热拉莫尔辐射

Evgenii Ievlev[1,2,*] 和 Michael R.R. Good[1,3,†]

[1] *Physics Department & Energetic Cosmos Laboratory, Nazarbayev University, Astana 010000, Qazaqstan* [2] *Theoretical and Nuclear Physics Department, al-Farabi Qazaq National University,Almaty 050040, Qazaqstan*

[3] *Leung Center for Cosmology and Particle Astrophysics, National Taiwan University, Taipei 10617, Taiwan*（日期：2023年3月8日）

研究发现，运动点电荷会产生热辐射。该计算完全基于经典视角，但表明它与量子场论有着直接联系。

PACS 编号：41.60.-m（运动电荷辐射），05.70.-a（热力学）

arXiv:2303.03676v1 [gr-qc] 7 Mar 2023

目录

I. 引言 1
A. 动机 B. 取向 C. 讨论 1 2 2

II. 拉莫尔加速度与温度 3
A. 拉莫尔平衡的前奏 B. 经典热谱推导 C. 两种温度计的故事 3 3 4

III. 电子-镜面联系 5
A. 运动点电荷的设定 B. 与运动镜的联系 C. 应用：特定轨迹 5 5 6

IV. 相关机制 7
A. 热极限 B. 红外极限 C. 全局极限 7 8 8

V. 结论 8

致谢 9

A. 电子-镜像对应关系的技术细节 9

B. 电子-镜像对应关系的更多实例 C. 傅里叶积分的计算 参考文献 9 10 10

I. 引言

A. 研究动机

热拉莫尔辐射是一种基本的经典现象，其中单个加速电子会按照普朗克曲线发射电磁辐射。因此，这一据我们所知此前尚未被推导出的过程，对于理解广泛的适用黑体辐射的物理现象至关重要：从单个运动点电荷的行为，到电阻器中不可避免的白噪声里的涨落-耗散的热性质。

热拉莫尔辐射的研究意义深远，例如有助于从量子角度理解加速度与温度之间的关系，并有望为黑洞蒸发的本质 [1]，运动镜 [2–4]以及加速度辐射 [5–7]带来新的实验见解。这一简单系统的研究具有重要的观测意义，也为研究界提供了令人振奋的契机，有助于增进对加速度与温度之间联系之根本起源的共同认识。

热辐射的黑体能谱在物理学史上意义重大，并非因为它本身引人注目，而是因为它对揭示经典理论的不足以及促成量子力学的建立产生了重大影响。然而，在经典理论足以解决问题的情况下，并不总是需要运用量子理论。对于普朗克辐射定律，我们认为，仅凭经典理论，就可以通过直接推导运动点电荷的热电磁辐射，深入认识加速度与温度之间的联系。我们的计算补充了 Boyer 对黑体谱的经典推导 [8]。不过，在本文中，我们不需要假设存在零点辐射、偶极振子或能量均分。我们的经典辐射结果展示了一个有趣的例子：即使是运动点电荷，也能像黑体一样辐射，而无需涉及任何离散或不连续过程。

* evgenii.ievlev@nu.edu.kz；因休假离岗，现任职于俄罗斯圣彼得堡 188300 国家研究中心“库尔恰托夫研究所”彼得堡核物理研究所

† michael.good@nu.edu.kz

B. 取向

我们将用经典方法计算加速电子辐射的温度 T、谱角分布 $\mathrm{d}I(\omega)/d\Omega$，以及光谱 $I(\omega) = \mathrm{d}E/\mathrm{d}\omega$。这些结果合在一起，以自然单位制表示（$\hbar = \mu_0 = c = 1$），电荷为 e：

$$T_{\text{electron}} = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2 s^2 \sin^2\theta}{16\pi^3(1 - s\cos\theta)^2} \frac{2\pi\omega/\kappa}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1}, \tag{2}$$

$$I(\omega) = \frac{e^2}{2\pi^2}\left(\frac{\eta}{s} - 1\right)\frac{2\pi\omega/\kappa}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1}. \tag{3}$$

这里，$\kappa > 0$ 是定义电子轨迹的加速度参数；它并非固有加速度（稍后会进一步讨论）。电子的最终速度为

$s < 1$ ω $0 <$ ^{-1}s，

$s < 1$ ω $0 <$ ^{-1}s 是光的频率，而 $\eta = \tanh$是电子的最终快度。极角为$0 \le \theta \le \pi$；电子沿径向$\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向做直线运动。需要注意的是，在这些单位制中，$e^2 = 4\pi\alpha$ 其中 α 是精细结构常数。

C. 讨论

已有多项研究探讨了加速度与温度之间的经典联系；其中大多数研究涉及固有加速度恒定的轨迹。例如，Cozzella 等人 [9]声称，观测到经典拉莫尔辐射是量子 Davies-Fulling-Unruh 效应的信号，这表明可以通过经典计算验证量子效应。他们采用一个匀加速电荷，并认为 Unruh 热浴被编码在 [10] 加速电荷发出的拉莫尔辐射中。

