arXiv:2303.03639v1 [math.RA] 7 Mar 2023

关于结合 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调

LEI DU、YANHONG BAO 和 DONGXING FU

Abstract. Rota-Baxter 算子，以及更一般的 $\mathcal{O}$-算子，在可积系统、Yang-Baxter方程和前李代数等数学与物理领域中发挥着至关重要的作用。本文主要研究结合代数上的某些 $\mathcal{O}$-算子态射。我们建立了结合 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调理论。在此基础上，我们给出了 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调比较定理，即 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调与一个辅助 $\mathcal{O}$-算子的上同调同构。作为应用，我们还研究了Rota-Baxter算子态射（权为零）的上同调比较定理，以及结合 r-矩阵弱态射这一 $\mathcal{O}$-算子态射的特例。

1. Introduction

结合代数 [9, 14], 李代数 [5] 和群代数 [20], 上的上同调理论已取得巨大成功, 能够用于控制变形问题。Kodaira[15, 16]曾研究复流形态射的变形思想（特别是靶空间固定的情形）。Gerstenhaber 和 Schack [11, 12] 发展了代数态射的上同调理论，以研究代数态射的变形，并建立了一项称为上同调比较定理（CCT）的重要结果。

结合代数上的 $\mathcal{O}$-算子，即相对 Rota-Baxter 算子，是在存在双模的情况下对 Rota-Baxter 算子的一种推广。Baxter [4] 于1960年引入结合代数上的 Rota-Baxter 算子，以研究概率论中的涨落理论。此后，Rota [18, 19]进一步发展了 Rota-Baxter 算子与组合学之间的联系。Rota-Baxter 算子已显示出诸多应用, 例如，Connes-Kreimer 对微扰量子场论中重整化的代数方法 [6], 以及 Yang-Baxter方程 [2]。Uchino [22] 引入了 $\mathcal{O}$-算子，将其作为流形上泊松结构的结合代数类比。在 [1], 中，作者给出了一类由结合 r-矩阵诱导的有趣的 $\mathcal{O}$-算子。长期以来， $\mathcal{O}$-算子的上同调理论一直付之阙如。直到最近，人们才开始关注 $\mathcal{O}$-算子的上同调理论，以研究其在 [7, 21]中的变形。

本文的主要研究对象是结合代数上的某类 $\mathcal{O}$-算子。具体而言，我们关注结合 $\mathcal{O}$- 算子态射的上同调。此外，我们给出了 $\mathcal{O}$- 算子态射的上同调比较定理,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 16D20,16E40.

Key words and phrases. $\mathcal{O}$-算子；态射；上同调； r-矩阵。L. Du 是通讯作者。

该定理指出， $\mathcal{O}$-算子态射的上同调与一个辅助 $\mathcal{O}$-算子的上同调同构。此前已有研究表明，权重 0 的 Rota-Baxter 算子以及结合 r-矩阵 [1] 是 $\mathcal{O}$-算子的特例。因此，作为应用，我们得到了权为零的 Rota-Baxter 算子态射以及结合 r-矩阵弱态射的上同调比较定理（CCT）。

本文结构如下。第 2 节给出 Rota-Baxter 算子、结合代数上的 $\mathcal{O}$-算子及其态射的一些定义。第 3 节为结合 $\mathcal{O}$-算子态射建立上同调理论，并研究结合 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调比较定理（CCT）；该定理指出，结合 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调与一个辅助 $\mathcal{O}$-算子的上同调同构。第 4 节专门讨论结合代数 A 上的权重 0 Rota-Baxter 算子，将其视为关于伴随双模的 $\mathcal{O}$-算子，并重点研究代数 A 上 r-矩阵弱态射的上同调，其中这些弱态射被视为关于余伴随双模的 $\mathcal{O}$-算子，作用于 A ；由此得到权为零的 Rota-Baxter 算子态射与结合 r- 矩阵弱态射的上同调比较定理。

本文中，我们在特征零的域 $\mathbb{F}$ 上进行讨论；除非另有说明，线性空间、线性映射、$\otimes$、Hom 和 End 都定义在 $\mathbb{F}$上。

2. $\mathcal{O}$-operators and their morphisms

本节将回顾 Rota-Baxter 算子、结合代数上的 $\mathcal{O}$-算子及其态射。我们先回顾一些基本概念。

设 $(A,\cdot)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个结合代数，且 M 是 $(A,\cdot)$ 的一个双模。也就是说，存在如下线性映射： $l\colon A\otimes M\to M$，$(a,m)\to l(a,m)$，以及 $r\colon M\otimes A\to M$，$(m,a)\to r(m,a)$，使得

$$l(a\cdot b,m)=l(a,l(b,m))\quad r(a,r(m,b))=r(l(a,m)\ b)\text{ 和 }\quad r(m,a\cdot b)=r(r(m,a)\ b),$$

对所有 $a,b\in A$ 均成立。因此，对于每个 $a\in A$，都有映射 $l_a\colon M\to M, m\to l(a,m)$ 和 $r_a\colon M\to M, m\to r(m,a)$。有时，在不会产生歧义时，我们会用 am 代替 $l(a,m)$，并用 ma 代替 $r(m,a)$。

由此可知，结合代数 A 是其自身上的一个双模，其左右作用由 A的乘法给出。我们称此双模为伴随双模。此双模的映射 l_a 和 r_a 分别记为 ad_a^l 和ad_a^r。对偶空间 A^* 也具有一个 A-双模结构（称为余伴随双模），其定义为

$$l(a,f)(b)=f(b\cdot a)\text{ and }r(f,a)(b)=f(a\cdot b),$$

对 $a,b\in A$ 和 $f\in A^*$ 均成立。此双模的映射 l_a 和 r_a 分别记为 ad_a^{*l}和 ad_a^{*r}。

定义 2.1。（[8, 13]）设 A 是定义在 $\mathbb{F}$ 上的结合代数，且 $\lambda\in\mathbb{F}$。若线性算子 $R\colon A\to A$ 满足

$$R(a)R(b)=R\big(aR(b)+R(a)b+\lambda\ ab\big)\tag{1}$$

对任意 a、$b\in A$。在这种情况下，(A,R) 称为权为 λ 的 Rota-Baxter 代数。

$\mathcal{O}$-算子（也称为相对Rota-Baxter算子）的概念是在任意双模背景下对Rota-Baxter 算子的推广。

定义 2.2.（[17]）设 M 是结合代数 A 的一个双模。相对于双模 M， A 上的一个 $\mathcal{O}$-算子是一个线性映射 $T_A: M \to A$，满足

$$T_A(m)T_A(n) = T_A(mT_A(n) + T_A(m)n), \ for\ all\ m, n \in M. \tag{2}$$

当 l_a 和 r_a 是 A 的伴随表示，分别记为 ad_a^l 和 ad_a^r 时，方程（2）化为 $\lambda = 0$ 时的方程（1），这意味着权为 0 的 Rota-Baxter 算子是相对于伴随表示的 A 上的一个 $\mathcal{O}$-算子。

