arXiv:2303.03653v1 [math.AT] 7 Mar 2023

范畴化的 Dwyer-Kan 对应

Till Heine

2023年3月8日

摘要

众所周知，经典的 Dold-Kan 对应可以范畴化为如下等价：2-单纯稳定 ∞-范畴的 ∞-范畴与稳定 ∞-范畴的连通链复形之间的等价。在本文中，我们将这些概念扩展，以给出经典 Dwyer-Kan 对应的范畴化：通过证明 2-重复式稳定 ∞-范畴的 ∞-范畴等价于带有右伴随的连通链复形的 ∞-范畴。

目录

1 引言 **2**

2 指标范畴 **4**
2.1 2-范畴术语.4 2.2 指标范畴与 2-范畴结构.5

3 经典对应 **7**
3.1 阿贝尔群的 Dold-Kan 对应.7 3.2 阿贝尔群的 Dwyer-Kan 对应.10 3.3 移位态射的可逆性.14

4 ∞-范畴化 代数预备知识 16
4.1 稳定 ∞-范畴.16 4.2 格罗滕迪克构造.17 4.3 ∞-范畴的伴随.21

5 范畴化的 Dold-Kan 对应 23
5.1 范畴化归一化链函子.23 5.2 范畴化 Dold-Kan 神经.26 5.3 等价 $\mathrm{C}\circ\mathrm{N}\simeq\mathrm{id}$.28 5.4 等价 $\mathrm{N}\circ\mathrm{C}\simeq\mathrm{id}$.29

6 范畴化 Dwyer-Kan 对应 **30**
6.1 范畴化归一化双链复形函子.30 6.2 范畴化 Dwyer-Kan 神经.32 6.3 等价 $\mathrm{C}\circ\mathrm{N}'\simeq$ id.37 6.4 等价 $\mathrm{N}'\circ\mathrm{C}\simeq$ id.37

7 展望 **41**

1 引言

经典的 Dold-Kan 对应

$$\mathrm{C}:\mathbf{Ab}_{\Delta}\leftrightarrow\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}):\mathrm{N}$$

将单纯阿贝尔群与连通链复形联系起来，在同伦代数中是一种有用的工具。在 [Dy21], 中，证明了这一对应关系针对稳定∞-范畴的以下范畴化版本：

定理。范畴化归一化链函子 C 与范畴化 Dold-Kan 神经 N

$$\mathrm{C}:\mathbf{St}_{\mathbb{\Delta}}\leftrightarrow:\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{St}):\mathrm{N}$$

将其扩展为 ∞-范畴与稳定 ∞-范畴的连通链复形的 ∞-范畴之间的等价，其中前者是 2-单纯 ∞- 范畴的范畴。

这种等价中涉及的构造本身也具有独立的研究价值，因为范畴化的 Dold-Kan神经推广了代数 K理论中的若干构造，例如 Waldhausen 的相对 $S_{\bullet}$构造。

有限线性序的单纯形范畴 Δ 的一个重要延拓，是有限循环序的循环范畴 Λ ，由 [Co83] 引入。Connes 利用循环对象所具有的额外对称性，在代数 A/k的 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_{\bullet}(A,A)$ 上引入了 Connes B-算子。即使在定义 Hochschild 同调的复形的链这一层面上，这个正次数的额外微分也已经存在。为了更好地理解这一额外结构如何融入 Dold-Kan 对应，引入单纯形范畴的更多变体将很有帮助。在本文中，以下变体尤其值得关注：

$$\Delta\subset\Xi\subset\Lambda_{\infty}.$$

这里， Ξ是通过在每个次数添加一个移位态射得到的双复形范畴，而抛循环范畴 Λ_{∞} 则是通过将这些移位态射取逆得到的。 [DK85] 的结果为这些指标范畴以及循环范畴提供了 Dold-Kan 对应的相应版本：

定理。归一化双链复形函子 C 和 Dwyer-Kan 神经 N′ 给出一个等价

$$\mathrm{C} : \mathbf{Ab}_{\Xi} \leftrightarrow \mathbf{DuCh}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) : \mathrm{N}'$$

在 duplicial 阿贝尔群范畴与范畴 DuCh≥0(Ab) 之间建立等价；后者由连通链复形 $(B_\bullet, d)$ 组成，并带有一个额外的正次数微分$\delta : B_\bullet \to B_{\bullet+1}$。

该等价限制为抛循环阿贝尔群范畴 $\mathrm{Ab}_{\Lambda_\infty}$ 与双链复形范畴 $(B_\bullet, d, \delta)$ 之间的等价，其中每个次数上的 $\mathrm{id} - d\circ\delta$ 和 $\mathrm{id} - \delta\circ d$ 都是可逆的。

它进一步限制为循环阿贝尔群范畴 Ab_{Λ} 与双链复形范畴 $(B_\bullet, d, \delta)$ 之间的等价，使得

$$(\mathrm{id}_{B_n} - d \circ \delta)^{n+1} \circ (\mathrm{id}_{B_n} - \delta \circ d)^n = \mathrm{id}_{B_n}$$

对于 $n \geq 0$。

在 [DKS21], 中开展的 perverse schober 理论发展过程中，自然出现了与抛循环阿贝尔群相关的双链复形实例。 [CDW23，第 5], 节讨论了一个例子，其范畴化导出了 ∞-范畴的球面复形这一概念。于是，对上述等价进行范畴化，应当得到稳定∞-范畴的连通球面复形的适当 ∞-范畴与抛循环稳定 ∞-范畴之间的等价。在 [DKSS21], 中朝这一结果迈出了一步：其中证明了，对于球面伴随，Waldhausen 的相对 $S_\bullet$ 构造具有自然的抛循环结构。

本文采用不同的方法，研究双循环情形。事实证明，这种方法尤其富有成效，因为我们已看到，在经典情形中，其他对应关系都源自双循环情形下的对应关系。我们的分析最终得到以下结论：

定理。范畴化归一化双链复形函子 C 与范畴化 Dwyer-Kan 神经 N′

$$\mathrm{C} : \mathbf{St}_{\Xi} \leftrightarrow: \mathbf{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathbf{St}) : \mathrm{N}'$$

扩展为 ∞-范畴的 2-双循环稳定 ∞-范畴与由稳定 ∞-范畴构成的连通链复形的∞-范畴之间的等价；其中，每个次数上的微分都存在右伴随函子，态射由与这些伴随函子相容的变换给出。

本文结构如下：第 2 节回顾文中提及的各种指标范畴，并说明它们自然的 2-范畴结构为何重要。随后，第 3 节介绍经典对应，并采用便于范畴化的约定。

为后续章节做准备，我们接下来简要回顾 ∞-范畴术语，尤其关注 ∞-范畴之间的伴随，它们

在我们的最终结果中尤为重要。第 5 节中，我们给出范畴化的 Dold-Kan 对应的一个版本，该版本来自 [Dy21], ，既为双循环情形中的范畴化提供了灵感，也是其证明过程中的一个步骤。我们还进一步讨论了经典同构 $X_\bullet \cong \mathrm{C}(X_\bullet) \oplus \mathrm{D}(X_\bullet)$ 的范畴化，其中 $X_\bullet \in \mathrm{Ab}_\Delta$ 是一个单纯阿贝尔群；这一同构在双循环情形的讨论中也十分重要。第 6 节致力于范畴化 Dwyer-Kan 对应以及主要结果的证明。具体而言，我们引入范畴化 Dwyer-Kan 神经构造，并给出相关示例。本文最后展望了该理论的进一步发展。

2 索引范畴

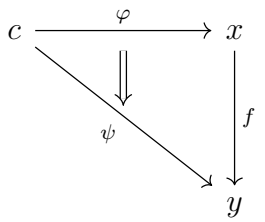
2.1 2-范畴术语

2-范畴 C 是一个以范畴 Cat（由范畴组成）为丰的范畴。我们用 $\mathrm{C}(x, y)$ 表示对象 $x, y \in \mathrm{C}$ 之间的态射范畴。对于一个 2-范畴 C，我们用 $\mathrm{C}^{(\mathrm{op},-)}$ 表示与 C 具有相同对象且态射范畴

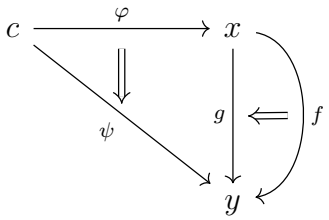
$$\mathbb{C}^{(\mathrm{op},-)}(x, y) = \mathbb{C}(y, x)$$

对于任意 2-范畴 C 和对象 $c \in \mathrm{C}$，我们如下引入松弛下范畴 $\mathrm{C}_{c/}$：

- $\mathrm{C}_{c/}$ 的对象是 1-态射 $c \to x$
- 从 $\varphi\colon c \to x$ 到 $\psi\colon c \to y$ 的 1-态射由一个 2-交换三角形给出



- 从 f 到 g 的 2-态射由一个 2-交换图给出



我们将经常遇到与对偶 2-范畴$\mathrm{C}^{(\mathrm{op},-)}$相关的松下范畴。在这些情况下，我们记作：

$$\mathbb{C}^{(\mathrm{op},-)}_{c/} := (\mathbb{C}^{(\mathrm{op},-)})_{c/}.$$

2.2 指标范畴与 2-范畴结构

本节旨在定义本文余下部分所用的指标范畴。对于阿贝尔群，我们将使用这些范畴的一范畴版本；而对于稳定的 ∞-范畴，我们需要这些范畴在范畴意义下的富化版本，并且也会考察其结构。

定义 2.1. 单纯形范畴 Δ 是一个范畴，其中对每个 $n \in \mathbf{N}$ 都有一个对象 $[n] = \{0, \ldots, n\}$，态射 $f\colon [m] \to [n]$ 由弱递增映射给出。通过将每个$[n]$ 视为偏序集范畴，可得到一个全忠实函子 $\Delta \to$Cat，映入小范畴范畴。范畴 Cat 自身具有典范的富集结构，因此单纯形范畴也具有 2-范畴结构。我们将这个 2-范畴记为$\mathbb{\Delta}$。具体而言，若且唯若对所有 $i \in [n]$ 都有 $f(i) \leq g(i)$，则单形 $f, g\colon [m] \to [n]$ 在 $\mathbb{\Delta}$ 中存在一个 2-态射 $f \Rightarrow g$。

在单纯形范畴中，我们可以找到如下的面态射 $\partial_i\colon [n-1] \to [n]$（其中 $0 \leq i \leq n$）：

$$\partial_i(j) = \begin{cases} j & j < i \\ j+1 & j \geq i \end{cases}$$

σ_i 的退化态射：$[n] \to [n-1]$（$0 \leq i \leq n-1$）定义如下：

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & j \leq i \\ j-1 & j > i \end{cases}$$

这些态射满足通常的单纯关系。我们用 $d_i\colon [n] \to [n-1]$ 和 $s_i\colon [n-1] \to [n]$ 表示 $\mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)}$ 中这些单形的对偶。存在一串伴随

$$d_0 \dashv s_0 \dashv d_1 \dashv \cdots \dashv s_{n-1} \dashv d_n. \tag{2.1}$$

例如，为了说明这一点，注意对于 $0 \leq i \leq n-1$，我们有等式 $\sigma_i \circ \partial_i = \mathrm{id}_{[n-1]}$，可以将其解释为自然变换 $\sigma_i \circ \partial_i \to \mathrm{id}_{[n-1]}$。此外，对于 $k \neq i$，我们还有 $\partial_i(\sigma_i(k)) = k$，以及 $\partial_i(\sigma_i(i)) = i+1$，因此还有一个自然变换 $\mathrm{id}_{[n]} \to \partial_i \circ \sigma_i$。这两个自然变换显然满足三角恒等式，因为偏序集范畴中的任何图表都交换。因此，这些 2-态射定义了 $\mathbb{\Delta}$ 中的一个伴随 $\sigma_i \dashv \partial_i$，以及 $\mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)}$ 中的一个伴随 $d_i \dashv s_i$。

定义 2.2. 抛循环范畴 Λ_∞ 是一个范畴：对于每个 $n \in \mathbf{N}$ 都有一个对象 $\langle n \rangle$，其态射 $f\colon \langle m \rangle \to \langle n \rangle$ 由满足周期性条件的弱递增映射 $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ 给出

$$f(a+m+1) = f(a) + n + 1 \text{ for each } a \in \mathbb{Z}.$$

通过忠实函子 $\Lambda_\infty \to$Cat 进行富化，其中再次将 Z 视为偏序集范畴，可得到一个 2-范畴 $\mathbb{\Lambda}_\infty$，其底层 1-范畴为 Λ_∞。

注意，Λ_∞ 中的任意态射 $f\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 限制为一个弱递增映射$\{0,\dots,m\} \to \{f(0)\ f(0)+1,\dots,f(0)+n+1\}$，并且由于周期性条件，它由这个限制唯一确定。反过来，任意满足 $g(m+1) \le g(0)+n+1$ 的弱递增映射 $g\colon \{0,\dots,m\} \to \mathbb{Z}$ 都唯一延拓为一个态射 $\tilde{g}\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$。由此可知，我们可以将 Δ 恢复为一个子范畴

$$\Delta \subset \Lambda_\infty.$$

特别地，面映射和退化态射定义于 Λ_∞。此外，我们在每个次数中都发现了以下可逆移位态射：

$$t_n : \langle n\rangle \to \langle n\rangle, i \mapsto i+1.$$

我们将 $\Lambda_\infty^{(\mathrm{op},-)}$ 中此态射的逆记为 T_n。注意到

$$d_n \circ T_n = d_0 : \langle n\rangle \to \langle n-1\rangle$$

利用这一点，我们可以通过应用伴随函子的复合律，将 $\Delta^{(\mathrm{op},-)}$ 中的伴随链向两个方向无限延伸：

$$\cdots \dashv d_{n-1}\circ T_n \dashv T_n^{-1}\circ s_{n-1} \dashv d_0 \dashv s_0 \dashv \cdots \dashv d_n \dashv T_n \circ s_0 \dashv d_1 \circ T_n^{-1} \dashv T_n \circ s_1 \dashv \dots \quad (2.2)$$

我们引入以下中间 2-范畴：

定义 2.3。双工 2-范畴

$$\Xi \subset \Lambda_\infty.$$

是一个 2-范畴，包含 Λ_∞ 的所有对象，其态射范畴由 1-态射 f 张成：$\langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 在 Λ_∞ 中，且 $f(0) \ge 0$。我们将其底层 1-范畴记为 Ξ。

因此，我们得到一个包含链

$$\Delta \subset \Xi \subset \Lambda_\infty.$$

双复形范畴包含移位态射 t_n，但不包含它们的逆元。在 $\Xi^{(\mathrm{op},-)}$ 中引入记号 $\sigma_n = \sigma_0 \circ t_n$ 和 $s_n = T_n \circ s_0$ 后，我们因此得到一个伴随链

$$d_0 \dashv s_0 \dashv d_1 \dashv \cdots \dashv s_{n-1} \dashv d_n \dashv s_n \quad (2.3)$$

这延拓了 $\Delta^{(\mathrm{op},-)}$ 右侧已有的伴随链，并且无法在 $\Xi^{(\mathrm{op},-)}$ 中进一步延拓。

我们可以用面映射 $\partial_0\colon \langle n\rangle \to \langle n+1\rangle$ 和新引入的退化映射 $\sigma_{n+1}\colon \langle n+1\rangle \to \langle n\rangle$ 将移位 $t_n\colon \langle n\rangle \to \langle n\rangle$ 表示如下：$t_n = \sigma_{n+1}\circ\partial_0$。因此，从 Δ 得到 Ξ 的另一种方式是在每个次数中加入额外的退化映射 σ_{n+1}。该退化映射满足单纯关系的自然扩展，但 $\sigma_{n+1}\circ\partial_0 \ne \partial_0\circ\sigma_n$ 除外。正如我们所见，左侧是移位态射 t_n，而右侧来自 Δ。

