arXiv:2303.03647v1 [math.NT] 7 Mar 2023

与 MEX 相关的分拆函数的奇偶分布与整除性

SUBHRAJYOTI BHATTACHARYYA、RUPAM BARMAN、AJIT SINGH 和 APU KUMAR SAHA

ABSTRACT. Andrews 和 Newman 为正整数 n 的整数分拆 λ 引入了 mex 函数 $\mathrm{mex}_{A,a}(\lambda)$：它是与 a 模 A 同余、但不是 λ的部分的最小正整数。随后，他们将 $p_{A,a}(n)$ 定义为满足 $\mathrm{mex}_{A,a}(\lambda) \equiv a \pmod{2A}$ 的 n 的分拆 λ 的数量。他们求出了任意正整数 t对应的 $p_{t,t}(n)$ 和 $p_{2t,t}(n)$ 的生成函数，并研究了若干较小 t 值的算术性质。本文研究所有正整数m 和 t对应的分拆函数 $p_{mt,t}(n)$。我们证明，对于充分大的 X，使 $p_{mt,t}(n)$ 为偶数的所有正整数 $n \leq X$ 的数量，对任意正整数 m和 t，至少为 $\mathcal{O}(\sqrt{X/3})$。我们还证明，对于充分大的 X，使 $p_{mp,p}(n)$ 为奇数的所有正整数 $n \leq X$ 的数量，对所有满足 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 的情形以及所有满足 $p \equiv 1 \pmod 3$ 的素数，至少为 $\mathcal{O}(\log\log X)$。最后，我们建立了将普通分拆函数与$p_{mt,t}(n)$ 联系起来的恒等式。

1. 引言

集合 S 中正整数的最小排除数（或称“mex”）函数，定义为不属于 S 的最小正整数。Andrews 和 Newman [2] 最近将此函数推广到了整数分拆。非负整数的一个分拆 n 是由正整数组成的非递增序列，其和为 n。给定 n 的一个分拆 λ，他们将 mex 函数 $\mathrm{mex}_{A,\,a}(\lambda)$ 定义为：与 a 模 A 同余且不属于 λ 的最小正整数。接着，他们利用 $\mathrm{mex}_{A,\,a}(\lambda)$ 将函数 $p_{A,\,a}(n)$ 定义为满足以下条件的 n 的分拆 λ 的数量

$$\mathrm{mex}_{A,a}(\lambda) \equiv a \pmod{2A}.$$

例如，考虑 $n = 5$、$A = 3$ 和 $a = 1$。在表 1 中，我们列出了 5 的七个分拆 λ，以及每个 λ对应的 $\mathrm{mex}_{3,1}(\lambda)$ 值。我们看到，5 的分拆中有三个满足 $\mathrm{mex}_{3,1}(\lambda) \equiv 1 \pmod 6$。因此，$p_{3,\,1}(5) = 3$。Andrews 和 Newman [2, 引理 9] 证明了 $p_{t,\,t}(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{t,t}(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{tn(n+1)/2} \tag{1.1}$$

Date：2023年3月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 05A17, 11P83。*Key words and phrases.* 最小排除数；mex 函数；整数分拆；分布。

分拆 λ	$\mathrm{mex}_{3,1}(\lambda)$
5	1
$4+1$	7
$3+2$	1
$3+1+1$	4
$2+2+1$	4
$2+1+1+1$	4
$1+1+1+1+1$	4

TABLE 1. $\mathrm{mex}_{3,1}(\lambda)$ 的值

而 $p_{2t,\ t}(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{2t,t}(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{tn^2}, \tag{1.2}$$