我们参考 [7] 给出以下结果。

引理 2.1. 设 $T_A: M \to A$ 是一个 $\mathcal{O}$-算子。那么， M 带有如下乘法定义的结合代数结构

$$m \star_M m' = mT_A(m') + T_A(m)m', \ for\ m, m' \in M. \tag{3}$$

我们用 $M_\star$ 表示 $(M, \star_M)$。此外，定义

$$l_{T_A} : M \otimes A \to A, \ l_{T_A}(m, a) = T_A(m) \cdot a - T_A(ma), \tag{4}$$
$$r_{T_A} : A \otimes M \to A, \ r_{T_A}(a, m) = a \cdot T_A(m) - T_A(am), \tag{5}$$

对于 $m \in M$和 $a \in A$。那么 (A, l_{T_A}, r_{T_A}) 是 $M_\star$上的一个双模。

接下来，我们回顾 $\mathcal{O}$-算子之间的一个态射。

定义 2.3. ([7]) 由代数同态 $\phi: A \to B$ 和线性映射 $\psi: M \to N$ 组成的一对 (ϕ, ψ)，若满足 (ϕ, ψ)，则称其为从 $T_A: M \to A$ 到$T_B: N \to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射

$$T_B \circ \psi = \phi \circ T_A, \tag{6}$$
$$\phi(a)\psi(m) = \psi(am), \tag{7}$$
$$\psi(m)\phi(a) = \psi(ma). \tag{8}$$

于是我们有如下引理

引理 2.2. 设 (ϕ, ψ) 是从 $T_A: M \to A$ 到 $T_B : N \to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子同态。那么 ψ 是从 $M_\star$ 到 $N_\star$ 的代数同态，记作 ψ 为 $\psi_\star$。

证明。只需证明，对于任意 $m, m' \in M$,

$$\begin{aligned}
\psi(m \star m') &\overset{\text{Eq.(3)}}{=} \psi(mT_A(m') + T_A(m)m') \\
&\overset{\text{Eq.(8)}}{=} \psi(m)\phi(T_A(m')) + \phi(T_A(m))\psi(m') \\
&\overset{\text{Eq.(6)}}{=} \psi(m)T_B(\psi(m')) + T_B(\psi(m))\psi(m') \\
&\overset{\text{Eq.(3)}}{=} \psi(m) \star \psi(m').
\end{aligned}$$

□

结合代数态射上的双模定义见 Gerstenhaber 和 Schack [11]。设 $\alpha: A \to A'$ 是结合代数的态射，则 α-双模是一个三元组 $\langle M, M', \beta \rangle$，使得 M是

A, M'是 A'上的双模，并且 β: $M \to M'$是一个 A-双模态射，其中M' 以自然方式视为结合代数 A 上的双模。

根据引理 2.1，设 (A, l_{T_A}, r_{T_A}) 是 $M_\star$ 的双模，(B, l_{T_B}, r_{T_B}) 是 $N_\star$ 的双模。显然， B 是结合代数 $M_\star$ 上的双模，其定义为

$$M_\star \otimes B \longrightarrow^{(\psi_\star, \mathrm{Id})} N_\star \otimes B \longrightarrow^{l_{T_B}} B \tag{9}$$

并且 ϕ： $A \to B$ 是一个 $M_\star$-双模同态，记为 $\phi_\star$。于是我们得到如下观察，这可能在下一节研究 $\mathcal{O}$-算子同态的上同调理论时发挥重要作用。

引理 2.3. 设 (ϕ, ψ) 是从 T_A： $M \to A$ 到 T_B： $N \to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子同态。则 $\langle A, B, \phi_\star \rangle$ 是关于代数同态 $\psi_\star$： $M_\star \to N_\star$ 的双模。

3. The cohomology of an associative $\mathcal{O}$-operator morphism

本节旨在说明结合$\mathcal{O}$-算子同态的上同调理论，并给出$\mathcal{O}$-算子同态的上同调比较定理。

3.1. 结合 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调。回顾 Das [7] 给出的结合 $\mathcal{O}$-算子的上同调理论。设 $T_A : M \to A$ 是一个 $\mathcal{O}$-算子。由引理 2.1 可得一个 $M_\star$-双模 (A, l_{T_A}, r_{T_A})。因此，我们可以考虑 $M_\star$ 关于系数为 (A, l_{T_A}, r_{T_A}) 的相应霍赫希尔德上同调。更确切地说，我们定义

$$C^n(M_\star, A) := \mathrm{Hom}(M_\star^{\otimes n}, A), \text{ for } n \geqslant 0$$

微分定义为

$$\begin{aligned} d_{M,A}(a)(m) &= l_{T_A}(m, a) - r_{T_A}(a, m) \\ &= T_A(m) \cdot a - T_A(ma) - a \cdot T_A(m) + T_A(am) \text{ for } a \in A = C^0(M_\star, A) \end{aligned} \tag{10}$$

and

$$\begin{aligned} &(d_{M,A} f)(m_1, ..., m_{n+1}) \\ =&T_A(m_1) \cdot f(m_2, ..., m_{n+1}) - T_A(m_1 f(m_2, ..., m_{n+1})) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(m_1, ..., m_{i-1}, m_i T_A(m_{i+1}) + T_A(m_i) m_{i+1}, ..., m_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(m_1, ..., m_n) \cdot T_A(m_{n+1}) \\ &- (-1)^{n+1} T_A(f(m_1, ..., m_n) m_{n+1}). \end{aligned} \tag{11}$$

将 n-上闭链群记为 $\mathrm{Z}^n(M_\star, A)$，将 n-余边界群记为 $\mathrm{B}^n(M_\star, A)$。相应的上同调群定义为 $\mathrm{H}^n(M_\star, A) = \mathrm{Z}^n(M_\star, A)/\mathrm{B}^n(M_\star, A)$ $n \geqslant 0$。

定义 3.1. ([7]) 上同调群 $H^n(M_\star, A)$ 记为 $\mathcal{O}$-算子 $T_A : M \to A$ 的 n-上同调。

