arXiv:2303.03665v3 [math.AG] 7 Aug 2023

余切丛构成代数完全可积系统的皮卡数为一的 Fano 流形及其自同态

SARBESWAR PAL

摘要。设 X 是一个不同于射影空间、皮卡数为一的射影 Fano 流形。民间猜想认为， X 的任何非常值自态射都是同构。本文的前半部分将证明，当 X 的余切丛构成代数完全可积系统且 X 的切丛不是数值有效时，民间猜想成立。本文的后半部分将给出一类皮卡秩为一的射影 Fano 流形的例子（它们不同于代数曲线上向量丛的模空间），且其余切丛构成代数完全可积系统。作为主要定理和这些例子的应用，本文实际上为发表于三篇不同文章 [12, 15, 21] 中的三项重要结果提供了另一种证明。

1. 引言

设 X 是复数域上的光滑射影法诺簇，且皮卡数为一。

这是一个由来已久的民间猜想。

猜想 1.1. 如果 X 不是射影空间，那么任意非常值自同态 $X \to X$ 必为双射。

该猜想已分别在以下情形中得到证明：齐性空间见 [6], ，射影空间的超曲面见 [1] ，以及包含法丛平凡有理曲线的 Fano 流形见 [5]；最后一项工作解决了 $\dim(X) = 3$ 情形下的猜想。最近，Shao 和 Zhong [21] 在 $\mathbb{P}^n$、$n \geq 5$ 中证明了该猜想对两个光滑二次超曲面的交成立。已知该猜想对代数曲线上的向量丛模空间也成立 [12]。本文的目的有二。首先，在进一步假设 T^*X 是代数完全可积系统且 TX 不是数值有效的条件下，证明上述猜想。更确切地说，我们将证明以下结论：

定理 1.1。 设 X 是一个皮卡数为一且不同于射影空间的 *Fano*流形。进一步，假设 T^*X 是代数完全可积系统，且 TX 不是数值有效的。那么，任何非常值自态射都是自同构。

遗憾的是，这类 Fano 流形目前已知的例子并不多。已知的例子是代数曲线上稳定向量丛的精细模空间。最近，Beauville、Etesse、Höring、Liu 和 Voisin 在 [3] 中证明， $\mathbb{P}^n$中的两个光滑二次超曲面的交的余切丛是代数完全可积系统。 $n = 4$ 的情形已由 Kim 和 Lee [15]研究。

我们的下一个目标是 给出一系列 Picard 数为一的新例子，这些例子都是 Fano 流形 e

Date: J一月 2022。

2010 数学主题分类。 14J60。关键词与短语。 极小有理曲线、摇摆点、Fano流形、代数完全可积系统。

其余切丛构成代数完全可积系统。事实上，我们将证明以下定理。

定理 1.2。设 X 是 $\mathbb{P}^{2g}$，$g \geq 2$ 中两个二次曲面的光滑交，则 X 中 $g-2)-$ 平面的簇的余切丛是代数完全可积系统。

注意，代数曲线上的向量丛精细模空间以及 $\mathbb{P}^n$、$n \geq 5$ 中两个二次曲面的光滑交，都是Picard数为一的射影 Fano 流形。由于它们的余切丛是代数完全可积系统，定理 1.1 表明该猜想在这些情形下成立。此外，若 $g = 2$，则定理 1.2 表明 $\mathbb{P}^4$ 中两个二次曲面的光滑交的余切丛是代数完全可积系统。

因此，除了定理 1.1 的一般性结论和定理 1.2 中新的一系列例子外，本文还统一了发表于三篇不同文章中的三个重要结果，即 [12, 15, 21]。

我们证明猜想 1.1 的主要思路是使用 Hwang-Nakayama 判据。回顾一下，对于满射自态射 $f : X \to X$，如果约化除子 D 满足 $(f^*D)_{\text{red}} = D$，则称其为完全不变除子。随后 Hwang 和 Nakayama 给出了如下判据：

定理 1.3 (Hwang-Nakayama)。设 X 是一个 ***Picard***数为一且不同于射影空间的 ***Fano***流形。如果 X 上的一个自态射在某个完全不变除子之外是 ***étale*** 的，那么它是双射。

回顾一下，如果 T^*X 是代数完全可积系统，那么存在一个态射$T^*X \to \mathbb{C}^n$，称为矩映射，其纤维是拉格朗日的，且一般纤维同构于阿贝尔簇的一个开子集。我们称 X 中的一个点为摇摆点，如果矩映射限制在该点的余切空间上时不是准有限的。“摇摆的”一词最早在文献 [8] 中被引入，用于不同背景下、以不同形式研究代数曲线上的向量丛模空间。曲线上的向量丛模空间中的摇摆点轨迹已在文献 [9, 10, 11]中得到研究。在当前情形下，我们将证明：当且仅当 X 中存在一条经过该点的非自由有理曲线时，该点才是摇摆点。利用这一分类，我们将证明，对于 X的任意非常值自态射，摇摆点轨迹保持完全不变，并且该态射在摇摆轨迹之外是 étale 的。这迫使摇摆轨迹成为一个除子，或者该态射是非分歧的。由于 X 是单连通的，次数为 > 1 的态射不可能是非分歧的。因此，如果该态射的次数大于 1，那么摇摆轨迹就是一个除子，应用 1.3 即可得出定理。

论文结构：
在第 2 节中，我们将回顾后续各节所需的一些基本事实。

在第 3 节中，我们将正式定义 X 中的摇摆型点，并研究其一些性质。事实上，我们将证明，点 $p \in X$ 是摇摆的，当且仅当存在一条包含该点的非自由极小有理曲线。

在第 4 节中，我们将证明，对于 X的任意非常值自态射，摇摆轨迹都是完全不变的。最后，在第 5 节中，我们将给出一些皮卡数为一且余切丛构成代数完全可积系统的 Fano流形例子。事实上，我们证明了定理 1.2。

