arXiv:2303.03663v2 [math.RT] 5 Oct 2023

关于局部交织周期

Nadir Matringe、Omer Offen 和 Chang Yang

摘要。我们证明了特征零局部域上某些对称空间中有限长度表示的抛物诱导表示上的局部交织周期的绝对收敛、函数方程及亚纯延拓，其中包括伽罗瓦对以及 Prasad–Takloo-Bighash 型的对。进一步，对于一般对称空间，我们证明了一个关于诱导表示区分性的充分条件，该条件以其诱导数据的区分性为依据。这两项结果均推广了前两位作者此前的结果。特别是，对于两项结果，我们都去除了对诱导数据的有界性假设；对于第二项结果，我们还去除了对对称空间的任何假设。此外，当诱导表示一致有界时，我们将系数域从 p 进域扩展到任意特征零局部域。事实上，在抛物诱导满足自然的一般不可约性假设时，这一扩展适用于所有有限长度表示。对于 p 进对称空间，结合由几何引理得到的区分性必要条件，这就为尖点表示诱导而来的表示的区分性提供了一个充要条件。

关键词：交织周期、区分表示、p 进对称空间

1. 引言

设 F 是一个 p 进域或 $F = \mathbb{R}$，G 是定义在 F 上的连通约化群的 F-点群。当 $F = \mathbb{R}$ 时，我们进一步假设，作为实约化李群，群 G 是内型的，其含义见 [Wal1, 2.2.8]，即 Ad(G)是 G 的李代数复化的内自同构群的一个子群。设 θ 是 G 上的一个 F-对合，$H = G^\theta$ 是 G 中被 θ固定的点所构成的子群。令

$$X = \{g \in G \mid \theta(g) = g^{-1}\}$$

为配备如下扭曲的 G-作用的相应对称空间：$g \cdot x = gx\theta(g)^{-1}$。本文研究与 X 中抛物轨道相关的 G 的抛物诱导表示上的局部交织周期。

设 P 是 G 的一个抛物子群，其 Levi 子群为 M。若 $x \in X$ 满足 $x\theta(M)x^{-1} = M$，则称其为 M-容许；也就是说，对合

$$\theta_x = \mathrm{Ad}(x) \circ \theta$$

在 G 上与 x 相关联并稳定 M。固定一个 M-容许的 $x \in X$。令 σ 为 M 的有限长度光滑容许表示，$l \in \mathrm{Hom}_{M^{\theta_x}}(\sigma, \delta_{P^{\theta_x}}\delta^{-1/2}{}_P)$，并令 χ 为 M 的一个在 θ_x 下反不变的非分歧特征（即满足 $\chi \circ \theta_x = \chi^{-1}$ 在 M 上）。这里，对于 G 的子群 Q，δ_Q 是 Q 的模特征。令 $I_P^G(\sigma)$ 为由 σ 经归一化抛物诱导得到的 G 的表示。我们将与 x 相关联的局部交织周期定义为表示 $I_P^G(\sigma \otimes \chi)$ 上的线性形式，其形式上的定义为积分

$$\int_{P^{\theta_x} \backslash G^{\theta_x}} \ell(\varphi_\chi(g))dg$$

对所有 $\varphi_\chi \in I_P^G(\sigma \otimes \chi)$ 均成立。我们讨论以下问题。

问题 1.1. 证明上述积分在某个充分大的正锥内绝对收敛，并且关于 χ 有亚纯延拓。

为了表述我们的第一个结果，我们引入模假设。若一个 M-容许的 $x \in X$ 满足特征 $\delta_{P^{\theta_x}}\delta^{-1/2}{}_P$ 在 M^{θ_x} 上平凡，则称其满足模假设。

在定理 5.3 中，当 F 是 p 进域时，我们在模假设下解决问题 1.1；当 F 是实数域时，则在额外的一般不可约性假设下解决该问题（见假设 2.2），例如酉 σ 满足此假设。对于伽罗瓦对称对（即 θ 是伽罗瓦对合）或 Prasad–Takloo-Bighash 型 [BM], , 模假设自动成立。

当 F 为 p 进域时，定理 5.3 是对 [MO，定理 1] 的推广，其中前两位署名作者在假设 σ 具有有界矩阵系数的条件下，解决了伽罗瓦对的 问题 1.1。上述文献的证明可以原封不动地推广到满足模假设的对称对情形。然而，为了去除 σ 具有有界矩阵系数这一假设，我们在本文的证明中引入了一个不同的思路。在 [MO],中，交织周期沿着一个与 X 中的抛物轨道相关联的特定有向图进行归纳研究。这与 [JLR]和 [LR] 为整体交织周期所发展出的策略密切相关。那里的归纳基础是图中的一个极小顶点。本文则反转归纳方向，从一个极大顶点出发，遵循 [Mat2]针对某些由 GL_n 的内形式构成的伽罗瓦对所采用的策略。这使我们能够考虑 M 的任意有限长度光滑表示 σ。

对于 H 的一个特征 χ，如果 G 的一个表示 π 具有非零的 (H、χ)-等变线性形式（即 $\mathrm{Hom}_H(\pi,\chi) \neq 0$），则称其为 (H、$\chi$)-区分的。当 χ 为平凡特征时，我们对 (H、χ)-区分使用 H-区分这一术语。

在 [MO 中，命题 3] 将交织周期理论应用于推导 $\mathrm{I}_P^G(\sigma)$ 的 H-区分性与 σ 的区分性之间的一个充分条件。在本文中，我们注意到，要使该论证成立，并不需要完全解决问题 1.1。在定理 5.4 中，我们在一般对称对的背景下证明：若 σ 是 M 的一个有限长度表示，且 $\mathrm{x} \in \mathrm{G} \cdot \mathrm{e} \subseteq \mathrm{X}$ 是 M-容许的，并且 σ 是 $(\mathrm{M}^{\theta_x}, \delta_{P^{\theta_x}} \delta^{-\frac{1}{2}}_P)$-区分的，则 $\mathrm{I}_P^G(\sigma)$ 是 H-区分的。在模假设下，我们可以证明，与有向图上的一个极大顶点相关的交织周期在一个锥上绝对收敛。一个关键观察是，即使没有模假设，仍然可以将该交织周期定义为一个收敛于某个锥上的迭代积分。基于上述有向图的结构，这使我们能够定义与图上任意顶点相关的 H-不变线性形式的亚纯族。具体而言，将与极大顶点相关的交织周期同诱导表示之间的一个标准交织算子复合即可实现这一点。在此过程中，我们使用了这样一个事实：对于有限长度诱导表示，交织算子在一般情形下是可逆的。为方便读者起见，在 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ 且满足假设 2.2 的情况下，我们在命题 2.3 中给出该事实证明所需的各项要素。

交织周期理论是研究局部和整体区分问题的一个有用工具（例如参见 [FLO], [Mat1], [Mat2], [SX]）。关于简要介绍，请参见 [MO, Remark 3]。本文的结果将用于后续工作，在这些工作中，我们将讨论区分表示在整体 Jacquet-Langlands 对应下的转移。我们设想的另一个应用是 Jacquet-Rallis 留数方法的一个局部类似物（参见 [JR]），其形式见于 [PWZ]；我们希望稍后再对此展开讨论。

本文结构如下。第 2 节介绍相关记号，并回顾本文框架所需的一些基本事实。第 3 节回顾由 Brylinsky–Delorme、Carmona–Delorme 和 Blanc–Delorme 建立的、与开抛物轨道相关的交织周期理论，以及与闭抛物轨道相关的理论。第 4 节讨论极大抛物轨道的概念，以及由 Lapid 和 Rogawski 引入的、与对合 θ 在 G 上相关的图中的极大顶点；他们借此分析 X 中的抛物轨道。我们关于交织周期的主要结果将在第 5 节证明，并将一并讨论其在 p 进和实数情形下对抛物诱导表示区分性的应用。

致谢。作者感谢审稿人出色的工作。Chang Yang 获得了国家自然科学基金资助（项目编号：12001191）。

2. 记号与预备知识

设 F 是一个特征零局部域。由于复群可以视为实群，在阿基米德情形下，我们总是假设 $F = \mathbb{R}$。令 $|\cdot|$ 为 F 上的归一化绝对值。令 $\mathbb{G}$为定义在 F 上的连通约化群，且 $G = \mathbb{G}(F)$。回顾一下，当 $F = \mathbb{R}$时，我们还假设 G 为内型。对于局部紧群 Q，令 δ_Q 为其模特征。

2.1. 对称空间。设 θ 为定义在 F 上的 $\mathbb{G}$上的一个对合，且 $H = G^{\theta}$为 G 在 θ下的不动点子群。若 F 是阿基米德域，我们固定一个与 θ 交换的 Cartan 对合 θ_c （[HW，命题 11.17]）。对于对称对(G, θ)，我们关联对称空间

$$X = \{g \in G \mid \theta(g) = g^{-1}\}$$

其配备由 $g \cdot x = gx\theta(g)^{-1}$ 给出的扭曲的 G-作用，其中 $g \in G$，$x \in X$。对于 $x \in X$，我们将 θ_x 记为 G 上由下式给出的对合

$$\theta_x(g) = x\theta(g)x^{-1}.$$

对于 G 的任意子群 Q 及 $x \in X$，令 Q_x 为 Q 中 x 的稳定子。注意，

$$Q_x = Q^{\theta_x} = (Q \cap \theta_x(Q))^{\theta_x}.$$

2.2. 抛物子群、根与 Weyl 群。先作如下约定：若 $\mathbb{Y}$是定义在 F 上的代数簇 $\mathbb{V}$的一个代数子簇，则我们用 Y 表示 $\mathbb{Y}$的 F-点所成的群，并称 Y 为 V 的一个代数子簇。若 Y 实际上是 V 的一个代数子群，则用 y 表示 Y 的李代数，即我们用哥特体字母表示李代数。此外，Y 将继承 $\mathbb{Y}$的相同术语；例如，若 $\mathbb{Y}$是一个在 F 上分裂的环面，则称 Y 为分裂环面。最后，若 i 是定义在 F 上的 $\mathbb{V}$ 的一个自同构，则用 Y^i 表示 Y 中被 i 固定的子集，用 Y^{-i} 表示 Y 中 i 作用为取逆映射的子集。当 Y 是 V 的一个代数子群时，我们对 y^i 和 y^{-i} 采用类似的约定。

固定 G 的一个极大分裂环面 T_0，使其在 θ 下稳定（见 [HW，引理 2.4]）。若 $F = \mathbb{R}$，我们还借助 [HW，命题 11.18 (i)]，进一步要求它在 θ_c 下稳定。在这种情形下，由 [Wal1, 2.2.5] 以及 T_0 是极大分裂的事实可知，子空间 $t_0^{-\theta_c}$ 是 $g^{-\theta_c}$ 的极大阿贝尔子空间，而且显然在 θ 下稳定。

现在固定 G 中一个包含 T_0 的极小抛物子群 P_0。令 M_0 为 G 中 T_0 的中心化子。若 G 的抛物子群 P 包含 P_0，则称其为标准抛物子群。若 P 是 G 的标准抛物子群，则它包含唯一一个包含 M_0 的 Levi 子群 M。这样的 Levi 子群 M 称为标准 Levi 子群。令 U 为 P 的幺幂根基，则 $P = M \ltimes U$ 是 P 的标准 Levi 分解。

以下除非另有说明，抛物子群（分别地，Levi 子群）均指标准抛物子群（分别地，标准 Levi 子群）。写作 $P = M \ltimes U$ 或 $Q = L \ltimes V$ 时，均指标准 Levi 分解，其中 M、L 分别为 Levi 子群，U、V 分别为幺幂根基。

设 M 是 G 的一个 Levi 子群，T_M 是 M 的中心中的极大分裂环面。令 $\mathfrak{a}_M^* = \mathrm{Rat}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，其中 $\mathrm{Rat}(M)$ 是$\mathbb{M}$的有理特征群，并将其对偶空间记为 $\mathfrak{a}_M$。分别用 $\mathfrak{a}_0$ 和 $\mathfrak{a}_0^*$ 表示 $\mathfrak{a}_{M_0}$ 和 $\mathfrak{a}_{M_0}^*$。当 $M \subset L$ 时，存在一个典范的直和分解 $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_L \oplus \mathfrak{a}_M^L$。对偶空间也有类似的分解。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$，令 λ_M 表示 λ 到 $\mathfrak{a}_M^*$的相应投影。