$_\infty$其中 $(a;\ q)_\infty := \prod_{j=0}$ $(1-aq^j)$。

利用生成函数和初等的 q-级数变换，Andrews 和 Newman [2] 证明了 $p_{1,\ 1}(n)$ 等于具有非负 crank 的 n 的分拆数，而 $p_{3,3}(n)$ 等于秩为 ≥ -1 的 n 的分拆数。他们还证明了 $p_{2,1}(n)$ 等于将 n 分拆为偶数部件的分拆数。他们进一步证明了 $p_{4,2}(n) - p_o(n)$ 等于将n 分拆为模 32 下同余于 $\pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10$ 的部件的分拆数，而 $p_{6,3}(n) - p_o(n)$ 等于将 n 分拆为模 24 下同余于 $\pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8$ 的部件的分拆数，其中 $p_o(n)$ 表示将 n 分拆为奇数部件的分拆数。

在一篇近期论文中，[4], 第二位和第三位作者建立了将普通分拆函数与 $p_{t,\ t}(n)$ 和 $p_{2t,\ t}(n)$ 联系起来的恒等式，并将 Andrews 奇异过分拆函数与 $p_{t,\ t}(n)$ 联系起来，对所有 $t \geq 1$ 均成立。在另一篇近期论文中，[3],第二位和第三位作者利用模形式理论和 η-商，证明了对所有 $\alpha \geq 1$，$p_{2^\alpha,\ 2^\alpha}(n)$ 和 $p_{3\cdot 2^\alpha,\ 3\cdot 2^\alpha}(n)$ 几乎总是偶数。

本文研究所有正整数m 和 t下的分拆函数$p_{mt,\ t}(n)$。我们首先求出其生成函数，随后研究$p_{mt,\ t}(n)$模 2 的分布。在下述定理中，我们对所有正整数 t 和 m下$p_{mt,\ t}(n)$的偶数值分布给出了定量估计。

定理 1.1. 设 t 和 m 为正整数。则当 X充分大时，有

$$\#\{n \leq X : p_{mt,t}(n) \equiv 0 \pmod 2\} \gg \sqrt{X/3}. \tag{1.3}$$

接下来，我们对某些正整数 t 和 m下$p_{mt,\ t}(n)$的奇数值分布给出定量估计。

定理 1.2. 设 m 为正整数，p 为素数，且 $m \not\equiv 0 \pmod 3$和 $p \equiv 1 \pmod 3$。则当 X 充分大时，有

$$\#\{n \leq X : p_{mp,p}(n) \equiv 1 \pmod 2\} \geq \beta \log\log X,$$

其中 $\beta > 0$ 为常数。

最后，我们在第 3 节中建立了将普通分拆函数 $p(n)$ 与 $p_{mt,\ t}(n)$ 联系起来的恒等式，该恒等式对所有正整数 t 和 m 均成立。利用这些恒等式，

我们证明，Ramanujan 著名同余式对 $p(n)$ 成立时，对 $p_{mt,\ t}(n)$ 也同样成立。

2. Parity distribution of $p_{mt,\ t}(n)$

在本节中，我们首先证明对所有正整数 t 和 m，$p_{mt,t}(n)$的生成函数。

引理 2.1. 设 t 和 m 为正整数。则

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{mt,t}(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t}. \tag{2.1}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t}\\
&=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(q^{\frac{1}{2}(4n^2m-2n(m-2))t}-q^{\frac{1}{2}((4n^2+4n+1)m-(2n+1)(m-2))})\\
&=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{2}(4n^2m-2n(m-2))t}(1-q^{2mn+1)t})\\
&=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}q^{t+(m+1)t+(2m+1)t+\cdots+((2n-1)m+1)t}(1-q^{(2mn+1)t})\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{t+(m+1)t+(2m+1)t+\cdots+((2n-1)m+1)t}}{\prod_{r=1,r\neq t(2mn+1)}^{\infty}(1-q^r)}.
\end{aligned}$$

最后一个表达式显然是$p_{mt,t}(n)$的生成函数。 □

分别在引理 2.1 中取 $m=1$ 和 2，即可得到 (1.1) 和 (1.2)。

2.1. $p_{mt,t}(n)$ 的奇偶分布：偶数情形。本节中，我们证明定理 1.1。在 [1], Ahlgren 对算术级数中普通分拆函数 $p(n)$ 的奇偶分布给出了定量估计。我们对定理 1.1 的证明受到 Ahlgren [1] 的启发。