2. 预备知识

在本小节中，我们将回顾一些关于 Fano 流形的基本定义和事实，这些内容大多取自 [7] 和 [13]。设 X 是一个维数为 n的 Fano 流形。一个参数化的

X 中的有理曲线是一个态射 $\mathbb{P}^1 \to X$，它在其像上是双有理的。我们不区分参数化的有理曲线与其像 $f(\mathbb{P}^1)$，并称 f为X中的一条有理曲线。回忆一下， $\mathbb{P}^1$ 上的任意向量丛都是线丛的直和。因此，给定一条有理曲线 $f: \mathbb{P}^1 \to X$，切丛 TX 的拉回分解为

$$f^*TX = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_n), a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n. \tag{2.1}$$

若有理曲线 f 满足上式中的所有整数 a_1、a_2、...、a_n 均为非负数，则称其为自由曲线。

从现在起，我们假设 X 是一个维数为 n 、Picard数为 1 的Fano流形。

已知， X上的每一点都位于 X中的某条有理曲线上。

注 2.1. 注意，有理曲线 f: $\mathbb{P}^1 \to X$不是自由曲线，当且仅当 f^*T^*X有一个在某点消失的非零截面。

3. 代数完全可积系统与摇摆点

回顾一下，维数为 $2n$ 的辛流形 M 被称为完全可积哈密顿系统，如果存在函数 f_1、f_2、...、f_n，它们彼此泊松对易，且 $df_1 \wedge df_2 \wedge ... \wedge df_n$ 在一般情形下非零。

由这些函数定义的映射 $f: M \to \mathbb{C}^n$ 称为矩映射。矩映射 f 具有这样的性质：一般纤维是一个 n 维子流形，其上有 n 个线性无关的对易向量场 X_{f_1}、X_{f_2}、...、X_{f_n}。如果一般纤维是阿贝尔簇中的开子集，且这些向量场是线性的，那么我们称该系统为代数完全可积系统。

注意，当 M 是射影流形 X 的余切丛时，函数 f_i 可以视为 $\oplus_{i=1}^{\infty} H^0(X, S^nTX)$ 的一个元素，其中 S^nTX 表示 TX 的第 $n-$ 对称幂。S^iTX 的一个截面 s_i 给出 T^*X 上的一个函数，该函数在每个纤维上都是次数为 i 的齐次多项式。因此，自然的 $\mathbb{C}^*$ 作用，即 $c.(p,v) = (p, cv)$，其中 $p \in X$ 和 v 是 X 在 p 处的余切向量，会在 S^iTX 的截面上诱导如下作用：$c.s_i(p,v) = c^i s_i(p,v)$。此作用使矩映射 μ, $\mathbb{C}^*$ 等变。

(*)：设 X 是一个 Picard秩为一的射影 Fano 流形。那么 T^*X 具有自然的辛结构。我们进一步假设 T^*X 是代数完全可积哈密顿系统。

令 μ： $T^*X \to \mathbb{C}^n$ 为矩映射，它相对于上文定义的 $\mathbb{C}^*$-作用是 $\mathbb{C}^*$-等变的。

定义 3.1. （摆动点）设 X 是满足$(*)$的 *Fano* 流形。当且仅当矩映射 μ 在 p 处的余切空间上的限制是拟有限的，点 $p \in X$ 才称为非摆动点。X 中非摆动点的补集中的点称为摆动点。

注 3.2. 由于矩映射 μ 是 $\mathbb{C}^*$-等变的，且其在非摆动点处的余切空间上的限制是拟有限的，因此在非摆动点处的限制映射实际上是有限的。

命题 3.3. 设 X 是满足 $(*)$ 的射影 *Fano* 流形。那么，点 $p \in X$ 是摆动点，当且仅当存在非零向量 $v \in T_p^*X$，使得 $\mu(p,v) = 0$。

证明。 设 $p \in X$是一个摇摆点。那么 $\mu_{|T_p^*X}$： $T_p^*X \to \mathbb{C}^n$ 不是拟有限的。因此，存在一点 $x \in \mathbb{C}^n$，使得 $Y := \mu^{-1}(x) \cap T_p^*X$ 的维数至少为一。如果该点

是 $x = 0$，那么结论成立。如果是 $x \neq 0$，由于 μ 是 $\mathbb{C}^*$ 等变的，$\mu^{-1}(cx) \cap T_p^*X$ 的维数也至少为一。现在考虑 $\mathbb{C}^n$ 中由 x定义的一维闭子集 Z，即 $\{cx : c \in \mathbb{C}\}$。那么 $\mu^{-1}(Z) \cap T_p^*X$ 是 T_p^*X 的闭子集，矩映射的限制在一般纤维上的维数至少为一，且每个纤维的维数都至少为一。特别地，$\mu^{-1}(0) \cap T_p^*X$ 的维数至少为一。因此，存在一个非零向量$v \in T_p^*X$，使得 $\mu(p, v) = 0$。

反之，设 $p \in X$ 是一个点，使得在 p 处存在一个非零余切向量 v，满足 $\mu(p, v) = 0$。由于 μ 是 $\mathbb{C}^*$-等变的，对于所有 $c \in \mathbb{C}^*$，都有 $\mu(p, cv) = 0$。因此，$\mu^{-1}(0) \cap T_p^*X$ 是正维的。故 p 是摇摆的。□

命题 3.4。 摇摆点的轨迹是 X 的一个真闭子集。换言之，X 中的非摇摆点构成一个稠密开子集。

证明。 注意，如果 $p \in X$ 是一个摇摆点，那么存在一个非零向量 $v \in T_p^*X$，使得 $\mu(p, v) = 0$。由于 μ 是 $\mathbb{C}^*$-等变的，对于所有 $c \in \mathbb{C}$，都有 $\mu(p, cv) = 0$，从而 $\mu^{-1}(0) \cap T_p^*X$ 的维数至少为一。因此，如果 X 中的所有点都是摇摆的，那么 $\mu^{-1}(0) \geq n + 1$ 的维数将会是.....但 μ 的每个纤维都是拉格朗日的，因此每个纤维的每个分支的维数都是 n，矛盾。故非摇摆点的轨迹非空。□