最后，我们指出一个有用的观察：迭代移位构成一个自然变换：

引理 2.4. 迭代移位态射 $t_n^{n+1} = (\sigma_{n+1} \circ \partial_0)^{n+1} : \langle n \rangle \to \langle n \rangle$ 组合起来构成恒等函子 $\mathrm{id} : \Xi \to \Xi$ 的一个自然自变换。

证明。这仅仅是将条件 $f(a + m + 1) = f(a) + n + 1$ 表述为态射 $f : \langle m \rangle \to \langle n \rangle$ 的条件。 □

3 经典对应

3.1 阿贝尔群的 Dold-Kan 对应

我们首先回顾阿贝尔群范畴 $\mathbf{Ab}$ 的经典对应，因此暂时使用指标范畴的一范畴版本。

我们的方法沿袭 [Dy21], ，不过为了便于延拓到双循环情形，我们的构造与其中的构造方向相反。对于任意单纯阿贝尔群 $X_\bullet \in \mathbf{Ab}_\Delta$ ，我们定义归一化链复形 $\mathrm{C}(X_\bullet)_\bullet \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$，如下所示

$$\mathrm{C}(X_\bullet)_n = \bigcap_{0 \leq i < n} \ker(d_i : X_n \to X_{n-1})$$

with 微分由该单纯阿贝尔群的末面映射给出

$$d : \mathrm{C}(X_\bullet)_n \to \mathrm{C}(X_\bullet)_{n-1}, x \mapsto d_n(x).$$

此映射的良定义性以及恒等式 $d^2 = 0$ 均由单纯恒等式推出。

上述定义自然地扩展为一个函子：

$$\mathrm{C} : \mathbf{Ab}_\Delta \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}).$$

归一化链函子还有一种替代描述，这在进一步分析中将很有用。

对于单纯阿贝尔群 $X_\bullet$ ，我们定义链复形 $(X_\bullet, d_\bullet)$，其微分为

$$d : X_n \to X_{n-1}, d(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} d_i(x).$$

此链复形包含子复形 $\mathrm{D}(X_\bullet) \subset X_\bullet$ ，其中 $\mathrm{D}(X_\bullet)_n$ 是由退化（即非单射） n-单形生成的子群。该包含诱导出一个自然同构

$$\mathrm{C}(X_\bullet) \cong X_\bullet / \mathrm{D}(X_\bullet)$$

逆元的定义需要一个立方体族，该族将在本文余下部分反复出现：

定义 3.1。对于 $n \geq 0$，偏序集范畴 $\mathbb{\Delta}([n],[n])$ 中的 n-立方体 $f_n\colon [1]^n \to \mathbb{\Delta}([n],[n])$ 定义如下：对于一个元素 $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in [1]^n$，单形

$$f_n(a_0,\ldots,a_{n-1}) : [n] \to [n] \tag{3.1}$$

定义为

$$j \mapsto j + a_j$$

约定 $a_n = 0$。

现在我们可以给出映射 $\mathrm{C}(X_\bullet) \to X_\bullet/\mathrm{D}(X_\bullet)$ 的逆元公式。如下引理所示，它在次数 n 时由下式诱导：

$$\pi_n : X_n \to X_n, x \mapsto \sum_{a\in\{0,1\}^n} (-1)^{|a|} f_n(a)^*(x) \tag{3.2}$$

其中 $|a| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$。

引理 3.2. 对于 $n \geq 0$，映射 $\pi_n\colon X_n \to X_n$ 是到子群 $\mathrm{C}(X_\bullet)_n$ 上的投影，其核为 $\mathrm{D}(X_\bullet)_n$，即：

1. π_n 的像包含于 $\mathrm{C}(X_\bullet)_n$。2. 对于 $x \in \mathrm{C}(X_\bullet)_n \subset X_n$，有 $\pi_n(x) = x$。3. 我们有 $\ker \pi_n = \mathrm{D}(X_\bullet)_n$。

证明。为证明第一点，固定 $0 \leq i < n$，并令 $v = (v_0,\ldots,v_{n-1}) \in [1]^n$ 为一个满足 $v_i = 0$ 的顶点。我们将满足 $w_i = 1$ 的对置顶点记为 $w = (w_0\ldots,w_{n-1}) \in [1]^n$，其中 $w_j = v_j$ 对于 $j \neq i$。于是有等式

$$f_n(v) \circ \partial_i = f_n(w) \circ \partial_i$$

这意味着对于任意 $x \in X_n$，都有 $d_i(f_n(v)^*(x)) = d_i(f_n(w)^*(x))$。这两项在 π_n 的公式 (3.2) 中符号相反，因此，$d_i(\pi_n(x))$ 中对应于满足 $v_i = 0$ 的那些 $v \in [1]^n$ 的项，与对应于满足 $w_i = 1$ 的那些 $w \in [1]^n$ 的项两两抵消。

第二点可由以下观察得出：对于任意不是初始顶点 $(0,\ldots,0)$ 的顶点 $v \in [1]^n$，单形 $f_n(v)$ 可经由 ∂_i 因子分解：$[n-1] \to [n]$，其中某个 $0 \leq i < n$，因此，对于 $x \in \mathrm{C}(X_\bullet)_n$，有 $f_n(v)^*(x) = 0$。

包含 $\mathrm{D}(X_\bullet)_n \subset \ker \pi_n$ 可由与第一部分类似的论证得到：对于$0 \leq i < n$ 和 $x \in X_{n-1}$，我们有等式

$$f_n(v)^*(s_i(x)) = f_n(w)^*(s_i(x))$$

对于任意两个相对的顶点 v、$w \in [1]^n$，其中 $v_i \neq w_i$，且对于 $j \neq i$有 $v_j = w_j$。

最后，对于任意满足 $v \neq (0,\ldots,0)$ 的 $v \in [1]^n$，$f_n(v)$ 都不是单射，因此可以分解为某个退化映射 $\sigma_i\colon [n] \to [n-1]$。结合第一条断言和公式 (3.2)，可得 $\mathrm{D}(X_\bullet)_n + \mathrm{C}(X_\bullet)_n = X_n$，因此我们确实必须有 $\mathrm{D}(X_\bullet)_n = \ker \pi_n$。 □

为了证明归一化链复形函子是范畴等价，我们引入一种逆构造，即 Dold-Kan 函子

$$\mathrm{N} : \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}_{\Delta}.$$

对于链复形 $B_\bullet \in \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})_{\geq 0}$，这个神经由以下给出

$$\mathrm{N}(B_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})}(\mathrm{C}(\mathbb{Z}\Delta^n)_\bullet, B_\bullet)$$

其函子性由前复合给出。

归一化链函子的商描述使我们能够轻松描述构成这个神经低维胞腔的数据：

- 一个 0-单形是一个元素 $b_0 \in B_0$
- 一个 1-单形 由元素 b_0、$b_1 \in B_0$ 和 $b_{01} \in B_1$ 组成，使得 $d(b_{01}) = b_0 - b_1$.
- 一般而言，一个 n-单形的数据由一个族 $(b_\tau)_\tau$ 组成，其中 $\tau : [m] \to [n]$遍历所有非退化单形，并且对每个 τ 都满足方程

$$d(b_\tau) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} b_{\tau \circ \partial_i}.$$

Dold-Kan 神经函子自然地是归一化链函子的右伴随，我们有如下结果：

定理 3.3。伴随

$$\mathrm{C} : \mathbf{Ab}_{\Delta} \leftrightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) : \mathrm{N}$$

给出一个范畴等价。

证明。我们首先分析余单位态射 $\mathrm{C}(\mathrm{N}(B_\bullet)) \to B_\bullet$。该映射将族 $(b_\tau)_\tau \in \mathrm{C}(\mathrm{N}(B_\bullet))_n$ 映射到元素 $b_{\mathrm{id}_{[n]}} \in B_n$。由于该族是一个归一化链，因此对于每个 $\sigma : [m] \to [n-1]$，并且对每个 $0 \leq i < n$，元素 $b_{\partial_i \circ \sigma}$ 均为零。因此，唯一可能非零的元素是 $b_{\mathrm{id}} \in B_n$ 和 $b_{\partial_n} \in B_{n-1}$。此外，这些元素必须满足方程 $d(b_{\mathrm{id}}) = b_{\partial_n}$。由此可知，余单位实际上是一个同构。

其次，我们分析单位态射 $u : X_\bullet \to \mathrm{N}(\mathrm{C}(X_\bullet))$。该映射将元素$x \in X_n$ 映射到族，该族是族 $(\tau^*(x))_\tau$ 在 $\mathrm{N}(\pi) : \mathrm{N}(X_\bullet/\mathrm{D}(X_\bullet)) \to \mathrm{N}(\mathrm{C}(X_\bullet))$ 下的像。

我们分析 $\mathrm{C}(u)$ 的行为。$\mathrm{C}(\mathrm{N}(\mathrm{C}(X_\bullet)))_n$ 的一个元素可以通过同构 $\mathrm{C}(\mathrm{N}(\pi_n))^{-1}$ 视为一个族 $(x_\tau)_\tau$，使得对于任意 $\tau : [m] \to [n]$ 都经由某个 $0 \leq i < n$ 分解，其中 $x_\tau = 0$ 经由 ∂_i。如上所述，这意味着 x_{id} 和 $x_{\partial_n} = d(x_{\mathrm{id}})$ 是这个族中仅有的可能非零元素，因此 $\mathrm{C}(u)$ 是一个同构。证明至此由以下引理 3.4 得出结论。 □

引理 3.4。函子

$$\mathrm{C} : \mathbf{Ab}_{\Delta} \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$$

是保守的，即反映同构。

证明。与 [Dy21，命题 2.5] 对偶。 □

3.2 阿贝尔群的 Dwyer-Kan 对应 s

我们继续上述回顾，考察范畴 $\mathbf{Ab}_{\Xi}$，即双重循环阿贝尔群的范畴，也就是函子 $\Xi^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$。有关更多细节，请参见 [DK85]；不过请注意，我们对复形的微分采用了不同的约定。

阿贝尔群的双链复形是一个集中于非负次数的分次阿贝尔群 $X_{\bullet} \in \mathbf{Ab}^{\geq 0}$，并配备微分

$$d : X_{\bullet} \to X_{\bullet - 1}$$
$$\delta : X_{\bullet} \to X_{\bullet + 1}$$

满足 $d^2 = 0$ 和 $\delta^2 = 0$。

Duchain 复形构成一个范畴 $\mathbf{DuCh}^{\geq 0}$(阿贝尔群范畴)，其态射是与两个微分都相交换的分次群映射。

给定一个双重循环阿贝尔群 $X_{\bullet} \in \mathbf{Ab}^{\Xi}$，我们可以对其底层单纯对象应用归一化链函子 C : 阿贝尔群范畴$^{\Delta}$ $\to$$\mathbf{Ch}^{\geq 0}$(阿贝尔群范畴)，从而得到一个链复形 $(\mathrm{C}(X_{\bullet}), d)$。为了在归一化链复形上定义双链复形结构，我们先在 $(X_{\bullet}, d)$ 上引入这样的结构:

$$\delta : X_n \to X_{n+1}, x \mapsto \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} s_i(x).$$

由重复循环关系可直接推出恒等式 $\delta^2 = 0$，因此我们确实得到了一个双链复形。微分 δ 保持子复形 $\mathrm{D}(X_{\bullet})$，因而可下降为商链复形上的微分，化简后为

$$\delta : X_n / \mathrm{D}(X_{\bullet})_n \to X_{n+1} / \mathrm{D}(X_{\bullet})_{n+1}, [x] \mapsto [s_{n+1}(x)].$$

这个微分通过同构π： $X_{\bullet}/\mathrm{D}(X_{\bullet})_{\bullet} \to \mathrm{C}(X_{\bullet})$ 转移为归一化链 $\mathrm{C}(X)_{\bullet}$ 上的微分。具体而言，这个微分定义为

$$\delta : \mathrm{C}(X_{\bullet})_n \to \mathrm{C}(X_{\bullet})_{n+1}, x \mapsto \pi_{n+1}(s_{n+1}(x)) = \sum_{a \in \{0,1\}^{n+1}} (-1)^{|a|} f_n(a)^*(s_{n+1}(x))$$

我们将上面构造的双链复形 $(\mathrm{C}(X_{\bullet}), d, \delta)$ 称为与 duplicial 对象 $X_{\bullet} \in \mathbf{Ch}^{\geq 0}$(阿贝尔群范畴) 相关联的规范化双链复形。此构造可扩展为一个函子

$$\mathrm{C} : \mathbf{Ab}_{\Xi} \to \mathbf{DuCh}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$$

使其嵌入以下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ab}_{\Xi} & \xrightarrow{\mathrm{C}} & \mathbf{DuCh}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Ab}_{\Delta} & \xrightarrow{\mathrm{C}} & \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) \end{array}$$

其中竖直箭头是遗忘函子。与单纯情形一样，这个函子有一个右伴随，即 Dwyer-Kan 神经函子

$$\mathrm{N}' : \mathbf{DuCh}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}_{\Xi}.$$

对于一个 duchain 复形 $B_\bullet \in$DuCh$_{\geq 0}$(阿贝尔群范畴)，这个神经由下式给出

$$\mathrm{N}'(B_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DuCh}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})}(\mathrm{C}(\mathbb{Z}\Xi^n)_\bullet, B_\bullet)$$

其 duplicial 结构来自前复合。

我们分析这个 duplicial 对象的胞腔。存在一个同构

$$\mathrm{C}(\mathbb{Z}\Xi^n)_\bullet \cong (\mathbb{Z}\Xi^n)_\bullet / \mathrm{D}(\mathbb{Z}\Xi^n)_\bullet$$

duchain 复形的同构。在次数 m，阿贝尔群 D(ZΞ^n)$_m$ 由 s_i 的像张成，其中 $0 \leq i < m$。因此，它的一组基由那些态射 $f\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 中在 $\{0, \ldots, m\}$ 上非单射的态射构成，而商 C(ZΞ^n)$_m$ 的一组基则由那些态射 $f\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 中在 $\{0, \ldots, m\}$上单射的态射构成。

- 一个 0-胞腔由元素 $b_i \in B_0$ 和 $b_{ii+1} \in B_1$ 给出，其中 $i \in$N，并满足以下方程:

$$\begin{aligned} b_i - b_{i+1} &= d(b_{ii+1}) \\ b_{ii+1} &= \delta(b_i) \end{aligned}$$

  我们得出结论，N′($B_\bullet$)$_0 \cong B_0$。

- 一个 1-胞腔由元素 $b_i \in B_0$、b_{ii+1}、$b_{ii+2} \in B_1$ 和 $b_{ii+1i+2} \in B_2$ 给出，其中 $i \in$ N 满足某些相容性要求。具体如下:

$$\begin{aligned} b_i - b_{i+1} &= d(b_{ii+1}) \\ b_i - b_{i+2} &= d(b_{ii+2}) \\ \delta(b_i) &= b_{i,i+2} \\ b_{ii+1} - b_{ii+2} + b_{i+1i+2} &= d(b_{ii+1i+2}) \\ \delta(b_{ii+1}) &= b_{ii+1i+2} \end{aligned}$$

  由这些方程不难得出，1-胞腔由元素 $b_0 \in B_0$ 和 $b_{01} \in B_1$ 唯一确定，二者之间没有相容性要求。

- 一般而言，一个 n-胞腔由一个族 $(b_\tau)_\tau$ 组成，其中 $\tau\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 遍历 Ξ 中在 $\{0,\dots,m\}$ 上为单射的所有态射，并满足以下方程

$$d(b_\tau) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} b_{\tau\circ\partial_i}$$

and

$$\delta(b_\tau) = b_{\tau\circ\sigma_{m+1}}$$

其中，在第二个等式中，我们令 $b_\sigma = 0$ 对应于 $\sigma\colon \langle m+1\rangle \to \langle n\rangle$ 在$\{0,\dots,m+1\}$上不是单射。