对于实向量空间 $\mathfrak{a}$，我们用 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 表示其复化。

固定一个与 P_0 相适配的极大紧子群 K（在 p 进情形参见 [Ren，V5.1，定理]），并且当 $F = \mathbb{R}$时，$K = G^{\theta_c}$。因此，在这两种情形下，我们都有岩泽分解 $G = P_0K$（当 $F = \mathbb{R}$时参见 [Wal1，2.1.8]）。设 $P = M \ltimes U$ 是 G 的一个抛物子群。令 $H_M : M \to \mathfrak{a}_M$ 为 Harish-Chandra 映射，其定义为

$$e^{\langle \chi, H_M(m) \rangle} = |\chi(m)|, \quad \chi \in \mathrm{Rat}(M),\ m \in M.$$

滥用记号，我们也将 H_M 表示为其在 $G = UMK$ 上的唯一延拓，该延拓左 U 不变且右 K 不变。

设 $P = M \ltimes U \subset Q = L \ltimes V$ 是两个抛物子群。记 $R(T_M, L)$ 为 T_M 在 L 中的根集。对于 $\alpha \in R(T_M, L)$，若$\alpha \in R(T_M, P \cap L)$，则称 $\alpha > 0$，否则称 $\alpha < 0$。回忆一下，$R(T_0,L)$ 构成一个根系，并令 Δ_0^L 为相对于 $P_0 \cap L$ 的简单根基。令 Δ_M^L 为 Δ_0^L的元素在 T_M 上的非零限制所组成的集合。集合 Δ_M^L 构成$(\mathfrak{a}_M^L)^*$的一个基。我们有时也将 Δ_M^L 记作 Δ^Q P。当 $L = G$ 时，我们通常省略上标 G。注意，$R(T_0, G)$ 属于 $\mathfrak{a}_0^*$。对于每个 $\alpha \in R(T_0, G)$，我们将相应的余根记为$\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0$。对于 $\alpha \in R(T_M, G)$，我们选取 $\alpha_0 \in R(T_0, G)$，使得 α_0 到 $\mathfrak{a}_M^*$ 的投影为 α。然后将 $\alpha^\vee$ 定义为$\alpha_0^\vee$到 $\mathfrak{a}_M$的投影。该定义与提升 α_0的选取无关。

令 $\rho_0 \in \mathfrak{a}_0^*$ 为 T_0 的正根的半和（按重数计）。令 ρ_P 为 ρ_0 在 $\mathfrak{a}_M^*$ 上的投影。则 P 上的模函数 δ_P 定义为 $e^{\langle 2\rho_P,\ H_M(\cdot) \rangle}$。

令 W = $N_G(T_0)/M_0$ 为 G 关于 T_0 的魏尔群。对于 G 的 Levi 子群 M，令 $W^M = N_M(T_0)/M_0$ 为 M 关于 T_0 的魏尔群。对于两个 Levi 子群 M 和 M′，令 $M'W_M$ 为这样一组魏尔群元素 w ∈ W：它们在 W MwW$^{M'}$ 中具有最小长度。它是双陪集 W M′\W/W M 的一组完备代表元。对于两个 Levi 子群 M ⊂L，令 $W^L(M)$ 为满足以下条件的元素 w ∈W^L 的集合：w 在 wW M 中具有最小长度，且 wMw^{-1}是 L 的标准 Levi 子群。令 W(M) = $W^G(M)$。根据 [MW, I.1.7, I.1.8], ，可以将 W(M) 中的元素分解为一系列初等对称变换的乘积，这些变换对应于 Δ^G M′ 中单根，且涉及与 M 共轭的 G 的 Levi 子群 M′。进而，这使得可以在 W(M) 上定义长度函数 l_M。$W^L(M)$ 中存在唯一一个使 l_M 取极大值的元素，记作 w_M^L。令 w$_0^L$ = $w_{M_0}^L$，并令 $w_0 = w_0^G$。

2.3. 对合 θ'。由于 $\theta(P_0)$ 不一定是 P_0, ，我们按照 [Off, 《第 2 节》3] 中的做法进行修改。令 $\tau \in W$ 为满足 $\theta(P_0) = \tau P_0 \tau^{-1}$ 的唯一元素。固定 τ 在 $N_G(T_0)$ 中的一个代表元 $\tilde{\tau}$，并定义 G 上的自同构 θ'： θ'(g) = $\tilde{\tau}^{-1}\theta(g)\tilde{\tau}$。于是， θ' 保持 T_0 和 P_0。因此它作用于 a_0^* 和 a_0，并保持 Δ_0。注意，尽管 θ' 在 G 上未必是对合，但它在 a_0^* 上诱导出一个对合。下文仍用 θ 和 θ' 分别表示它们在 a_0 及其对偶上诱导的对合。

2.4. 表示。我们所说的 G 的约化子群的表示，始终是指光滑复值表示。

在 p 进情形中，我们按照 [BZ] 中的代数意义，使用“容许”和“有限长度”这两个术语。现在我们更详细地讨论 F 为实数域的情形。在这种情况下，本文中的表示总是 SF 表示，即具有中等增长的光滑 Fr´echet 表示（见 [BK]）。我们称 G 的一个表示为容许表示（见 [Wal2，第 11] 章和 [BK]），如果其 K 有限向量子空间是一个 Harish-Chandra 模，即一个有限生成且容许的 (g, K)-模；等价地说，是一个有限长度的 (g, K)-模（见 [Wal1，第 3.3 节和定理 4.2.1]）。我们从 [Wal2，第 11] 章和 [BK] 回顾，给定一个容许表示 σ，将其稠密的 K 有限向量子空间的 Harish-Chandra 模 σ_f 赋给它的映射构成范畴等价，并且总能将其实现σ为某个连续希尔伯特表示σ中的光滑向量稠密子空间。（p 进情形中也存在这些结果的类似结论，这些结论可以使本文中的某些证明更加统一；不过，在 p 进情形中，我们更倾向于采用代数方法。）最后，一个虽不显眼但值得注意的观察是，G 的一个容许表示当且仅当它作为 $\mathcal{S}$(G)-模是单模时不可约，

其中 $\mathcal{S}(\mathrm{G})$ 是定义于 [Wal1, 7.1.2]中的 G 上快速衰减光滑函数的卷积代数。特别地，容许表示可以看作有限长度的 $\mathcal{S}(\mathrm{G})$-模。因此，当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$时，对于 G 的表示，“容许”和“有限长度”这两个术语可以互换。

2.5. 抛物诱导。设 $\mathrm{P} = \mathrm{M} \ltimes \mathrm{U}$ 是 G 的一个抛物子群，且σ 是 M 的一个表示。我们将 $\mathrm{I}_P^G(\sigma)$ 记为 G 通过右平移作用在函数空间 φ 上的表示，其中函数取值于 σ 的空间，并满足

$$\varphi(umg) = \delta_P(m)^{1/2}\sigma(m)\varphi(g), \quad u \in U,\ m \in M,\ g \in G,$$

当 F 为 p 进域时，这些函数还需在 G 的某个紧开子群下右不变；当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ 时，则需在 G 上光滑。关于 F 为实数域时诱导表示的其他实现方式，请参阅 [CS，第 6 节3] ，稍后将用到这些实现。在实数情形，如果 σ 还满足容许性，则下面的另一种构造会给出同一个空间（关于[VW] 和 [Wal3，附录 A] 中关于 [VW] 里的光滑向量假设对我们的表示总是成立这一事实）。取 σ 的任意希尔伯特整体化 σ，则对于希尔伯特空间上的连续表示，有通常的归一化抛物诱导概念，从而得到 $\mathrm{I}_P^G(\overline{\sigma})$；并且有 $\mathrm{I}_P^G(\sigma) = \mathrm{I}_P^G(\overline{\sigma})^\infty$（右端是光滑向量空间；特别地，这一构造不依赖于 σ的选取）。

对于 $\lambda \in \mathrm{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 以及 $\varphi \in \mathrm{I}_P^G(\sigma)$ ，记 $\varphi_\lambda(\mathrm{g}) = \mathrm{e}^{\langle\lambda, H_M(g)\rangle}\varphi(\mathrm{g})$ 为 φ 经 λ 扭曲后的表示。令 $\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 表示 G 在 $\mathrm{I}_P^G(\sigma)$ 所在空间上的表示，其定义为

$$(I_P^G(g,\sigma,\lambda)\varphi)_\lambda(x) = \varphi_\lambda(xg).$$

令 $\sigma[\lambda]$ 表示 M 在 σ 所在空间上的表示，其定义为 $\sigma[\lambda](\mathrm{m}) = \mathrm{e}^{\langle\lambda, H_M(m)\rangle}\sigma(\mathrm{m})$。映射 $\varphi \mapsto \varphi_\lambda$ 是表示 $\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda) \to \mathrm{I}_P^G(\sigma[\lambda])$ 之间的一个同构。

设 $\mathrm{Q} = \mathrm{L} \ltimes \mathrm{V}$ 是 G 中包含 P 的一个抛物子群。抛物诱导的传递性是 G-表示之间的自然同构 $\mathrm{F} : \mathrm{I}_P^G(\sigma) \to \mathrm{I}_Q^G(\mathrm{I}_{P\cap L}^L(\sigma)), \varphi \mapsto \mathrm{F}_\varphi$，其定义为

$$F_\varphi(g)(l) = \delta_Q^{-1/2}(l)\varphi(lg), \quad l \in L,\ g \in G.$$

对于 $\lambda \in \mathrm{a}_{L,\ \mathbb{C}}^*$，我们有如下表示之间的同构的交换图

$$\begin{array}{ccc} I_P^G(\sigma,\lambda) & \xrightarrow{F} & I_Q^G(I_{P\cap L}^L(\sigma),\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_P^G(\sigma[\lambda]) & \longrightarrow & I_Q^G\left(I_{P\cap L}^L(\sigma)[\lambda]\right). \end{array}$$

这里，每个竖直箭头都是由 λ 给出的扭曲，是表示的一个同构；底部水平箭头则是使该图交换的唯一同构。明确地说，我们有

$$(F_\varphi)_\lambda(g)(l) = e^{-\langle \lambda+\rho_Q, H(l)\rangle}\varphi_\lambda(lg), \quad l \in L,\, g \in G. \tag{2.1}$$

2.6. 标准交织算子。设 $P = M \ltimes U$ 是 G 的一个抛物子群，且 (σ, V_σ) 是 M 的一个容许表示。设 $w \in W(M)$，并在 $N_G(T_0)$ 中选取 w 的一个代表元 n。令 $M' = wMw^{-1}$，$P' = M' \ltimes U'$ 为相应的抛物子群。

令 $w\sigma$ 为 M' 在 σ 所在空间上的表示，其定义为 $w\sigma(m) = \sigma(n^{-1}mn)$，$m \in M'$。（该表示的同构类与 $n \in w$ 的选取无关。）对于 $c \in \mathbb{R}$，令

$$\mathcal{D}^{M,w}(c) = \{\lambda \in \mathfrak{a}_M^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle > c,\ \forall \alpha \in R(T_M, G), \alpha > 0,\ w\alpha < 0\}.$$

存在一个 $c > 0$，使得对于 $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$，若 $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathcal{D}^{M,w}(c)$，则对任意 $g \in G$，积分

$$(M(n,\sigma,\lambda)\varphi)_{w\lambda}(g) = \int_{U' \cap wUw^{-1}\backslash U'} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du \tag{2.2}$$

绝对收敛。在 p 进情形（参见 [Sha，第 2]，节），上述积分的收敛意味着，对于 σ 的光滑对偶中的任意 $v^\vee$，以下取标量值的积分

$$\int_{U' \cap wUw^{-1}\backslash U'} v^\vee(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du$$