接下来，我们构造一个 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调。设 (ϕ, ψ) 是从 T_A： $M \to A$ 到 T_B： $N \to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射。根据引理 2.2 和引理 2.3，可知 $\psi_\star$： $M_\star \to N_\star$ 是一个代数同态，并且 (A, B, ϕ) 是 $\psi_\star$： $M_\star \to N_\star$ 上的双模。

我们可以考虑相应的 Hochschild 上链 $(C^\bullet(M_\star,A),d^\bullet_{M,A})$，其取值于 A、定义在 $M_\star$ 上；相应的 Hochschild 上链 $(C^\bullet(N_\star,B),d^\bullet_{N,B})$，其取值于 B、定义在 $N_\star$ 上；以及相应的 Hochschild 上链 $(C^\bullet(M_\star,B),d^\bullet_{M,B})$，其取值于 B、定义在 $M_\star$ 上。其中，在最后一种情形中，B 借助于 $\psi_\star$ 被视为一个 $M_\star$-双模。取 $X^\bullet=C^\bullet(M_\star,A)$、$\oplus C^\bullet(N_\star,B)$ 和 $Y^\bullet=C^\bullet(M_\star,B)$，其中 $X^\bullet$ 的微分为 $\delta^n_X=\begin{pmatrix} d^n_M, & A & 0 \\ 0 & & d^n_N \end{pmatrix}$，而 $Y^\bullet$ 的微分为 $\delta^n_Y=d^n_{M,B}$。令 $\alpha\in C^n(M_\star,A)$ 和 $\beta\in C^n(N_\star,B)$，定义一个链映射 $f^n\colon X^n\to Y^n$，使得

$$f^n(\alpha,\beta)=\phi_*\alpha-\psi^*_\star\beta, \tag{12}$$

其中，$\phi_*\colon C^n(M_\star,A)\to C^n(M_\star,B)$ 和 $\psi^*_\star\colon C^n(N_\star,B)\to C^n(M_\star,B)$ 分别是由 ϕ 和 $\psi_\star$ 诱导的态射。$W^\bullet=X^\bullet\oplus Y^{\bullet-1}$ 是一个带有上边界算子的复形

$$\delta^n_Z=\begin{pmatrix}\delta^n_X & 0\\ f^n & -\delta^n_Y\end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中，$W^\bullet$ 称为 $f^\bullet$ 的映射柱。于是，$W^n=C^n(M_\star,A)\oplus C^n(N_\star,B)\oplus C^{n-1}(M_\star,B)$ 记作 $C^n(\psi_\star,\phi)$，其微分为

$$\delta^n_W(\alpha,\beta,\gamma)=(d^n_{M,A}\alpha,d^n_{N,B}\beta,\phi\alpha-\beta\psi^{\otimes n}_\star-d^{n-1}_{M,B}\gamma), \tag{14}$$

对于 (α,β,γ)，$\in C^n(M_\star,A)\oplus C^n(N_\star,B)\oplus C^{n-1}(M_\star,B)$。

定义 3.2. 将复形 $(W^\bullet,\delta^\bullet_W)$ 的 n-上闭链（分别地，n-上边界）空间记为 $Z_n(\psi_\star,\phi)$（分别地，$B_n(\psi_\star,\phi)$）。则 $H^\bullet(\psi_\star,\phi)=Z_n(\psi_\star,\phi)/B_n(\psi_\star,\phi)$ 定义为 $\mathcal{O}$-算子态射 (ϕ,ψ) 的上同调。

命题 3.1. 设 (ϕ,ψ) 是从 $T_A\colon M\to A$ 到 $T_B\colon N\to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射。则 $(T_A,T_B,0)$ 是 $\mathcal{O}$- 算子态射 (ϕ,ψ) 的上同调上的 1- 余循环。

证明。对于 m_1、$m_2\in M$ 和 n_1、$n_2\in N$，我们有

$$\begin{aligned}
&d^1_{M,A}(T_A)\\
\overset{\text{Eq.(11)}}{=}&T_A(m_1)T_A(m_2)-T_A(m_1T_A(m_2))-T_A(m_1T_A(m_2)+T_A(m_1)m_2)\\
&+T_A(m_1)T_A(m_2)-T_A(T_A(m_1)m_2)\\
=&2(T_A(m_1)T_A(m_2)-T_A(m_1T_A(m_2)+T_A(m_1)m_2))\\
\overset{\text{Eq.(2)}}{=}&0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&d^1_{N,B}(T_B)\\
\overset{式(11)}{=}&T_B(n_1)T_B(n_2)-T_B(n_1T_B(n_2))-T_B(n_1T_B(n_2)+T_B(n_1)n_2)\\
&+T_B(n_1)T_B(n_2)-T_B(T_B(n_1)n_2)\\
=&2(T_B(n_1)T_B(n_2)-T_B(n_1T_B(n_2)+T_B(n_1)n_2))\\
\overset{式(2)}{=}&0.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}&\delta_W^1(T_A,T_B,0)\\=&(d_{M,A}^1(T_A),d_{N,B}^1,\phi T_A-T_B\psi_\star-d_{M,B}^0(0))\\=&(0,0,\phi T_A-T_B\psi_\star)\\\overset{\text{Eq.(6)}}{=}&0.\end{aligned}$$

□

注3.1。（无穷小变形。）代数变形理论最早由 Gerstenhaber 的开创性工作 [10] 提出。随后，Gerstenhaber 和 Schack [11] 发展了代数态射的上同调理论，以研究代数态射的变形。在本注中，我们可以用上述上同调来描述 $\mathcal{O}$-算子态射的无穷小变形。

设 (ϕ,ψ) 是从 $T_A:\ M\to A$ 到 $T_B:\ N\to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射。设 $T_{A,t}:\ M[[t]]\to A[[t]]$（分别为 $T_{B,t}:\ N[[t]]\to B[[t]]$）是关于双模 $M[[t]]$（分别为 $N[[t]]$）的 $\mathcal{O}$-算子。(ϕ_t,ψ_t) 是 (ϕ,ψ) 的一个变形，且为从 $T_{A,t}$ 到 $T_{B,t}$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射，使得 $\phi_t=\phi_0+t\phi_1+t^2\phi_2+\cdots$且 $\psi_t=\psi_0+t\psi_1+t^2\psi_2+\cdots$，其中每个 $(\phi_i,\psi_i)(n=0,1,2,\cdots)$ 都是从 T_A 到 T_B 的 $\mathcal{O}$-算子态射。（这里 $\phi_0=\phi,\psi_0=\psi$.）记 $T_{A,t}=T_{A,0}+tT_{A,1}+t^2T_{A,2}+\cdots$ 和 $T_{B,t}=T_{B,0}+tT_{B,1}+t^2T_{B,2}+\cdots$。我们声称，三元组 $(T_A,T_B,1,0)$ 是 $\mathsf{Z}^1(\phi,\psi)$ 中的一个元素，其上同调类可视为该变形的无穷小量。