将上述对低维情形下 Dwyer-Kan 神经的分析与单纯 Dold-Kan 神经的分析相比较，自然得到以下引理:

引理 3.5. 设 $B_\bullet \in \mathrm{DuCh}_{\geq 0}$(阿贝尔群范畴) 是一个双链复形，其微分为 d、δ。忽略正次数的微分 δ 后，我们也可以将 $B_\bullet$ 视为链复形。包含 $\Delta \to \Xi$ 诱导出一个同构

$$\mathrm{N}'(B_\bullet)_\bullet \cong \mathrm{N}(B_\bullet)_\bullet$$

它将 Dwyer-Kan 神经的底层单纯阿贝尔群与底层链复形的 Dold-Kan 神经对应起来。

证明. $\mathrm{N}(B_\bullet)_n$的一个元素是一个族 $(b_\tau)_\tau$，它为每个非退化单形$\tau\colon [m]\to[n]$指定一个元素 $b_\tau \in B_m$，且满足 $d(b_\tau) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i} b_{\tau\circ\partial_i}$。

$\mathrm{N}'(B_\bullet)_n$的一个元素是一个族 $(b_\tau)_\tau$：对每个在 $\{0,\dots,m\}$ 上为单射的 $\tau\colon\langle m\rangle\to\langle n\rangle$（其中 $\langle m\rangle\to\langle n\rangle$ 属于 Ξ），指定一个元素 $b_\tau \in B_m$，使得等式 $d(b_\tau) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i} b_{\tau\circ\partial_i}$和 $\delta(b_\tau) = b_{\tau\circ\sigma_{m+1}}$ 成立。

我们证明，任何第一类的族 $(b_\tau)_\tau$ 都可以唯一地扩张为第二类的一个族，方法是归纳地将其扩张为一个族 $M_k = (b_\tau)_\tau$；该族对所有在 $\{0,\dots,m\}$ 上为单射且满足 $\tau(m) \leq k$的$\tau\colon\langle m\rangle\to\langle n\rangle$（其中 $\langle m\rangle\to\langle n\rangle$ 属于 Ξ）都有定义，并且满足对$\mathrm{N}'(B_\bullet)_n$ 的一个元素所施加的、对于这样的族而言有意义的所有条件。

对于 $k = n$，该族 M_n 恰好对应于 $\mathrm{N}(B_\bullet)_n$ 的一个元素。

现在假设，对于某个 $k \geq n$，我们给定了这样一个族 $M_k = (b_\tau)_\tau$。对于每个$\tau\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$，若其在 $\{0,\dots m\}$ 上为单射，且满足 $\tau(0) = k-n$ 以及 $\tau(m) = k+1$，则我们必然要设定 $b_\tau = \delta(b_{\tau\circ\partial_m})$，因为 $\tau = \tau\circ\partial_m\circ\sigma_m$。这是 M_k 的唯一可能的此类部分扩张。

我们现在证明，这个部分扩张进一步唯一地延拓为 M_{k+1} 的一个元素。对于任意在 $\{0,\dots,m\}$ 上为单射且满足 $\tau(m) = k+1$ 及 $\tau(0) > k-n$ 的 $\tau\colon\langle m\rangle\to\langle n\rangle$，我们有一个由下式确定的映射 $\varphi\colon\langle m+1\rangle\to\langle n\rangle$

$$\varphi(0) = k-n$$
$$\varphi\circ\partial_0 = \tau$$

b_φ 的值已经定义，对于我们的最终族，该等式

$$d(b_\varphi) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{m+1-i} b_{\varphi \circ \partial_i}$$

必须成立。对于所有 $i > 0$，值 $b_{\varphi\circ\partial_i}$ 已由假设确定，因此该方程确定了 $b_\tau = b_{\phi\circ\partial_0}$的值。

最后，为了证明该延拓确实满足所有新要求的方程，假设 $\psi\colon \langle m+1\rangle \to \langle n\rangle$ 在 $\{0,\dots,m+1\}$ 上是单射，并且满足 $\psi(m+1) = k+1$。我们必须证明

$$d(b_\psi) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{m+1-i} b_{\psi \circ \partial_i}.$$

设 $\tau = \psi \circ \partial_0$。如果 $\psi(0) = k-n$，那么根据 b_τ的构造，该方程已满足。否则，我们定义一个态射 $\rho\colon \langle m+2\rangle \to \langle n\rangle$，如下所示：

$$\rho(0) = k-n$$
$$\rho \circ \partial_0 = \psi$$

我们有

$$d(b_\rho) = \sum_{l=0}^{m+2} (-1)^{m+2-l} b_{\rho \circ \partial_l} \tag{3.3}$$

对于所有 $0 < l \le m+2$，类似地有：

$$d(b_{\rho\circ\partial_l}) = \sum_{p=0}^{m+1} (-1)^{m+1-p} b_{\rho\circ\partial_l\circ\partial_p}.$$

By 将 d 应用于方程 (3.3)，并代入上述方程，我们得到 n

$$0 = (-1)^{m+2} d(b_\psi) + \sum_{l=1}^{m+2}\sum_{p=0}^{m+1} (-1)^{1+l+p} b_{\rho\circ\partial_l\circ\partial_p}.$$

由于单纯关系，大多数项相互抵消，最终得到所需的表达式

$$d(b_\psi) = \sum_{l=0}^{m+1} (-1)^{m+1-l} b_{\psi\circ\partial_l}.$$

□

用图表表示，我们已经证明了这个自然变换

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DuCh}_{\ge 0}(\mathbf{Ab}) & \xrightarrow{\mathrm{N}'} & \mathbf{Ab}_\Xi \\ \downarrow & \overset{\cong}{\swarrow} & \downarrow \\ \mathbf{Ch}_{\ge 0}(\mathbf{Ab}) & \xrightarrow{\mathrm{N}} & \mathbf{Ab}_\Delta \end{array}$$

是一个同构。

定理 3.6. 伴随

$$\mathrm{C} : \text{阿贝尔群范畴}_{\Xi} \leftrightarrow \mathrm{DuCh}_{\geq 0}(\text{阿贝尔群范畴}) : \mathrm{N}'$$

给出了一个范畴等价。

证明. 这是单纯 Dold-Kan 对应以及上述引理 3.5 的直接推论。

□

3.3 移位态射的可逆性

给定一个双重循环阿贝尔群 $X_\bullet \in \mathrm{DuCh}_{\geq 0}$(阿贝尔群范畴)，我们分析移位 $T_n = d_0 \circ s_{n+1}$：$X_n \to X_n$ 在什么情况下可逆。回顾一下，我们有一个自然重复单纯自同态 $X_\bullet \to X_\bullet$，其在次数 n 中由下式给出

$$T_n^{n+1} : X_n \to X_n$$

当然，这个自然变换可逆等价于所有移位都可逆。由于归一化双链复形函子是范畴等价，这个双重循环映射可逆等价于它诱导的归一化双链复形映射可逆。我们给出如下计算：

引理 3.7. 对于双重循环阿贝尔群 $X_\bullet \in$阿贝尔群范畴$_{\Xi}$ 的规范化双链复形 $\mathrm{C}(X_\bullet)$，有等式

$$(\mathrm{id} - d \circ \delta)^{n+1} \circ (\mathrm{id} - \delta \circ d)^n = T_n^{n+1} : \mathrm{C}(X_\bullet)_n \to \mathrm{C}(X_\bullet)_n$$

证明。由迭代移位给出的双重循环自同态构成恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathbf{Ab}_{\Xi}}$ 的一个自然自变换，因此，依照范畴等价，它们也构成 $\mathrm{id}_{\mathbf{DuCh}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})}$ 的一个自然自变换。

为便于阅读，记 $R = \mathbb{Z}$。对每个 $n \geq 1$，我们定义由一个生成元构成、位于次数 n 的自由 duchain 复形 F^n：

$$\begin{aligned} F^n_{n-1} &= R^{\mathbb{Z}_{<0}} \\ F^n_n &= R^{\mathbb{Z}} \\ F^n_{n+1} &= R^{\mathbb{Z}_{>0}} \\ F^n_m &= 0 \text{ else} \end{aligned}$$

我们分别用 e_k 表示 F^n_{n-1} 的标准基元素，用 f_k 表示 F^n_n 的标准基元素，用 g_k 表示 F^n_{n+1} 的标准基元素。它们的微分定义如下：

$$\begin{aligned} &\delta(e_k) = f_k \\ &d(f_k) = e_{k-1} \text{ for } k \leq 0 \\ &d(f_k) = 0 \text{ for } k > 0 \\ &\delta(f_k) = 0 \text{ for } k < 0 \\ &\delta(f_k) = g_{k+1} \text{ for } k \geq 0 \\ &d(g_k) = f_k \end{aligned}$$

对于 $n=0$，由 1 个生成元 F^0 生成的自由 duchain 复形的定义类似。

对于双链复形的每个元素 $x_n \in \mathrm{C}(X_\bullet)_n$，都存在唯一的态射$\varphi\colon F^n \to \mathrm{C}(X_\bullet)$，使得 $\varphi(f_0) = x_n$。由自然性可知，图表

$$\begin{array}{ccc} F_n^n & \longrightarrow & \mathrm{C}(X_\bullet)_n \\ {\scriptstyle T_n^{n+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_n^{n+1}} \\ F_n^n & \longrightarrow & \mathrm{C}(X_\bullet)_n \end{array}$$

可交换，因此我们可以得出

$$T_n^{n+1} = p_n(d\circ\delta) + q_n(\delta\circ d) \tag{3.4}$$

对于某些多项式 $p_n, q_n \in \mathbb{Z}[Y]$。由迭代移位与微分可交换这一事实，还可以进一步得出 p_n 具有相同的常数项 p_{-1}，并且 $q_n = p_{n-1} - p_{-1}$。

因此，只需证明在我们的情形下有

$$p_n = (1-Y)^{n+1}$$

为证明这一点，注意对于 $(a_0,\dots,a_n) \in \{0,1\}^{n+1}$，满足 $a_{i-1}=0$ 且 $a_i = 1$ 的某个 $0 \le i \le n-1$（约定 $a_{-1}=a_n$），态射

$$\sigma_{n+1}\circ f_{n+1}(a_0,\dots,a_n)\circ\partial_{n+1} : \langle n\rangle \to \langle n\rangle$$

可经由 $\partial_i\colon \langle n-1\rangle \to \langle n\rangle$ 分解。因此，在计算$d_{n+1}(\delta(x))$ 时，对于 $x \in \mathrm{C}(X_\bullet)_n$，相应项均为零，并且我们有

$$d_{n+1}(\delta(x)) = x + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}T_n(s_i(d_n(x))) + (-1)^{n+1}T_n(x).$$

由此可得，$T_n(x) \equiv (-1)^n(x - d_{n+1}(\delta(x)))$，模去涉及 $d_n(x)$ 的项，即可推出该结论。

□

该引理用与其对应的双链复形刻画了循环阿贝尔群。为了进一步提取对抛循环阿贝尔群的刻画，我们需要以下基本事实：

引理 3.8. 给定阿贝尔群 $A, B \in$ 阿贝尔群范畴和同态 $f\colon A \to B$ 以及 $g\colon B \to A$，我们有以下结论：

(1) 映射 $\mathrm{id}_A - g\circ f\colon A \to A$ 是单射，当且仅当映射 $\mathrm{id}_B - f\circ g\colon B \to B$ 是单射。

(2) 映射 $\mathrm{id}_A - g\circ f\colon A \to A$ 是满射，当且仅当 $\mathrm{id}_B - f\circ g\colon B \to B$ 是满射。

证明。由对称性可知，在每种情形下只需证明其中一个蕴含关系。对于 (1) 的证明，我们假设 $\mathrm{id}_A - g \circ f$ 是单射。设 $b \in B$ 使得 $b - fg(b) = 0$。对该等式应用 g，得到 $g(b) - gfg(b) = 0$，因此根据我们关于 $\mathrm{id}_A - g \circ f$ 的单射性假设，有 $g(b) = 0$。由此可得 $b = 0$，所以 $\mathrm{id}_B - f \circ g$ 也是单射。

在证明 (2) 时，我们假设 $\mathrm{id}_A - g \circ f$ 是满射。因此，对于任意的 $b \in B$，必有 $g(b) = a - gf(a)$，其中某个 $a \in A$ 满足此式。我们计算

$$(b + f(a)) - (fg(b) + fgf(a)) = b + fg(b) + fgf(a) - fg(b) - fgf(a) = b,$$

因此 $\mathrm{id}_B - f \circ g$ 也是满射。 □

推论 3.9. 对于双重循环阿贝尔群 $A_\bullet$，以下条件等价:

(1) $A_\bullet$ 可下降为旁循环对象，即对于每个 $n \geq 0$，移位 $T_n : A_n \to A_n$ 是同构。(2) 对于双链复形 $\mathrm{C}(A_\bullet)$，对于每个 $n \geq 0$，态射 $\mathrm{id}_{\mathrm{C}(A_\bullet)_n} - d \circ \delta$ 是同构。(3) 对于双链复形 $\mathrm{C}(A_\bullet)$，对于每个 $n \geq 1$，态射 $\mathrm{id}_{\mathrm{C}(A_\bullet)_n} - \delta \circ d$ 是同构。

特别地，归一化链函子 $\mathrm{C} : \mathrm{Ab}_{\Xi} \to \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ 限制为抛循环阿贝尔群范畴与满足 (2) 和 (3) 中条件的 duchain 复形范畴之间的一个等价。

证明。由引理 3.8 可知，条件 (2) 和 (3) 等价。由引理 3.7，对于每个 $n \geq 0$，我们有如下等式

$$T_n^{n+1} = (\mathrm{id}_{\mathrm{C}(A_\bullet)_n} - d \circ \delta)^{n+1} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{C}(A_\bullet)_n} - \delta \circ d)^n.$$

因此，(2) 和 (3) 一起蕴含 T_n^{n+1}，从而也蕴含 T_n，对每个 $n \geq 0$ 都是可逆的。反过来，(1) 蕴含 $\mathrm{id}_{\mathrm{C}(A_\bullet)_n} - \delta \circ d$ 对每个 $n \geq 1$ 都是单射，并且 $\mathrm{id}_{\mathrm{C}(A_\bullet)_n} - d \circ \delta$ 对每个 $n \geq 0$ 都是满射。再次由引理 3.8，这蕴含条件 (2) 和 (3)。 □

4 ∞-范畴论预备知识

4.1 稳定 ∞-范畴

现在，我们将此前讨论中的阿贝尔群范畴替换为稳定 ∞-范畴的(∞,2)-范畴。为此，我们先回顾一些定义；有关该理论的系统发展，请参阅[Lu17]。

∞-范畴是一个单纯集合 $\mathcal{C} \in \mathrm{Set}_\Delta$，其中所有内角都允许填充。范畴 Cat_∞ 是 Set_Δ 的全子范畴，由 ∞-范畴张成。

$(\infty, 2)$-范畴是一个以 Cat_∞ 为丰化范畴的范畴。特别地，对于任意 2-范畴 C，将单纯神经函子应用于其态射范畴，即可得到一个 $(\infty, 2)$-范畴。我们也将这个 $(\infty, 2)$-范畴称为 C，这是一种滥用记号的做法。

对于任意两个 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$，函子单纯集合 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是一个 ∞-范畴，因此我们可以将 Cat_∞ 视为一个 $(\infty, 2)$-范畴。

A 稳定 ∞-范畴是满足以下条件的一个 ∞-范畴 $\mathcal{S}$ ：

- $\mathcal{S}$ 存在一个零对象 0。
- 每个态射 $A \to B$ 都存在一个余纤维，即可以将其延拓为一个余笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C \end{array} \tag{4.1}$$