命题 3.5。 设 $p \in X$，使得存在一条经过 p 的非自由有理曲线 l。则 p 是摇摆的。

证明。 设 l 是 X 中包含 p 的一条非自由有理曲线。令 $\mu : T^*X \to \mathbb{C}^n$ 为矩映射。设 $\mu_{|l}$ 是 μ 到 $T^*X_{|l}$ 的限制。由于 l 是非自由的，$T^*X_{|l}$ 包含一个线子丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$，且 $m \geq 1$。由于 $m \geq 1$，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ 是整体生成的。因此，存在一个非常数截面 $s : l \to T^*X_{|l}$，它在某个不同于 p 的点处为零。注意，由于 l 是射影的，s 与矩映射 μ 的复合是常值的。由于 s 在 l 的某个点处为零，复合映射为零。因此，对于每个 $p \in l.$，矩映射到余切空间 $T_p^*X \to \mathbb{C}^n$ 的限制在零点上的纤维具有正维数。于是，T_p^*X 包含一个非零向量 v，使得 $\mu(p, v) = 0$。因此，根据命题 3.3，p 是摇摆的。□

注 3.6. 注意，若 C 是 X 中任意一条射影曲线，且切丛 TX 在 C 上的限制包含一个负次数线丛 L 作为直和项，并且 L^* 是整体生成的，那么根据前一个命题证明中的相同论证，曲线上的每一点都是摇摆点。

命题 3.7 命题。 设 $x \in X$ 是摇摆的。那么存在一条经过 x 的非自由曲线 C .

证明。 由于 T^*X 是一个矩映射为 μ 的代数完全可积系统，$\mu^{-1}(0)$ 的每个分支维数都为 n，且哈密顿向量场 X_{f_1}、X_{f_2}、...、X_{f_n} 与 $\mu^{-1}(0)$ 相切。设 $\mu^{-1}(0)$ 的分支为 X_1、X_2、...、X_m，其中 X_1 是由 T^*X 的零截面给出的分支。换言之，X_1 与 X 同构，且 X_1 中的点具有 $(p, 0)$ $p \in X$ 的形式。注意，摇摆轨迹的各分支由 $X_1 \cap X_i$、$i \neq 1$ 给出。注意，哈密顿向量场与 $U := X_1 \setminus \cup_{i=2}^m (X_1 \cap X_i)$ 相切。设 W 是摇摆轨迹的一个分支。

假设哈密顿向量场在 W 的一般点处与 X_1 相切。由于哈密顿向量场彼此交换，只要对所有 i，$X_{f_i}((p, 0)) \neq 0$，则 $X_{f_1}((p, 0))$、...、$X_{f_n}((p, 0))$ 线性无关。如果 $X_{f_i}((p, 0)) = 0$ 在一般点 $(p, 0)$ 处成立，那么 X_{f_i} 本身在 W 上为零。因此，X_{f_1}、...、X_{f_n} 在一般点处线性无关。另一方面，可以看出，$T(T^*X)$ 在零截面 X_1 上的限制同构于 $TX \oplus T^*X$。由于这些向量场与 X_1 相切，$X_{f_i}((p, 0))$ 在 T^*X 上的投影为零。因此，在 W 的一般点 $(p, 0)$ 处，这些向量场张成 X_1 在 $(p, 0)$ 处的切空间，这意味着矩映射在 W 的一般点处满射，矛盾。

因此，存在一个哈密顿向量场，记作 X_{f_1}，它在 W 的一般点处不与 X_1 相切。设 C 是 W 中经过一般点的一条有理曲线。那么，对于一般点 $(p, 0) \in C$，$H((p, 0))$ 在 T^*X 上的投影非零，从而定义了 $T^*X|_C$ 的一个非零截面，该截面在 C 的某一点处消失（恰好是 X_{f_1} 与 X_1 相切的点）。因此，C 不是自由的。

□

4. 摇摆点轨迹完全不变

令 $\mathcal{W}$ 为 X 中摆动点的轨迹，$\mathcal{W}_{\mathrm{red}}$ 为其约化部分。

命题 4.1。设 $\varphi\colon X \to X$ 是非常值自态射。那么除子 $\mathcal{W}_{red}$ 在 φ 下完全不变，即 $\varphi^{-1}(\mathcal{W}_{red}) = \mathcal{W}_{red}$。

证明。注意，由于 X 的 Picard 秩为一，X 的任何非常值自态射都是有限且满射的。设 $p \in \mathcal{W}_{\mathrm{red}}$。那么存在一条有理曲线 $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$，使得 $p \in f(\mathbb{P}^1)$，且 f^*TX 有一个负次数直和项。于是 $\varphi \circ f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ 是一条有理曲线。若 $\varphi \circ f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ 不是自由的，则它有一个负次数线子丛作为直和项，因此根据注 3.6，$\varphi(p)$ 是摆动点。设 $\varphi \circ f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ 是自由的。
注意，如果 E 是 X 上的任意向量丛，那么 $\mu(\varphi^*E) = m\mu(E)$，其中 m 是 φ 的次数，而 $\mu(E)$ 表示 E 的斜率。因此，$(\varphi \circ f)^*TX$ 的 Harder-Narasimhan 滤过是 f^*TX 的 Harder-Narasimhan 滤过的拉回。因此，滤过中每个商丛的斜率是 m 倍于 f^*TX 的滤过中相应商丛的斜率，这与 f^*TX 包含一个负次数的直和项相矛盾。
反之，设 p 是一个非摆动点。如果 $\varphi(p) \in \mathcal{W}_{\mathrm{red}}$，那么存在一条有理曲线 $g\colon \mathbb{P}^1 \to X$，使得 $\varphi(p) \in g(\mathbb{P}^1)$，且 g 不是自由的。令 $C := \varphi^{-1}(g(\mathbb{P}^1))$。令 $\tilde{C}$ 为其˜正规化，并令 $h\colon C \to C \to X$ 为 $C \to X$ 与正规化映射的复合。因此，我们有 $(\varphi \circ h)(\tilde{C}) = g(\mathbb{P}^1)$。由于 g 不是自由的，如前一种情形，$\mathcal{T}X$ 在 C 上的限制包含一个次数为负的线子丛 L。由于这样的线丛 L 是有理曲线上的一个线丛的拉回，L^* 是整体生成的，且 $p \in h(C)$。因此，根据注 3.6，p 是摇摆的，矛盾。这就完成了证明。□