定理 1.1 的证明。首先回顾欧拉五边形数定理 [5,(1.3.18)],

$$(q;q)_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n}{2}(3n-1)}. \tag{2.2}$$

将 (2.2) 代入 (2.1)，再对模 2 取模，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t} \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n(3n-1)}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} p_{mt,t}(n)q^n \pmod 2. \tag{2.3}$$

我们对所有 $k\in\mathbb{Z}$定义 $u_k=\frac{1}{2}k(3k-1)$。然后，对于每个 n，我们定义

$$\mathcal{N}_n := \{n-u_k : 0\le u_k\le n \text{ for some } k\in\mathbb{Z}\}.$$

显然，对于

$$\sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n := \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t},$$

我们有

$$\#\{n \le X : b(n) \text{ is odd}\} = o(X). \tag{2.4}$$

现在，比较 (2.3) 两边 q^n 的系数，我们得到

$$b(n) \equiv \sum_{s\in\mathcal{N}_n} p_{mt,t}(s) \pmod 2. \tag{2.5}$$

注意，对于 $k \ge 1$，若 $u_{-(k-1)} \le n < u_k$，则 $|\mathcal{N}_n| = 2k-1$；若 $u_k \le n < u_{-k}$，则 $|\mathcal{N}_n| = 2k$。因此，当且仅当 n 属于形如 $B_k := [u_{-(k-1)}, u_k)$ 的区间时，$|\mathcal{N}_n|$ 为奇数。存在一个正常数 D，使得当 X 足够大时，$B_k \subset [0, X], 0 \le k \le D\sqrt{X}$。$B_k$ 的长度为 $\gg k$ 这一事实意味着

$$\#\{n \le X : n \in B_k \text{ for some } k\} \gg \sum_{k=0}^{D\sqrt{X}} k \gg X.$$

因此，$\#\{n \le X :$ $|\mathcal{N}_n|$ 为奇数 $\} \gg X$，结合 (2.4) 可得

$$\#\{n \le X : |\mathcal{N}_n| \text{ is odd}, b(n) \text{ is even}\} \gg X.$$

由 (2.5) 可知，对于每个 $n \in \{n \le X : n \in B_k$，存在某个 $k\}$, $p_{mt,\ t}(s)$ 对某个 $s \in \mathcal{N}_n$ 为偶数。这给出

$$\#\{(n,s) : n \le X,\ s \in \mathcal{N}_n,\ p_{mt,t}(s) \text{ is even}\} \gg X.$$

现在我们希望计算 $N_{s,\ X} := \#\{n \le X :\ s \in \mathcal{N}_n\}$。对于固定的 s, $N_{s,\ X}$ 不超过 $\#\{k \in \mathbb{Z} :\ 0 \le u_k \le X\}$，且这个数显然是 $\ll \sqrt{3X}$。因此，$N_{s,\ X} \ll \sqrt{3X}$，从而得到 (1.3)。定理的证明至此完成。□

2.2. $p_{mt,\ t}(n)$ 的奇偶分布：奇数情形。本节证明定理 1.2。为证明定理 1.2，我们先证明以下引理。我们的证明受到 Kolberg [6] 和 Ray [7]的启发。

引理 2.2. 设 t 和 m 为正整数。则对于任意正整数 n，有

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_{mt,t}\left(n - \frac{s(3s-1)}{2}\right) + \sum_{s=1}^{\infty} p_{mt,t}\left(n - \frac{s(3s+1)}{2}\right)$$
$$\equiv \begin{cases} 1 \pmod 2, & \text{if } n = \frac{1}{2}((mk^2-(m-2)k)t) \text{ for some } k \in \mathbb{N}; \\ 0 \pmod 2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。由 (2.2)，我们有

$$(q;q)_\infty \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n}{2}(3n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n}{2}(3n+1)} \pmod 2. \tag{2.6}$$