对偶地，每个态射都存在一个纤维。

- (4.1) 中的方块是余笛卡尔方块，当且仅当它是笛卡尔方块。

函子 $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ 稳定 ∞-范畴之间的函子称为正合的，若它保持有限极限和余极限。我们将以 $\mathrm{St} \subset \mathrm{Cat}_\infty$ 表示这样一个（$\infty, 2$）-范畴，其对象为稳定 ∞-范畴，态射 ∞-范畴由正合函子张成。

4.2 格罗滕迪克构造

定义 4.1. 与普通范畴的函子 $F\colon C \to \mathrm{Cat}_\infty$ 相关联的协变格罗滕迪克构造 $\chi(F)$ 是一个单纯集合，其 n-单形定义如下：

- 在 C 的神经 $\mathrm{N}(C)$ 中的一个 n-单形 $\sigma\colon [n] \to$ 。
- 对于每个 $\emptyset \neq I \subset [n]$，一个函子 $\Delta^I \to F(\sigma(\max(I))$，使得 $I \subset J$ 的图表

$$\begin{array}{ccc} \Delta^I & \longrightarrow & F(\sigma(\max(I)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^J & \longrightarrow & F(\sigma(\max(J)) \end{array}$$

交换。

这个单纯集合配备了一个遗忘函子 $\pi\colon \chi(F) \to \mathrm{N}(C)$，它是一个余笛卡尔纤维化。我们将 $\chi(F)$ 视为一个带标记单纯集合，并将此纤维化的余笛卡尔边标记出来。因此，格罗滕迪克构造扩展为一个函子

$$\mathrm{Fun}(C, \mathbf{Cat}_\infty) \to \mathbf{Set}^+_{\Delta/\,\mathrm{N}(C)}$$

到从带标记单纯集合到 $\mathrm{N}(C)$ 的映射范畴中。

对于一个范畴 C，其下范畴组织成一个函子

$$C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^{+}_{\Delta/\,\mathrm{N}(C)}, c \mapsto \mathrm{N}(C_{c/})^{\#}$$

通过标记上范畴的神经的所有边。因此，我们得到一个函子

$$\Gamma : \mathbf{Set}^{+}_{\Delta/\,\mathrm{N}(C)} \to \mathrm{Fun}(C, \mathbf{Cat}_\infty)$$

将对象 $X \in \mathbf{Set}^{+}_{\Delta/\mathrm{N}(C)}$ 映射到函子

$$\Gamma(X) : C \to \mathbf{Cat}_\infty, c \mapsto \mathrm{Fun}_{\mathrm{N}(C)}(\mathrm{N}(C_{c/})^{\#}, X).$$

引理 4.2. 存在一个自然变换 $\eta : \mathrm{id} \to \Gamma \circ \chi$，它是逐层范畴等价。

证明. 对于 $F : C \to \mathbf{Cat}_\infty$，分量

$$\eta_F(c) : F(c) \to \Gamma(\chi(F))(c)$$

在 $c \in C$ 处取值时由映射诱导

$$F(c) \times \mathrm{N}(C_{c/}) \to \chi(F)$$

它将一个 n-单形 $(x, c \to c_0 \to c_1 \to \cdots \to c_n)$ 映射到 $\chi(F)$ 的 n-单形，该单形由 $N(C)$ 中的 n- 单形 $c_0 \to \cdots \to c_n$ 以及对每个 $I \subset [n]$ 的单形给出

$$\Delta^I \hookrightarrow \Delta^n \xrightarrow{x} F(c) \longrightarrow F(c_{\max I}).$$

函子 $\eta_F(c)$ 是求值函子的右逆

$$\mathrm{ev}_c : \mathrm{Fun}^{\flat}_{\mathrm{N}(C)}(\mathrm{N}(C_{c/})^{\#}, \chi(F)) \to F(c)$$

该求值函子由在范畴 $\mathrm{N}(C_{c/})$ 的初始顶点 $\mathrm{id} : c \to c$处求值得到。要求 $\mathrm{N}(C_{c/})^{\#}$ 的所有边都映射为 $\chi(F)$ 中的余笛卡尔边，这意味着函子范畴 $\mathrm{Fun}^{\flat}_{\mathrm{N}(C)}(\mathrm{N}(C_{c/})^{\#}, \chi(F))$ 中的函子恰好是沿包含 $\Delta^0 \to \mathrm{N}(C_{c/})$ 的左 Kan 延拓。因此，根据 [Lu09a, 4.3.2.15]，ev_c 是平凡 Kan 纤维化；而由三者中两者成立可推出第三者，$\eta_F(c)$ 是范畴等价。 □

对于任意有限非空线性序集 I，我们定义 2-范畴 $\mathbb{O}^I$ 如下：

- $\mathbb{O}^I$ 的对象集为集合 I。
- 对于 $i, j \in I$，态射范畴 $\mathbb{O}^I(i, j)$ 是由满足 $\min J = i$ 且 $\max J = j$的子集 $J \subset I$构成的偏序集范畴。
- 复合律通过取子集的并集来定义：

$$\mathbb{O}^I(i, j) \times \mathbb{O}^I(j, k) \to \mathbb{O}^n(i, k), (J, J') \mapsto J \cup J'$$

各种 2-范畴 $\mathbb{O}^n = \mathbb{O}^{[n]}$ 在 2-范畴的范畴 $\mathbf{Cat}_2$中组成一个余单纯对象。

定义 4.3. 对于一个 2-范畴 $\mathbb{C}$，$\mathbb{C}$ 的神经 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})$ 是由

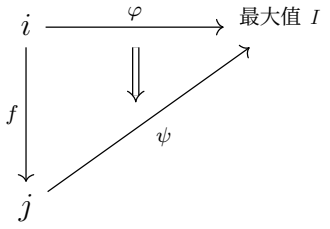
$$\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})_n = \mathrm{Fun}(\mathbb{O}^n, \mathbb{C})$$

将上述余单纯对象与 $\mathrm{Fun}(-, \mathbb{C})$ 复合而得的单纯集合。它自然地是一个带标记单纯集合，其薄 2-单纯形由可逆的自然变换构成。

这个范畴脉络构造的松版本使我们能够定义 $(\infty, 1)$-范畴格罗滕迪克构造的松版本。对于非空线性有序有限集I，令 $G(I)$ 表示松超范畴 $((\mathbb{O}^I)^{(-,\mathrm{op})})_{/\text{最大 } I}$ 的底层 1-范畴，

也就是说，$G(I)$ 是如下范畴：

- 对象为 $\mathbb{O}^I$ 中的态射 $i \to \max I$，
- 从 $\varphi\colon i \to \max I$ 到 $\psi\colon j \to \max I$ 的态射由一个 2-交换三角形给出



在 $\mathbb{O}^I$ 中。

定义 4.4. 设 $\mathbb{C}$ 为一个 2-范畴，将其视为一个 $\mathbf{Cat}_\infty$-富集范畴。对于一个 $\mathbf{Cat}_\infty$-富集函子

$$F : \mathbb{C} \to \mathbf{Cat}_\infty$$

我们引入 F 的松格罗滕迪克构造 $\int(F)$，它是一个带有自然函子 $\pi\colon \int(F) \to \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})$ 的单纯集合：$\int(F)$ 的一个 n-单形由以下数据给出

- 一个 2-范畴函子 $\sigma : \mathbb{O}^n \to \mathbb{C}$，
- 对于 $\emptyset \neq I \subset [n]$ 一个函子

$$\mathrm{N}(G(I)) \to F(\sigma(\max I))$$

使得满足以下条件：对于 $I \subset J \subset [n]$ 图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}(\mathbb{O}^J(\max I, \max J)) \times \mathrm{N}(G(I)) & \longrightarrow & \mathrm{N}(G(J)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{N}(\mathbb{C}(\sigma(\max I), \sigma(\max J))) \times F(\sigma(\max I)) & \longrightarrow & F(\sigma(\max J)) \end{array}$$

交换。

我们再次引入一种逆构造。给定一个 2-范畴 C 和一个对象 $c \in \mathsf{C}$，松弛下范畴的神经 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathsf{C}_{c/})$ 通过标记所有数据中包含可逆 2-态射的边而自带标记。这一构造产生一个 Cat_∞-富集函子

$$\mathbb{C}^{(\mathrm{op},-)} \to \mathrm{Set}^{+}_{\Delta/\,\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})}, c \mapsto \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C}_{c/})$$

对于 $X \in \mathsf{Set}^{+}_{\Delta/\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})}$ 和 $c \in \mathsf{C}$，因此存在一个函子性带标记单纯集合

$$\mathbb{\Gamma}(X)(c) = \mathrm{Map}^{\#}_{\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})}(\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C}_{c/}), X)$$

最终得到一个函子

$$\mathbb{\Gamma} : \mathrm{Set}^{+}_{\Delta/\,\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})} \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{Set}^{+}_{\Delta}}(\mathbb{C}, \mathrm{Set}^{+}_{\Delta}), X \mapsto \mathbb{\Gamma}(X)$$

我们记录松格罗滕迪克构造的重要性质，以备后用；这些性质与 [Dy21, Section 3.3.3]中所述的性质对偶。

引理 4.5. 设 C 是一个 2-范畴，且 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Cat}_\infty$ 是一个 Cat_∞-富集函子。则：

(1) 松格罗滕迪克构造 $\pi : \mathbb{X}(F) \to \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathsf{C})$ 是局部余笛卡尔的，并且在每个薄 2-单形上余笛卡尔。

(2) 对于 Cat-富集函子 $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$，我们有

$$\mathbb{X}(F) \times_{\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})} \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{D}) \cong \mathbb{X}(F|\mathbb{D}).$$

(3) 对于态射范畴为离散态射范畴的 2-范畴 C，沿函子进行限制

$$G(I) \to I, (j \to \max I) \mapsto j$$

诱导出映射 $\chi(F) \to \mathbb{X}(F)$，它连接普通 Grothendieck 构造与松弛 Grothendieck 构造，并且是 $\mathsf{N}(\mathsf{C}) \cong \mathsf{N}^{\mathrm{sc}}(\mathsf{C})$ 上余笛卡尔纤维化的纤维逐点等价。

我们还有引理 4.2 的以下松弛类比。

引理 4.6. 对于 2-范畴 C，存在一个自然弱等价

$$\eta : \mathrm{id} \to \mathbb{\Gamma} \circ \mathbb{X}$$

$\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{Cat}_\infty)$ 上的自函子。

4.3 ∞-范畴的伴随

∞-范畴的伴随将发挥重要作用，尤其是在分析 2- 重复稳定 ∞-范畴时；因此，我们在此汇集将在全文中使用的相关事实。

定义 4.7。$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 这两个 ∞-范畴之间的一个伴随，由一个单纯集映射 $\pi\colon \mathcal{M} \to \Delta^1$ 以及等价 $h_0\colon \mathcal{C} \simeq \mathcal{M}_{\{0\}}$ 和 $h_1\colon \mathcal{D} \simeq \mathcal{M}_{\{1\}}$构成；该映射既是笛卡尔纤维化，也是余笛卡尔纤维化。

由这样的伴随数据，我们可以如下构造与该伴随相关联的函子：若存在一个位于 Δ^1 之上的函子 $s\colon \mathcal{D} \times \Delta^1 \to \mathcal{M}$，使得 $s|\mathcal{D} \times \{1\} = h_1$、$s|\mathcal{D} \times \{0\} = h_0 \circ g$，并且对于每个 $x \in \mathcal{D}$，$s|\{x\} \times \Delta^1$ 都是 $\mathcal{M}$ 的一个 π-笛卡尔边，则称函子 $g\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 与伴随 $\pi\colon \mathcal{M} \to \Delta^1$ 相关联。

类似地，可以定义函子 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 何时与伴随$\mathcal{M} \to \Delta^1$相关联。由 [Lu09a, 5.2.1.4], ，相关联的函子总是存在。对于如上所述与一个伴随相关联的任意一对函子 $f\colon \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}\colon g$，我们记作 $f \dashv g$，并称 g 为f 的右伴随，f 为 g的左伴随。

定义 4.8. 若函子 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ of ∞-范畴存在一个右伴随，则称该函子有右伴随；也就是说，存在伴随 $\mathcal{M} \to \Delta^1$，其中 $\mathcal{M}_{\{0\}} \simeq \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{M}_{\{1\}} \simeq \mathcal{D}$，且 f 与该伴随相关联。

对于任意普通范畴间的函子 $F : C \to \mathbf{Cat}_\infty$，协变格罗滕迪克构造 $\pi\colon \chi(F) \to C$ 是一个余笛卡尔纤维化。现在我们给出该构造中笛卡尔边的刻画：

引理 4.9. 设 $F : C \to \mathbf{Cat}_\infty$ 是普通范畴间的一个函子。协变格罗滕迪克构造 $\pi\colon \chi(F) \to C$ 中一个位于边 $f\colon c \to d$ 之上的边 $e\colon x \to y$，由元素 $x \in F(c)$ 以及 $F(d)$ 中的边 $e'\colon F(f)(x) \to y$ 组成。该边是 π-笛卡尔边，当且仅当对于每个对象 $z \in F(c)$，边 e 都诱导一个同构

$$\mathrm{Map}_{F(c)}(z, x) \xrightarrow{F(f)} \mathrm{Map}_{F(d)}(F(f)(z), F(f)(x)) \xrightarrow{e'} \mathrm{Map}_{F(d)}(F(f)(z), y)$$

在空间的同伦范畴中 $\mathcal{H}$。

证明。由于 $\pi\colon \chi(F) \to C$ 是余笛卡尔的，依据 [Lu09a, 5.2.2.4], 的对偶，边是 π-笛卡尔的当且仅当它是局部π-笛卡尔的，因此我们不妨假设 $C = \Delta^1$，且$e : x \to y$ 位于 $0 \to 1$ 之上。根据 [Lu09a, 2.4.4.3] ，边 e 是 π-笛卡尔的当且仅当对于每个对象 $z \in F(0)$，都存在一个同伦笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{F(0)}(z, x) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{F(1)}(F(f)(z), y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

其中上方的箭头是断言中给出的复合。这显然等价于上方的箭头在空间的同伦范畴中是一个同构。 □

下面的引理表明，可以通过格罗滕迪克构造来检验伴随函子的存在性。

引理 4.10. 函子 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 的 ∞-范畴存在右伴随，当且仅当格罗滕迪克构造 $\pi : \chi(f) \to \Delta^1$ 是（局部）笛卡尔的。

证明. 这是 [Lu09a, 5.2.2.5]的对偶的一个实例。 □

除了通过双笛卡尔纤维化定义伴随外，还可以通过伴随的余单位给出一种有用的替代刻画：

命题 4.11. 设 $f : \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D} : g$ 是 ∞-范畴之间的函子。以下条件等价：

1. 存在一个伴随 $f \dashv g$。
2. 存在一个余单位变换 $\epsilon : f \circ g \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$，它属于函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$，使得对每个$c \in \mathcal{C}$ 和 $d \in \mathcal{D}$，诱导的映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c, g(d)) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(f(c), f(g(d))) \xrightarrow{\epsilon(d)} \mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(f(c), d)$$

是空间的同伦范畴中的一个同构 $\mathcal{H}$。

证明。与 [Lu09a, 5.2.2.8] 对偶。 □

作为这一判据的一个应用示例，我们证明伴随函子的复合律：

命题 4.12. 设 ∞-范畴之间的函子 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $f' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 分别有右伴随 $g : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 和 $g' : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$。则 $g \circ g'$ 是 $f' \circ f$ 的右伴随。若 $\epsilon : f \circ g \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 和 $\epsilon' : f' \circ g' \to \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 是证明这些伴随关系的余单位，则任意复合

$$\begin{array}{ccc} f' \circ f \circ g \circ g' & \xrightarrow{f' \circ \epsilon \circ g'} & f' \circ g' \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \epsilon'} \\ & & \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \end{array}$$