设 $\varphi : X \to X$ 是一个满射态射。态射 φ 将在余切丛的全空间上诱导一个态射 $d\varphi^* : \varphi^*T^*X \to T^*X$。注意，$\varphi^*T^*X$ 在点 $p \in X$ 处的纤维同构于 $T^*_{\varphi(p)}X$。因此，矩映射 μ 诱导了一个映射 $\varphi^*T^*X \to \mathbb{C}^n$，我们也将其记为 μ。下面引理的证明与 [16, 命题 2.1] 中的证明类似，只需做少许修改。不过，为了完整起见，我们在此给出证明。

引理 4.2. 存在一个态射 $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*T^*X & \longrightarrow & T^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array} \tag{4.1}$$

是交换的。此外，ψ 关于第 *4* 节中定义的作用是 $\mathbb{C}^*$-等变的。

证明。令 $M := \mathbb{P}(T^*X \oplus \mathcal{O}_X)$，且 $\pi\colon M \to X$ 为投影映射。于是 M 包含 T^*X 作为开稠密子集，其补集是除子 D。考虑纤维积图表

$$\begin{array}{ccc} M \times_X X & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \end{array} \tag{4.2}$$

其中，左侧竖直映射和顶部水平映射分别为投影映射 p_2、p_1，右侧竖直映射为投影映射 π，底部水平映射为自同态 φ。注意，$p_1^{-1}(T^*X)$ 恰为 φ^*T^*X 的全空间。令 U 为 X 中由非摆动点组成的稠密开子集。定义 $\tilde{D} := D \cap \pi^{-1}(U)$，它是 D 中的开集。令 $Y = M \setminus \tilde{D}$ 和 $\tilde{Y} := p_1^{-1}(Y)$。注意，$Y = T^*X \cup (D \cap \pi^{-1}(\mathcal{W}))$。因此，$Y$ 和 $\tilde{Y}$ 中分别由 T^*X 和 φ^*T^*X 的补集构成的余维数至少为 2。因此，根据 Hartogs 定理，定理中的竖直正则映射分别延拓到 Y 和 $\tilde{Y}$。

另一方面，Y 到 $\mathbb{C}^n$ 的限制映射 $d\varphi^*$。因此，我们有如下图示：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array} \tag{4.3}$$

注意，根据非摆动点的定义，对于非摆动点 p 以及 $s \in \mathbb{C}^n$，$T_p^*X \cap \mu^{-1}(s)$ 在 $M \times_X X$ 中是闭的。因此，对于任意 $s \in \mathbb{C}^n$，$M \times_X X$ 中的闭包 $\mu^{-1}(s)$ 包含于 Y 中。但 $\mu^{-1}(s)$ 是射影簇。因此，$\mu \circ d\varphi^*$ 是常值的。于是，我们得到一个态射$\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*T^*X & \longrightarrow & T^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array} \tag{4.4}$$

显然，$\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{C}^*$-等变的，因为 $d\varphi^*$ 是 $\mathbb{C}^*$-等变的，且 μ 关于上述定义的诱导作用是 $\mathbb{C}^*$-等变的。

□

引理 4.3。引理 *4.2* 中的态射 $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是满射。

证明。由于 $\varphi : X \to X$ 是有限态射，因此它在开集 $U \subset X$上是非分歧的。现在令$V \subset X$ 为 X中所有非摆动点的集合。那么 V 是 X的非空开子集。由于 X不可约 $U \cap V \neq \varnothing$。取 $x \in U \cap V$。于是，矩映射 $\mu : T_x^*X \to \mathbb{C}^n$是满射。另一方面，由于 φ是非分歧的，因此 $d\varphi^* : T_{x'}^*X \to T_x^*X$ 是满射，其中 $x' = \varphi(x)$。因此，由交换图可知

$$\begin{array}{ccc} T_{x'}^*X & \longrightarrow & T_x^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array} \tag{4.5}$$

它是满射的。 □

命题 4.4. 态射 φ 在 $\mathcal{W}_{red}$之外非分歧。

证明。 我们需要证明$^{\varphi|_{X\setminus\mathcal{W}_{\rm red}}}$： $X\setminus\mathcal{W}_{\rm red}\to X\setminus\mathcal{W}_{\rm red}$ 是非分歧的。注意，复数域上光滑射影簇之间的有限态射 g： $Z\to Z$ 是非分歧的，当且仅当 $T_zZ\to T_{g(z)}Z$是单射，等价地，$T^*_{g(z)}Z\to T^*_zZ$是满射。

设 $x\in X\setminus\mathcal{W}_{\rm red}$。由于 $Y_{\rm red}$ 是一个完全不变除子，因此 x 和 $\varphi(x)$均为非摇摆的。因此，下面态射交换图中的两个竖直映射

$$\begin{array}{ccc} T^*_{\varphi(x)}X & \longrightarrow & T^*_xX \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array} \tag{4.6}$$

都是满射。设 K为 $d\varphi^*$: $T^*_{\varphi(x)}X\to T^*_xX$的核。若 $K\neq 0$，则 $\mu(K)\neq 0$，由上述交换图可得，$\psi(\mu(K))=0$。由于 ψ 是满射且具有 $\mathbb{C}^*$-等变性，$\psi^{-1}(0)=0$，这就导致矛盾。因此 $K=0$，命题得证。□