由此可推得 $(\phi_t,\psi_t):T_{A,t}\to T_{B,t}$ 是一个 $\mathcal{O}$-算子

(1) 对于 $m_1,m_2\in M$，$T_{A,t}(m_1)T_{A,t}(m_2)=T_{A,t}(m_1T_{A,t}(m_2)+T_{A,t}(m_1)m_2)$。(2) 对于 $n_1,n_2\in M$，$T_{B,t}(n_1)T_{B,t}(n_2)=T_{B,t}(n_1T_{B,t}(n_2)+T_{B,t}(n_1)n_2)$。(3) $T_{B,t}\circ\psi_t=\phi_t\circ T_{A,t}$。

比较一阶项可得

$$\begin{aligned}&T_A(m_1)T_{A,1}(m_2)+T_{A,1}(m_1)T_A(m_2)\\=&T_A(m_1T_{A,1}(m_2)+T_{A,1}(m_1)m_2)+T_{A,1}(m_1T_A(m_2)+T_A(m_1)m_2),for\ m_1,m_2\in M.\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&T_B(n_1)T_{B,1}(n_2)+T_{B,1}(n_1)T_B(n_2)\\=&T_B(n_1T_{B,1}(n_2)+T_{B,1}(n_1)n_2)+T_{B,1}(n_1T_B(n_2)+T_B(n_1)n_2),\ 其中\ n_1,n_2\in N.\end{aligned}\tag{16}$$

$$T_{B,1}\circ\psi_0+T_{B,0}\circ\psi_1=\phi_1\circ T_{A,0}+\phi_0\circ T_{A,1}.\tag{17}$$

于是，由式 (15) 和式 (16) 可推得 $d_{M,A}^1(T_{A,1})=0$ 以及 $d_{N,B}^1(T_{B,1})=0$。

根据式（17）以及由（ϕ_1，ψ_1）推得的 $T_B\circ\psi_1=\phi_1\circ T_A$ 是从 T_A 到 T_B 的 $\mathcal{O}$-算子，我们有 $T_{B,1}\circ\psi=\phi\circ T_{A,1}$。

因此，$\delta_W^1(T_{A,1},T_{B,1},0)=(d_{M,A}^1(T_{A,1})\,d_{N,B}^1(T_{B,1})\,\phi T_{A,1}-T_{B,1}\psi_\star-d_{M,B}^0(0))=0$，即 $(T_{A,1},T_{B,1},0)$ 是 1-余循环。

□

3.2. $\mathcal{O}$-算子同态的上同调比较定理。我们将给出 $\mathcal{O}$-算子同态的上同调比较定理（CCT），该定理或许表明，$\mathcal{O}$-算子同态的上同调与某个辅助 $\mathcal{O}$-算子的上同调同构。

我们回顾 Gerstenhaber 和 Schack [11, 12] 给出的关于代数同态双模的一些结果。设 $\phi: A \to B$ 是结合代数的一个同态，且 $\langle M、N、\psi\rangle$ 是一个 ϕ-双模。将 $\phi: A \to B$ 在系数为 $\langle M、N、\psi\rangle$ 时的上链复形记为 $C^\bullet(\phi,\psi)$，其中 $\mathsf{C}^n(\phi,\psi) = C^n(A,M) \oplus C^n(B,N) \oplus C^{n-1}(A,N)$ $n \geqslant 1$。

引理 3.1. ([11]) 假设 $\phi: A \to B$ 是一个代数同态，且 $\langle M,N,\psi\rangle$ 是一个 ϕ-双模。那么

(1) $\phi! = A+B+B\phi$ 是一个结合代数，其中 $a\cdot b = b\cdot a = \phi\cdot b = a\cdot\phi = \phi^2 = 0$ 且 $\phi\cdot a = \phi(a)\phi$，也就是说，对任意 $a+b_1+b_2\phi, a'+b_1'+b_2'\phi \in A+B+B\phi$,

$$\begin{aligned}(a+b_1+b_2\phi)(a'+b_1'+b_2'\phi) &= aa'+b_1b_1'+b_2\phi\cdot a'+b_1b_2'\cdot\phi \\ &= aa'+b_1b_1'+(b_2\phi(a')+b_1b_2')\cdot\phi.\end{aligned} \tag{18}$$

(2) $\psi! = M+N+N\phi$ 是一个 $\phi!$-双模，其中 $\phi m = \psi(m)\phi$，即双模结构定义为

$$(a+b_1+b_2\phi)(m+n_1+n_2\phi) = am+b_1n_1+(b_2\psi(m)+b_1n_2)\phi, \tag{19}$$
$$(m+n_1+n_2\phi)(a+b_1+b_2\phi) = ma+n_1b_1+(n_2\phi(a)+n_1b_2)\phi, \tag{20}$$

$for\ a+b_1+b_2\phi \in A+B+B\phi,\ m+n_1+n_2\phi \in M+N+N\phi.$

我们将 $\phi!$ 的、系数取在 $\psi!$ 中的相应 Hochschild 上链记为 $\mathsf{C}^\bullet_{\mathrm{Alg}}(\phi!\ \psi!)$。下面的引理是 Gerstenhaber 和 Schack [12] 给出的结合代数态射的上同调比较定理（CCT）。

引理 3.2. ([12]) 令 $\phi: A \to B$ 为一个结合代数态射，$\langle M,N,\psi\rangle$ 为 ϕ 的一个双模。定义 $\tau_\phi^\bullet: \mathsf{C}^\bullet(\phi,\psi) \to \mathsf{C}^\bullet_{\mathrm{Alg}}(\phi!\ \psi!)$ 如下：对于 $f = (f^A, f^B, f^{AB}) \in \mathsf{C}^n(\phi,\psi)$，$\tau_\phi^n f$ 定义为

$$\begin{aligned}
&\tau_\phi^n f|_{B^{\otimes n}} = f^B, \tau_\phi f|_{A^{\otimes n}} = f^A;\\
&\tau_\phi^n f(b\phi, a_2, \cdots, a_n) = f^B(b, \phi(a_2), \cdots, \phi(a_n))\phi + bf^{AB}(a_2, \cdots, a_n)\phi,\\
&for\ (b\phi, a_2, \cdots, a_n) \in B\phi \otimes A^{n-1};\\
&\tau_\phi^n f(b_1, \cdots, b_{r-1}, b_r\phi, a_{r+1}, \cdots, a_n) = f^B(b_1, \cdots, b_{r-1}, b_r, \phi(a_{r+1}), \cdots, \phi(a_n))\phi,\\
&for\ (b_1, \cdots, b_{r-1}, b_r\phi, a_{r+1}, \cdots, a_n) \in B^{r-1} \otimes B\phi \otimes A^{n-r};\\
&\tau_\phi^n f(x_1, \cdots, x_n) = 0, \qquad otherwise.
\end{aligned}$$