在函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ 中是这一伴随的余单位。

证明。设 $\epsilon : f \circ g \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 和 $\epsilon' : f' \circ g' \to \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 是用于证明给定伴随的余单位。对于 $c \in \mathcal{C}$ 和 $e \in \mathcal{E}$，我们在空间的同伦范畴中有如下交换图 $\mathcal{H}$：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c, gg'(e)) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(f(c), fgg'(e)) & \xrightarrow{f'} & \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(f'f(c), f'fgg'(e)) \\ & \searrow^{\simeq} & \downarrow{\scriptstyle \epsilon(g'(e))} & & \downarrow{\scriptstyle f'(\epsilon(g'(e)))} \\ & & \mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(f(c), g'(e)) & \xrightarrow{f'} & \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(f'f(c), f'g'(e)) \\ & & & \searrow^{\simeq} & \downarrow{\scriptstyle \epsilon'(e)} \\ & & & & \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(f'f(c), e) \end{array}$$

两个对角态射都是同构，因为 ϵ 和 ϵ' 是余单位。沿图表的另一侧追踪可知，所声称的余单位满足命题 4.11 的条件。

□

最后，我们给出一个命题，它刻画余笛卡尔纤维化之间的等价，并说明伴随在这些等价下表现良好。

命题 4.13. 给定一个 ∞-范畴的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U'} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\overline{F}} & \mathcal{D}' \end{array}$$

使得 U 和 U' 是余笛卡尔纤维化，且 $\overline{F}$ 是弱等价，则 F 是 ∞-范畴之间的等价，当且仅当它是 ∞-范畴之间的纤维逐点等价，并且保留余笛卡尔边。若这些条件成立，且 U 也还是一个笛卡尔纤维化，那么 U' 也是一个笛卡尔纤维化，并且 F 保留笛卡尔边。

证明. 这是 [Lu23, Tag 023M]及其对偶的一个实例。 □

5 范畴化的 Dold-Kan 对应 e

本节采用的方法是 [Dy21]中发展的理论的对偶版本。我们用 St_{Δ} 表示 Cat_∞-富化函子 $\Delta^{(\mathrm{op},-)} \to \mathrm{St}$ 所构成的范畴。

5.1 范畴化归一化链函子

稳定 ∞-范畴的连通链复形范畴

$$\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{St}) \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathbf{St})$$

是普通范畴函子 $F : \mathrm{N}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{St}$ 的全子范畴，其中

$$F(n+2 \to n) \in \mathrm{Fun}(F(n+2), F(n))$$

对每个 $n \in \mathrm{N}$，它都是一个零对象。

我们定义归一化链复形函子

$$\mathrm{C} : \mathbf{St}_{\Delta} \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{St})$$

与阿贝尔群的情形类似。

定义 5.1. 对于一个 2-单纯稳定的 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet$，令

$$\bar{\mathcal{A}}_n \subset \mathcal{A}_n$$

记作由满足以下条件的对象 $a \in \mathcal{A}_n$ 张成的全子范畴：对于每个 $0 \leq i < n$，$d_i(a)$ 在 $\mathcal{A}_{n-1}$ 中是一个零对象。由单纯恒等式可知，末面映射 $d_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n-1}$ 在这些子范畴之间诱导出映射。与 $\mathcal{A}_\bullet$ 关联的归一化链复形是链复形

$$\bar{\mathcal{A}}_0 \xleftarrow{d_1} \bar{\mathcal{A}}_1 \xleftarrow{d_2} \bar{\mathcal{A}}_2 \xleftarrow{d_3} \bar{\mathcal{A}}_3 \xleftarrow{d_4} \cdots$$

此构造以显然的方式延拓为函子 $\mathbf{C} : \mathbf{St}_\Delta \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{St})$。

由于这将在讨论 2-重循环稳定 ∞-范畴时派上用场，我们也给出在 (3.2) 中引入的映射 π_n 的范畴化。

定义 5.2. 对于 $n \geq 0$ 和一个 2-单纯稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet \in \mathbf{St}_\Delta$，我们从 (5.2) 中定义的立方体 $f_n : [1]^n \to \Delta([n],[n])$ 得到一个立方体

$$\mathcal{A}_\bullet \circ f_n : (\Delta^1)^n \xrightarrow{f_n} \mathrm{N}(\Delta([n],[n])) \xrightarrow{\mathcal{A}_\bullet} \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n)$$

先对该图表取左 Kan 延拓，再取右 Kan 延拓，即可构造一个立方体

$$c_n : (\Delta^1)^{n+1} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n)$$

满足以下条件：

1. 限制

$$(\Delta^1)^n \xrightarrow{\mathrm{id} \times \{1\}} (\Delta^1)^{n+1} \xrightarrow{c_n} \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n)$$

由 $\mathcal{A}_\bullet \circ f_n$ 给出。

2. 除非对所有 $0 \leq i < n$ 都有 $a_i = 0$，否则 $c_n(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0) \simeq 0 \in$ 函子范畴$(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n)$.

3. 立方体 c_n 是一个极限图，其极限顶点为 $(0, \ldots, 0)$。

对于这样一个立方体 c_n 的选择，我们将函子 $c_n(0, \ldots, 0) \in$ 函子范畴$(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n)$ 记为 π_n：$\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$。根据构造，该函子在可缩选择意义下唯一确定。

我们将给出引理 3.2 的结果的一个部分对应版本。

引理 5.3。对于 $n \geq 1$ 以及一个 2-单纯稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet$，令 $\pi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ 为一个函子，其定义为如上所述立方体 $c_n : (\Delta^1)^{n+1} \to \mathbf{Fun}(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n)$ 的极限顶点。则：

(1) 函子 π_n 取值于子范畴 $\bar{\mathcal{A}}_n$。

(2) 令 $\iota_n : \bar{\mathcal{A}}_n \to \mathcal{A}_n$ 表示包含，则我们有一个伴随 $\iota_n \dashv \pi_n$，其单位给出一个等价 $id_{\bar{\mathcal{A}}_n} \simeq \pi_n \circ \iota_n$。

证明。对于 $0 \le i < n$，由后复合 d_i 诱导的立方体 $d_i \circ c_n : (\Delta^1)^{n+1} \to$ 函子范畴$(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n-1})$，由于 d_i的正合性，也构成一个极限立方体。令 $Q_i^t \subset (\Delta^1)^{n+1}$ 表示由顶点 $(a_0, \dots, a_n)$ 张成的面，其中满足 $a_i = 0$，并去掉初始顶点 $(0, \dots, 0)$。类似地，令 $Q_i^b \subset (\Delta^1)^{n+1}$ 表示由顶点 $(a_0, \dots, a_n)$ 张成的面，其中满足 $a_i = 1$，并去掉唯一非零项为 a_i 的顶点。根据一个标准的余终性论证，$d_i \circ c_n$ 是笛卡尔立方体等价于方块

$$\begin{array}{ccc} d_i \circ \pi_n & \longrightarrow & \lim d_i \circ c_n | Q_i^t \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \lim d_i \circ c_n | Q_i^b \end{array}$$

是笛卡尔的。图表中的右箭头是一个等价，因为

$$f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) \circ \partial_i = f_n(b_0, \dots, b_{n-1}) \circ \partial_i$$

若 $a_j = b_j$ 对所有 $j \neq i$都成立。由于该方块是一个极限方块，我们得出 $d_i \circ \pi_n \simeq 0$。

¯为证明 (2)，我们给出一个余单位 $\epsilon : \pi_n \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$，并证明对每个 $x \in \mathcal{A}_n$ 和 $y \in \mathcal{A}_n$，与 $\epsilon(y)$ 复合会诱导出一个同构

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(x, \pi_n(y)) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(x, y)$$

在空间的同伦范畴中 $\mathcal{H}$。余单位 $\epsilon : \iota \circ \pi_n \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$ 是作为立方体 c_n 所含数据的一部分得到的：它是 $(\Delta^1)^{n+1}$ 中边 $(0, \dots, 0, 0) \to (0, \dots, 0, 1)$ 在 c_n 下的像。

注意，$f_n(a)$ 可通过某个 ∂_i 分解，其中对任意 $a \neq (0, \dots, 0)$ 都有 $0 \le i < n$，因此，对于元素 $x \in \mathcal{A}_n$，我们有 ¯ $f_n(a)^*(x) \simeq 0 \in \mathcal{A}_n$。由此可知，余单位限制为一个等价 $\iota_n^* \epsilon : \pi_n \circ \iota_n \to \mathrm{id}_{\bar{\mathcal{A}}_n}$，其逆元由单位给出。

令 $j : \mathcal{A}_n \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_n)$ 表示 $\mathcal{A}_n$ 的米田嵌入。由 [Lu09a, 5.1.3.2], 可知，此嵌入保持极限，因此对于 $y \in \mathcal{A}_n$，立方体

$$(\Delta^1)^{n+1} \xrightarrow{c_n} \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n) \xrightarrow{\mathrm{ev}_y} \mathcal{A}_n \xrightarrow{j} \mathcal{P}(\mathcal{A}_n)$$

¯是一个预层的极限立方体。特别地，对于任意 $x \in \mathcal{A}_n$，在 x处对这个预层立方体求值，就得到一个极限立方体。我们来分析作为此立方体顶点的 Kan复形：

对于零对象 $0 \in \mathcal{A}_n$，Kan复形 $\mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(x, 0)$ 根据零对象的定义是可缩的。

对于 $a \neq (0, \dots, 0)$，映射 $f_n(a)$ 可分解为经过某个 $\sigma_i (0 \le i \le n)$，因此我们可以对某个 $z \in \mathcal{A}_{n-1}$ 写作 $f_n(a)^* y = s_i(z)$。由伴随 $d_i \dashv s_i$，我们接着得到同构

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(x, f_n(a)^*(y)) = \mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(x, s_i(z)) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(d_i(x), z)$$

在空间的同伦范畴中。Kan复形 $\mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(d_i(x)\ z)$ 是可缩的，因为$^{-}$ $d_i(x) \in \mathcal{A}_{n-1}$ 在假设 $x \in \mathcal{A}_n$ 下是一个零对象。由此可得，极限立方体中出现的所有空间都是可缩的，除了 $\mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(x, \pi_n(y))$ 和 $\mathrm{Map}_{\mathcal{A}_n}(x, y)$；因此它们之间的边在空间的同伦范畴中是一个同构。

□

注5.4. 通过为 $n \geq 0$ 和一个 2-单纯稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet$ 给出包含 $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_n$的右$^{-}$伴随函子，我们用 [DKSS21], 的语言证明了$^{-}$满稳定子范畴 $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_n$ 是右可容许的。由其中的命题 2.3.2可知，$(\bar{\mathcal{A}}_n^{\perp}, \bar{\mathcal{A}}_n)$ 是 $\mathcal{A}_n$ 的一个半正交分解；并且在前面的证明中我们已经看到

$$s_i(\mathcal{A}_{n-1}) \subset \bar{\mathcal{A}}_n^{\perp} = \{c \in \mathcal{A}_n | \operatorname{Map}_{\mathcal{A}_n}(a, c) \text{ is contractible for all } a \in \bar{\mathcal{A}}_n\}$$

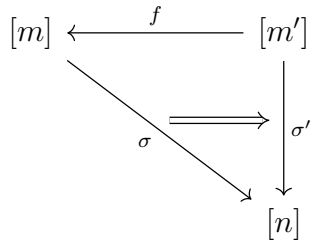
对于 $0 \leq i \leq n-1$。这是对经典分解的进一步范畴化

$$A_\bullet \cong \mathrm{C}(A_\bullet) \oplus \mathrm{D}(A_\bullet).$$

5.2 范畴化 Dold-Kan 神经

现在我们给出 Dold-Kan 神经构造的一种范畴化。为此，对于每个 $[n] \in \mathbb{\Delta}$，我们引入松逗号范畴 $\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}$:

- $\mathrm{N}_{\mathrm{op}\,[n]/}$ 的对象是 $\mathbb{\Delta}$中的态射 $\sigma : [m] \to [n]$。
- A 从 $\sigma : [m] \to [n]$ 到 $\sigma' : [m'] \to [n]$ 的态射是一个 2-交换三角形 gle



其中 f 是末面映射 $\partial_k : [k-1] \to [k]$的复合。

范畴 $\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}$ 带有一个遗忘函子 $\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/} \to \mathrm{N}^{\mathrm{op}}$，这些范畴组装起来形成一个 2-范畴的函子

$$\mathbb{\Delta} \to \mathbf{Cat}_{/\mathbb{N}^{\mathrm{op}}}, [n] \to \mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/} \tag{5.1}$$

回忆一下（3.1）中立方体 $f_n : [1]^n \to \mathbb{\Delta}([n], [n])$ 的定义。从这个立方体出发，通过预复合 ∂_n，我们得到另一个立方体 $b_n : [1]^n \to \mathbb{\Delta}([n-1], [n])$:

$$b_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) : [n-1] \to [n], i \mapsto i + a_i$$

立方体 f_n 和 b_n 构成立方体 q_n： $[1]^{n+1} \to \mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}$ 的各个面：

$$q_n(a_0,\dots,a_n) = \begin{cases} f_n(a_0,\dots,a_{n-1}) \text{ for } a_n = 0 \\ b_n(a_0,\dots,a_{n-1}) \text{ for } a_n = 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

例如，对于 $n=1$，立方体 q_1 由下式给出

$$\begin{array}{ccc} 01 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 11 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

定义 5.5. 链复形 $\mathcal{B}_\bullet \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{St})$ 的范畴化 Dold-Kan 神经 $\mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)$ 在次数 n 由以下全子范畴给出

$$\mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)_n \subset \mathrm{Fun}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}), \chi(\mathcal{B}_\bullet))$$

由满足以下条件的图表 $A : \mathrm{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}) \to \chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 张成：

- 对于每个退化单形 $\sigma : [m] \to [n]$，对象 $A(\sigma)$ 是 $\mathcal{B}_m$中的零对象。
- 对于每个 $m \geq 1$ 以及每个非退化的 m-单形 $\sigma : [m] \to [n]$，立方体

$$(\Delta^1)^{m+1} \xrightarrow{q_m} \mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[m]/} \xrightarrow{\sigma \circ -} \mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/} \xrightarrow{A} \chi(\mathcal{B}_\bullet)$$

  是一个 π-余极限立方体，其余极限顶点为 $(1,\dots,1)$。

该构造通过（$\infty, 2$）-范畴的一个函子扩展

$$\mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)_\bullet : \mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)} \to \mathbf{Cat}_\infty$$

借助（5.1）中的函子性。根据 [Lu09a, 5.1.2.2], ，该构造中出现的 ∞-范畴实际上都是稳定的 ∞-范畴。因此，范畴化 Dold-Kan 神经给出一个函子

$$\mathrm{N} : \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{St}) \to \mathbf{St}_{\mathbb{\Delta}}.$$

我们描述低维中的范畴化 Dold-Kan 神经的胞腔：

- 0-胞腔 $A \in \mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)_0$ 的数据由一个对象 $B_0 \in \mathcal{B}_0$给出。
- 一个 1-胞腔 $A \in \mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)_1$ 的数据由一个方块给出

$$\begin{array}{ccc} A_{01} & \longrightarrow & A_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{11} & \longrightarrow & A_1 \end{array}$$

在 $\chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 中，使得 A_{11} 是 $\mathcal{B}_1$ 中的一个零对象，并且诱导方形

$$\begin{array}{ccc} d(A_{01}) & \longrightarrow & A_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ d(A_{11}) & \longrightarrow & A_1 \end{array}$$

在 $\mathcal{B}_0$ 中是双笛卡尔的。

在 $\mathrm{St}_{\mathbb{\Delta}}$ 和 $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{St})$ 中存在自然的弱等价类 L：两种情况下，这些类都由逐层范畴等价的态射组成。本节余下部分将用于证明以下定理:

定理 5.6。范畴化归一化链复形函子 C 和范畴化 Dold-Kan 神经 N 诱导出一个 ∞-范畴之间的等价

$$C : \mathrm{L}\,\mathbf{St}_{\Delta} \leftrightarrow \mathrm{L}\,\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{St}) : N$$

它建立了在弱等价类处取局部化后得到的 ∞-范畴之间的等价。

5.3 等价 $\mathrm{C} \circ \mathrm{N} \simeq \mathrm{id}$

引理 5.7. 存在一个自然弱等价

$$\mathrm{C} \circ \mathrm{N} \to \Gamma \circ \chi.$$

证明. 包含 $\mathbf{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)}$ 将箭头 $m+1 \to m$ 对应到态射$d_{m+1}\colon [m] \to [m+1]$，并为每个 $n \geq 0$ 诱导一个函子 $i_n : \mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{n/} \to \mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/\circ}$ 随后，限制诱导出函子

$$i_n^* : \mathrm{Fun}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}), \chi(F)) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{n/}), \chi(F))$$

进一步限制后得到一个函子

$$i_n^* : \mathrm{C}(\mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet))_n \to \Gamma(\chi(\mathcal{B}_\bullet))_n.$$

根据归一化链复形的定义，图表 $A \in \mathbf{C}(\mathbf{N}(\mathcal{B}_\bullet))_n \subset \mathbf{Fun}(\mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}), \chi(F))$ 必须满足条件 $d_i(A) \simeq 0$，对所有 $0 \leq i < n$ 均成立。这意味着，对于所有单形 $\sigma\colon [m] \to [n]$（除了 $\mathrm{id} : [n] \to [n]$ 和 $\partial_n\colon [n-1] \to [n]$），都有 $A(\sigma) \simeq 0$。由此可知， i_n^* 是范畴等价。 □

将上述结果与引理 4.2 中的自然弱等价 $\mathrm{id} \to \Gamma \circ \chi$ 结合起来，我们得到一串自然弱等价的之字形

$$\mathrm{id} \longrightarrow \Gamma \circ \chi \longleftarrow \mathrm{C} \circ \mathrm{N}$$

它下降为 $\mathrm{L}\,\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{St})$ 的自函子之间的等价 $\mathrm{id} \simeq \mathrm{C} \circ \mathrm{N}$。

5.4 等价 $\mathrm{N}\circ\mathrm{C}\simeq\mathrm{id}$

我们构造 ce 如下所示，由 $\mathrm{St}_{\triangle}$ 的自函子构成的之字形，其中这些自函子都是弱等价：

$$\mathrm{id}\xrightarrow{\eta}\mathbb{\Gamma}\circ\mathbb{\chi}\xleftarrow{\alpha}\mathcal{F}\xrightarrow{\beta}\tilde{\mathrm{N}}\circ\mathrm{C}\xleftarrow{\theta}\mathrm{N}\circ\mathrm{C}\tag{5.3}$$

弱等价 η 已在引理 4.6 中引入。我们进一步引入宽松范畴化 Dold-Kan 神经：

~定义 5.8. 与链复形$\mathcal{B}_\bullet\in\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{St})$ 相关的宽松范畴化 Dold-Kan 神经 $\mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)$，是通过将范畴化 Dold-Kan 神经的定义 6.3 中的 $(\infty,1)$-范畴化格罗滕迪克构造 $\chi(\mathcal{B}_\bullet)\to\mathrm{N}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}})$ 替换为 $(\infty,2)$-范畴化格罗滕迪克构造 $\mathbb{\chi}(\mathcal{B}_\bullet)\to\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}})\cong\mathrm{N}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}})$ 而得到的 2-单纯稳定 ∞-范畴。这里我们将 N^{op} 视为具有离散态射范畴的 2-范畴。

由引理 4.5 我们立即推出以下结论：

引理 5.9. 存在一个弱等价

$$\theta:\tilde{\mathrm{N}}\to\mathrm{N}$$

函子 $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{St})\to\mathrm{St}_{\triangle}$。

接下来，我们定义函子 $\mathcal{F}$：

定义 5.10。对于 $n\geq 0$，我们引入单纯集合

$$\mathcal{M}_n=\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)}_{[n]/})\coprod_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/})}\Delta^1\times\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/})$$

其中，推出沿着包含 $\{1\}\times\mathrm{id}:\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/})\subset\Delta^1\times\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/})$ 进行。我们有以下包含

$$\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)}_{[n]/})\xrightarrow{r}\mathcal{M}_n\xleftarrow{s}\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/})$$

其中 $s=\{0\}\times\mathrm{id}$。函子 $\mathcal{F}:\mathrm{St}_{\Delta}\to\mathrm{St}_{\Delta}$ 随后定义如下：对于一个 2-单纯稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet\in\mathrm{St}_{\Delta}$，稳定 ∞-范畴

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}_\bullet)_n\subset\mathrm{Map}_{\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)})}(\mathcal{M}_n,\mathbb{\chi}(\mathcal{A}_\bullet))$$

是由满足以下条件的图表 $A:\mathcal{M}_n\to\mathbb{\chi}(\mathcal{A}_\bullet)$ 所张成的全子范畴：

- 函子 $r^*A:\mathrm{N}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{\Delta}_{(\mathrm{op}\,-)\,[n]/})\to\mathbb{\chi}(\mathcal{A}_\bullet)$ 将对应于严格交换三角形的边映射为 π-余笛卡尔边，位于 $\mathbb{\chi}(\mathcal{A}_\bullet)$中。
- 函子 s^*A 将 $\mathrm{N}(\mathrm{N}_{\mathrm{op}\,[n]/})$ 中对应于退化单形$\sigma:[k]\to[n]$ 的每个顶点映射到纤维 $\pi^{-1}([k])$ 中的一个零对象。

• 对于非退化单形 $\sigma\colon [k]\to[n]$ 立方体

$$\Delta^1\times(\Delta^1)^k \xrightarrow{\mathrm{id}\times f_k^*\sigma} \Delta^1\times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/}) \xrightarrow{A} \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$$

在纤维 $\pi^{-1}([k])$中是双笛卡尔的。

之字形图表 (5.3) 的自然变换由沿上述定义中引入的函子 r 和 s 进行拉回得到:

引理 5.11。我们得到如下自然弱等价:

1. 沿 r 的限制: $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{\Delta}^{(\mathrm{op},-)}_{[n]/})\to\mathcal{M}_n$ 诱导出一个自然变换

$$r^*:\mathcal{F}\to\mathbb{\Gamma}\circ\mathbb{X}$$

它是 $\mathrm{St}_{\mathbb{\Delta}}$ 的自函子之间的逐点弱等价。

2. 沿 s 的限制: $\mathrm{N}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/})\to\mathcal{M}_n$ 诱导出一个自然变换

$$s^*:\mathcal{F}\to\tilde{\mathrm{N}}\circ\mathrm{C}$$

从 $\mathrm{St}_{\mathbb{\Delta}}$ 的自函子到自身的逐点弱等价。

证明。由 [Dy21 命题 4.5、4.6] 对偶得到。在双循环情形下，我们将对这些证明中的大部分作相应调整并给出相应版本。 □

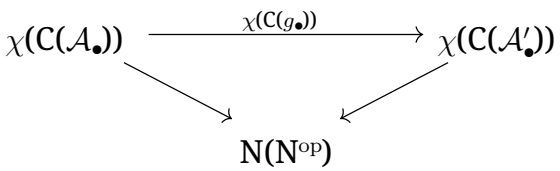
6 范畴化的 Dwyer-Kan 对应 e

现在，我们将注意力转向稳定 ∞-范畴中的 2-重单纯对象，并对单纯情形中的范畴化作进一步细化。

6.1 范畴化归一化双链复形函子

对于任意 2-重单纯稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet\in\mathrm{St}_{\Xi}$，我们可以考虑其底层 2-单纯对象的归一化链复形 $\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)$。duplicial 对象所固有的附加数据使我们能够作如下进一步细化:

引理 6.1。对于任意 2-重单纯对象 $\mathcal{A}_\bullet\in\mathrm{St}_{\Xi}$，微分 $d_{n+1}\colon \mathrm{C}(\mathcal{A})_{n+1}\to\mathrm{C}(\mathcal{A})_n$ 对每个 $n\geq 0$ 都有一个右伴随。此外，对于任意态射 $g_\bullet\colon \mathcal{A}_\bullet\to\mathcal{A}'_\bullet$ in St_{Ξ}，所诱导的映射



归一化链复形的格罗滕迪克构造保持笛卡尔边。

证明。设 $\mathcal{A}_\bullet \in \mathrm{St}_{\Xi}$ 是一个 2-重拟单纯稳定 ∞-范畴，并且 $n \geq 0$。回顾引理 5.3 中的伴随

$$\iota_{n+1} : \bar{\mathcal{A}}_{n+1} \leftrightarrow \mathcal{A}_{n+1} : \pi_{n+1}$$

2-重偶循环 ∞-范畴的数据也包含伴随函子

$$d_{n+1} : \mathcal{A}_{n+1} \leftrightarrow \mathcal{A}_n : s_{n+1}$$

根据伴随函子的复合律，$d_{n+1} : \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$ 有一个右伴随，给定为 $\pi_{n+1} \circ_{-} \quad {}_{-} s_{n+1} \circ$ 限制定义域后，它也是 $d_{n+1} : \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$ 的右伴随。

为了证明第二部分，我们给出该伴随的一个更明确的描述：回顾定义 5.2 中的立方体

$$c_{n+1} : (\Delta^1)^{n+2} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1}).$$

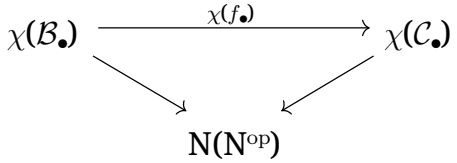
立方体 $s_{n+1}^* c_{n+1} : (\Delta^1)^{n+2} \to$ 函子范畴$(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1})$ 有一个伴随可选，即取其在顶点 $(0, \ldots, 0)$ 处的值。该伴随的余单位 ϵ：$d_{n+1} \circ \pi_{n+1} \circ s_{n+1} \to \mathrm{id}$ 由对立方体求值给出

$$(\Delta^1)^{n+2} \xrightarrow{c_{n+1}} \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1}) \xrightarrow{s_{n+1}^*} \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}) \xrightarrow{d_{n+1}\circ -} \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n)$$

在边 $(0, \ldots, 0, 0) \to (0, \ldots, 0, 1)$ 处。

态射 $f_\bullet : \mathcal{A}_\bullet \to \mathcal{A}'_\bullet$ in St_{Ξ} 与重复单纯映射交换，并且逐级正合，因此对于任意 $a \in \mathcal{A}_n$，边 $\pi_{n+1}(s_{n+1}(a)) \to a$ in $\chi(\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet))$（它对应于余单位的分量）在 $\chi(\mathrm{C}(f_\bullet))$ 下被映射为 $\chi(\mathrm{C}(\mathcal{A}'_\bullet))$ 中的一条笛卡尔边。由于笛卡尔边在相对极限意义下是唯一的，这意味着所有笛卡尔边都被保留。 □

具有右伴随的连通链复形范畴 $\mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathrm{St}) \subset \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{St})$，是这样一个子范畴：其对象为满足微分$d$ 在每个次数上都存在右伴随的链复形 $\mathcal{B}_\bullet$；等价地，$\chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 是一个双笛卡尔纤维化；其态射为满足以下条件的链映射 $f_\bullet : \mathcal{B}_\bullet \to \mathcal{C}_\bullet$，即诱导的映射



保留笛卡尔边。

定义 6.2。范畴化归一化双链复形函子

$$\mathrm{C} : \mathbf{St}_{\Xi} \to \mathbf{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathbf{St})$$

是使下图交换的函子：

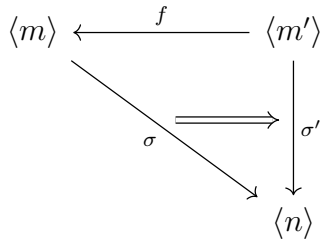
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{St}_{\Xi} & \xrightarrow{\mathrm{C}} & \mathbf{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathbf{St}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{St}_{\Delta} & \xrightarrow{\mathrm{C}} & \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{St}) \end{array}$$

这里，左侧垂直箭头是遗忘函子，右侧垂直箭头是包含，底部箭头是范畴化归一化链函子。

6.2 范畴化 Dwyer-Kan 神经

接下来，我们给出双循环情形下神经构造的范畴化。对于每个$\langle n\rangle \in \Xi$，我们仍有松逗号范畴 $\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}$，定义如下：

- 对象由 Ξ 中的态射 $\langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 给出。
- 从 $\sigma : \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 到 $\sigma' : \langle m'\rangle \to \langle n\rangle$ 的态射由一个 2-交换图给出



其中 f 是末面映射 $\partial_k : \langle k-1\rangle \to \langle k\rangle$的复合。

存在一个显然的遗忘函子 $\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/} \to \mathrm{N}^{\mathrm{op}}$。通过后复合，这个构造扩展为一个 Cat-富函子 $\Xi \to \mathrm{Cat}^{/\mathbb{N}^{\mathrm{op}}}$。

回忆 (5.2) 中立方体 $q_m : [1]^{m+1} \to \mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{[m]/}$ 的定义。通过与包含 $\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{[m]/} \to \mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{\langle m\rangle/}$ 复合，我们也可以将其视为立方体 $q_m : [1]^{m+1} \to \mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{\langle m\rangle/}$。

定义 6.3. 对于带有右伴随的连通链复形 $\mathcal{B}_\bullet \in \mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathrm{St})$，其格罗滕迪克构造为 $\pi : \chi(\mathcal{B}_\bullet) \to \mathrm{N}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}})$，我们将范畴化 Dwyer-Kan 神经 $\mathrm{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_\bullet$ 定义如下：

$$\mathrm{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_n \subset \mathrm{Fun}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}), \chi(\mathcal{B}_\bullet))$$

是由满足以下条件的图表 $A: \mathrm{N}(\mathrm{N}^{\mathrm{Op}}_{\langle n\rangle/}) \to \chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 张成的全子范畴：

- 对于每个在 $\{0,\dots,m\}$ 上不是单射的 $\sigma : \langle m\rangle \to \langle n\rangle$，对象 $A(\sigma)$ 是 $\mathcal{B}_m$ 中的零对象。

• 对于 $m \geq 1$ 以及每个在 $\{0, \ldots, m\}$ 上为单射的 $\alpha\colon\ \langle m\rangle \to \langle n\rangle$，诱导立方体

$$(\Delta^1)^{m+1} \xrightarrow{q_m} \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle m\rangle/}) \xrightarrow{\alpha\circ -} \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}) \xrightarrow{A} \chi(\mathcal{B}_\bullet)$$

是一个 π-余极限图表，其余极限顶点为 $(1, \ldots, 1)$。

• 对于每个 $m \geq 0$ 以及任意 $\alpha\colon\ \langle m\rangle \to \langle n\rangle$，它作为映射 $\mathsf{Z} \to \mathsf{Z}$ 是单射，由严格交换三角形诱导的态射

$$\begin{array}{ccc} \langle m\rangle & \xrightarrow{\partial_{m+1}} & \langle m+1\rangle \\ & \searrow^{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\alpha}} \\ & & \langle n\rangle \end{array}$$

是 π-笛卡尔的，其中 $\tilde{\alpha}$ 由上述图表的交换性定义，并且$\tilde{\alpha}(m+1) = \alpha(0) + n + 1$。

范畴化的 duplicial Dold-Kan 神经的 2-函子性由 $\Xi \to \mathsf{Cat}^{/\mathbb{N}^{\mathrm{op}}}$ 的 2-函子性诱导。该构造扩展为一个函子

$$\mathrm{N}' : \mathbf{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathbf{St}) \to \mathbf{St}_{\Xi}.$$