将（2.6）代入（2.1），可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{mt,t}(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t}$$

$$\equiv \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t} \pmod 2$$
$$\equiv \frac{\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t}}{\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(3n-1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(3n+1)}{2}}} \pmod 2.$$

因此，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\infty} p_{mt,t}\left(n-\frac{s(3s-1)}{2}\right)+\sum_{s=1}^{\infty} p_{mt,t}\left(n-\frac{s(3s+1)}{2}\right)\right)q^n$$
$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t} \pmod 2.$$

现在，对于任意非负整数 n，比较上述同余式两边 q^n 的系数，即得所需表达式。□

引理 2.3。设 t、m、r 为满足 $r \geq 2$ 的正整数。若对于任意正整数 k，$r(3r-1)$ 不具有形式 $(mk^2-(m-2)k)t$，则存在一个整数 $n \in [2r-1, \lceil \frac{r(3r-1)}{2} \rceil]$，使得 $p_{mt,t}(n)$ 为奇数。

证明。我们使用反证法证明该引理。考虑满足以下条件的 $r \geq 2$：对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$r(3r-1)$ 不具有形式 $(mk^2-(m-2)k)t$。若可能，设对于任意 $n \in [2r-1, \lceil \frac{r(3r-1)}{2} \rceil]$，$p_{mt,t}(n)$ 为偶数。

对于一个整数 a，令

$$\mathcal{S}(a) := \frac{r(3r-1)}{2}-\frac{k(3a-1)}{2},$$
$$\mathcal{R}(a) := \frac{r(3r-1)}{2}-\frac{a(3a+1)}{2}.$$

根据引理 2.2，我们有

$$\sum_{a=0}^{\infty} p_{mt,t}(\mathcal{S}(a))+\sum_{a=1}^{\infty} p_{mt,t}(\mathcal{R}(a)) \equiv 0 \pmod 2. \tag{2.7}$$

容易验证，当 $a \geq r+1$ 时，$\mathcal{S}(a) < 0$；并且对于 $a \geq r$，$\mathcal{R}(a) < 0$。我们约定，当 n 为负整数时，$p_{mt,t}(n) = 0$。因此，根据（2.7），我们可以将级数截断为有限和，形式为

$$\sum_{a=0}^{r} p_{mt,t}(\mathcal{S}(a))+\sum_{a=1}^{r-1} p_{mt,t}(\mathcal{R}(a)) = 1+\sum_{a=0}^{r-1} p_{mt,t}(\mathcal{S}(a))+\sum_{a=1}^{r-1} p_{mt,t}(\mathcal{R}(a)). \tag{2.8}$$

现在，对于任意固定的正整数 $r \geq 2$，$\mathcal{S}(a)$是 a的减函数。注意到 $\mathcal{S}(0) = \frac{r(3r-1)}{2}$，并且

$$\mathcal{S}(r-b) = \frac{1}{2}(6rb-3b^2-b) = \frac{3b}{2}\left(2r-\left(b+\frac{1}{3}\right)\right) \geq 2r-1,$$

其中 $b \in \{1,2,\ldots,r-1\}$。因此，对于 $a \in \{0,1,\ldots,r-1\}$，$\mathcal{S}(a) \in [2r-1, \lceil \frac{r(3r-1)}{2} \rceil]$。类似地，我们可以证明，对于每个 $a \in \{1,2,\ldots,r-1\}$，$\mathcal{R}(a) \in [2r-1, \lceil \frac{r(3r-1)}{2} \rceil]$。根据我们的假设，当 $n \in [2r-1, \lceil \frac{r(3r-1)}{2} \rceil]$ 时，$p_{mt,t}(n)$ 是偶数。因此，$\sum_{a=0}^{r-1} p_{mt,t}(\mathcal{S}(a))$ 和 $\sum_{a=1}^{r-1} p_{mt,t}(\mathcal{R}(a))$ 都是偶数，因而求和式 (2.8) 是奇数，这与 (2.7) 矛盾。引理的证明至此完成。□