定理 1.1 的证明：定理 1.1 现在可由定理 1.3、命题 4.1 和命题 4.4 推出。

5. 例子

1. 设 C 是亏格为 $g\geq 2$ 的复数域上的光滑射影曲线。设$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_H$ 分别为 C 上秩为 r、行列式固定且次数为 d 的稳定向量丛模空间和希格斯丛模空间，其中 r 和 d 互素。已知，$\mathcal{M}$ 是一个维数为 $r^2(g-1)-g+1$ 且皮卡数为一的 Fano流形。 $\mathcal{M}$ 的余切丛包含于 $\mathcal{M}_H$ 中，且是一个开稠密子集。存在一个态射 $\mathcal{M}_H\to\mathbb{C}^{r^2(g-1)-g+1}$，称为 Hitchin映射。Hitchin映射在 $\mathcal{M}$ 的余切丛上的限制具有第 4 节中的性质（$*$）和（$**$）。因此，由定理 1.1 可知，$\mathcal{M}$ 的任何非常值自态射都是自同构，这为 Hwang-Ramanan 的定理 [12,定理 5.6]提供了另一种证明。

2. 设 X 是 $\mathbb{P}^n$、$n\geq 5$ 中两个光滑二次超曲面的交。那么 X 是 Picard数为一的射影 Fano 流形。此外，根据 [3, 定理 a、b、c], , X 的余切丛是代数完全可积系统。因此，由定理 1.1 可知，猜想 1.1 对 X 成立。

3. 设 C 是亏格为 $g\geq 2$ 的光滑射影双曲曲线，且 $\mathcal{M}^s_C(\delta)$ 是 C 上秩 2 稳定丛的模空间，其行列式固定为 δ，其中 δ 是平凡丛或与魏尔斯特拉斯点 $\omega\in C$ 相关联的线丛 L_ω。已知 $\mathcal{M}^s_C(\delta)$ 是光滑拟射影簇。显然，δ 在 $\iota-$下不变，其中 ι 是 C 上的双曲 involution。于是，ι 也在 $\mathcal{M}^s_C(\delta)$ 上诱导一个对合，该对合取 $E\to\iota^*E$。设 $U:=\mathcal{M}^s_C(\delta)^\iota$ 是 $\mathcal{M}^s_C(\delta)$ 的ι-不动点集。那么 U 也是一个光滑拟射影簇 [17]。我们将证明，T^*U 是代数完全可积系统。

设 $\mathcal{M}_H$ 为 秩 2 且行列式固定的半稳定希格斯丛的模空间 δ 上

C。已知余切丛 $T^*\mathcal{M}_C^s(\delta)$ 是 $\mathcal{M}_H$中的开稠密子集。存在适当满射态射

$$h : \mathcal{M}_H \to H^0(K^2),$$

称为 Hi tchin映射。Hitchin映射在$T^*\mathcal{M}_C^s(\delta)$上的限制诱导出一个态射 ,

$$h : T^*\mathcal{M}_C^s(\delta) \to H^0(K^2). \tag{5.1}$$

我们回顾谱曲线与Hitchin映射的纤维之间的关系。详情见 [2]。对于一般的 $s \in H^0(K^2)$，谱曲线 C_s 是 2–重覆盖C，其分歧轨迹是 s的零点。令

$$\pi : C_s \to C$$

为谱覆盖映射。 h在点 s 上的纤维同构于与覆盖 π相关联的Prym簇 Prym(C_s/C)。该对应由下式给出

$$L \to \pi_* L.$$

注意， $\pi_* L$ 是一个秩为 2 的向量丛，其上具有 $\pi_*(\mathcal{O}_{C_s})$-模结构。 $\pi_* L$ 上的$\pi_*(\mathcal{O}_{C_s})$-模结构给出一个态射 ϕ: $\pi_L \to K \otimes \pi_* L$，使得 det$(\phi) = s$。 $\pi_* L =$ 的次数为 Nm(L)的次数 $\otimes K^{-1}$，其中 Nm： $J(C_s) \to J(C)$是与 π相关联的雅可比簇之间的范数映射。

注记 5.1. 若 $E \in U$，则 ι在余切空间 $T^*_E\mathcal{M}_C(\delta)$上给出一个对合，且$\iota$–不动点集是 U 在 E [22]处的余切空间。

命题 5.2. 设 δ 是 C上的平凡线丛。那么 T^*U 是一个完全可积哈密顿系统。

证明. 注意到， K， C 的典范丛是 ι–不变的。因此， ι 作用于 $H^0(K_C^2)$。令$W := H^0(K_C^2)^\iota$为其不动点集。还要注意，若 $E \in U$且 $v \in T^*_E\mathcal{M}_C^s(\delta)$ 是一个 ι-不变的余切向量，则 $h(E, v) \in W$。由注记 5.1， $T^*_E U$， $E \in U$同构于 ι–不动点集 $T^*_E\mathcal{M}_C^s(\delta)^\iota$。因此，5.1 中的态射 h诱导出映射 h: $T^*U \to W$。

注意， T^*U是一个辛流形，在 $T^*\mathcal{M}_C^s(\delta)$上带有诱导的辛结构。由于 $T^*\mathcal{M}_C^s(\delta)$是一个完全可积哈密顿系统，且 Hitchin 映射是动量映射，因此存在 $H^0(C, K^2)$的一组基，它给出了$T^*\mathcal{M}_C^s(\delta)$上的一组泊松对易函数，且这些函数一般而言彼此独立。因此，存在 W的一组基，它给出了 T^*U 上的泊松对易函数，其中采用T^*U上的诱导泊松结构。基中函数的一般非退化性可由以下事实得出：h： $T^*U \to W$是满射，且 T^*U和 W具有正确的维数。