在低维中，胞腔如下：

• 一个 0-胞腔 $A \in \mathsf{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_0$ 相当于一个图表

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{00} & \longrightarrow & A_{01} & \xrightarrow{*} & A_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & \searrow & & & \\ & & A_{11} & \longrightarrow & A_{12} & \xrightarrow{*} & A_1 & & \\ & & & & \downarrow & & & \searrow & \\ & & & & A_{22} & \longrightarrow & A_{23} & \xrightarrow{*} & A_2 \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

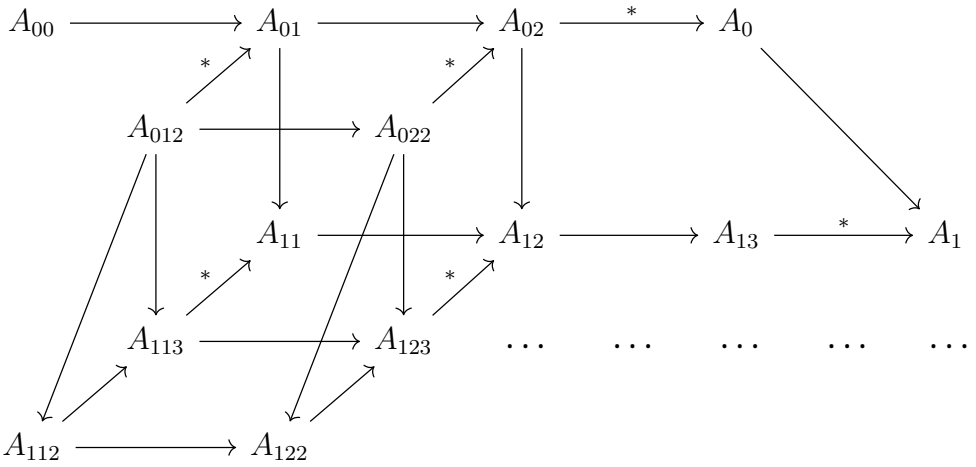
在 $\chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 中，使得：

– 对于 $0 \leq i, \quad A_i \in \mathcal{B}_0$；对于 $0 \leq i \leq j \leq i+1$, $A_{ij} \in \mathcal{B}_1$。– 对于 $i \geq 0, \quad A_{ii} \simeq 0 \in \mathcal{B}_1$。– 边 $A_{ii+2} \to A_i$ 对于 $i \geq 0$ 是 π-笛卡尔的。– 诱导方形

$$\begin{array}{ccc} d(A_{ii+1}) & \longrightarrow & A_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ d(A_{i+1i+1}) & \longrightarrow & A_{i+1} \end{array}$$

在 $\mathcal{B}_0$ 中对 $0 \leq i$是双笛卡尔的。

• 一个 1-胞腔 $A \in \mathbf{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_1$ 相当于一个图表



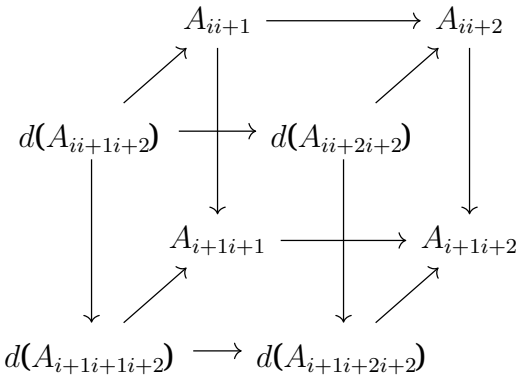
属于满足以下条件的 $\chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 中:

– $A_i \in \mathcal{B}_0$ 对于 $0 \leq i$, $A_{ij} \in \mathcal{B}_1$ 对于 $0 \leq i \leq j \leq i+2$, $A_{ijk} \in \mathcal{B}_2$ 对于 $i \leq j \leq k \leq i+2$。– $A_{ii} \simeq 0 \in \mathcal{B}_1$ 以及 $A_{iii+1} \simeq A_{ii+1i+1} \simeq A_{ii+2i+2} \simeq 0 \in \mathcal{B}_2$ 对于 $0 \leq i$。– 边 $A_{ii+2} \to A_i$ 对于 $0 \leq i$是 π-笛卡尔的。– 边 $A_{ii+1i+2} \to A_{ii+1}$ 对于 $0 \leq i$是 π-笛卡尔的。– 诱导方形

$$\begin{array}{ccc} d(A_{ii+1}) & \longrightarrow & A_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ d(A_{i+1i+1}) & \longrightarrow & A_{i+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} d(A_{ii+2}) & \longrightarrow & A_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{i+2i+2} & \longrightarrow & A_{i+2} \end{array}$$

在 $\mathcal{B}_0$ 对于 $i \in \mathbf{N}$ 中是双笛卡尔的。

– 诱导立方体

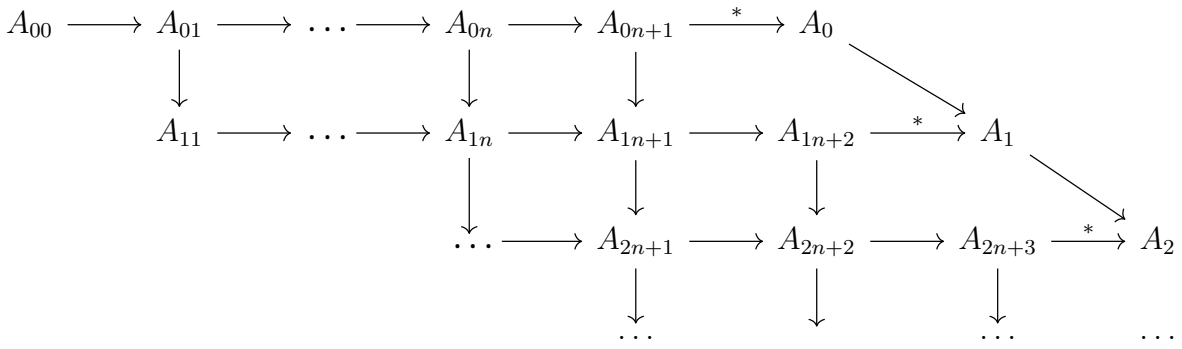


在 $\mathcal{B}_1$ 中对 $i \in \mathbf{N}$ 是双笛卡尔的。

例6.4. 设

$$\mathcal{B}_\bullet = \mathcal{B}_0 \longleftarrow \mathcal{B}_1 \longleftarrow 0 \longleftarrow \dots$$

是一个集中在 0和1次的链复形，使得 d 具有右伴随函子。∞-范畴 $\mathrm{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_n$ 由 $\chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 中以下形式的图表组成



满足以下条件:

- $A_i \in \mathcal{B}_0$ 且 $A_{ij} \in \mathcal{B}_1$ 对于 $i \in \mathbf{N}$ 和 $0 \leq j \leq n+1+i$。
- 对象 $A_{ii} \in \mathcal{B}_1$ 是 $i \in \mathbf{N}$ 的零对象。
- 带星号的边 $A_{in+1+i} \to A_i$ 对于 $i \in \mathbf{N}$ 是笛卡尔的。
- 对于 $0 \leq i < j \leq n+1+i$ 诱导方块

$$\begin{array}{ccc} d(A_{ij}) & \longrightarrow & A_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ d(A_{jj}) & \longrightarrow & A_j \end{array}$$

  在 $\mathcal{B}_0$ 中是双笛卡尔的。

- 对于 $0 \leq i < j < k \leq n+1+i$ 诱导方块

$$\begin{array}{ccc} A_{ij} & \longrightarrow & A_{ik} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{jj} & \longrightarrow & A_{jk} \end{array}$$

  在 $\mathcal{B}_1$ 中是双笛卡尔的。

引理 6.5. 设 $\mathcal{B}_\bullet \in \mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathrm{St})$ 是一个具有右伴随的链复形。对于每个$n \geq 0$，自然函子

$$\mathrm{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_n \to \mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)_n$$

由包含 $\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/} \to \mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n \rangle /}$ 诱导的映射是一个平凡 Kan 纤维化。

证明。我们定义如下的满子范畴嵌套族 $D_k \subset \mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}$ （其中 $k \geq n$ ）： D_k由 Ξ 中在 $\{0,\dots,m\}$ 上不是单射的态射 $\langle m\rangle \to \langle n\rangle$，以及满足 $\tau(m) \leq k$ 的态射 $\tau\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 所张成。然后我们引入满子范畴

$$\mathcal{S}_k \subset \mathrm{Fun}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{N}(D_k), \chi(\mathcal{B}_\bullet))$$

由满足定义 6.3 中对这类图表有意义的所有条件的图表 $A\colon \mathrm{N}(D_k) \to \chi(\mathcal{B}_\bullet)$ 所张成。

根据构造，我们有 $\mathrm{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_n \cong \lim_k \mathcal{S}_k$，因此要证明映射 $\mathrm{N}'(\mathcal{B}_\bullet)_n \to \mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)_n$ 是平凡 Kan 纤维化，只需证明对每个 $k \geq n$ ，映射 $\mathcal{S}_{k+1} \to \mathcal{S}_k$ 也是平凡 Kan 纤维化，并且映射 $\mathcal{S}_n \to \mathrm{N}(\mathcal{B}_\bullet)_n$ 也是如此。

后一个断言由 [Lu09a, 4.3.2.15] 立即得到，因为图表 $A \in \mathcal{S}_n$ 恰好是其在 $\mathrm{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{[n]/})$ 上的限制的 π-左 Kan 扩张。

为了证明第一个断言，我们定义另一个辅助范畴 D'_k，它介于 D_k 和 D_{k+1}之间：它是由 D_k 以及满足 $\tau(m) = k+1$ 和 $\tau(0) = k-n$ 的那些 $\tau\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 所张成的全子范畴 $D'_k \subset D_{k+1}$。再令

$$\mathcal{S}'_k \subset \mathrm{Fun}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{N}(D'_k), \chi(\mathcal{B}_\bullet))$$

表示由满足 Dwyer-Kan 神经定义中所有相关条件的图表 A 所张成的全子范畴。

对图表 $A \in \mathcal{S}'_k$ 的新要求是，所有新添加的 τ 对应的边 $A(\tau) \to A(\tau \circ \partial_{m+1})$ 都是笛卡尔的。因此， $\mathcal{S}'_k$ 的对象恰好是 $\mathcal{S}_k$中图表的 π-右 Kan 延拓。由此可知， $\mathcal{S}'_k \to \mathcal{S}_k$ 是平凡 Kan 纤维化。

最后，映射$\mathcal{S}_{k+1} \to \mathcal{S}'_k$ 是平凡 Kan 纤维化，因为前者中包含的图表恰好是后者 ∞-范畴中图表的 π-左 Kan 延拓。 □

2-重单纯稳定 ∞-范畴将伴随 $d_{n+1} \dashv s_{n+1}$ 作为其相干数据的一部分。现在我们证明，在某种意义上，仅仅要求每个次数中存在这样的右伴随，就足以作为一个 2-单纯对象能够延拓为 2-重单纯对象的判据。

命题 6.6. 设 $\mathcal{A}_\bullet \in \mathrm{St}_{\mathbb{\Delta}}$ 是一个 2-单纯稳定 ∞-范畴，并且对所有 $n \geq 0$， $d_{n+1}\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$ 都有右伴随。则存在一个 2-重单纯稳定 ∞-范畴$\mathcal{D}_\bullet \in \mathrm{St}_{\Xi}$ ，使得 $\mathcal{A}_\bullet \simeq \mathcal{D}_\bullet$ 在局部化 $\mathbf{L}\,\mathrm{St}_{\mathbb{\Delta}}$ 中成立。

证明。与引理 6.1 的证明采用相同的论证可知，归一化链复形 $\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)$ 有右伴随，即 $\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet) \in \mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathrm{St})$。因此，我们可以将范畴化的 Dwyer-Kan 神经应用于这个链复形，得到 2-重单纯对象 $\mathrm{N}'(\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet))$。由定理 5.6 和引理 6.5，我们得到一串等价

$$\mathcal{A}_\bullet \simeq \mathrm{N}(\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)) \simeq \mathrm{N}'(\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet))$$

在 $\mathbf{L}\,\mathrm{St}_{\mathbb{\Delta}}$ 中，如所愿。 □

同样， St_{Ξ} 和 $\mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathrm{St})$ 中存在自然的弱等价类 L，由那些逐层为范畴等价的态射构成。

定理 6.7. 范畴化归一化双链复形函子 C 和范畴化 Dwyer-Kan 神经 N′ 诱导出一个 ∞-范畴之间的等价

$$\mathrm{C} : \mathrm{L}\,\mathbf{St}_{\Xi} \leftrightarrow \mathrm{L}\,\mathbf{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathbf{St}) : \mathrm{N}'$$

在弱等价类处的 ∞-范畴局部化之间 .

该定理的证明占据以下两个小节。

6.3 等价 $\mathrm{C} \circ \mathrm{N}' \simeq \mathrm{id}$

我们首先证明等价 $\mathrm{C} \circ \mathrm{N}' \simeq \mathrm{id}$，它可直接由单纯情形中的相应等价得到。

定理 6.8。在每个次数上都具有伴随函子的稳定 ∞-范畴的连通链复形的 ∞-范畴 $\mathrm{L}\,\mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}$(St) 上，自函子之间存在自然等价 $\mathrm{C} \circ \mathrm{N}' \simeq \mathrm{id}$。

证明。延拓定理 5.6 的相应证明部分中的之字形图，我们得到一个弱等价图表

$$\mathrm{id} \longrightarrow \Gamma \circ \chi \longleftarrow \mathrm{C} \circ \mathrm{N} \longleftarrow \mathrm{C} \circ \mathrm{N}'$$

函子 $\mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}$(St) $\to$Ch$_{\geq 0}$(St)。对这些链复形的格罗滕迪克构造反复应用命题 4.13，可知我们可以将此图表视为 Fun($\mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}$(St), $\mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}$(St)) 中由弱等价构成的图表。

□

6.4 等价 $\mathrm{N}' \circ \mathrm{C} \simeq \mathrm{id}$

我们将构造一个由弱等价构成的图表

$$\mathrm{id} \xrightarrow{\eta} \mathbb{\Gamma} \circ \mathbb{\chi} \xleftarrow{\alpha'} \mathcal{F}' \xrightarrow{\beta'} \tilde{\mathrm{N}}' \circ \mathrm{C} \xleftarrow{\theta'} \mathrm{N}' \circ \mathrm{C} \tag{6.1}$$

其对象是 St_{Ξ} 的自函子。

对于任意指标 2-范畴，(∞, 2)-范畴化的格罗滕迪克构造以及自然变换η : id $\to \mathbb{\Gamma} \circ \mathbb{\chi}$ 此前已经构造过；根据引理 4.6，η 是一个逐点弱等价。

定义 6.9。链复形 $\mathcal{B}_{\bullet} \in \mathrm{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}$(St) 的松弛范畴化 Dwyer-Kan 神经 $\tilde{\mathrm{N}}'(\mathcal{B}_{\bullet})$ 是通过将神经定义中的 (∞,1)-范畴化格罗滕迪克构造替换为松弛的 (∞,2)-范畴化版本 $\mathbb{\chi}(\mathcal{B}_{\bullet}) \to \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}})$ 而得到的复合稳定 ∞-范畴；其中我们将 N^{op} 视为具有离散态射范畴的 2-范畴。