收敛。在实数情形中，根据 [VW]，由于[Wal3, Appendix A],，这一结论适用于我们的情形，这意味着上述积分按博赫纳积分的意义绝对收敛：特别是，这要求取 σ的希尔伯特整体化$(\overline{\sigma}, H_{\overline{\sigma}})$，然后将积分 (2.2) 定义为希尔伯特空间 $H_{\overline{\sigma}}$中的一个元素。事实上，[VW, Lemma 1.3] 表明 $M(n, \sigma, \lambda)\varphi_\lambda$ 是光滑的，即属于 $I^G{}_{P'}(w\sigma)$。容易验证，这尤其意味着积分 (2.2) 实际上是 $V_\sigma \subseteq H_{\overline{\sigma}}$中的一个向量。因此，无论在实数域还是 p 进情形中（细节见 [Sha, Section 2]），当 $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathcal{D}^{M,w}(c)$时，这定义了一个标准交织算子

$$M(n,\sigma,\lambda) : I_P^G(\sigma,\lambda) \to I_{P'}^G(w\sigma, w\lambda).$$

交织算子 $M(n, \sigma, \lambda)$ 可亚纯延拓到 $a_{M,\mathbb{C}}^*$,[Sha，定理 2.2。2] 当 F 为 p 进域时，以及 [VW，定理 1。13]当 F 为实数域时。事实上，这些参考文献证明了以下更强的事实：对任意 $\lambda_0 \in a_{M,\mathbb{C}}^*$，存在一个定义在 $a_{M,\mathbb{C}}^*$ 上的有理映射 R，使得 $R(\lambda_0)M(n, \sigma, \lambda_0)$ 有意义，并定义了一个从 $I_P^G(\sigma, \lambda)$ 到 $I^G{}_{P'}(w\sigma, w\lambda)$的非零交织算子。

现在我们记录一个有用的结果，其证明见 [Mat2，引理 7。2],当 F 为 p 进域时。

引理 2.1. 设 l 是定义在 σ 空间上的线性形式。假设对于足够大的 c, $\lambda \in \mathcal{D}^M$, ^{w}(c)使得 M(w, σ, λ) 由收敛积分给出，并设 g $\in$ G 且 $\varphi \in \mathrm{I}_P^G(\sigma)$ 满足积分

$$\int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} |\ell(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))|du$$

收敛。那么

$$\ell((M(w,\sigma,\lambda)\varphi)_{w\lambda}(g)) = \int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} \ell(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du.$$

证明。我们给出 F $=\mathbb{R}$ 时的证明。设 U_n 是商空间 $wUw^{-1}\cap U'\backslash U'$, 的一列递增的相对紧开子集，使得其闭包 $C_n = U_n$ 覆盖该商空间。由于 C_n 紧且 V_σ 是 Fréchet 空间，Gelfand–Pettis 积分

$$\int_{C_n}^* \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du \in V_\sigma$$

由 [Rud, 定理 3.27] 的结果可知存在。根据 Gelfand–Pettis 积分的定义（见 [Rud, 第 77] 页），我们有

$$\ell(\int_{C_n}^* \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du) = \int_{C_n} \ell(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du \tag{2.3}$$

对于 V_σ 上的每个连续线性泛函 l。另一方面，Bochner 积分

$$\int_{C_n} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du \in H_{\overline{\sigma}}$$

等于 $\int^*_{C_n} \varphi_\lambda(\mathrm{n}^{-1}\mathrm{ug})\mathrm{du}$，因为限制到 V_σ map 的映射将 $H_{\overline{\sigma}}$ 的连续对偶识别为 V_σ连续对偶的一个子空间。

此外，当 λ 足够大（如引理陈述中所述）时——从现在起我们都作此假设——Bochner 积分

$$\int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du \in H_{\overline{\sigma}}$$

绝对收敛，并且属于 V_σ，正如我们之前已经观察到的。

现在，根据我们的假设，我们有

$$\int_{C_n} \ell(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du \to \int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} \ell(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du.$$

因此，鉴于（2.3），我们只需证明

$$\ell(\int_{C_n} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du) \to \ell(\int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du).$$

若能证明

$$\int_{C_n} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du \to \int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du$$

在 V_σ 的 Fréchet 拓扑中。由归纳法，只需证明对于 $X \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$,

$$\sigma(X)(\int_{C_n} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du) \to \sigma(X)(\int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du). \tag{2.4}$$

这可由下式的绝对收敛性推出

$$\int_{wUw^{-1}\cap U'\backslash U'} \sigma(X)(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du \tag{2.5}$$

以及以下断言：对于任意可测的 $S \subset wUw^{-1}\cap U'\backslash U'$,

$$\sigma(X)(\int_S \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du) = \int_S \sigma(X)(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du,$$

其中，上述涉及的积分都是 Bochner 积分。先假定 (2.5) 绝对收敛，则下面的计算有意义，并可证明该断言：

$$\begin{aligned}
\sigma(X)(\int_S \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\sigma(e^{tX})\int_S \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du - \int_S \varphi_\lambda(n^{-1}ug)du)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_S (\sigma(e^{tX})\varphi_\lambda(n^{-1}ug) - \varphi_\lambda(n^{-1}ug))du\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_S \int_0^t \sigma(e^{sX})\sigma(X)(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))dsdu\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \int_S \sigma(e^{sX})\sigma(X)(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))duds\\
&= \int_S \sigma(X)(\varphi_\lambda(n^{-1}ug))du.
\end{aligned}$$

注意，第二个等式由 M 在 H_σ 上作用的连续性得出。为了完成证明，还需证明 (2.5) 绝对收敛。

对于 (2.5) 的绝对收敛性，我们沿用 [Wal2, 引理 10.1.2] 中的论证，其中没有 $\sigma(X)$ 的作用。这里我们只指出必要的修改。我们总可以假设 $g = e$，并写作

$$\varphi_\lambda(n^{-1}u) = a(n^{-1}u)^{\lambda+\rho_P}\sigma(m(n^{-1}u))\varphi(k(n^{-1}u)),$$

其中 $g = a(g)m(g)u(g)k(g)$ 是 g 关于 P 的岩泽分解。回想一下，σ 假设具有中等增长。这意味着

$$\|\sigma(X)(\sigma(m(n^{-1}u))(\varphi_\lambda(k(n^{-1}u))))\| \leqslant \|m(n^{-1}u)\|^N q(\varphi_\lambda(k(n^{-1}u))),$$

其中，左侧的范数是希尔伯特空间上的范数，右侧的范数是群上的范数（见 [BK，第 2 节 2.3.1]）。这里 q 是 V_σ 上的一个半范数。根据定义， φ_λ 是从 G 到 V_σ 的光滑函数，因而也是连续函数。由于 q 在 V_σ 上连续，因此 $q(\varphi_\lambda(k(n^{-1}u)))$ 有界。其余部分可由 [Wal2，引理 10.1.2] 中的论证得出。

证毕。

交织算子的一般可逆性对于证明我们的主要结果至关重要。它依赖于抛物诱导表示的一般不可约性。目前，我们只找到关于 F 为 p 进域时这一事实的参考文献。因此，在实数情形下，我们作出以下假设；鉴于 David Renard 正在进行的研究，这一假设理应成立。此外，当 σ为酉表示，更一般地说为一致有界表示时，该假设也成立（见 [Wal2，第 10.5 节1]），这要归功于 [Wal2，第 10.5 节3], ；而且我们只在 P 为极大时需要这一假设。

假设 2.2。（对一致有界的 σ有效。）设 $F = \mathbb{R}$，且设 σ为 M 的一个不可约表示。存在一族关于变量 $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 的多项式函数 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得若对所有 n 都有 $P_n(\lambda) \neq 0$，则 $I_P^G(\sigma,\lambda)$ 不可约。

我们回顾以下著名事实所需的相关内容。

命题 2.3. 设 σ 是有限长度的 M 的表示。若 F 是 p 进域，则存在 $c_0 > 0$，使得当 $c > c_0$ 且 $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 满足 $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathcal{D}^{M,w}(c)$时，交织算子 $M(n,\sigma,\lambda)$ 是同构。若 $F = \mathbb{R}$，则在假设 2.2 下，交织算子 $M(n,\sigma,\lambda)$ 对于 λ除 $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$中可数个仿射超平面的并集之外的所有取值，都是同构。

证明。我们先讨论 p 进情形，然后说明当 $F = \mathbb{R}$时需要作出的修改。我们进行一系列约化。注意，若 $0 \to \sigma_1 \to \sigma \to \sigma_2 \to 0$ 是 M 的表示的正合列，则有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_P^G(\sigma_1,\lambda) & \longrightarrow & I_P^G(\sigma,\lambda) & \longrightarrow & I_P^G(\sigma_2,\lambda) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I_{P'}^G(w\sigma_1,w\lambda) & \longrightarrow & I_{P'}^G(w\sigma,w\lambda) & \longrightarrow & I_{P'}^G(w\sigma_2,w\lambda) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中，水平箭头由抛物诱导是一个函子这一事实所诱导，垂直箭头则由交织算子给出。由于抛物诱导是正合的，这些行构成正合列。因此，根据五引理以及 σ 具有有限长度这一事实，该命题归结为 σ不可约的情形。

假设 σ 不可约。通过将 w 分解为初等对称变换，我们可以且确实假设 w 是一个初等对称（参见 [Sha，定理2.1.1] 或 [MW，引理 I.1.8，命题 II.1.6]）。根据诱导的传递性以及抛物诱导函子的正合性，我们还可以且确实进一步假设 M 是一个极大 Levi 子群。

根据 Waldspurger [Sau 的结果（定理 3.2], ），存在 $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^{*}$，使得 $\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 不可约（事实上，该结果断言不可约点集合是开且稠密的）。令 $\mathrm{X}(\mathrm{M})$ 为 M 的非分歧特征群，并令 $\kappa : \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^{*} \to \mathrm{X}(\mathrm{M})$ 为由 $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\langle \lambda, H_M(\cdot)\rangle}$ 给出的满射。由此，根据 [Ren 的命题 VI.8.4], ，存在 $\mathrm{X}(\mathrm{M})$ 的一个非空 Zariski 开子集 O，使得对于所有满足 $\kappa(\lambda) \in \mathrm{O}$ 的 λ，$\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 都不可约。显然，$\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 的不可约性只取决于 λ 在一维空间$(\mathfrak{a}_M^G)_{\mathbb{C}}^{*}$ 上的投影 λ^G。因此，除有限多个 $\kappa(\lambda^G)$ 值外，$\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 都不可约。所以，当 c 充分大时，对于所有满足 $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathcal{D}^{M,w}(\mathrm{c})$ 的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^{*}$，$\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 和 $\mathrm{I}_{P'}^{G}(w\sigma, w\lambda)$ 都不可约。由于交织算子非零，对于这样的 λ，它是一个同构。

当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ 时，证明本质上相同。要将情形归约到不可约σ，最好的方法或许是利用这样一个事实：有限长度实际上是指作为 $\mathcal{S}(\mathrm{M})$-模具有有限长度。现在，我们将 $\mathrm{M}(\mathrm{n},\sigma,\lambda)$ 分解为交织算子 $\mathrm{M}(\mathrm{n}_i,\sigma_i,\lambda_i) : \mathrm{I}_{P_i}^{G}(\sigma_i) \to \mathrm{I}_{P_{i+1}}^{G}(\mathrm{s}_i(\sigma_i))$ 的乘积，其中 w 分解为初等对称变换的方式是极小的。这里，M_i 是 M 在 $\mathrm{W}(\mathrm{M})$ 中某个元素作用下的平移，σ_i 和 λ_i 分别是 σ 和 λ 在同一元素作用下的平移，而 n_i 对应于 $\mathrm{W}(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_{i+1})$中的一个初等对称 s_{α_i}。令 L_i 为由 M_i 和根子群 $\mathrm{U}_{\pm\alpha_i}$ 生成的标准 Levi 子群，它包含 M_i 和 M_{i+1} 作为极大 Levi 子群。利用抛物诱导的传递性并应用假设 2.2，可知每个 $\mathrm{M}(\mathrm{n}_i,\sigma_i,\lambda_i)$ 除了一组可数个平移 $\mathrm{v}_{k,i}+\mathfrak{a}_{L_i,\mathbb{C}}^{*}$（其中 $\mathfrak{a}_{L_i,\mathbb{C}}^{*}$ 位于 $\mathfrak{a}_{M_i,\mathbb{C}}^{*}$内）之外均可逆，结论由此得证。证毕。

3. 交织周期

我们回顾对称空间一般情形下的交织周期概念，见 [MO,Section 3.1]。

3.1. 一般设置。设 (G,θ) 是一个对称对。对于 G 的一个表示 π 和 H 的一个特征 χ，记 $\mathrm{Hom}_{G^\theta}(\pi,\chi)$ 为表示空间 π 上的 (G^θ,χ)-等变线性形式空间。我们假设 χ 通过一个有理特征分解（因此在任意幂零子群上都是平凡的，见 [Mil, 推论 14.18]）。