□

命题 5.3. h： $T^*U \to W$ 的一般纤维同构于阿贝尔簇的一个开子集。

证明。令 s 为 W中的一般元素。令 C_s 为与 s相关联的谱曲线。容易看出， C_s 的亏格为 $4g - 3$。在 C_s 上有两个对合，其中一个改变覆盖的层，记为 τ；另一个是 C 上双曲 involution 的提升（非规范的），记为 η。于是，我们得到由 $\tau \circ \eta$给出的自由 $\mathbb{Z}_2$ 作用。

~ ~商丛 $\tilde{C}_s := C_s/(\tau \circ \eta)$ 是一个亏格为 $2g - 1$ 的曲线。令 ψ: $C_s \to \tilde{C}_s$为商映射。则 ψ是非分歧的。因此，根据 [18, 命题 3.3]，有 $\psi^*(J_{\tilde{C}_s}) \simeq J_{C_s}^{\tau\circ\eta}$，其中 J_C表示该曲线的雅可比簇。另一方面，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} C_s & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_s & \longrightarrow & C \end{array} \tag{5.2}$$

其中，竖直映射分别为 $\tau\circ\eta$ 和 ι，水平映射为谱覆盖映射 π。

注意，若 $\xi\in J_{C_s}^{\tau\circ\eta}$，则由交换图 5.2 可知，Nm($\xi$) 是 ι-不动的。由于 J_C 中只有有限多个 $\iota-$不动点，且 $J_{C_s}^{\tau\circ\eta}$ 是连通的，因此 Nm($J_{C_s}^{\tau\circ\eta}$) 为常数。于是 $J_{C_s}^{\tau\circ\eta}\subset$ Prym(C_s/C)。令 $\xi\in J($ $\tilde{C}_s$)，则 ($\psi^*\xi$) 是 ($\tau\circ\eta$)–不动的。因此 $(\tau\circ\eta)_*\psi^*\xi=\psi^*\xi$。现在，由交换图 5.2 可得 $\iota_*(\pi_*(\psi^*\xi))$ $=\pi_*(\tau\circ\eta)_*(\psi^*\xi)$。又由于 $(\tau\circ\eta)_*(\psi^*\xi)=\psi^*\xi$，我们有 $\iota_*(\pi_*(\psi^*\xi))=\pi_*(\psi^*\xi)$。因此，$\pi_*($ $\psi^*\xi$) 是 C 上一个 ι-不变的秩 2 向量丛，且对一般的 ξ，$\pi_*(\psi^*\xi)$ 是稳定的。于是命题由以下观察得出。□

观察 O(1):
设 s 是 ι–的一个 K^2 固定截面，且 $\pi:C_s\to C$ 是 C的相应谱覆盖。则$h^{-1}(s)$ 同构于 $P:=$ Prym(C_s/C)。我们还有遗忘映射 $\pi_*:\ P\to\mathcal{M}_C^s(\delta)\tilde{}$，已知它是有限的。设 $P:=P\cap T^*\mathcal{M}_C^s$ (δ)。注意到 U在 $\mathcal{M}_C^s(\delta)$ 中是闭的，因此$\pi_*^{-1}(U)$ 在 $\tilde{P}$ 中是闭的。

˜假设存在一个维数为 $=\dim(U)$ 的闭子集 $A\subset P$，使得 $\pi_*(A)$ 与 U 在一个开集中相交。那么 $A=\pi_*^{-1}(U)$。
注意，$h^{-1}(s)\cap T^*U\subset\pi_*^{-1}(U)$。根据命题 5.2，$\dim(h^{-1}(s)\cap T^*U)=\dim(U)=\dim(\pi_*^{-1}(U)$。因此 $\pi_*^{-1}(U)=A=h^{-1}(s)\cap T^*U$。所以，若 $\xi\in A$，则 Higgs 场$\phi:\ \pi_*\xi\to\pi_*\xi\otimes K$ 是 ι–固定的。

由命题 5.2 和 5.3，我们得到以下定理。

定理 5.4. *T^*U 是代数完全可积系统。*

我们来考虑互素情形。

命题 5.5. 设 $\delta=L_\omega$。设 $W(\omega)$ 为 W 中由在 ω 处消失的截面组成的子空间。则 $h^{-1}(W(\omega)$ $\cap T^*U=T^*U$。

证明。考虑一个一般的 $\iota-$ 固定截面 s，它在 ω 处消失。由于 K^2 的 $\iota-$ 固定截面是次数为 $2g-2$ 的线丛在 $\mathbb{P}^1$ 上的截面的拉回，s 在 ω 处以重数 2 消失。因此，谱曲线 C_s 在 x 处有一个节点，故其是奇异的，其中 $x=\pi^{-1}(\omega)$。设 $\nu:C_s^\nu\to C_s$ 为 C_s 的正规化。于是我们得到以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} C_s^\nu & \xrightarrow{\nu} & C_s \\ & \searrow^{\pi^\nu} & \downarrow\pi \\ & & C. \end{array}$$

设 $\nu^{-1}(x)=\{x_1,x_2\}$，并设 $\nu^*:J_{C_s}\to J_{C_s^\nu}$ 为拉回映射。事实上，拉回映射 ν^* 诱导了一个从 Prym(C_s/C) $\to$ 到 Prym(C_c^ν/C) 的映射。
令 τ 为 C_s^ν 上交换两张片的对合。另有一个对合 η，位于 C_s^ν 中，是双曲 involution 的一个提升（非规范的）。于是，对合 $\tau\circ\eta$ 有两个不动点，即 x_1 和 x_2。随后，$\tau\circ\eta$ 还在 C_s 上诱导出一个对合 σ，使得下列图交换:

$$\begin{array}{ccc} C_s^\nu & \xrightarrow{\pi^\nu} & C \\ {\scriptstyle \tau\circ\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ C_s^\nu & \xrightarrow{\pi^\nu} & C \end{array} \tag{5.3}$$

$$\begin{array}{ccccc} C_s^\nu & \xrightarrow{\nu} & C_s & \xrightarrow{\pi} & C \\ {\scriptstyle \tau\circ\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ C_s^\nu & \xrightarrow{\nu} & C_s & \xrightarrow{\pi} & C. \end{array} \tag{5.4}$$