那么 $\tau_\phi^\bullet: \mathsf{C}^\bullet(\phi,\psi) \to \mathsf{C}^\bullet_{\mathrm{Alg}}(\phi!\ \psi!)$ 是一个拟同构。

由引理 2.2 和引理 2.3 可知，对于一个 $\mathcal{O}$-算子同态 $(\phi,\psi): T_A \to T_B$，$\psi_\star: M_\star \to N_\star$ 是一个代数同态，而 $\langle A,B,\phi_\star\rangle$ 是代数同态 $\psi_\star: M_\star \to N_\star$ 的双模。根据引理 3.1，$(\psi_\star! = M_\star + N_\star + N_\star\psi_\star, *)$ 是一个结合代数，其乘积 $*$ 定义为

$$\begin{aligned}&(m+n_1+n_2\psi_\star) * (m'+n_1'+n_2'\psi_\star)\\ =&m \star_M m' + n_1 \star_N n_1' + (n_2 \star_N \psi_\star(m') + n_1 \star_N n_2')\psi_\star\end{aligned} \tag{21}$$

对于 $m+n_1+n_2\psi_\star, m'+n_1'+n_2'\psi_\star \in \psi_\star!$，且 $(\phi_\star! = A+B+B\psi_\star, l_\star, r_\star)$ 是 $\psi_\star!$ 的双模，其模作用为

$$\begin{aligned} & l_\star(m+n_1+n_2\psi_\star, a+b_1+b_2\psi_\star) \\ =& l_{T_A}(m,a)+l_{T_B}(n_1,b_1)+(l_{T_B}(n_2,\phi(a))+l_{T_B}(n_1,b_2)))\psi_\star, \qquad (22) \\ & r_\star(a+b_1+b_2\psi_\star, m+n_1+n_2\psi_\star) \\ =& r_{T_A}(a,m)+r_{T_B}(b_1,n_1)+(r_{T_B}(b_2,\psi_\star(m))+r_{T_B}(b_1,n_2))\psi_\star \qquad (23) \end{aligned}$$

对于 $m+n_1+n_2\psi_\star \in \psi_\star!$ 和 $a+b_1+b_2\psi_\star \in \phi_\star!$ 根据引理 3.2，可得

引理 3.3。设 (ϕ,ψ) 是一个 $\mathcal{O}$-算子态射。那么 $C^\bullet(\psi_\star,\phi)$ 与 $C^\bullet(\psi_\star!\ \phi_\star!)$ 之间存在一个拟同构；也就是说， $\mathcal{O}$-算子态射 (ϕ,ψ) 的上同调 $H^\bullet(\psi_\star,\phi)$ 同构于 $\psi_\star!$ 在系数为 $\phi_\star!$ 时相应的霍赫希尔德上同调 $H^\bullet(\psi_\star!\ \phi_\star!)$。

根据引理 3.1，可得以下引理，用于从一个 $\mathcal{O}$-算子态射构造新的 $\mathcal{O}$-算子。

引理 3.4。设 (ϕ,ψ) 是从 $T_A: M\to A$ 到 $T_B: N\to B$ 的一个 $\mathcal{O}$-算子态射。假设 $T_{\phi!}: \psi! \to \phi!$ 是由下式定义的线性映射

$$T_{\phi!}(m+n_1+n_2\phi) = T_A(m)+T_B(n_1)+T_B(n_2)\phi \qquad (24)$$

其中 $m+n_1+n_2\phi \in \psi!$，且 $\psi! = M+N+N\phi$ 和 $\phi! = A+B+B\phi$。那么 $T_{\phi!}$ 是一个 $\mathcal{O}$-算子。

证明。只需证明 $T_{\phi!}$ 满足方程（2）。对于 $m+n_1+n_2\phi$、$m'+n_1'+n_2'\phi \in \psi!$

$$\begin{aligned} & T_{\phi!}(m+n_1+n_2\phi)T_{\phi!}(m'+n_1'+n_2'\phi) \\ \overset{\text{Eq.}(24)}{=}& (T_A(m)+T_B(n_1)+T_2(n_2)\phi)(T_A(m')+T_B(n_1')+T_2(n_2')\phi) \\ \overset{\text{Eq.}(18)}{=}& T_A(m)T_A(m')+T_B(n_1)T_B(n_1')+(T_B(n_1)T_B(n_2')+T_B(n_2)\phi(T_A(m')))\phi \\ \overset{\text{Eq.}(6)}{=}& T_A(m)T_A(m')+T_B(n_1)T_B(n_1')+(T_B(n_1)T_B(n_2')+T_B(n_2)T_B(\psi(m')))\phi \\ \overset{\text{Eq.}(2)}{=}& T_A(mT_A(m')+T_A(m)m')+T_B(n_1T_B(n_1')+T_B(n_1)n_1') \\ & +(T_B(n_1T_B(n_2')+T_B(n_1)n_2')+T_B(n_2T_B(\psi(m'))+T_B(n_2)\psi(m')))\phi \\ \overset{\text{Eq.}(24)}{=}& T_{\phi!}(mT_A(m')+T_A(m)m'+n_1T_B(n_1')+T_B(n_1)n_1'+(n_1T_B(n_2')+T_B(n_1)n_2')\phi) \\ & +(n_2T_B(\psi(m'))+T_B(n_2)\psi(m'))\phi) \\ \overset{\text{Eq.}(6)}{=}& T_{\phi!}(mT_A(m')+n_1T_B(n_1')+(n_2\phi(T_A(m')+n_1T_B(n_2'))\phi \\ & +T_A(m)m'+T_B(n_1)n_1'+(T_B(n_1)n_2'+T_B(n_2)\psi(m'))\phi) \\ \overset{\text{Eq.}(19)(20)}{=}& T_{\phi!}((m+n_1+n_2\phi)(T_A(m')+T_B(n_1')+T_B(n_2')\phi) \\ & +(T_A(m)+T_B(n_1)+T_2(n_2)\phi)(m'+n_1'+n_2'\phi)) \\ \overset{\text{Eq.}(24)}{=}& T_{\phi!}((m+n_1+n_2\phi)T_{\phi!}(m'+n_1'+n_2'\phi)+T_{\phi!}(m+n_1+n_2\phi)(m'+n_1'+n_2'\phi)). \end{aligned}$$