与单纯情形一样，引理 4.5 表明，松弛神经与神经之间存在逐点弱等价。

引理 6.10。存在一个弱等价

$$\theta' : \tilde{\mathrm{N}}' \to \mathrm{N}'$$

函子 $\mathsf{Ch}^{\mathrm{R}}_{\geq 0}(\mathsf{St}) \to \mathsf{St}_{\Xi}$。

最后，我们类比函子 $\mathcal{F}$，引入函子 $\mathcal{F}'$：

定义 6.11. 对于 $n \geq 0$，我们引入单纯集合

$$\mathcal{M}'_n = \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)}_{\langle n\rangle_{/}}) \coprod_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle_{/}})} \Delta^1 \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle_{/}})$$

其中，推出沿包含 $\{1\} \times \mathsf{id} : \mathrm{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle_{/}}) \subset \Delta^1 \times \mathrm{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle_{/}})$ 取。我们有以下包含

$$\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)}_{\langle n\rangle_{/}}) \xrightarrow{r} \mathcal{M}'_n \xleftarrow{s} \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle_{/}})$$

其中 $s = \{0\} \times \mathsf{id}$。函子 $\mathcal{F}' : \mathsf{St}_{\Xi} \to \mathsf{St}_{\Xi}$ 定义如下：对于一个 2-重单纯稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet \in \mathsf{St}_{\Xi}$，稳定 ∞-范畴

$$\mathcal{F}'(\mathcal{A}_\bullet)_n \subset \mathrm{Map}_{\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)})}(\mathcal{M}'_n, \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet))$$

是由满足以下条件的图表 $X : \mathcal{M}'_n \to \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$ 张成的全子范畴：

(F1) 函子 $r^*X : \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)}_{\langle n\rangle_{/}}) \to \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$ 将与严格交换三角形对应的边映射为 π-余笛卡尔边于 $\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$ 中。

(F2) 函子 s^*X 将 $\mathrm{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle_{/}})$ 中对应于态射 $\tau : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$ 的每个顶点（该态射在 $\{0, \ldots, k\}$ 上不是单射）映射为纤维 $\pi^{-1}(\langle k\rangle)$ 中的零对象。

(F3) 对于在 $\{0, \ldots, k\}$ 上为单射的态射 $\sigma : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$，立方体

$$\Delta^1 \times (\Delta^1)^k \xrightarrow{\mathrm{id} \times f^*_k \sigma} \Delta^1 \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle_{/}}) \xrightarrow{X} \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$$

在纤维 $\pi^{-1}(\langle k\rangle)$ 中是双笛卡尔的。

条件 (F1) 保证沿 $r : \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)}_{\langle n\rangle_{/}}) \to \mathcal{M}'_n$ 的限制会诱导出一个定义良好的自然变换

$$\alpha' : \mathcal{F}' \to \mathbb{\Gamma} \circ \mathbb{X}.$$

以下引理可由与单纯情形相同的论证得出。

引理 6.12。该自然变换

$$\alpha' : \mathcal{F}' \to \mathbb{\Gamma} \circ \mathbb{X}.$$

是逐点弱等价。

证明。对于一个 2-重余单纯稳定的 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet \in \mathrm{St}_\Xi$，令 $\pi : \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet|\mathbf{N}^{\mathrm{op}}) \to \mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}})$ 表示松格罗滕迪克构造，并令 $n \geq 0$。根据定义，∞-范畴

$$\mathbb{\Gamma}(\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet))_n \subset \mathrm{Map}_{\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)})}(\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)}_{\langle n\rangle/}), \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet))$$

是满足条件 (F1) 的函子的全子范畴。我们进一步引入由满足条件 (F2) 和 (F3) 的函子构成的 ∞-范畴 $S \subset \mathbf{Map}_{\mathbf{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\Delta^1 \times \mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}))\ \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet|\mathbf{N}^{\mathrm{op}})$。这些 ∞-范畴构成如下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(\mathcal{A}_\bullet)_n & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{\Gamma}(\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet))_n & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\Delta^{\{1\}} \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}), \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet|\mathbb{N}^{\mathrm{op}})) \end{array}$$

我们将证明右侧的垂直映射是平凡 Kan 纤维化，这意味着左侧的映射也是如此。令 $K \subset \Delta^1 \times \mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/})$ 表示由 $\{1\} \times \mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/})$ 的顶点以及 $\{0\} \times \mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/})$ 中对应于在 $\{0, \ldots, k\}$ 上非单射的 $\langle k\rangle \to \langle n\rangle$ 到 Ξ 的态射的顶点所张成的全子范畴。

(1) 一个函子

$$Y : K \to \mathbb{X}(\mathbf{A}_\bullet|\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$$

在 $\mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}})$ 上方是其限制 $Y|\{1\} \times \mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/})$ 的 π-左 Kan 扩张，当且仅当对于任意在 $\{0, \ldots, k\}$ 上非单射的 $\sigma : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$ in Ξ，$Y(0, \sigma)$ 是 $\pi^{-1}(\langle k\rangle)$ 中的零对象。

（2）一个函子

$$Z : \Delta^1 \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}) \to \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet|\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$$

在 $\mathbf{N}(\mathbf{N}^{\mathrm{op}})$ 上是 $Z|K$ 的一个 π-右 Kan 延拓，当且仅当对于每个在 $\{0, \ldots, k\}$ 上为单射的态射 $\langle k\rangle \to \langle n\rangle$，该立方体

$$\Delta^1 \times (\Delta^1)^k \xrightarrow{\mathrm{id} \times (\sigma \circ f_k)} \Delta^1 \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}) \xrightarrow{Z} \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$$

在纤维 $\pi^{-1}(\langle k\rangle)$ 中是双笛卡尔的。

这两个观察结果，再结合对 [Lu09a, 4.3.2.15], 的两次应用，表明限制确实诱导了一个平凡 Kan 纤维化

$$S \to \mathrm{Map}_{\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})}(\Delta^{\{1\}} \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}), \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet|\mathbb{N}^{\mathrm{op}}))$$

□

最后，我们必须证明

$$\beta' : \mathcal{F}' \to \tilde{\mathrm{N}} \circ \mathrm{C}$$

是定义良好的。证明基本上仍是单纯情形的相应改写。

引理 6.13。对于任意 2-重退化稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}_\bullet \in \mathsf{St}_\Xi$ 沿 s 的限制诱导一个态射

$$s^* : \mathcal{F}'(\mathcal{A}_\bullet) \to \tilde{\mathrm{N}}'(\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)).$$

证明。令 $\mathcal{A} \in \mathsf{St}_\Xi$ 和 $n \geq 0$。给定一个对象 $X \in \mathcal{F}'(\mathcal{A}_\bullet)_n$，令 $A : \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}) \to \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$ 表示其沿 s 的限制。

我们首先证明如下结论：对于任意 $0 \leq i < n$ 以及一个提升

$$d_i : \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)_{\langle k\rangle} \to \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)_{\langle k-1\rangle}$$

面映射 $d_i : \langle k\rangle \to \langle k-1\rangle$ 在 $\Xi^{(\mathrm{op},-)}$ 中相对于局部余笛卡尔纤维化 $\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet) \to \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)})$ 的提升，我们对所有 $\sigma : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$ 都有 $d_i(A(\sigma)) \simeq 0$。

对于 $\sigma : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$（其在 $\{0,\dots,k\}$ 上不是单射），这由条件 (F2) 得出。对于 $\sigma : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$（其在 $\{0,\dots,k\}$ 上是单射），对象 $A(\sigma)$ 是立方体的初始顶点

$$\Delta^1 \times (\Delta^1)^k \xrightarrow{\mathrm{id}\times(\sigma\circ f_k)} \Delta^1 \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}) \xrightarrow{X} \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$$

根据 (F3)，该立方体是 $\pi^{-1}(\langle k\rangle)$ 中的极限立方体。条件 (F1) 意味着，该立方体中平行于第 i 个坐标轴的每条边，在 d_i 下都映射为 $\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)_{\langle k-1\rangle}$ 中的一个等价。由于 d_i 保持极限，因此可得 $d_i(A(\sigma)) \simeq 0$。

令 $\pi : \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)|\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$ 表示通过限制 $\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)$ 得到的余笛卡尔纤维化。接下来我们证明，对于任意态射 $\sigma : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$ in Ξ，只要它在 $\{0,\dots,k\}$ 上是单射，立方体

$$\Delta^1 \times (\Delta^1)^{k+1} \xrightarrow{\mathrm{id}\times(\sigma\circ q_k)} \Delta^1 \times \mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/}) \xrightarrow{X} \mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)|\,\mathrm{N}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$$

就是一个 π-余极限立方体。

条件 (F3) 表明，该立方体的前面 $X|\Delta^1 \times f_k^*\sigma$ 在纤维 $\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)_{\langle k\rangle}$ 中是双笛卡尔的。因此，只需证明后面 $C = X|\Delta^1 \times b_k^*\sigma$ 在 $\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)_{\langle k-1\rangle}$ 中也为双笛卡尔。由 (F3) 可知，C 的面 $F = X|\Delta^1 \times f_{k-1}^*(\sigma\circ\partial_k)$ 在 $\mathbb{X}(\mathcal{A}_\bullet)_{\langle k-1\rangle}$ 中是双笛卡尔的。因此，只需证明对面在该纤维中也为双笛卡尔。为此，我们分析 X 对 $R = \Delta^1 \times_{\mathrm{N}(\Xi(\langle k-1\rangle,\langle n\rangle))} \subset \Delta^1 \times \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\Xi^{(\mathrm{op},-)}_{\langle n\rangle/})$ 的限制。令 $K \subset \Delta^1 \times \mathrm{N}(\Xi^{(\mathrm{op},-)}_{\langle n\rangle/})$ 表示由 $\{1\}\times\Xi(\langle k-1\rangle,\langle n\rangle)$ 以及 $\{0\}\times\Xi(\langle k-1\rangle,\langle n\rangle)$ 中第二个分量为在 $\{0,\dots,k-1\}$ 上非单射的映射的元素所张成的偏序集的神经。由 (F3)，限制 $X|R$ 是纤维中 $X|K$ 的右 Kan 延拓。令 $K' \subset R$ 表示由除 $\{0\}\times\sigma\circ\partial_{k-1}$ 以外的所有元素所张成的子偏序集的神经，则函子 $X|R$ 也是 $X|K'$ 的右 Kan 延拓。这就证明了所述结论。

现在证明，对于 $\sigma : \langle k\rangle \to \langle n\rangle$ 在 $\{0,\dots,k\}$ 上是单射，立方体 $A|q_k^*\sigma$ 是一个 π-余极限立方体。它是通过沿 $\{0\}\times q_k^*\sigma$ 限制 $X|\Delta^1\times q_k^*\sigma$ 得到的 π-余极限立方体的面，因此只需证明面 $X|\{1\}\times q_k^*\sigma$ 是一个 π-余极限立方体。这是成立的，因为态射 $X|\{1\}\times f_k^*\sigma \to X|\{1\}\times b_k^*\sigma$ 的所有边都是 π-余笛卡尔的。

最后，我们必须证明，对于 $\sigma:\ \langle k\rangle \to \langle n\rangle$，它作为映射 Z → Z 是单射，图表 A 将 $\{0\}\times \mathrm{N}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}}_{\langle n\rangle/})$ 中由严格交换三角形诱导的边映射到

$$\begin{array}{ccc} \langle k\rangle & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & \langle k+1\rangle \\ & \searrow^{\sigma} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\sigma}} \\ & & \langle n\rangle \end{array}$$

到 π-笛卡尔边 $\chi(\mathcal{A}_\bullet)|\mathrm{N}(\mathrm{N}^{\mathrm{op}})$，其中 $\tilde{\sigma}(k+1) = \sigma(0) + n + 1$。这可由引理 6.1 中对 $\chi(\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)) \simeq \chi(\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet))$ 的笛卡尔边的明确描述得出。 □

定理 6.14. 在 2-重循环稳定 ∞-范畴 L St_{Ξ} 的 ∞-范畴上，自函子 $\mathrm{N}'\circ\mathrm{C}$ 与 $\simeq \mathrm{id}$ 自然等价。

证明。我们在 函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{St}_{\Xi},\mathrm{St}_{\Xi})$ 中构造了变换的之字形 (6.1)，并证明了 η、α' 和 θ' 是弱等价。剩下要证明 β' 也是弱等价。令 $U:\mathrm{St}_{\Xi}\to \mathrm{St}_{\Delta}$ 表示遗忘函子。我们的之字形自然地包含在以下交换图中：

$$\begin{array}{ccccccccc} U & \xrightarrow{\eta} & U\circ\mathbb{\Gamma}\circ\chi & \xleftarrow{\alpha'} & U\circ\mathcal{F}' & \xrightarrow{\beta'} & U\circ\tilde{\mathrm{N}}'\circ\mathrm{C} & \xleftarrow{\theta'} & U\circ\mathrm{N}'\circ\mathrm{C} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ U & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{\Gamma}\circ\chi\circ U & \xleftarrow{\alpha} & \mathcal{F}\circ U & \xrightarrow{\beta} & \tilde{\mathrm{N}}\circ\mathrm{C}\circ U & \xleftarrow{\theta} & \mathrm{N}\circ\mathrm{C}\circ U \end{array}$$

这是函子 $\mathrm{St}_{\Xi}\to\mathrm{St}_{\Delta}$ 之间的变换，其中右侧的垂直箭头由引理 6.5 可知是弱等价。根据范畴化的 Dold-Kan 对应的证明，底行中的每个变换都是弱等价。由反复应用弱等价的二取三性质可知，此图中的每个箭头都是弱等价。特别地，β' 是弱等价。

□

7 展望

从 Dwyer-Kan 对应的范畴化出发，自然会希望将经典情形中通过限制得到的对应也范畴化。在尝试将引理 3.7 范畴化时，伴随的单位和余单位的纤维与余纤维

$$d:\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)_n \leftrightarrow \mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)_{n-1}:\delta$$

取代项 $\mathrm{id}-d\circ\delta$ 和 $\mathrm{id}-\delta\circ d$。例如，根据伴随函子$\delta$ 的定义：$\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)_0\to\mathrm{C}(\mathcal{A}_\bullet)_1$，，我们得到一个由函子构成的双笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} d\circ\delta & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \epsilon}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{id}^{\mathrm{C}(\mathcal{A})_0} & \longrightarrow & T_0 \end{array}$$

这表明，0 次移位是余单位的余纤维。

如引言中所述，我们预计对此方向正在进行的进一步研究将得出以下结果：

猜想。副循环稳定 ∞-范畴的 ∞-范畴与稳定 ∞-范畴的连通球面复形的 ∞-范畴之间存在 ∞-范畴等价。

参考文献

[CDW23]M. Christ, T. Dyckerhoff, T. Walde，稳定 ∞-范畴的复形，arXiv:2301.02606（2023年）。[Co83] A. Connes，循环上同调与 Extn函子，巴黎科学院院报 S´er. I Math 296，第23期，953–958（1983年）。[DK85] W.G. Dwyer, D.M. Kan，Connes 的循环模的正规化。《瑞士数学评论》60，582–600（1985年）。[DKSS21]T. Dyckerhoff, M. Kapranov, V. Schechtman, Y. Soibelman，稳定 ∞-范畴的球面伴随及相对S构造，arXiv预印本，arXiv:2106.02873（2021年）。[DKS21] T. Dyckerhoff, M. Kapranov, Y. Soibelman，作为米尔诺层的黎曼曲面上的层，arXiv预印本，arXiv:2012.11388（2021年）。[Do58] A. Dold，对称积及其他复形函子的同调，《数学年刊》，54–80（1958年）。[Dy21] T. Dyckerhoff，范畴化的Dold-Kan对应。《数学精选新系列》27，14（2021年）。[Lu09a] J. Lurie，高阶拓扑斯理论，《数学年刊研究》第170卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿（2009年）。[Lu09b] J. Lurie，（无穷，2）-范畴与 Goodwillie演算 I，arXiv:0905.0462（2009年）。[Lu17] J. Lurie，高阶代数，可于作者网站获取（2017年）。[Lu23] J. Lurie，Kerodon，可于 https://kerodon.net 获取（2023年）。