.1 可知，X 有拟平凡的 C^1-中心化子。推论 B 的证明到此结束。

以下是 [8] 的命题 4.9。

引理 3.2。设 $\mathbb{T}^2$ 表示二维环面。如果 $X\in\mathcal{X}^2(\mathbb{T}^2)$ 且 $\mathrm{Sing}(X)=\emptyset$，那么 X 不是运动学扩张的。

现在我们给出推论C的证明。

推论C的证明。容易看出，重标度运动学扩张性蕴含重标度分离性质。因此，如果 X 具有重标度运动学扩张性，且 X 的所有奇点都是双曲的，那么根据推论 B，我们知道 X 具有拟平凡中心化子。对于任意 $Y\in\mathcal{Z}^3$（X），我们可以取一个函数 $f\colon M\to\mathbb{R}$ 是一个C^1，X（f）$\equiv 0$，使得 $f|_{M\setminus\mathrm{Sing}(X)}$ 是 C^3。接下来，我们将证明 f 是常数。如果 f不是常数，则存在两个实数 $a<b$，使得 f（M）$=[a,b]$。注意到 X 的所有奇点都是双曲的，因此奇点至多有限多个。特别地，存在一个非平凡开区间 $I\subset\mathbb{R}$，使得

$I \subset f(M) \setminus f(\text{Sing}(X))$。注意到 $f\colon M \setminus \text{Sing}(X) \to \mathbb{R}$ 是 C^3，根据Morse-Sard定理，I 中的几乎每个值都是正则值。取一个正则值 $c \in I$。因此，$S_c := f^{-1}(c)$ 是一个不包含 X任何奇点的紧曲面。此外，由于 f 满足 $X(f) \equiv 0$，因此沿着X的轨道保持不变，我们知道 S_c 是 φ_t的不变集，因而 $X|_{S_c}$ 是 S_c 上的一个 C^3 非奇异向量场。由于 S_c 是一个无边界的二维流形，且 $X|_{S_c}$ 是非奇异的，根据庞加莱-霍普夫定理，我们知道 S_c 是环面 $\mathbb{T}^2$ 或克莱因瓶 $2\mathbb{P}^2$。注意到 X 在 S_c 上具有重标度运动学扩张性，并且 $\|X(x)\|$在 S_c上有正下界，我们可以看出 $\varphi_t|_{S_c}$ 具有运动学扩张性。记 $\tilde{\varphi}_t$ 为 $\mathbb{T}^2$ 上的流，它是 $\varphi_t|_{S_c}$的提升。于是我们很容易验证 $\tilde{\varphi}_t$ 也具有运动学扩张性，这与引理 3.2矛盾。我们得出 f 是常数，这意味着 X 的 C^3-中心化子是平凡的。推论C的证明到此结束。

推论 D 的证明。根据 [4], 的定理4，存在一个开稠密集 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^1(M)$，使得星流 $X \in \mathcal{U}$ 的链递归集 $\mathcal{R}(X)$ 是多奇异双曲的，因此根据 [21], 的定理 A，链递归集 $\mathcal{R}(X)$ 是重标定扩张的；也就是说，存在 $\delta_0 > 0$，使得对于任意 $\delta \in (0, \delta_0]$，若 $x, y \in \mathcal{R}(X)$ 以及一个递增连续函数 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $d(\varphi_t(x)\varphi_{\theta(t)}(y)) \leq \delta\|X(\varphi_t(x))\|$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立，则 $y \in \varphi_{[-3\delta,3\delta](x)}$。因此，链递归集 $\mathcal{R}(X)$ 是重标定运动学扩张的，进而是重标度分离的。应用定理A可知，对于任意 $Y \in \mathcal{Z}^1(\varphi_t|_{\mathcal{R}(X)})$，存在一个连续函数 $A\colon \mathcal{R}(X) \setminus$奇点集$(X) \to \mathbb{R}$，使得对于任意 $x \in \mathcal{R}(X)$，有 $Y(x) = A(x)X(x)$。因此，对于任意$x \in \mathcal{R}(X)$，我们有 $Y(x)$ 与 $X(x)$ 共线。推论 D 得证。

References

1. L. Bakker, T. Fisher, B. Hasselblatt, *Centralizers of hyperbolic and kinematic-expansive flows.* Math. Res. Rep. 2（2021年），21–44。2. L. Bakker, T. Fisher, *Open sets of diffeomorphisms with trivial centralizer in the C^1-topology.* Nonlinearity. 27（2014年），2869–2885。3. R. Bowen, P. Walters, *Expansive one-parameter flows.* J. DifferentialEquations. 12（1972年），180–193。4. C. Bonatti, A. D. Luz, *Star fows and multisingular hyperbolicity.* 欧洲数学会期刊。23(8)（2017年），2649–2705。5. W. Bonomo, J. Rocha, P. Varandas, *The centralizer of Komuro expansive flows and expansive $\mathbb{R}^d$ actions.* **289** 2018 1059 1088 Math. Z.（），–。6. C. Bonatti, S. Crovisier, A. Wilkinson, *The C^1 generic diffeomorphism has trivial centralizer.*publications Mathmatiques de lIHS. 109(1)（2009年），185–244。7. T. Fisher, *Trivial centralizers for axiom A diffeomorphisms.* Nonlinearity. 21(11)（2008年），2505–2517。8. M. Leguil 1, *On the centralizer of vector fields: criteria of triviality* D. *and genericity results.* **297** 2021 283 337 Obata, B. Santiago, Math. Z.（），–。9. N. Kopell, *Commuting diffeomorphisms, Globa Analysis* Proc. Sympos. Pure Math. XIV（1970年），165–184。10. K. Kato, A. Morimoto, *Topological stability of Anosov flows and their centralizers.*Topology. 12（1973年），255–273。11. S. T. Liao, *The Qualitative Theory of Differential Dynamical Systems.* 科学出版社，1996年。12. L. Markus, *Structurally stable differential systems.* Ann. of Math. 73（1961年），1–19。13. C. Morales, M. Pacifico, E. Pujals, *Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers.* Ann. of Math. 160（2004年），375–432。14. M. Oka, *Expansive flows and their centralizers.* Nagoya Math. J. 64（1976年），1–15。15. J. Palis, J. C. Yoccoz, *Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori.* Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4)22(1)（1989年），98–108。

16. R. Plykin, *On the structure of centralizers of Anosov diffeomorphisms of a torus.* 《数学科学进展》。53(6)（1998年），259-260。17. P. Sad, *Centralizers of vector fields.* Topology. 18（1979年），97–104。18. S. Smale, *Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed.* 非线性科学：未来十年，洛斯阿拉莫斯，NM，1990年。Phys. D 51。52（1991年），267–273。19. S. Smale, *Mathematical problems for the next century.* Math. Intell. 20（1998年），7–15。20. P. Walters, *Homeomorphisms with Discrete Centralizers and Ergodic Properties.* Math. Sys- tem Theory. 4(4)（1970年），322–326。21. X. Wen, L. Wen, *A rescaled expansiveness of flows.* 《美国数学会汇刊》。371(5)（2019年），3179–3207。

School of Mathematical Sciences, Beihang University, Beijing, 100191, P.R. China
Email address: hanbo@buaa.edu.cnLMIB,
Institute of Artificial Intelligence & School of Mathematical Sciences, Beihang University, Beijing, 100191, P.R. ChinaBeijing Zhongguancun Laboratory, Beijing, 100094, P.R.China*Email address*: wenxiao@buaa.edu.cn