□

根据引理 2.1，由引理 3.4 给出的 $\mathcal{O}$-算子 $T_{\phi!}:\ \psi!\ \to \phi!$ ，可以诱导出一个结合代数（$\psi!\ \star$， $\star_{\psi!}$），且乘积 $\star_{\psi!}$ 意味着

$$\begin{aligned}&(m+n_1+n_2\phi)\star_{\psi!}(m'+n_1'+n_2'\phi)\\ \overset{\text{Eq.}(3)}{=}&(m+n_1+n_2\phi)T_{\phi!}(m'+n_1'+n_2'\phi)+T_{\phi!}(m+n_1+n_2\phi)(m'+n_1'+n_2'\phi).\end{aligned}\tag{25}$$

以及 $\psi!_\star$上的双模（$\phi!_\star, l_{T_{\phi!}}, r_{T_{\phi!}}$），其中 $l_{T_{\phi!}}, r_{T_{\phi!}}$ 定义为

$$\begin{aligned}&l_{T_{\phi!}}(m+n_1+n_2\phi, a+b_1+b_2\phi)\\ =&T_{\phi!}(m+n_1+n_2\phi)(a+b_1+b_2\phi)-T_{\phi!}((m+n_1+n_2\phi)(a+b_1+b_2\phi),\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&r_{T_{\phi!}}(a+b_1+b_2\phi, m+n_1+n_2\phi)\\ =&(a+b_1+b_2\phi)T_{\phi!}(m+n_1+n_2\phi)-T_{\phi!}((a+b_1+b_2\phi)(m+n_1+n_2\phi)).\end{aligned}\tag{27}$$

根据定义 3.1，考虑 $\psi!_\star$在系数为 $\phi!_\star$ 时对应的霍赫希尔德上同调 $H^n(\psi!_\star, \phi!_\star)$，并将其视为 $T_{\phi!}$的上同调。

在本节最后，我们将证明， $\mathcal{O}$-算子态射（ϕ, ψ）的上同调同构于由（ϕ, ψ）诱导的 $\mathcal{O}$-算子 $T_{\phi!}$ 的上同调。为此，我们需要以下引理

引理 3.5. 设 (ϕ, ψ) 是从 $T_A:\ M \to A$ 到 $T_B:\ N \to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子。则存在一个代数同构 $\Psi : (\psi!_\star, \star_{\psi!}) \to (\psi_\star!\ *)$，其定义为：对于$m+n_1+n_2\phi \in \psi!_\star$ 和 $m+n_1+n_2\psi_\star \in \psi_\star!$,

$$\Psi(m+n_1+n_2\phi) = m+n_1+n_2\psi_\star,$$

其中 $(\psi!_\star, \star_{\psi!})$ 和 $(\psi_\star!\ *)$ 由式 (25) 和式 (21) 定义。

证明. 显然， Ψ 是一个双射。我们只需证明 Ψ 是一个代数态射。由式 (25) 和式 (21)，可得

$$\begin{aligned}&(m+n_1+n_2\phi)\star_{\psi!}(m'+n_1'+n_2'\phi)\\ \overset{\text{Eq.}(3)}{=}&(m+n_1+n_2\phi)T_{\phi!}(m'+n_1'+n_2'\phi)+T_{\phi!}(m+n_1+n_2\phi)(m'+n_1'+n_2'\phi)\\ \overset{\text{Eq.}(24)\text{Eq.}(18)}{=}&mT_A(m')+n_1T_B(n_1')+(n_2\phi(T_A(m'))+n_1T_B(n_2'))\phi\\ &+T_A(m)m'+T_B(n_1)n_1'+(T_B(n_1)n_2'+T_B(n_2)\psi(m'))\phi.\end{aligned}\tag{28}$$

and

$$\begin{aligned}&(m+n_1+n_2\psi_\star)*(m'+n_1'+n_2'\psi_\star)\\ \overset{\text{Eq.}(21)}{=}&m\star_M m'+n_1\star_N n_1'+(n_2\star_N\psi_\star(m')+n_1\star_N n_2')\psi_\star\\ \overset{\text{Eq.}(3)\text{Eq.}(6)}{=}&mT_A(m')+T_A(m)m'+n_1T_B(n_1')+T_B(n_1)n_1'\\ &+(n_2\phi(T_A(m'))+n_1T_B(n_2'))\psi_\star+(T_B(n_1)n_2'+T_B(n_2)\psi_\star(m'))\psi_\star.\end{aligned}\tag{29}$$

比较式 (28) 和式 (29)，可得 Ψ 是一个代数态射。 □

在推导中，由引理 3.5 可知

引理 3.6. $\psi!_\star$-双模 $(\phi!_\star, l_{T_{\phi!}}, r_{T_{\phi!}})$ 等于 $\psi_\star!$-双模 $(\phi_\star!\ l_\star, r_\star)$。

证明。构造一个线性映射 $\Phi : \phi!_\star \to \phi_\star!$，定义如下：

$$\Phi(a + b_1 + b_2\phi) = a + b_1 + b_2\psi_\star$$

对于 $a + b_1 + b_2\phi \in \phi!_\star$ 和 $a + b_1 + b_2\psi_\star \in \phi_\star!$ Φ 显然是双射的。由式 (26) 和式 (22)，我们有

$$\begin{aligned}
&l_{T_{\phi!}}(m + n_1 + n_2\phi, a + b_1 + b_2\phi)\\
\overset{\text{Eq.(26)}}{=}&T_{\phi!}(m + n_1 + n_2\phi)(a + b_1 + b_2\phi) - T_{\phi!}((m + n_1 + n_2\phi)(a + b_1 + b_2\phi)\\
\overset{\text{Eq.(24)Eq.(18)}}{=}&T_A(m)a + T_B(n_1)b_1 + (T_B(n_1)b_2 + T_B(n_2)\phi(a))\phi\\
&- T_A(ma) - T_B(n_1b_1) - (T_B(n_2\phi(a)) + T_B(n_1b_2))\phi
\end{aligned} \tag{30}$$

and

$$\begin{aligned}
&l_\star(m + n_1 + n_2\psi_\star, a + b_1 + b_2\psi_\star)\\
\overset{\text{Eq.(22)}}{=}&l_{T_A}(m, a) + l_{T_B}(n_1, b_1) + (l_{T_B}(n_2, \phi(a)) + l_{T_B}(n_1, b_2)))\psi_\star\\
\overset{\text{Eq.(4)}}{=}&T_A(m)a - T_A(ma) + T_B(n_1)b_1 - T_B(n_1b_1)\\
&+ (T_B(n_1)b_2 + T_B(n_2)\phi(a))\psi_\star - (T_B(n_2\phi(a)) + T_B(n_1b_2))\psi_\star.
\end{aligned} \tag{31}$$