考虑 G 的一个抛物子群 $P = M \ltimes U$，其中 M 是一个 θ-稳定的 Levi 子群。根据 [Off，引理 6.3]，有 $P^\theta = M^\theta \ltimes U^\theta$。设 σ 是 M 的一个表示，且 $l \in \mathrm{Hom}_{M^\theta}(\sigma, \delta_{P^\theta}\delta^{-1/2}{}_P\chi)$。对于 $\varphi \in I_P^G(\sigma)$，积分

$$L(\varphi) = \int_{P^\theta\backslash G^\theta} \chi(g)^{-1}\ell(\varphi(g))dg$$

在形式上是有意义的。若该积分收敛，它便定义一个线性形式 $L \in \mathrm{Hom}_{G^\theta}(I_P^G(\sigma),\chi)$。然而，一般来说，该积分并不收敛。规避这一技术困难的一种方法是引入一个非分歧扭转的复空间，证明积分在某个锥内收敛，并建立亚纯延拓。

由于 θ 保持 M 和 T_M，它也在空间 $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 以及根集 $R(T_M,G)$上诱导一个对合。这便给出了如下分解

$$\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^* = (\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^+ \oplus (\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^-$$

其中 $(\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^\pm$ 分别是 θ 的 ±1-特征子空间。注意

$$\langle \lambda, H_P(m)\rangle = 0, \quad \lambda \in (\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^-,\ m \in M^\theta.$$

因此，对于 $\lambda \in (\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^-$，积分

$$L_\lambda(\varphi) = \int_{P^\theta\backslash G^\theta} \chi(g)^{-1}\ell(\varphi_\lambda(g))dg \tag{3.1}$$

在形式上是有意义的，并在收敛时定义一个线性形式 $L_\lambda \in \mathrm{Hom}_{G^\theta}(I_P^G(\sigma,\lambda),\chi)$。

对于 $c > 0$，设

$$\mathcal{D}_{M,\theta}(c) = \{\lambda \in (\mathfrak{a}_M^*)_\theta^- \mid \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle > c,\ \forall \alpha \in R(T_M,P), \theta(\alpha) < 0\}. \tag{3.2}$$

这是 $(\mathfrak{a}_M^*)_\theta^-$ 中的一个非空开集。事实上，它包含 $(\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^-$ 中任意足够大的正倍数的元素在 $\mathfrak{a}_M^*$ 的正 Weyl 室中的投影（参见 [LR，引理 5.2.1, (2)]）。

3.2. 开交织周期。设 $P = M \ltimes U$ 是 G 的一个抛物子群，满足 $\theta(P)$ 是与 P 相对的非标准抛物子群。也就是说，$M = P \cap \theta(P)$。由此可知 M 是 θ-稳定的，且 $P^\theta = M^\theta$ 是约化的。再假设 $\chi = \mathbf{1}$ 是 H 的平凡特征。在这种情况下，我们有以下基本结果：当 $F = \mathbb{R}$ 时，该结果归功于 Brylinsky–Delorme [BD2] 和 Carmona–Delorme [CD]；当 F 为 p 进域时，则归功于 Blanc–Delorme [BD1]。需要指出的是，[CD，定理´eor`eme 3] 假设下文中的表示 σ 是酉的；但由于近期的结果，下面的陈述可以去掉这一假设，证明中将对此作出说明。

命题 3.1. 在上述假设下，设 σ 是 M 的有限长度表示。那么

(1) 存在 $c > 0$，使得对于所有 $\varphi \in I_P^G(\sigma)$, $l \in \mathrm{Hom}_{M^\theta}(\sigma, \mathbf{1})$ 且 $\lambda \in (a_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^-$ 满足 $\mathrm{Re}\lambda \in \mathcal{D}_{M,\theta}(c)$ 时，积分 (3.1) 绝对收敛；(2) 由 (3.1) 定义的线性形式 $\varphi \mapsto L_\lambda(\varphi)$ 在 $\lambda \in (a_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^-$ 上有亚纯延拓，我们仍将其记为 L_λ；(3) 假设 L_λ 在 λ 处正则。那么，线性形式 L_λ 非零当且仅当 l 非零。此外，如果 F 是 p 进的且 l 非零，我们可以选取 $\varphi_0 \in I_P^G(\sigma)$，其支集包含于 PH 中，使得 $L_\lambda(\varphi_0)$ 对所有 λ 都收敛，且恒等于 1。

证明。 [CD] 中的幺正性假设有两个原因。首先，为了保证那里记作 $J(P,\delta$ 的积分 $\nu)$ 在某个锥内 ν 绝对收敛。当 σ （或按 ibid. 中的记号， δ ）具有有限长度时，这部分参见下文引理 5.2 的证明。其次，为了应用 [VW], 中交织算子的性质；但我们已经注意到，感谢 [Wal3], 这些性质对有限长度的 σ仍然成立。证毕。

在 [Mat2, 引理 8.4]) 中已经指出，当用空间 σ上的一个更一般的 M^θ-不变函数（满足某些有界性条件）替代线性形式 l 时，Blanc和Delorme 的上述收敛性仍然成立。正如该处所述， [BD1, 定理2.16] 证明中的论证也能证明这一推广。为了准确表述它，我们先在商空间 $G^\theta\backslash G$ 上引入范数$|\cdot|_{G^\theta\backslash G}$ 的概念。在 p 进情形，我们按 [Wald, 第 I.1] 节的方式，在实数情形则按 [BD2, 第 0] 节的方式，在 G 上固定一个范数 $\|\cdot\|$ 。令$|G^\theta g|_{G^\theta\backslash G} = \|\theta(g)^{-1}g\|$, $g \in G$。

引理 3.2. 设 σ 是 M 的有限长度表示。设 $\eta : V_\sigma \to \mathbb{C}$ 是定义在 σ 空间上的函数；当 $F = \mathbb{R}$ 时，我们假设它连续，并满足

$$\eta(\sigma(m)v) = \eta(v), \quad m \in M^\theta,\ v \in V_\sigma.$$

假设存在 $r > 0$，使得对所有 $v \in V_\sigma$ ，都存在 $C_v > 0$，使得

$$|\eta(\sigma(m)v)| \leqslant C_v \|M^\theta m\|_{M^\theta\backslash M}^r, \quad m \in M.$$

若 $F = \mathbb{R}$ ，我们进一步假设映射 $v \mapsto C_v$ 连续。则存在 $c > 0$，使得对所有 $\varphi \in I_P^G(\sigma)$ 和 $\lambda \in (a_{M,\mathbb{C}}^*)_\theta^-$ 满足 $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathcal{D}_{M,\theta}(c)$ 时，积分

$$\int_{M^\theta\backslash G^\theta} \eta(\varphi_\lambda(g))dg$$

绝对收敛。

证明。我们聚焦于 $F = \mathbb{R}$。首先，[BD2，引理 4] 中的论证表明，[BD1，命题 2.14（包括 (iii)）] 在阿基米德集合中仍然成立（(iii) 可由以下事实推出：在证明 [BD2，引理 4],的末尾，所有 $\varrho_i(g_n)$ 都收敛到 $\varrho_i(g)$，且其中一个 $\varrho_i(g)$ 为零）。现在，将定理 2.16], 陈述中与 η 相关联的 G 上的函数记为 ϱ。函数 $g \mapsto \varrho(g)(v)$ 对每个 $v \in V_\sigma$ 都是 G 上的连续函数，这归功于 η 上的有界性假设。进而，归功于 $v \mapsto C_v$ 上的连续性假设，由 [BD1，定理 2.16]证明中的等式 (2.33) 可知，引理中的积分绝对收敛。证毕。

3.3. 闭交织周期。设 $P = M \ltimes U$ 是 G 中一个由 θ 稳定的抛物子群，且 M 也由 θ 稳定。由 [GO，引理 3.1] （当 $F = \mathbb{R}$ 时，论证完全相同）以及 [Spr2，引理 6.2.4], ，P^θ 是 G^θ 的一个抛物子群。由 [PWZ，推论 2.9] 可知，PG^θ 在 G 中是闭的。在这种情况下，相应的交织周期更容易处理。

引理 3.3。设 σ 是 M 的一个表示，χ 是 G^θ 的一个特征，并且

$$\ell \in \mathrm{Hom}_{M^\theta}(\sigma, \delta_{P^\theta}\delta_P^{-1/2}\chi).$$

积分 (3.1) 绝对收敛，并定义了一个关于 $\lambda \in (a_M^*, \mathbb{C})^{-}_{\theta}$ 的整函数族 L_λ，其成员是 G^θ-不变线性形式。此外，对于任意 $\lambda \in (a_M^*, \mathbb{C})^{-}_{\theta}$，$L_\lambda$ 非零当且仅当 l 非零。

证明。首先回顾当 F 为 p 进域时的这一经典事实。由于由上可知 $P^\theta\backslash G^\theta$ 是紧的，积分 (3.1) 收敛，并且关于 λ是整函数。

事实上，如 [Off，引理 4.3], 的证明所示，由于 PG^θ 是 G 的闭子集，G^θ 的表示 $\mathrm{ind}^{G^\theta}_{P^\theta}(\delta_P^{\frac{1}{2}}\sigma[\lambda])$ 是 $I_P^G(\sigma,\lambda)|_{G^\theta}$ 的一个商。此处 ind 表示非归一化归纳法。这定义了一个嵌入

$$\mathrm{Hom}_{G^\theta}(\mathrm{ind}^{G^\theta}_{P^\theta}(\delta_P^{\frac{1}{2}}\sigma[\lambda]),\chi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{G^\theta}(I_P^G(\sigma,\lambda),\chi).$$

此外，映射 $l \mapsto L_\lambda$ 实现了该嵌入与同构的复合

$$\mathrm{Hom}_{M^\theta}(\sigma[\lambda], \delta_{P^\theta}\delta_P^{-1/2}\chi) \simeq \mathrm{Hom}_{G^\theta}(\mathrm{ind}^{G^\theta}_{P^\theta}(\delta_P^{\frac{1}{2}}\sigma[\lambda]),\chi)$$

该同构由 Frobenius 互反律给出（见 [Off，命题 4.1]）。当 F 为 p 进域时，引理得证。当 $F = \mathbb{R}$ 为实数域时，证明相同。关于映射的满射性，我们参见 [AG，推论 5.4.4] 以及 [CS，命题 6.7]

$$I_P^G(\sigma,\lambda)|_{G^\theta} \to \mathrm{ind}^{G^\theta}_{P^\theta}(\delta_P^{\frac{1}{2}}\sigma[\lambda])$$

以及 [CS，定理 6 后的备注。8] 关于 Frobenius互反律。 Q.E.D.

4. 对称空间中的极大抛物轨道

本节回顾与该对称对相关联的对合图，并引入相对于某个抛物子群的极大顶点这一概念，这是本文的关键。贯穿本节，设 $\mathrm{P} = \mathrm{M} \ltimes \mathrm{U}$ 是一个抛物子群。

4.1. 极大扭曲对合。

Springer 在其关于魏尔群上扭曲对合的研究中，于 [Spr1，推论 3.4]（分别见 [Spr1，命题 3.5]）刻画了极小（分别为极大）扭曲对合的概念。在 [LR，第 3 节2] 中，Lapid 和 Rogawski 进一步研究了相对于抛物子群（即相对于单根子集）的极小扭曲对合。这里我们引入相对于抛物子群的极大扭曲对合这一类似概念。

我们回顾 [LR，第 3] 节中的一些术语。考虑一个 ϑ上的对合 $^*_0$，它稳定 Δ_0。它还自然地在集合 $\mathrm{R}(\mathrm{T}_0,\mathrm{G})$ 和 $\mathrm{R}^+(\mathrm{T}_0,\mathrm{G})$、魏尔群 W、Levi 子群集合以及 G 的抛物子群集合上作为对合作用。

我们将扭曲对合定义为满足 $\vartheta(\xi) = \xi^{-1}$ 的 $\xi \in \mathrm{W}$。扭曲对合的集合记为 $\mathrm{I}_0(\vartheta)$。若扭曲对合 $\xi \in {}_M\mathrm{W}_{\vartheta M} \cap \mathrm{I}_0(\vartheta)$ 满足 $\xi\vartheta(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$，则称其为 M-容许的。M-容许扭曲对合的集合记为 $\mathrm{I}_M(\vartheta)$。若 $\xi \in \mathrm{I}_M(\vartheta)$，则 $\xi\vartheta$ 在 $\mathfrak{a}_M^*$ 和 $\mathfrak{a}_M$ 上均作为对合起作用。分别将 $\xi\vartheta$ 在 $\mathfrak{a}_M^*$ 中的 ± 1-特征子空间记为 $(\mathfrak{a}_M^*)^{\pm}_{\xi\vartheta}$。