在引理 2.3 中，我们已经看到，如果 $r(3r-1)$ 不具有 $(mk^2-(m-2)k)t$ 的形式（对任意正整数 k），那么存在一个整数 $n \in [2r-1, r_{(3r-1)_2}]$，使得 $p_{mt,\ t}(n)$ 是奇数。在下面的引理中，我们证明：如果 $r \equiv 2 \pmod 3$，那么对于任意满足 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 的正整数 m、k，以及任意满足 $p \equiv 1 \pmod 3$ 的素数，$r(3r-1) \neq (mk^2-(m-2)k)t$。

引理 2.4. 设 s 为满足 $s \equiv 2 \pmod 3$ 的正整数。那么，对于任意满足 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 的正整数 m、k，以及满足 $p \equiv 1 \pmod 3$ 的任意素数，$s(3s-1)$ 都不能写成 $(mk^2-(m-2)k)p$ 的形式。

证明。我们用反证法证明该引理。给定满足 $s \equiv 2 \pmod 3$ 的正整数，假设对于某些正整数 k、m 以及满足 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 和 $p \equiv 1 \pmod 3$ 的素数 p，有 $s(3s-1) = pmk^2-(m-2)kp$。那么，$(m-2)^2p^2+4mps(3s-1)$ 必为某个整数的平方。因此，存在一个正整数 ν，使得

$$\nu((m-2)p+\nu) = mps(3s-1). \tag{2.9}$$

注意到 $p|\nu$，因此，$\nu = pu$，其中某个 $u \in \mathbb{N}$。于是，由 (2.9) 得 $p^2u(u+m-2) = mps(3s-1)$。由于 $p \equiv 1 \pmod 3$，我们有

$$u(u+m-2) \equiv 2ms \pmod 3. \tag{2.10}$$

现在，若 $m \equiv 1 \pmod 3$，则 $u(u-1) \equiv 2s \pmod 3$。若 $u \equiv 1 \pmod 3$，则 $u-1 \equiv 0 \pmod 3$，因此 $u(u-1) \equiv 0 \pmod 3$，这与事实 (2.10) 矛盾，因为 $s \equiv 2 \pmod 3$。若 $u \equiv 2 \pmod 3$，则 $u-1 \equiv 1 \pmod 3$，于是我们有 $u(u-1) \equiv 2 \pmod 3$，这同样与事实 (2.10) 矛盾。再若 $m \equiv 2 \pmod 3$，则 $u^2 \equiv s \pmod 3$，因为 $3 \nmid \nu$, $u^2 \equiv 1 \pmod 3$，这与 (2.10) 矛盾。引理的证明至此完成。□

结合引理 2.3 和引理 2.4，我们立即得到：若 m 是正整数，且 p 是满足 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 和 $p \equiv 1 \pmod 3$ 的素数，则对于无穷多个整数 n，$p_{mp,p}(n)$ 为奇数。现在我们证明定理 1.2，该定理给出了当 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 和 $p \equiv 1 \pmod 3$ 时，$p_{mt,t}(n)$ 的奇数值的分布的定量估计。

定理 1.2 的证明。为证明该定理，我们使用引理 2.3 和引理 2.4。设 n 为正整数。我们要计算集合中元素的个数

$$\{1 \le n \le X : p_{mp,p}(n) \text{ is an odd integer}\}.$$

接下来，我们对 $k \ge 0$ 定义 a_k，递归如下。

$$a_0 := s \text{ and } a_k := \frac{1}{2}a_{k-1}(3a_{k-1}-1), \text{ for } k \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