由式 (30) 和式 (31)，可得

$$\begin{aligned}
&\Phi(l_{T_{\phi!}}(m + n_1 + n_2\phi, a + b_1 + b_2\phi))\\
=&l_\star(m + n_1 + n_2\psi_\star, a + b_1 + b_2\psi_\star)\\
=&l_\star((\Psi, \Phi)(m + n_1 + n_2\phi, a + b_1 + b_2\phi)).
\end{aligned}$$

类似地，$\Phi \circ r_{T_{\phi!}} = r_\star \circ (\Phi, \Psi)$。 □

根据引理 3.6，我们将 Hochschild 上链 $C^\bullet(\psi_\star!\ \ \phi_\star!)$ 与 Hochschild 上链 $C^\bullet(\psi!_\star, \phi!_\star)$ 视为相同。由引理 3.3，我们得到以下主要结果，称为 $\mathcal{O}$-算子态射的上同调比较定理（CCT）。

定理 3.1. 设 (ψ, ϕ) 是从 $T_A : M \to A$ 到 $T_B : N \to B$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射。则 $\mathcal{O}$-算子态射 (ϕ, ψ) 的上同调 $H^\bullet(\psi_\star, \phi)$ 与 $\mathcal{O}$-算子 $T_{\phi!} : \psi!\ \to \phi!$ 的上同调 $H^\bullet(\psi!_\star, \phi!_\star)$ 同构。

4. Applications

众所周知，$\mathcal{O}$-算子是权重 0 的结合 Rota-Baxter 算子的推广，也推广了结合 r-矩阵 [1]。因此，我们可以将权为零的 Rota-Baxter 算子态射与结合 r-矩阵态射的上同调比较定理（CCT），视为 $\mathcal{O}$-算子态射上同调的一个特例。

4.1. Rota-Baxter 算子态射的上同调比较定理。

众所周知，结合代数 A 上的 Rota-Baxter 算子（权重 0）可视为关于伴随双模 A的 $\mathcal{O}$-算子，其作用于 A 。

给定一个 Rota-Baxter 算子 $R : A \to A$（权重 0），A 上定义了一个新的结合乘积 $a \star b = aR(b) + R(a)b$ 对于 $a、b \in A$。这个结合代数（A, $\star$）在 A 上具有双模表示，由 $l_a(b) = R(a)b - R(ab)$ 以及 $r_a(b) = bR(a) - R(ba)$ 给出。结合代数（A, $\star$）的上同调，其

系数取自上述在 A 上的双模结构，被称为 Rota-Baxter 算子 R的上同调。

设 $R_A: A \to A$ 和 $R_B: B \to B$ 是权重 0 的 Rota-Baxter 算子。假设 $\phi: R_A \to R_B$ 是一个 Rota-Baxter 算子态射，其中 $\phi: A \to B$是一个代数态射，使得（见定义 2.3）

$$R_B \circ \phi = \phi \circ R_A. \tag{32}$$

由于 A 是其自身上的伴随双模，$C^n(\phi_\star, \phi) = C^n(A_\star, A) \oplus C^n(B_\star, B) \oplus C^{n-1}(A_\star, B)$ $n \geqslant 1$ 被定义为 Rota-Baxter 算子态射 $\phi: R_A \to R_B$的上链复形，其微分为

$$\delta_R^n(f, g, h) = (d_A^n f, d_B^n g, \phi f - g\phi_\star^{\otimes n} - d_{A,B}^{n-1} h), \tag{33}$$

对于 $(f, g, h) \in C^n(A_\star, A) \oplus C^n(B_\star, B) \oplus C^{n-1}(A_\star, B)$。于是，相应的上同调 $H^\bullet(\phi_\star, \phi)$定义为 Rota-Baxter 算子态射 ϕ的上同调。（见定义 3.2）

给定一个 Rota-Baxter算子态射 $\phi: R_A \to R_B$，我们得到一个新的权重 0 的 Rota-Baxter 算子 $R_{\phi!}: \phi! \to \phi!$ 其中，$R_{\phi!}(a + b_1 + b_2\phi) = R_A(a) + R_B(b_1) + R_B(b_2)\phi$，$a + b_1 + b_2\phi \in \phi! = A + B + B\phi$ （见引理 3.4）。由此，根据定理 3.1

命题 4.1。设 $\phi: R_A \to R_B$ 是一个 Rota-Baxter算子态射，其中 $R_A: A \to A$ 和 $R_B: B \to B$ 是权重 0 的 Rota-Baxter 算子。那么，Rota-Baxter算子态射 ϕ 的上同调与 $R_{\phi!}: \phi! \to \phi!$ 的上同调同构。

4.2. 结合 r-矩阵弱态射的上同调比较定理。Aguiar[1] 引入了结合 r-矩阵的概念，将其作为经典 r-矩阵的结合类比。结合 r-矩阵可以看作一个 $\mathcal{O}$-算子。

设 A 是一个结合代数，且 $r \in \wedge^2 A$，其中 r 诱导出一个斜对称线性映射 $r^\sharp: A^* \to A$，定义如下

$$\langle \nu, r^\sharp(\mu) \rangle = r(\mu, \nu), \mu, \nu \in A^*, \tag{34}$$

其中，$\langle , \rangle$ 表示 A 与 A^*中元素之间的配对。

定义 4.1. 设 A是一个结合代数。若 r 满足 $[[r, r]] = 0$，则称 $r \in \wedge^2 A$ 为一个结合 r-矩阵，其中 $[[r, r]] \in A \otimes A \otimes A$ 定义如下

$$[[r, r]](\mu, \nu, \omega) = \langle r^\sharp(\mu) r^\sharp(\nu), \omega \rangle + \langle r^\sharp(\nu) r^\sharp(\omega), \mu \rangle + \langle r^\sharp(\omega) r^\sharp(\mu), \nu \rangle,$$

对于 $\mu, \nu, \omega \in A^*$。

下面的结果说明了结合 r-矩阵与 $\mathcal{O}$-算子之间的关系。

命题 4.2.（[3]） $r \in \wedge^2 A$ 是一个结合 r-矩阵，当且仅当诱导映射 $r^\sharp: A^* \to A$ 是关于余伴随 A-双模A^*作用在 A 上的一个 $\mathcal{O}$-算子。