为引出接下来的讨论，我们回顾 W 中对合的以下性质。设 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ 是一个对合。以下条件等价：
(1) w 在其共轭类中具有极大长度；(2) 对所有 $\alpha \in \Delta_0$，若 $\mathrm{w}\alpha > 0$，则 $\mathrm{w}\alpha = \alpha$；(3) 对某个 Levi 子群 L，$\mathrm{w} = \mathrm{w}_0\mathrm{w}_0^L$，且对所有 $\alpha \in \Delta_0^L$ 均有 $\mathrm{w}\alpha = \alpha$。这类对合称为极大对合。

定义4.1. 若存在 Levi 子群 $\mathrm{L} \supset \mathrm{M}$，使得 $\xi = \mathrm{w}_{\vartheta L}^G$ 且对所有$\alpha \in \Delta_M^L$均有 $\xi\vartheta\alpha = \alpha$，则称 M-容许扭曲对合 $\xi \in \mathrm{I}_M(\vartheta)$ 为极大的。在此情况下，L 由 ξ 唯一确定，并记为 $\mathrm{L}_{\xi,\,\vartheta}$。我们将 $\mathrm{I}_M(\vartheta)$ 中的极大扭曲对合的集合记为 $\Pi_M(\vartheta)$。

由极大性的定义，我们得到以下结果。

命题 4.2. 对于 $\xi \in \Pi_M(\vartheta)$ 和 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\xi,\,\vartheta}$ 我们有 $\xi \in \mathrm{I}_L(\vartheta)$（特别地，L 是 $\xi\vartheta$-稳定的）。此外
(1) $(\mathfrak{a}_M^*)^-_{\xi\vartheta} = (\mathfrak{a}_L^*)^-_{\xi\vartheta}$,

(2) $(\mathfrak{a}_M^*)^+_{\xi\vartheta} = (\mathfrak{a}_M^L)^* \oplus (\mathfrak{a}_L^*)^+_{\xi\vartheta}$,
(3) $R(T_M, G) \cap (\mathfrak{a}_M^*)^+_{\xi\vartheta} = R(T_M, L)$.

证明。由于 ξ 是 M-容许的， $\xi\vartheta$稳定 M，因此也稳定 $(\mathfrak{a}_0^M)^*$。由极大性的定义可知， $\xi\vartheta$ 在 $(\mathfrak{a}_M^L)^*$ 上作用为恒等映射。因此， $\xi\vartheta$稳定 $(\mathfrak{a}_0^L)^*$，因而也稳定 L。令 $\alpha \in \Delta_0^L$。若 $\alpha \in \Delta_0^M$，则$\xi^{-1}\alpha > 0$，因为$\xi \in {}_M\mathrm{W}_{\vartheta M}$。否则，$\xi^{-1}(\alpha)_{\vartheta M} = \xi^{-1}(\alpha_M) = \vartheta(\alpha_M) \in \mathrm{R}^+(\mathrm{T}_{\vartheta M}, \mathrm{G})$，因此 $\xi^{-1}\alpha > 0$。此外，由于 $\xi = \mathrm{w}_{\vartheta L}^G$，可知$\xi \in {}_L\mathrm{W}_{\vartheta L}$。这表明 $\xi \in \mathrm{I}_L(\vartheta)$。命题的其余部分现在可由定义直接得出。证毕。

令 $\mathrm{G} = \mathrm{G}_\vartheta$ 为第 3 节 [LR3] 中定义的、与对合 ϑ 相关联的加权有向图。下文中，我们将直接使用 Lapid 和 Rogawski 为图中顶点引入的权的概念。类似于上述文献中的命题 3.3.1，我们有

命题 4.3. 设 $\xi \in \mathrm{I}_M(\vartheta)$。以下条件等价:
(1) $\xi \in \Pi_M(\vartheta)$; (2) 对任意 $\alpha \in \Delta_M$，若 $\xi\vartheta\alpha > 0$，
则 $\xi\vartheta\alpha = \alpha$。(3) 顶点 (M, ξ) 在 G 中具有局部极大权。

证明。设 $\xi \in \Pi_M(\vartheta)$，并令 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\xi,\ \vartheta}$。对于 $\alpha \in \Delta_M$，若 $\xi\vartheta\alpha > 0$，则必有 $\alpha \in \Delta_M^L$，因为 $\xi = \mathrm{w}_{\vartheta\ L}^{G}$ 且 $\vartheta\alpha \in \Delta_{\vartheta M}$。因此，根据定义， $\xi\vartheta\alpha = \alpha$。这表明 (1) 蕴含 (2)。

反之，假设 $\xi\vartheta\alpha = \alpha$只要 $\alpha \in \Delta_M$ 且 $\xi\vartheta\alpha > 0$。令 L 为包含 M 的 Levi 子群，使得 $\Delta_M^L = \{\alpha \in \Delta_M \mid \xi\vartheta\alpha = \alpha\}$。仿照命题 4.2 的证明可得 $\xi \in \mathrm{I}_L(\vartheta)$。此外，对于所有 $\beta \in \Delta_{\vartheta L}$，必有 $\xi\beta < 0$，从而 $\xi = \mathrm{w}_{\vartheta L}^G$。事实上，反设存在 $\beta \in \Delta_{\vartheta L}$，使得 $\xi\beta > 0$，并令 $\alpha \in \Delta_{\vartheta M}$满足 $\beta = \alpha_{\vartheta L}$。那么 $\vartheta\alpha \in \Delta_M$ 满足 $\xi\vartheta(\vartheta\alpha) = \xi\alpha > 0$，因此根据定义， $\vartheta\alpha \in \Delta_M^L$，进而 $\beta = 0$。这就产生了矛盾。由此可知， (2) 蕴含 (1)。

(2) 与 (3) 等价，显然可由 [LR，引理 3.2.1] 得出。

证毕。

4.2. 可容许轨道。沿用 [Off，第 3] 节，我们将 X 中的 P-轨道纤维化到某些扭曲对合之上。回想一下， $\tau \in \mathrm{W}$ 以及 θ' 上的一个对合 $^*_0$（它与 $\tilde{\tau} \in \tau$ 的选取无关）已在第 2.3 节中定义。纤维化映射

$$\iota_M : P\backslash X \to ({}_M W_{\theta'(M)} \cap \Im_0(\theta'))\tau^{-1}$$

由恒等式刻画

$$Px\theta(P) = P\iota_M(P \cdot x)\theta(P).$$

回顾一下，若 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ 或其 P-轨道 $\mathrm{P} \cdot \mathrm{x}$ 满足 $\iota_M(\mathrm{P} \cdot \mathrm{x})\tau$ 是 M-容许的，即 $\mathrm{M} = \mathrm{w}\theta(\mathrm{M})\mathrm{w}^{-1}$，其中 $\mathrm{w} = \iota_M(\mathrm{P} \cdot \mathrm{x})$，则称其为 M-容许。根据 [Off, 引理 6.1],$\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ 是 M-容许的，当且仅当 $\mathrm{x} \in \mathrm{UN}_{G,\ \theta}(\mathrm{M})\theta(\mathrm{U})$，其中

$$N_{G,\theta}(M) = \{g \in G \mid g\theta(M)g^{-1} = M\}.$$

定义 4.4。若一个 M-容许的 P-轨道 O in X 满足 $\iota_M(O)\tau \in \Pi_M(\theta')$，则称其为极大的。

根据 [Off，引理 3.2], ，每个 M-容许的 P-轨道 O 与 $\mathrm{N}_{G,\ \theta}(\mathrm{M})$ 都有非空交集。此外，$O \cap \mathrm{N}_{G,\ \theta}(\mathrm{M}) = O \cap \mathrm{M}\iota_M(O)$ 是 X 中的一个单独 M-轨道。

4.3. 对合图 G。设

$$X[M] = \{x \in X \mid \theta_x(M) = M\} = X \cap N_{G,\theta}(M).$$

注意，X 中的一个 P-轨道是 M-容许的，当且仅当它包含 X[M] 中的一个元素。

按照 [Off], ，我们定义如下的有向标记图 G。G 的顶点是形如 (M, x) 的二元组，其中 M 是 G 的标准 Levi 子群，且 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}[\mathrm{M}]$。G 的边定义如下:

$$(M, x) \overset{n}{\searrow} (M_1, x_1)$$

若存在 $\alpha \in \Delta_P$，使得 $-\alpha \neq \theta_x(\alpha) < 0$，且 $\mathrm{n} \in \mathrm{s}_\alpha\mathrm{M}$，其中 $\mathrm{s}_\alpha \in \mathrm{W}(\mathrm{M})$ 是与 α 相关联的初等对称，$\mathrm{M}_1 = \mathrm{nMn}^{-1}$，并且 $\mathrm{x}_1 = \mathrm{n} \cdot \mathrm{x}$。注意，$(\mathrm{M}_1)_{x_1} = \mathrm{nM}_x\mathrm{n}^{-1}$。

设 (M, x) 是 G 中的一个顶点，且 $\mathrm{w} = \iota_M(\mathrm{P} \cdot \mathrm{x})$。由于 θ_x 稳定 M，它也作用于空间 a_M^* 以及根集 $\mathrm{R}(\mathrm{T}_M, \mathrm{G})$。$\theta_x$ 的这一作用与 $\mathrm{w}\theta$ 的作用一致，因为事实上 $\mathrm{x} \in \mathrm{Mw} = \mathrm{w}\theta(\mathrm{M})$。

注 4.5. 图 G 是 Lapid-Rogawski 图 $\mathrm{G}_{\theta'}$ 的细化，该图与 LR 第 3 节中的 a_0^* 上的对合 θ' 相关联 [3]。更确切地说，采用上述记号，$(\mathrm{M}, \mathrm{x})\ \mathrm{n}\searrow\ (\mathrm{M}_1, \mathrm{x}_1)$ 是 G 中的顶点，当且仅当 $(\mathrm{M},\ \iota_M(\mathrm{x})\tau) \xrightarrow{\alpha} (\mathrm{M}_1, \iota_{M_1}(\mathrm{x}_1)\tau)$ 是 $\mathrm{G}_{\theta'}$ 中的顶点

4.4. 极大顶点。

定义4.6。图 G 中的顶点 (M, x) 称为极大顶点，当且仅当 $\iota_M(\mathrm{P} \cdot \mathrm{x})\tau \in \Pi_M(\theta')$。对于极大顶点 (M, x)，令 $\mathrm{L}_{M,x} = \mathrm{L}_{\xi,\theta'}$ 为如定义4.1所述的、与 $\xi = \iota_M(\mathrm{P} \cdot \mathrm{x})\tau$ 相关联的 Levi 子群。

在命题 4.3 的证明中已说明，$\mathrm{L}_{M,x}$ 可被刻画为包含 M 且满足 $\Delta_M^L = \{\alpha \in \Delta_M \mid \theta_x(\alpha) = \alpha\}$ 的唯一 Levi 子群。

引理 4.7。设 (M, x) 为 G 中的一个极大顶点。设 $\mathrm{Q} = \mathrm{L} \ltimes \mathrm{V}$ 为 Levi 部分为 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{M,\ x}$ 的抛物子群，并以 Q^- 表示 G 中与 Q 相对的非标准抛物子群，使得 $\mathrm{Q} \cap \mathrm{Q}^- = \mathrm{L}$。则有

$$\theta_x(L) = L, \quad \theta_x(L \cap P) = L \cap P.$$

and

$$\theta_x(Q) = Q^-.$$

证明。由命题 4.2 可知，θ_x 稳定 L；又由极大性的定义可知，它在 Δ_M^L 上平凡作用，并将 Δ_L 的每个元素映为负根。该引理即刻成立。证毕。

命题 4.8。设 (M,x) 为图 G 中的一个顶点。存在一条路径

$$(M_1, x_1) \overset{n_1}{\searrow} (M_2, x_2) \overset{n_2}{\searrow} \cdots \overset{n_k}{\searrow} (M, x)$$