Let

$$f : C_s^\nu \to \tilde{C}_s^\nu = C_s^\nu/(\tau \circ \eta)$$

and

$$g : C_s \to \tilde{C}_s = C_s/(\sigma)$$

为商映射。于是我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} C_s^\nu & \xrightarrow{\nu} & C_s \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \tilde{C}_s^\nu & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & \tilde{C}_s \end{array} \tag{5.5}$$

根据 [18, 命题 3.1], $J^{\tau\circ\eta}_{C_c^\nu} = f^*(J_{\tilde{C}_s^\nu}) + P[2]$, 其中 $P[2]$ 表示~Prym(C_s^ν/C_s^ν)中的二阶元素。由于 f 在两点处分歧, 再由 [18, P.11], 可得 $P[2] = f^*J_{\tilde{C}_s^\nu}[2]$。因此 $J^{\tau\circ\eta}_{C_c^\nu} = f^*(J_{\tilde{C}_s^\nu})$。类似地, $J^\sigma_{C_s} = g^*(J_{\tilde{C}_s})$, 它们分别包含于 Prym$(C_s^\nu/C)$ 和 Prym(C_s/C) 中。由交换图 5.5 可得 $f^*\tilde{\nu}^*(J_{\tilde{C}_s}) = \nu^*g^*(J_{\tilde{C}_s})$。设 $A := \{\xi \in g^*(J_{\tilde{C}_s}),$ 使得 $\pi_*\xi$ 稳定 $\}$。那么 A 是一个非空开子集。注意, $A = 2g-1 =$的维数为 dim(U), 其中 U中的丛的行列式是平凡的。因此, 根据观察 O (1), 可得 $A = h^{-1} \cap T^*U$。

令 $L \in J^{\tau\circ\eta}_{C_s^\nu}$ 和 $\xi \in (\nu^*)^{-1}(L)$。则有正合列

$$0 \to \xi \to \nu_*\nu^*\xi \to \mathbb{C}_x \to 0.$$

取直接像后, 我们得到,

$$0 \to \pi_*\xi \to \pi_*(\nu_*\nu^*\xi) \to \mathbb{C}_\omega \to 0.$$

由于 $\pi\circ\nu = \pi^\nu, \pi_*(\nu_*\nu^*\xi) = \pi_*^\nu L$, 从而 det$(\pi_*\xi) =det(\pi_*^\nu L)\otimes {L_\omega}^{-1}$。由于与 ξ相关联的 Higgs 场是 ι–固定的, 与 L 相关联的 Higgs 场也同样是 ι–固定的。因此, 如果 $\pi_*^\nu L)$ 是稳定的, 那么它在 T^*U 中给出一个点, 其中 U 中丛的行列式为 L_ω。 $J^{\tau\circ\eta}_{C_s^\nu}$ 的维数是 $2g-2$; 对于一般元素 $L \in J^{\tau\circ\eta}_{C_s^\nu}$, 其为稳定的, 我们有 $\pi_*^{-1}(U) = h^{-1}(s) \cap T^*U$。令 $W(\omega)$ 为 W 的子空间, 其中包含在 ω 处消失的截面。于是, $h^{-1}(W(\omega)) \cap T^*U$ 是 T^*U 的闭子集, 并且与 T^*U 具有相同的维数, $h^{-1}(W(\omega)) \cap T^*U = T^*U$。□

命题 5 **.6.** 设 $\delta = L_\omega$。那么 T^*U 仍然是一个代数完全可积系统 .

证明。 根据命题 5.5，将 Hitchin映射限制在 T^*U 上，得到映射 $h\colon T^*U \to W(\omega)$。注意， U 与 $W(\omega)$ 维数相同，且 h是满射。因此，与平凡行列式的情形一样，我们有 T^*U 是一个完全可积哈密顿系统。由命题 5.5 的证明可知，对于一般元素 $s \in W(\omega)$，纤维 $h^{-1}(s)$ 同构于阿贝尔簇的一个开子集。因此， T^*U 是一个代数完全可积系统。□

定理5.7。 设 δ 是 C 上的平凡线丛。若存在 U 的光滑紧化 X，使得 $X\setminus U$ 的余维至少为 2，则 T^*X 是代数完全可积系统。

证明。 由于 U 同构于 X 的一个开子集， T^*U 也同构于 T^*X 的一个开子集。由于 $X \setminus U$ 的余维至少为 2， $T^*X \setminus T^*U$ 的余维也至少为 2。因此，在命题 5.2 的证明中定义 h 的函数可延拓到 T^*X ，并且这些函数彼此泊松对易且在一般位置独立。根据命题 5.3，映射 h 的一般纤维同构于某个阿贝尔簇的一个开子集。因此， T^*X 是代数完全可积系统。□

注5.8。 我觉得， U 总是会有一个光滑紧化 X ，满足前述定理中的性质，其中 X 同构于 $\mathbb{P}^{2g+1}$中的两个光滑二次超曲面的交。

定理5.9。 若 $\delta = L_\omega$，则 U 同构于 $\mathbb{P}^{2g}$中两个光滑二次超曲面的交内$(g-2)$–平面的簇。特别地，其维数为 $2g-2$。

证明。 设 $\xi = L_\omega^g$ 是 C上次数为 g 的线丛。设 E 是行列式固定为 $\delta = L_\omega$的稳定向量丛。设 $E_\xi := E \otimes \xi$。设 $V := \sum \det(E_\xi)\omega$，其中求和遍及魏尔斯特拉斯点 $\omega \in C$。于是，根据 [19]， $\mathcal{M}_C^s(\delta)$同构于 $\mathbb{P}^{2g+1} = \mathbb{P}(V)$中两个光滑二次超曲面的交内$(g-2)$–平面的簇。