设 A 是一个结合代数，r_1和 $r_2 \in \wedge^2 A$ 是两个 r 矩阵。

定义 4.2. 从 r_1 到 r_2 的弱态射由一对 (ϕ, ψ) 构成，其中包括一个结合代数态射 ϕ: $A \to A$ 和一个线性映射 $\psi: A \to A$，满足

$$\begin{aligned}(\psi \otimes \mathrm{Id_A})(\mathrm{r_2}) &= (\mathrm{Id_A} \otimes \phi)(\mathrm{r_1}),\\ \psi(\phi(a)b) &= a\psi(b),\\ \psi(a\phi(b)) &= \psi(a)b.\end{aligned} \tag{35}$$

结合 r-矩阵的弱态射也与 [7] 中相应 $\mathcal{O}$-算子之间的态射有关，如下所示。

命题 4.3. 设 r_1、$r_2 \in \wedge^2 A$ 是结合代数 A 上的两个结合 r-矩阵。那么，(ϕ, ψ) 是从 r_1 到 r_2 的弱态射，当且仅当 (ϕ, ψ^*) 是从 $r_1^\sharp$ 到 $r_2^\sharp$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射。

于是，我们将从 $r_1^\sharp : A^* \to A$ 到 $r_2^\sharp : A^* \to A$ 的 $\mathcal{O}$-算子态射 (ϕ, ψ^*) 的上同调，视为从 r_1 到r_2 的弱态射 (ϕ, ψ) 的上同调。

根据引理 3.4，存在一个由下式定义的 $\mathcal{O}$-算子 $r_{\phi!}^\sharp : \psi^*! \to \phi!$

$$r_{\phi!}^\sharp(\mu + \nu_1 + \nu_2\phi) = r_1^\sharp(\mu) + r_2^\sharp(\nu_1) + r_2^\sharp(\nu_2)\phi$$

对 $\mu+\nu_1+\nu_2\phi \in \psi^*!$ 而言，其中 $\psi^*! = A^*+A^*+A^*\phi$ 且 $\phi! = A+A+A\phi$。由定理 3.1，$\mathcal{O}$- 算子 $r_{\phi!}^\sharp$ 的上同调与一个从 $r_1^\sharp$ 到 $r_2^\sharp$ 的 $\mathcal{O}$- 算子态射 (ϕ, ψ^*) 的上同调同构。

若 $\psi^*! = A^* + A^* + A^*\phi$，则 $(A + A + A\phi)^* = (\phi!)^*$ 作为 $\phi!$-模，那么$\mathcal{O}$-算子 $r_{\phi!}^\sharp$ 对应于某个 r-矩阵 $r_{\phi!} \in \phi! \wedge \phi!$（见命题 4.2）。因此，我们得到了结合$r$-矩阵弱态射的上同调比较定理（CCT）。

References

[1] M. Aguiar。《无穷小 Hopf 代数》，载于《Hopf 代数理论新趋势》，La Falda，1999年，载于: *Contemp. Math.*，第267卷，Amer. Math. Soc.，美国罗得岛州普罗维登斯，2000年，第1–29页。[2] C. Bai。《经典 Yang-Baxter 方程的统一代数方法》。

J. Phys. A Math. ( ) - 。[3] C. Bai。《

Theor. 40 2007 11073 11082
Frobenius 代数的双重构造、Connes 余循环及其对偶性》。

J. ( ) - 。[4] G. Baxter。

Noncommut. Geom. 4 2010 475 530
《其解可由一个简单代数恒等式推出的解析问题》。

Pac. ( ) – 。[5] C.

J. Math. 10 1960 731 742
Chevalley 和 S. Eilenberg。《李群与李代数的上同调理论》。

Trans. ( ), - 。[6] A. Connes

Amer. Math. Soc. 63 1948 85 124
和 D. Kreimer。《量子场论中的重整化与黎曼-希尔伯特问题》。I. 图的 Hopf 代数结构与主定理。 *Commun. Math. Phys.* 210(1)（2000年）249-273。[7] A. Das。《结合 Rota-Baxter 算子的变形》。 *J. Algebra* 560 (2020年), 144-180。[8] K. Ebrahimi-Fard 和 L. Guo。《Rota-Baxter 代数与 dendriform 代数》。

J. Pure Appl. ( ) ( ) - 。[9] M.

Algebra 212 2 2008 320 339
Gerstenhaber。《结合环的上同调结构》。 *Ann. of Math.* 78(2)（1963年），267-288。[10] M. Gerstenhaber。《论环与代数的变形》。 *Ann. of Math.* 79 (1964年) 59-103。[11] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack。《论代数态射与图表的变形》。*Trans. Amer. Math. Soc.* 279(1)（1983年）1-50。[12] M. Gerstenhaber 和 S.D. Schack。《论代数态射的上同调》。

J. Algebra ( ) - 。
95 1985 245 262

[13] L. Guo。《Rota-Baxter 代数》。International Press（美国）与 Higher Education Press（中国），2012年。[14] G. Hochschild。《结合代数的上同调群》。 *Ann. of Math.* 46(2)（1945年），58-67。[15] K. Kodaira。《解析族中复流形的紧子流形的特征系完备性定理》。 *Ann. of Math.* 75 (2)（1962年）146-162。[16] K. Kodaira。《复流形中紧子流形的稳定性》。 *Amer. J. Math.* 85 (1963年) 79-94。[17] J.-L. Loday。《双代数》，载于：《双代数与相关算子》，载于：《数学讲义》，第1763卷，Springer，柏林，2001年，第7-66页。[18] G.-C. Rota。《Baxter 代数与组合恒等式，I》。 *Bull. Am. Math. Soc.* 75 (1969年) 325-329。[19] G.-C. Rota。《Baxter 代数与组合恒等式，II》。 *Bull. Am. Math. Soc.* 75 (1969年) 330-334。[20] S. F. Siegel 和 S. J. Witherspoon。《群代数的 Hochschild 上同调环》。

Proc. ( ) ( ), -

London Math. Soc. 79 1 1999 131 157
。[21] Tang, Rong ； Bai, Chengming ； Guo, Li 和 Sheng, Yunhe。《 $\mathcal{O}$- 算子的变形及其控制上同调》。 *Comm. Math. Phys.* 368(2)（2019年）665-700。[22] K. Uchino。《泊松几何的量子类比、相关 dendriform 代数与 Rota-Baxter 算子》。 *Lett. Math. Phys.* 85(2–3)（2008年）91-109。

School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei, 230601, China
Email address: 18715070845@163.comSchool of Mathematical Sciences,
Anhui University, Hefei, 230601, China*Email address*: baoyh@ahu.edu.cn
School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei, 230601, China
Email address: fudongxing920811@126.com