位于 G 中，使得 $(\mathrm{M}_1,\mathrm{x}_1)$ 为一个极大顶点。

证明。若 (M, x) 不是极大的，则由命题 4.3 可选取 $\alpha \in \Delta_M$，使得 $\theta_x(\alpha) > 0$ 且 $\theta_x(\alpha) \neq \alpha$。取 $\mathrm{n} \in \mathrm{s}_\alpha\mathrm{M}$，则我们有一条边

$$(s_\alpha M s_\alpha^{-1}, n \cdot x) \overset{n^{-1}}{\searrow} (M, x)$$

在 G 中。由 [LR, 引理 3.2.1]可知，$(\mathrm{s}_\alpha\mathrm{Ms}_\alpha^{-1}, \mathrm{n} \cdot \mathrm{x})$ 的权比 (M, x)的权大二。由命题 4.3，通过对顶点的权进行归纳即可得出该命题。证毕。

设 (M, x) 是图 G 中的一个顶点。我们在 M_x 上定义一个特征 δ_x：

$$\delta_x(m) = \delta_{P_x}(m)\delta_P^{-1/2}(m). \tag{4.1}$$

利用麦基理论研究诱导表示的区分问题时，这类特征会自然出现。它们通常并非平凡的。不过，我们注意到，对于伽罗瓦对以及 Prasad-Takloo-Bighash 型的对称对，$\delta_x \equiv \mathbf{1}$ 对所有 (M, x)都成立（见 [Off, 推论 6.9] 以及 [BM, 等式 (5.3) 和注 5.4]）。对于每个顶点 (M, x) 以及 M 的一个表示 σ，我们可以形式地赋予积分

$$\int_{P_x \backslash G_x} \ell(\varphi_\lambda(g))dg,$$

其中 $\mathrm{l} \in \mathrm{Hom}_{M_x}(\sigma,\ \delta_x)$ 且 $\lambda \in (\mathrm{a}^*_{M,\mathbb{C}})_x^- := (\mathrm{a}^*_{M,\mathbb{C}})_{\theta_x}^-$。在下一节中，我们将证明，若 δ_x 是平凡的，那么对于某个特定的

锥中的 {v15}，这些积分绝对收敛、满足某些函数方程，并且存在亚纯延拓（见定理 5.3）。

5. 主要结果

5.1. 在以下结果中，在收敛假设下，我们得到了交织周期的函数方程，它们是全局伽罗瓦背景下 [LR 命题 10.1.1] 的局部类比（另见 [JLR，命题 33]）。该结果联系了图中相邻顶点所对应的交织周期（参见 [Mat2，命题 8.4]，适用于 GL_n 的某些内形式的伽罗瓦对）。

命题 5.1. 设 $\mathrm{P} = \mathrm{M} \ltimes \mathrm{U}$ 和 $\mathrm{P}_1 = \mathrm{M}_1 \ltimes \mathrm{U}_1$ 是 G 的两个抛物子群。假设 $(\mathrm{M}, \mathrm{x}) \searrow (\mathrm{M}_1, \mathrm{x}_1)$ 是图 G 上的一条边，且 $\alpha \in \Delta_M$ 满足 $\mathrm{n} \in \mathrm{s}_\alpha \mathrm{M}$。设 σ 是 M 的一个表示，$\mathrm{l} \in \mathrm{Hom}_{M_x}(\sigma, \delta_x)$。取 $\mathrm{c} > 0$，使得对每个满足 $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > \mathrm{c}$ 的 $\lambda \in \mathrm{a}_M^*$，交织算子 $\mathrm{M}(\mathrm{n}, \sigma, \lambda)$ 都由一个绝对收敛积分给出（特别地，若 $\lambda \in \mathcal{D}_{M,\ \theta_x}(\mathrm{c})$）。那么对 $\varphi \in \mathrm{I}_P^G(\sigma)$，有

$$\int_{P_x \backslash G_x} \ell(\varphi_\lambda(g))dg = \int_{(P_1)_{x_1} \backslash G_{x_1}} \ell((M(n,\sigma,\lambda) I_P^G(n,\sigma,\lambda)\varphi)_{s_\alpha \lambda}(g))dg \tag{5.1}$$

也就是说，如果 (5.1) 的左端绝对收敛，那么右端也绝对收敛，且两个积分相等。

证明。记 $\mathrm{Q} = \mathrm{L} \ltimes \mathrm{V}$ 为包含 P 的 G 的抛物子群，使得 $\Delta^Q{}_P = \{\alpha\}$。因此，$\mathrm{P}_1$ 包含于 Q，且 $\Delta^Q{}_{P_1} = \{-\mathrm{s}_\alpha \alpha\}$。我们从 (5.1) 的右端开始，说明如何形式地推导出它等于左端。证明该命题所需的绝对收敛性，由假设以及在倒数第二个等号处应用富比尼定理而得。根据引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{(P_1)_{x_1} \backslash G_{x_1}} \ell((M(n,\sigma,\lambda) I_P^G(n,\sigma,\lambda)\varphi)_{s_\alpha \lambda}(g))dg \\ &= \int_{(P_1)_{x_1} \backslash G_{x_1}} \int_{U_1 \cap L} \ell(\varphi_\lambda(n^{-1} u g n))du dg. \end{aligned} \tag{5.2}$$

由 [Off 引理 6.4]，可知 $\mathrm{V}_{x_1} = \mathrm{n}\mathrm{U}_x \mathrm{n}^{-1}$，且存在一个同构 $\mathrm{V}_{x_1} \backslash (\mathrm{U}_1)_{x_1} \cong \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{L}$。对于固定的 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，函数 $\mathrm{u} \mapsto \mathrm{l}(\varphi_\lambda(\mathrm{n}^{-1}\mathrm{ugn}))$ 在 U_1 上关于 V 左不变。因此，(5.2) 的右端等于

$$\int_{(P_1)_{x_1} \backslash G_{x_1}} \int_{V_{x_1} \backslash (U_1)_{x_1}} \ell(\varphi_\lambda(n^{-1} u g n))du dg. \tag{5.3}$$

由 [Off 引理 6.3], 可知 $(P_1)_{x_1} = (M_1)_{x_1} \ltimes (U_1)_{x_1}$ 且 $P_x = M_x \ltimes U_{x_0}$。于是有 $nP_xn^{-1} = (M_1)_{x_1} \ltimes V_{x_1}$。因此，(5.3) 等于

$$\int_{(P_1)_{x_1}\backslash G_{x_1}} \int_{nP_xn^{-1}\backslash (P_1)_{x_1}} \delta^{-1}_{(P_1)_{x_1}}(p)\ell(\varphi_\lambda(n^{-1}pgn))dpdg$$
$$= \int_{nP_xn^{-1}\backslash G_{x_1}} \ell(\varphi_\lambda(n^{-1}gn))dg = \int_{P_x\backslash G_x} \ell(\varphi_\lambda(g))dg.$$

命题得证。 Q.E.D.

在考察极大顶点情形下交织周期的收敛性时，我们有以下引理作为中间步骤。

引理 5.2. 设 $P = M \ltimes U$ 是 G 的一个标准抛物子群。设 (M, x) 是图 G 中的一个极大顶点，使得 $\delta_x \equiv \mathbf{1}$。记 $L = L_{M,x}$，并设 $Q = L \ltimes V$ 是以 L 为 Levi 子群的抛物子群。设 σ 是 M 的一个有限长度表示，且 $l \in \mathrm{Hom}_{M_x}(\sigma, \mathbf{1})$。则存在 $r > 0$，使得对任意 $f \in I^L_{P\cap L}(\sigma)$，存在常数 $C_f > 0$，满足

$$\int_{(P\cap L)_x\backslash L_x} |\ell(f(hl))|dh \leqslant C_f \|L_x l\|^r_{L_x\backslash L} \tag{5.4}$$

对所有 $l \in L$ 均成立。当 $F = \mathbb{R}$ 时，还可以假设 C_f 满足 $f \mapsto C_f$ 是连续的。

证明。我们先处理 p 进情形，然后说明当 $F = \mathbb{R}$ 时需要作出的修改。为了使 (5.4) 中的积分在形式上有意义，我们先证明 $\delta_{P_x}\delta^{-1/2}_P = \delta_{(P\cap L)_x}\delta^{-1/2}_{P\cap L}$ 在 M_x 上。注意到 $P_x = (P \cap L)_{x_0}$。事实上，由引理 4.7 及其记号可得 $\theta_x(Q) = Q^-$，因此

$$P_x = (P \cap \theta_x(P))_x \subseteq (P \cap Q^-)_x = (P \cap L)_x.$$

我们有 $\delta_P(m) = \delta_{P\cap L}(m)\delta_Q(m)$，其中 $m \in M$。由于 $\theta_x(Q) = Q^-$，我们有 $\delta_Q(l) = \delta_{Q^-}(\theta_x(l))$，其中 $l \in L$。此外，由于 $\delta_{Q^-} = \delta^{-1}_Q$ 在 L 上，因此 δ_Q 在 L 上是平凡的$_x$，特别是在 M 上也是如此$_{x_0}$。所需的恒等式随即得证。积分绝对收敛，因为 $P \cap L$ 在引理 4.7 下是 θ_x-稳定的，因此根据 [GO，引理 3.1], 商空间是紧的。

这里稍作修改即可应用 [Mat2, 引理 8。3] 中的论证，从而得到所需的界。为完整起见，我们在此给出论证。取 $\phi \in I^L_{P\cap L}(\mathbf{1})$ 使得 ϕ 在 $K \cap L$ 上恒等于 1。对于 $h \in L_x$ 和 $l \in L$，我们将 $hl = u_1m_1k_1$ 写成，其中 $u_1 \in U \cap L$，$m_1 \in M$，且 $k_1 \in K \cap L$。于是

$$|\ell(f(hl))| = \phi(hl)|\ell(\sigma(m_1)f(k_1))|.$$

根据 Lagier 在 [Lag, 定理 4, (i)] 中的界，以及当 h 和 l 变化时，$f(k_1)$ 在 σ 的空间中仅取有限多个向量这一事实，我们有

$$|\ell(f(hl))| \leqslant C\phi(hl)\|M_x m_1\|^r_{M_x\backslash M}$$

对于某些常数 C、r，它们与 h 和 l 无关。我们断言

$$\|M_x m_1\|_{M_x\backslash M} \leqslant C_1\|L_x l\|_{L_x\backslash L}$$

对于某个与 h 和 l 无关的 C。事实上，

$$\|L_x l\|_{L_x\backslash L} = \|L_x hl\|_{L_x\backslash L} \geqslant C_2\|L_x u_1 m_1\|_{L_x\backslash L}$$

对于某个 C，由 [Lag，(3.9)]。我们有

$$\|L_x u_1 m_1\|_{L_x\backslash L} = \|\theta_x(u_1 m_1)^{-1} u_1 m_1\| = \|\theta_x(m_1)^{-1} m_1 v\|$$

对于某个 v，使得 $\in U \cap L$；由于 $U \cap L$ 根据引理 4.7 是 θ_x-稳定的，且由 M 规范化。现在我们得到

$$\|\theta_x(m_1)^{-1} m_1 v\| \geqslant C_3\|\theta_x(m_1)^{-1} m_1\| = C_3\|M_x m_1\|_{M_x\backslash M},$$

对于某个 $C_3 > 0$。这里的不等式由 [Wald，引理 II.3.1] 得出。注意，我们可以直接将 [Lag，定理 4，(1)] 应用于积分

$$\int_{(P\cap L)_x\backslash L_x} \phi(hl)dh$$

从而得到一个类似形式的界。结合这两个界，便可得出该引理。

当 $F = \mathbb{R}$ 时，证明类似，只需将 Lagier 的界替换为[KSS 定理 5.11] 中的界；后者可以改写成与 Lagier 的界相同的形式。此外，注意到该界中的量 q(v) 满足 q 连续，再结合 $K \cap L$ 的紧致性，便可省去上述论证中关于 k_1 的有限取值部分。还要注意，常数 C 可以取为 $q_K(f) := \sup_{k\in K} q(f(k))$，它关于 f 连续。在后续论证中，直接使用 [KSS 定理 5.11] 中对相对系数的控制，而不使用 [Lag]中的控制。证毕。

定理 5.3. 设 $P = M \ltimes U$ 是 G 的一个标准抛物子群，$x \in X[M]$，使得 $\delta_x \equiv \mathbf{1}$、$\sigma$ 是 M 的一个有限长度表示，且 $l \in \mathrm{Hom}_{M_x}(\sigma, \mathbf{1})$。假设当 $F = \mathbb{R}$时，σ满足假设 2.2。则在 $(a^*_M)^-_x$中存在一个非空开锥 C，使得对于所有满足 $\mathrm{Re}\,\lambda \in C$ 的 $\lambda \in (a^*_{M,\mathbb{C}})^-_x$积分

$$J^G_P(\varphi; x, \ell, \sigma, \lambda) = \int_{P_x\backslash G_x} \ell(\varphi_\lambda(g))dg \tag{5.5}$$