注意，双曲 involution 在 L_ω 的 ω 处的纤维上作用为 –Id。这在向量空间 V 上诱导一个作用，使对应于 ω 处纤维的坐标变号。因此，该作用的不动点集是 $\mathbb{P}(V)$ 中的一个超平面 H。由于 $\mathcal{M}_C^s(\delta)$ 同构于 X 中的 $(g-2)$– 平面，故 U 同构于 $X \cap H$ 中的 $(g-2)$– 平面。

□

设 $\mathbb{P}^{2g}$ 中的 X 是两个光滑二次超曲面的交。设 X 中的 $(g-2)$– 平面所成的簇为 $F_{g-2}(X)$。已知若 $g \geq 3$，则 $F_{g-2}(X)$ 是一个 Picard数为一的射影 Fano 流形 [4,（命题 3.1]）。于是我们得到以下定理:

定理 5.10. 射影 *Fano* 流形 $F_{g-2}(X)$ 的余切丛是代数完全可积系统；若 $g \geq 3$ ，则 $F_{g-2}(X)$ 的任意非常值自态射都是自同构。

证明。 注意， $F_{g-2}(X)$ 与 U 同构。根据命题 5.3， T^*U 是代数完全可积系统，由此得出定理。□

注 5.11。 注意，若 $g = 2$，则 $F_0(X)$ 是 $\mathbb{P}^4$ 中两个二次曲面的交。因此，定理 *5.10* 为 *Kim* 和 *Lee* 的定理提供了另一种证明。 [15]

致谢： 我谨感谢 Suratno Basu 博士和 A. J Parameswaran 教授进行的许多有益讨论、评论和建议。同时，我也感谢 A. Beauville 教授指出文章上一版本中的错误，并感谢其提出的许多重要讨论和建议。

参考文献

[1] Beauville, A.：《超曲面的自同态及其他流形》，Intern. Math. Res. Notices 2001，第 1 期，53–58。[2] Beauville, Arnaud；Narasimhan, M. S.；Ramanan, S.《谱曲线与广义theta除子》。J. Reine Angew. Math. 398（1989），169–179。[3] A. Beauville，A. Etesse，A. Höring，J. Liu，C. Voisin。《两个二次曲面的交上的对称张量与拉格朗日纤维化》，https://arxiv.org/pdf/2304.10919.pdf，989–1004。[4] O. Debarre 和 L. Manivel，《关于包含于一个完全交中的线性空间的簇》，Math. Ann. 312（1998），549–574。[5] Hwang, J.-M. 和 Mok, N.：《映到Picard数为 1 且具有法丛平凡的有理曲线的 Fano 流形上的有限态射》，J. Alg. Geom. 12（2003），627–651。[6] Paranjape, K. H. 和 Srinivas, V.：《齐性空间的自映射》，Invent. Math. 98（1989），425–444。[7] Kollár, J.：《代数簇上的有理曲线》，Erg. d. Math. 3 Folge 32，Springer Verlag，1996。[8] R. Donagi，T. Pantev，《几何朗兰兹与非阿贝尔霍奇理论》，Surveys in differential geometry，第 XIII 卷。几何、分析与代数几何：微分几何杂志创刊四十周年，85–116，International Press，Somerville，MA，2009。[9] S. Pal，《非非常稳定丛的轨迹及其几何》，Bulletin des Sciences Mathématiques 141（2017），747–765。[10] Pal, Sarbeswar；Pauly, Christian：《秩2向量丛模空间的摆动除子》。Adv. Geom. 21（2021），第 4 期，473–482。[11] Pal, Sarbeswar：《关于 Drinfeld猜想》，预印本，https://arxiv.org/pdf/2202.11874.pdf。[12] Hwang, Jun-Muk；Ramanan, S.：《Hecke曲线与Hitchin判别式》。Ann. Sci. École Norm. Sup.（4）37（2004），第 5 期，801–817。[13] Hwang, Jun-Muk：《Fano 流形上的极小有理曲线的几何》。School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry（Trieste，2000），335–393，ICTP Lect. Notes，6，Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys.，Trieste，2001。[14] Hwang, Jun-Muk；Nakayama, Noboru：《关于Picard数为一的 Fano 流形的自同态》。Pure Appl. Math. Q. 7（2011），第 4 期，专刊：纪念 Eckart Viehweg，1407–1426。[15] Hosung Kim，Yongnam Lee：《次数为 4 的 del Pezzo曲面的余切丛上的拉格朗日纤维化结构》。https://arxiv.org/pdf/2210.01317.pdf，Ann. 331（2005），第 4 期，925–937。[16] Kouvidakis, A. 和 Pantev, T.：《半稳定丛模空间的自同构群》。Math. Annalen 302（1995），225–268。[17] abx（https://mathoverflow.net/users/40297/abx），《光滑簇上有限群作用的不动点分支的光滑性》，URL（版本：2014 06 10 171529 - -）：[18] https://mathoverflow.net/q/ Recillas, Sevín；Rodríguez, Rubí E.《Prym簇与四重覆盖》，https://arxiv.org/pdf/math/0303155.pdf[19] U.V. Desale，S. Ramanan，《超椭圆曲线上秩 2 向量丛的分类》，Invent. Math. 38（1976/1977），161–185。Wiley and Sons Inc.，纽约，1994 年，1978 年原版的重印本。[20] Alan Mi hael Nadel。《Picard数为一的 Fano 簇的次数有界性》。J. Amer. Math. So.，4（4）：681–692，1991。[21] Feng Shao，Guolei Zhong。《具有较大 Fano指标的 Fano 流形上有限态射的有界性》。https://arxiv.org/abs/ 2211 16380 。Jason DeVito（[22] https://math.stackexchange.com/users/331/jason-devito），《切空间到不动点流形及切空间的不动点集》，URL（版本：2017-10-28）：https://math.stackexchange.com/q/2494047

电子邮件地址：sarbeswar11@gmail.com, spal@iisertvm.ac.in

IISER Thiruvananthapuram, Maruthamala P. O., 喀拉拉邦 695551