注意，对于所有非负整数 k，$a_k \equiv 2 \pmod 3$，且 a_k 是一个严格递增数列，其中 $a_{k+1} - (2a_k-1) \ge 2$。现在我们将区间 $[1, X]$ 划分如下。

$$[1, X] = [1, a_1) \cup [a_1, a_2) \cup \cdots \cup [a_\nu, X],$$

其中，ν 是满足 $a_\nu \le X$的最大整数。由引理 2.4可知，对于固定的正整数 s 且 $s \equiv 2$ (模 3)，任意满足 $m \not\equiv 0$ (模 3)的正整数 m、k 以及任意满足 $p \equiv 1$ (模 3)的素数，都有 $s(3s-1)$ $\neq pmk^2-(m-2)kp$。因此，由引理 2.3，我们可以找到一个正整数 $n \in [2a_k-1, a_{k+1}] \subset [a_k, a_{k+1}]$

使得$p_{mp,\ p}(n)$为奇整数。则满足$p_{mp,\ p}(n)$为奇整数的 $n \leq X$ 的个数至少为 $\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor$。现在，对于所有 $k \geq 0$，我们有

$$a_k = \frac{a_{k-1}(3a_{k-1}-1)}{2} \leq \frac{3}{2}a_{k-1}^2 \leq \cdots \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2^{k-1}-1} \leq 2^{2^k}.$$

由于 $a_\nu \leq X \leq a_{\nu+1}$，我们得到 $\nu \geq \beta \log\log X$，其中某个常数为 $\beta > 0$。这就完成了定理的证明。□

3. Mex-related partitions and relations to ordinary partition

令 $p(n)$ 表示普通分拆函数。我们约定，当 n 是负整数时，$p(n) = 0$。在下面的定理中，我们用 $p(n)$ 表示 $p_{mt,\ t}(n)$。

定理 3.1. 设 t、m 为正整数。那么，对于所有非负整数 n，有

$$p_{mt,t}(n) = p(n) + \sum_{r=1}^{\infty} p(n - tr(2rm - m + 2)) - \sum_{s=1}^{\infty} p(n - t(2s-1)(sm - m + 1)). \tag{3.1}$$

证明. 分拆函数 $p(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty}.$$

由（2.1），我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} p_{mt,t}(n)q^n \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(mn^2-(m-2)n)t} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} q^{tr(2rm-m+2)} - \sum_{s=1}^{\infty} q^{t(2s-1)(sm-m+1)}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n) + \sum_{r=1}^{\infty} p(n - tr(2rm - m + 2)) - \sum_{s=1}^{\infty} p(n - t(2s-1)(sm - m + 1))\right) q^n.
\end{aligned}$$

因此，对于所有非负整数 n，我们有

$$p_{mt,t}(n) = p(n) + \sum_{r=1}^{\infty} p(n - tr(2rm - m + 2)) - \sum_{s=1}^{\infty} p(n - t(2s-1)(sm - m + 1)). \tag{3.2}$$

定理的证明至此完成。 □

在下面的定理中，我们证明 $p_{mt,t}(n)$ 满足拉马努金型同余式，而这些同余式可由普通分拆函数 $p(n)$ 所满足的同余式推出。

定理 3.2. 设 k、m、$a \geq 1$ 和 b 为整数。假设对于所有非负整数 n，均有 $p(an+b) \equiv 0 \pmod{k}$。那么，对于所有 $t \geq 1$，我们有

$$p_{mat,at}(an+b) \equiv 0 \pmod{k}$$

对所有非负整数 n。

证明。设 $n \geq 0$。由 (3.1)，我们得到

$$p_{mat,at}(an+b) = p(an+b) + \sum_{r=1}^{\infty} p(a(n-tr(2rm-m+2))+b) - \sum_{s=1}^{\infty} p(a(n-t(2s-1)(sm-m+1))+b). \tag{3.3}$$