对每个 $\varphi \in \mathrm{I}_P^G(\sigma)$都绝对收敛。此外，线性形式 $\mathrm{J}_P^G(\mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma、\ \lambda)$可亚纯延拓至 $\lambda \in (\mathrm{a}_M^*,\ \mathbb{C}^{)-}_x$并满足以下函数方程。当 $\alpha \in \Delta_P$ 且 $\mathrm{n} \in \mathrm{s}\alpha\mathrm{M}$ 满足 $(\mathrm{M}、\mathrm{x}) \searrow (\mathrm{M}_1, \mathrm{x}_1)$属于 G 时，我们有

$$J_P^G(\varphi; x, \ell, \sigma, \lambda) = J_{P_1}^G(M(n, \sigma, \lambda) I_P^G(n, \sigma, \lambda)\varphi; x_1, \ell, s_\alpha\sigma, s_\alpha\lambda).$$

证明。首先假设 (M, x)是一个极大顶点。我们在此情形下证明其绝对收敛性和亚纯延拓。令 $\mathrm{Q} = \mathrm{L} \ltimes \mathrm{V}$ 为满足 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{M,x}$ 的抛物子群。注意，$\mathrm{Q}_x = \mathrm{L}_x$ 是幺模的，且 $\mathrm{P}_x = (\mathrm{P} \cap \mathrm{L})_x$（见引理 4.7）。形式上有

$$\int_{P_x \backslash G_x} \ell(\varphi_\lambda(g))dg = \int_{Q_x \backslash G_x} \int_{P_x \backslash Q_x} \ell(\varphi_\lambda(hg))dhdg. \tag{5.6}$$

令 η为定义在 $\mathrm{I}_{P\cap L}^L(\sigma)$ 上的非负函数，其定义如下：

$$\eta(f) = \int_{(P\cap L)_x \backslash L_x} |\ell(f(h))|dh, \quad f \in I_{P\cap L}^L(\sigma).$$

为了应用引理 3.2，我们需要验证当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$时，η 是连续的。回顾 [Cas 第 4] 节，$\mathrm{I}_{P\cap L}^L(\sigma)$ 上的拓扑由定义 σ 拓扑的半范数 N 所诱导：将这些半范数对应到半范数 $\mathrm{N}_X(\mathrm{f}) = \sup^{k\in K_L} \mathrm{N}(\mathrm{R}_X \mathrm{f}\ (\mathrm{k}))$，其中 $\mathrm{K}_L = \mathrm{K} \cap \mathrm{L}$，$\mathrm{X} \in \mathrm{U}(\mathrm{l})$，而 R_X是 L 的泛包络代数 $\mathrm{U}(\mathrm{l})$ 的作用。于是，η 的连续性由以下不等式推出

$$|\eta(f_1) - \eta(f_2)| \leqslant \int_{(P\cap L)_x \backslash L_x} |\ell(f_1(h) - f_2(h))|dh,$$

再结合 l 在 V_σ 上的连续性，这在阿基米德情形下由区分性的定义成立。由引理5.2，存在 $\mathrm{r} > 0$ 使得

$$\eta(I_{P\cap L}^L(l, \sigma)f) \leqslant C_f \|L_x l\|_{L_x \backslash L}^r, \quad l \in L.$$

由于 η 是 L_x-不变的，由引理 3.2，存在 $\mathrm{c} > 0$，使得对所有 $\mathrm{F}_\varphi \in \mathrm{I}_Q^G\left(\mathrm{I}_{P\cap L}^L \sigma\right)$ 以及 $\lambda \in \mathcal{D}_{L,\ x}(\mathrm{c})$，积分

$$\int_{Q_x \backslash G_x} \eta((F_\varphi)_\lambda(g))dg$$

收敛。这里，$\mathrm{F}\varphi$ 是在第 2.5 节中同构 F 下 $\varphi \in \mathrm{I}_P^G(\sigma)$ 的像。注意，根据命题 4.2，$\mathcal{D}_{L,\ x}(\mathrm{c}) = \mathcal{D}_{M,\ x}(\mathrm{c})$，并且我们有

$$\int_{Q_x \backslash G_x} \eta((F_\varphi)_\lambda(g))dg = \int_{Q_x \backslash G_x} \int_{(P\cap L)_x \backslash L_x} |\ell(\varphi_\lambda(hg))|dhdg$$

由 (2.1) 可得。因此，由 Fubini定理可知其绝对收敛。定义$\Lambda_\ell \in \mathrm{Hom}_{L_x}(\mathrm{I}_{P\cap L}^{L}\sigma, \mathbf{1})$ 为

$$\Lambda_\ell(f) = \int_{(P\cap L)_x\backslash L_x} \ell(f(h))dh. \tag{5.7}$$

鉴于 (5.6) 现在已由一个收敛积分良好定义，我们有

$$J_P^G(\varphi; x, \ell, \sigma, \lambda) = J_Q^G(F_\varphi; x, \Lambda_\ell, I_{P\cap L}^L\sigma, \lambda).$$

因此，亚纯延拓可由命题 3.1 得出。

为证明一般情形下的收敛性以及函数方程，令 (M,x) 为一个顶点，使得 $\delta_x \equiv 1$ 属于 G，并应用命题 4.8 得到一条路径

$$(M_1, x_1) \overset{n_{\alpha_1}}{\searrow} (M_2, x_2) \overset{n_{\alpha_2}}{\searrow} \cdots \overset{n_{\alpha_k}}{\searrow} (M_{k+1}, x_{k+1}) = (M, x)$$

对每个 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{k}$，均有 $\mathrm{n}_{\alpha_i} \in \mathrm{s}^{\alpha_i}\mathrm{M}_i$，且 $(\mathrm{M}_1, \mathrm{x}_1)$ 是一个极大顶点。由 [Off，引理 6.5] 的推论，我们还有 $\delta_{x_1} \equiv 1$。记 $\mathrm{w}_i = \mathrm{s}^{\alpha_k}\mathrm{s}^{\alpha_{k-1}}\cdots\mathrm{s}^{\alpha_i}$，并记 $\lambda_i = \mathrm{w}^{-1}\mathrm{i}^{(\lambda)}$。于是，对每条边，我们都有一个交织算子 $\mathrm{M}(\mathrm{n}_i, \mathrm{w}^{-1}\mathrm{i}\,\sigma, \lambda_i)$，它将 $\mathrm{I}_{P_i}^G(\mathrm{w}^{-1}\mathrm{i}\,\sigma, \lambda_i)$ 映到 $\mathrm{I}_{P_{i+1}}^G(\mathrm{w}^{-1}\mathrm{i}_{+1}\sigma, \mathrm{s}_{\alpha_i}\lambda)$，其中 P_i 是 Levi 子群为 M_i 的标准抛物子群。暂且假设 F 是 p 进的。由命题 2.3，我们可以取充分大的 $\mathrm{c} > 0$，使得当 $\lambda_i \in \mathcal{D}^{M_i,\mathrm{s}^{\alpha_i}}(\mathrm{c})$ 时，对每个 i，交织算子 $\mathrm{M}(\mathrm{n}_i, \mathrm{w}^{-1}\mathrm{i}\,\sigma, \lambda_i)$ 都是同构。注意，根据我们对图中一条边的定义，$\mathcal{D}_{M_i,\mathrm{x}_i}(\mathrm{c}) \subset \mathcal{D}^{M_i,\mathrm{s}^{\alpha_i}}(\mathrm{c}) \cap (\mathrm{a}_{M_i}^*)_{x_i}^-$。由 [LR，引理 5.2.1，(1)]，我们有 $\mathrm{s}_{\alpha_i}\mathcal{D}_{M_i,\mathrm{x}_i}(\mathrm{c}) \subset \mathcal{D}_{M_{i+1},\mathrm{x}_{i+1}}(\mathrm{c})$。现在取 $\mathrm{C} = \mathrm{w}_1\mathcal{D}_{M_1,\mathrm{x}_1}(\mathrm{c}) \subset \mathcal{D}_{M,x}(\mathrm{c}) \subset (\mathrm{a}_M^*)_x^-$。所需的绝对收敛性和函数方程直接由命题 5.1 得出。当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ 时，需要做更多工作，因为即使参数充分正，我们也可能需要排除一些仿射超平面，才能假设诱导表示不可约。令 L_i 为由 M_i 和根子群 $\mathrm{U}^{\pm\alpha_i}$ 生成的 Levi 子群，其中 M_i 和 $\mathrm{M}_{i+1} = \mathrm{s}_{\alpha_i}(\mathrm{M}_i)$ 均为极大子群。于是 $\mathrm{a}_{L_i}^*$ 是 $\mathrm{a}_{M_i}^*$ 的一个超平面。由命题 2.3 的证明可知，可能使 $\mathrm{M}(\mathrm{n}_i, \mathrm{w}^{-1}\mathrm{i}\,\sigma, \lambda_i)$ 不可逆的可数个超平面，都是 $\mathrm{a}_{L_i}^*$ 的平移，即形如 $\mathrm{v} + \mathrm{a}_{L_i}^*$，其中 $\mathrm{v} \in \mathrm{a}_{M_i}^*$。现在，若 $(\mathrm{a}_{M_i}^*)_{x_i}^-$ 包含于这样的一个超平面中，则它也包含于 $\mathrm{a}_{L_i}^*$ 中。然而，这意味着 $\mathrm{a}_{L_i}^*$ 在 θ_{x_i} –Id 作用下稳定，因而也在 θ_{x_i} 作用下稳定。这与图的条件 $\theta_{x_i}(\alpha_i) \neq -\alpha_i$ 矛盾，然而 $\theta_{x_i}(\alpha_i) < 0$。仿照 p 进情形中证明绝对收敛的过程，我们现在知道，交织周期至少在 $(\mathrm{a}_{M,\mathbb{C}}^*)_x^- \cap \mathcal{D}_{M,x}(\mathrm{c})$ 的可数个仿射超平面之外收敛，其中 c 充分大。然而，若 $\mathrm{J}_P^G(\varphi; \mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma, \lambda_1)$ 和 $\mathrm{J}_P^G(\varphi; \mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma, \lambda_2)$ 绝对收敛，则由实指数映射的凸性，$\mathrm{J}_P^G(\varphi; \mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma, \lambda)$ 对连接 $\mathrm{Re}\ \lambda_1$ 与 $\mathrm{Re}\,\lambda_2$ 的线段上所有 $\mathrm{Re}\ \lambda$ 均收敛。

这证明了 $\mathrm{J}_P^G(\varphi;\mathrm{x},\mathrm{l},\sigma,\lambda)$ 在某个充分正的锥 $\mathcal{D}_{M,\ x}(\mathrm{c})$ 中绝对收敛。

关于亚纯延拓，若 (M,x) 是一个极小顶点，则由 [MO, 推论 1][1] 中的论证可得。考虑到 [BD2, 引理 7, 定理 2] 中建立的一些连续性性质后，这些论证同样适用于 $\mathrm{F}=\mathbb{R}$。对于一般顶点，我们现在可以利用命题 5.1 中得到的函数方程（结合 [Off, 推论 6.5]），从极小顶点的情形推出亚纯延拓。证毕。

5.2. 区分性的充分条件。本节将 [MO, 命题 3] 推广到任意对称对的情形，并去除其中对诱导数据的有界性假设。设 $\mathrm{P}=\mathrm{M}\ltimes\mathrm{U}$ 是 G 的一个抛物子群。

定理 5.4. 设 σ 是 M 的一个有限长度表示；当 $\mathrm{F}=\mathbb{R}$ 时，假设其满足假设 2.2。若存在 $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$，使得 $\theta_x(\mathrm{M})=\mathrm{M}$ 且 σ 是 (M_x,δ_x)-区分的，则对所有 $\lambda\in(\mathrm{a}_{M,\ \mathbb{C}}^{*})^{-}_{x}$，$\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 均为 G_x-区分的。

证明。我们对 (M,x) 的权作反向归纳，证明对于 $0\neq\mathrm{l}\in\mathrm{Hom}_{M_x}(\sigma,\delta_x)$，存在一个非零的线性形式亚纯族 $\mathrm{j}_P^G(\mathrm{x},\mathrm{l},\sigma,\lambda)$，使得当线性形式 $\mathrm{j}_P^G(\mathrm{x},\mathrm{l},\sigma,\lambda)$ 在 $\lambda\in(\mathrm{a}_{M,\mathbb{C}}^{*})^{-}_{x}$ 处全纯时，它属于 $\mathrm{Hom}_{G_x}(\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda),\mathbf{1})$。

作为归纳基，假设 (M,x) 是 G 中的一个极大顶点。设 $\mathrm{Q}=\mathrm{L}\ltimes\mathrm{V}$ 为 G 的相应抛物子群，其中 $\mathrm{L}=\mathrm{L}_{M,x}$。定义

$$j_P^G(\varphi;x,\ell,\sigma,\lambda)=\int_{Q_x\backslash G_x}\int_{(P\cap L)_x\backslash L_x}\ell(\varphi_\lambda(hg))\,dh\,dg, \tag{5.8}$$

其中，二重积分理解为迭代积分。我们在定理 5.3 的证明中说明，形式上的二重迭代积分是有意义的。按 (5.7) 定义 $\Lambda_\ell\in\mathrm{Hom}_{L_x}(\mathrm{I}^L_{P\cap L}\sigma,\mathbf{1})$。那么，正如我们已在定理 5.3 的证明中看到的，

$$j_P^G(\varphi;x,\ell,\sigma,\lambda)=\int_{Q_x\backslash G_x}\Lambda_\ell((F_\varphi)_\lambda(g))\,dg. \tag{5.9}$$

因此，根据命题 3.1，(5.9) 中的积分在某个锥域内绝对收敛，并在 $\lambda\in(\mathrm{a}_{M,\mathbb{C}}^{*})^{-}_{x}$ 中具有亚纯延拓。由于 $\mathrm{l}\neq0$，Λ_ℓ 根据引理 3.3 非零，因此根据命题 3.1，亚纯族 $\mathrm{j}_P^G(\mathrm{x},\mathrm{l},\sigma,\lambda)$ 非零。

现在假设 (M,x) 不是极大的。由命题 4.3，我们选取 $\alpha\in\Delta_M$ 使得 $\theta_x(\alpha)>0$ 和 $\theta_x(\alpha)\neq\alpha$。取 $\mathrm{n}\in\mathrm{s}_\alpha\mathrm{M}$，并令 $\mathrm{M}(\mathrm{n},\sigma,\lambda)$ 为交织算子，它将 $\mathrm{I}_P^G(\sigma,\lambda)$ 映到 $\mathrm{I}_{P_1}^G(\mathrm{s}_\alpha\sigma,\mathrm{s}_\alpha\lambda)$，其中 P_1 是抛物子群

[1]假设 (G,θ) 是伽罗瓦扩张并非必要，只需采用 $\delta_x\equiv1$ 这一假设。

其 Levi 子群为 $\mathrm{s}_\alpha \mathrm{M}\, \mathrm{s}_\alpha^{-1}$。由归纳假设，存在 $\mathrm{I}_{P_1}^G(\mathrm{s}_\alpha\sigma, \mathrm{s}_\alpha\lambda)$上的一个非零 $\mathrm{G}_{n\cdot x}$-不变线性形式亚纯族 $\mathrm{j}_{P_1}^G(\mathrm{n}\cdot \mathrm{x}, \mathrm{s}_\alpha\sigma, \mathrm{s}_\alpha\lambda)$。令 $\mathrm{j}_P^G(\mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma, \lambda) = \mathrm{j}_{P_1}^G(\mathrm{n}\cdot \mathrm{x}, \mathrm{s}_\alpha\sigma, \mathrm{s}_\alpha\lambda)\circ \mathrm{M}(\mathrm{n}, \sigma, \lambda)$。由归纳假设和命题 2.3，以及当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$时定理 5.3 的证明可知，这定义了所需的非零 G_x-不变线性形式亚纯族。至此，归纳证明完成。

现在，当 F 为 p 进域时，通过取 $\mathrm{j}_P^G(\mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma, \lambda)$ 在一般位置下经过 λ 的一条复直线上的限制在 λ 处的首项，我们便得到 $\mathrm{I}_P^G(\sigma, \lambda)$ 上一个非零的 G_x-不变线性形式。当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ 时，会出现以下额外的技术问题：首先考虑 $\mathrm{j}_P^G(\mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma, \lambda)$ 在 K 有限向量空间 $\mathrm{I}_P^G(\sigma, \lambda)_f$ 上的限制；由这些向量的稠密性以及 $\mathrm{j}_P^G(\mathrm{x}, \mathrm{l}, \sigma, \lambda)$ 对正则 λ 的连续性可知，该限制非零。随后，首项论证在 $\mathrm{I}_P^G(\sigma, \lambda)_f$ 上得到一个非零的 G_x-不变线性形式；根据 [BD2，定理 2]，它可延拓为 $\mathrm{I}_P^G(\sigma, \lambda)_f$ 上一个非零的 G_x-不变连续线性泛函。定理得证。证毕。

最后，当 F 是 p 进域时，结合几何引理，我们得出尖点表示诱导表示的区分判据。

推论5.5. 设 σ 是 M 的有限长度尖点表示，且 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$。当且仅当存在 $\mathrm{y} \in \mathrm{G}\cdot \mathrm{x}$，使得 $\theta_y(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ 且 σ 是 (M^y, δ_y)-区分的，表示 $\mathrm{I}_P^G(\sigma)$ 是 G_x-区分的。

证明。“若”部分是定理 5.4 的直接推论。“唯若”部分由 [Off、定理 4.2] 以及 σ 的尖点性得出。证毕。

注5.6. 当 $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ 时，定理 5.4 表明，[Kem 定理 1.3]（或者更确切地说，其证明）和 [ST 定理 1.2] 中得到的标准模具有区分性的必要条件也是充分条件。

参考文献

[AG] A. Aizenbud 和 D. Gourevitch。《纳什流形上的施瓦茨函数》。《国际数学研究通知》，(5)：文章编号 rnm 155，37 页，2008 年。[BD1] P. Blanc 和 P. Delorme。《p 进约化对称空间 G/H 上诱导表示的 H-不变分布向量》。《傅里叶研究所年刊》，第 58 卷，213–261 页，2008 年。[BD2] J. L. Brylinski 和 P. Delorme。《约化对称空间广义主级数的 H-不变分布向量及 Eisenstein 积分的亚纯延拓》。《数学创见》，109(3)：619–664，1992 年。[BK] J. Bernstein 和 B. Krötz。《Harish-Chandra 模的光滑 Fréchet 全局化》。《以色列数学杂志》，199(1)：45–111，2014 年。

[BZ] J. Bernstein 和 A. V. Zelevinsky。《群 GL(n 在 F) 上的表示，其中 F 是非阿基米德局部域》。《数学科学进展》，31(3)：5–70，1976 年。[BM] P. Broussous 和 N. Matringe。《Prasad–Takloo-Bighash 型对的重数一》。《国际数学研究通知》，(21)：16423–16447，2021 年。[Cas] W. Casselman。《Harish-Chandra 模到 G 的表示的典范延拓》。《加拿大数学杂志》，41(3)：385–438，1989 年。[CD] J. Carmona 和 P. Delorme。《约化对称空间广义主级数的 H-不变分布向量的亚纯基：函数方程》。《泛函分析杂志》，122(1)：152–221，1994 年。[CS] Y. Chen 和 B. Sun。《几乎线性纳什群表示的施瓦茨同调》。《泛函分析杂志》，280(7)：论文编号 108817，共 50 页，2021 年。[FLO] B. Feigon、E. Lapid 和 O. Offen。《关于酉群所区分的表示》。《高等科学研究所数学出版物》，115(1)：185–323，2012 年。 ´GO[M. Gurevich 和 O. Offen。《关于相对于对称空间的矩阵系数可积性的判据》。《泛函分析杂志》，270(12)：4478–4512，2016 年。] HW[A. G. Helminck 和 S. P. Wang。《关于约化群对合的有理性性质》。《数学进展》，99(1)：26–96，1993 年。] JLR[H. Jacquet、E. Lapid 和 J. Rogawski。《自守形式的周期》。《美国数学会杂志》，12(1)：173–240，1999 年。] JR[H. Jacquet 和 S. Rallis。《辛周期》。《纯粹与应用数学杂志》，423：175–197，1992 年。¨Kem[A. Kemarsky。《GL] 区分表示的伽马因子》。《太平洋数学杂志》，278(1)：137–172，2015 年。𝑛(ℂ)KSS[B. Krötz、E. Sayag 和 H. Schlichtkrull。《球型约化齐性空间上矩阵系数的衰减》。《数学杂志》，278(1–2)：229–249，2014 年。] Lag¨N. Lagier。《p 进约化对称空间上函数的常数项》。《泛函分析杂志》，254(4)：1088–1145，2008 年。[LR] E. Lapid 和 J. Rogawski。《Eisenstein 级数的周期：伽罗瓦情形》。《杜克数学杂志》，120(1)：153–226，2003 年。´Mat´N. Matringe。《内形式 GL1] n)的 Steinberg 表示的区分性》。《数学杂志》，287：881–895，2017 年。[Mat2] N. Matringe。《交织周期的伽马因子及内形式 GL(n)的区分性》。《泛函分析杂志》，281(10)：109223，2021 年。[Mil] J. S. Milne。《代数群：域上有限型群概形理论》，第 170 卷。剑桥大学出版社，2017 年。[MO] N. Matringe 和 O. Offen。《p 进伽罗瓦对称对的交织周期与区分性》。《伦敦数学会会刊》，125(5)：1179–1252，2022 年。[MW] C. Moeglin 和 J. L. Waldspurger。《谱分解与 Eisenstein 级数：经文释义》。第 113 号。剑桥大学出版社，1995 年。[Off] O. Offen。《关于与 p 进对称空间相关的抛物诱导》。《数论杂志》，170：211–227，2017 年。[PWZ] A. Pollack、C. Wan 和 M. Zydor。《关于周期积分的留数方法》。《杜克数学杂志》，170(7)：1457–1515，2021 年。

[Ren] D. Renard。《p 进约化群的表示》。法国数学会，巴黎，2010 年。[Rud] W. Rudin。《泛函分析》。麦格劳-希尔公司，纽约，1991 年。[Sau]F. Sauvageot。《约化群的稠密性原理》。Compositio Mathematica，108(2)：151–184，1997 年。[Sha] F. Shahidi。《关于某些 L 函数》。《美国数学杂志》，103(2)：297–355，1981 年。[Spr 1] T. A. Springer。《关于带对合的代数群的一些结果》。载于《代数群及相关主题》，第 525–543 页。日本数学会，1985 年。[Spr2] T. A. Springer。《线性代数群》。Birkh¨ auser Boston 公司，波士顿，马萨诸塞州，2009 年。[ST] M. Suzuki 和 H. Tamori。《线性模型的ε二分性：阿基米德情形》。《国际数学研究通知》，rnad110，2023 年。[SX] M. Suzuki 和 H. Xue。《线性交织周期与线性模型的ε二分性》。《数学年刊》，2023 年。[VW] D. A. Vogan, Jr. 和 N. R. Wallach。《实约化群的交织算子》。《数学进展》，82(2)：203–243，1990 年。[Wald] J. L. Waldspurger。《p进群的 Plancherel公式——据 Harish- Chandra]》。（Harish-Chandra]之后的 p进群 Plancherel公式）。《Jussieu数学研究所杂志》，(2)，2003 年。[Wal1] N. R. Wallach。《实约化群》。I。《纯数学与应用数学》，第 132 卷，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1988 年。[Wal2] N. R. Wallach。《实约化群》。II。《纯数学与应用数学》，第 132-II 卷，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1992 年。[Wal3] N. R. Wallach。《逆函子对 K有限函子的参数依赖性》。《表示论》，26：94–121，2022 年。巴黎大学，IMJ-PRG，8 Pl. Aur´elie Nemours，75013 巴黎，法国 电子邮箱：nadir.matringe@imj-prg.fr 数学系，布兰代斯大学，415 South Street，Waltham，MA 02453，美国 电子邮箱：offen@brandeis.edu 高性能计算与随机信息处理重点实验室（HPC- SIP），湖南师范大学数学与统计学院，中国长沙 410081 电子邮箱：cyang@hunnu.edu.cn