注意，(3.2) 中各求和式剩余的项满足：$n-tr(2rm-m+2)$ 和 $n-t(2s-1)(sm-m+1)$ 均为非负。因此，(3.3) 中也同样如此。现在，若对每个非负整数 ℓ，都有 $p(\ell a+b) \equiv 0$ (模 k)，则由 (3.3) 可得 $p_{mat,at}(an+b) \equiv 0$ (模 k)。证明完毕。□

作为定理 3.2 的一个应用，我们发现，对于某些无穷族的 t 和 m，$p_{mt,t}(n)$ 满足拉马努金著名同余式。拉马努金功不可没，下面给出 $p(n)$ 的“拉马努金同余式”。若 $k \geq 1$，则对每个非负整数 n，我们有

$$\begin{aligned} p\left(5^k n + \delta_{5,k}\right) &\equiv 0 \pmod{5^k}; \\ p\left(7^k n + \delta_{7,k}\right) &\equiv 0 \pmod{7^{[k/2]+1}}; \\ p\left(11^k n + \delta_{11,k}\right) &\equiv 0 \pmod{11^k}, \end{aligned}$$

其中 $\delta_{p,\,k} := 1/24$ 模 p^k，当 $p = 5$、7、11 时成立。在下文中，我们证明当 $a = 5^k$、7^k、11^k 时，$p_{mat,\,at}(n)$ 满足 Ramanujan 同余式。

推论 3.3. 对所有的 k、$t \geq 1$、$m \geq 1$，以及每个非负整数 n，我们有

$$\begin{aligned} p_{m\cdot 5^k t, 5^k t}\left(5^k n + \delta_{5,k}\right) &\equiv 0 \pmod{5^k}; \\ p_{m\cdot 7^k t, 7^k t}\left(7^k n + \delta_{7,k}\right) &\equiv 0 \pmod{7^{[k/2]+1}}; \\ p_{m\cdot 11^k t, 11^k t}\left(11^k n + \delta_{11,k}\right) &\equiv 0 \pmod{11^k}. \end{aligned}$$

证明. 将 $p(n)$ 的 Ramanujan 同余式与定理 3.2 结合起来，我们立即得到：当 $a = 5^k$、7^k、11^k 时，$p_{mat,\,at}(n)$ 满足 Ramanujan 同余式。证明完毕。□

References

[1] S. Ahlgren, *Distribution of parity of the partition function in arithmetic progressions*, Indag. Mathem. 12（1999），173–181。[2] G. E. Andrews 和 D. Newman, *The minimal excludant in integer partitions*, J. Integer Sequences 23（2020年），文章编号 20.2.3。[3] R. Barman 和 A. Singh, *On Mex-related partition functions of Andrews and Newman*, Res. Number Theory 7（2021），第 3 期，论文编号 53，共 11 页。[4] R. Barman 和 A. Singh, *Mex-related partition functions of Andrews and Newman*, J. Integer Seq. 24（2021），第 6 期，文章编号 21.6.3，共 12 页。

[5] B. C. Berndt, *Number theory in the Spirit of Ramanujan*, 美国数学会, 罗德岛州普罗维登斯, 2006年。
[6] O. Kolberg, *Note on the parity of the partition function*, Math. Scand. 7 (1959年), 377–378. [7] C. Ray, *Divisibility and distribution of mex-related integer partitions of Andrews and New-man* 14 2023 592 , Int. J. Number Theory（）第03期, 581–. [8] R. da Silva 和 J. A. Sellers, *Parity considerations for the Mex-related partition functions of Andrews and Newman* 23 2020 20 5 7 , J. Integer Sequences（）, 文章编号。。。

Department of Mathematics, National Institute of Technology Agartala, Tripura, India, PIN- 799046*Email address*: jyotisubhra785@gmail.com

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Guwahati, Assam, India, PIN- 781039*Email address*: rupam@iitg.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Guwahati, Assam, India, PIN- 781039*Email address*: ajit18@iitg.ac.in

Department of Mathematics, National Institute of Technology Agartala, Tripura, India, PIN- 799046*Email address*: apusaha_nita@yahoo.co.in