Leonhardt 等人 [11] 构建了一种水波模型，其中容器边界充当镜子，从而揭示了 Unruh效应的一种经典概念：噪声在时空中的相关性。在该模型中，他们用经典噪声的强度替代$\hbar$，并用参与该效应的波速替代 c。他们认为，采用非均匀加速轨迹有助于将这一概念拓展到量子领域。

最近，Hegelich 等人 [12] 通过考虑以点状电子替代探测器，将 Davies-Fulling-Unruh 温度的模型探测器与实验联系起来。由于电子没有内部自由度，这个均匀加速的“探测器”以一种意想不到的方式发生热化：加速度横向平面内的涨落被放大为辐射粒子。

事实上，在考虑具有足够热化时间且在无内部结构极限下的加速探测器时，[10]，Davies-Fulling-Unruh 功率会退化为加速电子的经典拉莫尔功率公式，[13]；另请参见《多拍瓦物理优先事项》（MP3）研讨会报告 [14]。这一结果尤其引人联想，将拉莫尔辐射与 Davies-Fulling-Unruh 效应联系起来。

在 Gregori 等人 [15] 于 MP3 研讨会上的报告 [14]，的扩展版本中，作者强调，Davies-Fulling-Unruh 效应是一种非常普遍的过程，与所有加速物体相关，而不论是否存在事件视界；这也支持了研究无视界轨迹和渐近惯性轨迹的重要性。特别是，Gregori 等人强调，要证实 Unruh效应，需要建立一个实验室加速度并非常量的框架。这正是我们对具有非均匀固有加速度的电子所采用的方法。

此外，Gregori 等人 [15] 采用启发式推导来说明 Unruh效应，其实现依赖于量子离散性。他们强调将电子用作不具有内部结构的探测器，并特别关注如何定义和记录状态变化。具体而言，他们指出，这个问题很少得到讨论；而在涉及加速运动的点电荷时，区分 Unruh效应与其他经典和量子辐射过程的问题颇具争议。我们的经典方法无需离散能级，便能直面这些重要问题。

其他人也提出了类似观点；例如，Pauri 和 Vallisneri [17]认为，Unruh效应深深植根于经典层面，原本可以更早通过另一种途径预言，即借鉴经典电磁学中辐射的类比。Lin [18] 发现，点状电子的能量密度真空期望值与其经典自能量密度完全相同，这进一步推动了 Unruh效应的经典对应。

除了 Boyer [19] 和 Cole [20]，发现的经典联系——他们在经典理论中（包括经典零点辐射）讨论了加速度的热效应——之外，研究非均匀加速运动也有充分的理由。Boyer 发现，在经典电磁情形下，观察者 [21]，在经典电磁零点辐射中经历匀加速时，检测到的场关联函数对应的谱不同于普朗克谱，这一结果看起来令人沮丧。

同样，直接假设固有匀加速会产生非普朗克谱，这也令本文作者感到困惑；例如 [22]。我们认为，恒定固有加速度运动的电荷不会发出热辐射，这一事实凸显了研究其他轨迹及其与普朗克谱潜在联系的重要性。

上述运动镜模型非常适用于非匀速运动和各种应用。例如，近期运动镜已被用于研究有限尺寸 [23, 24] 以及建模纠缠

纠缠 [25, 26]。通过将这一简单的概念类比应用于研究电子发出的辐射，我们建立了电子与镜子之间的联系。

Ford-Vilenkin[27] 或许最早通过辐射反作用发现了这种对应关系存在的早期线索，而 Nikishov-Ritus [28] 则对其进行了充分确立。Ritus [29–32]进一步发展了 Bogolyubov-流关联。Zhakenuly 等人 [33]推导出了与拉莫尔功率的对应关系。我们在此发展的关联及方法具有足够的普适性，可应用于任何辐射能量有限的可积经典轨迹；同时也足够精确，能够直接计算给定电子加速度对应的可积谱。我们明确进行了这一计算，并证明该方法具有一致性。在这一类比中，电子被视为运动镜，与将黑洞视为运动镜的做法类似，例如史瓦西 [34]、Reissner–Nordstr¨om [35]，和克尔 [36]，黑洞；不过其加速度有限，即渐近惯性由固有加速度 $\mathcal{A} \to 0$表征。我们重点研究的特定解表现得如同一种遗迹，Wilczek [37]曾富有先见地描述过这种遗迹。本文所揭示的普适性指出了一种此前未知的电子热加速度辐射光谱，有助于以精确应用的方式建立加速度、引力与热力学之间的联系。

研究单通道普朗克曲线（方程（3））是很有意义的。它之所以重要，是因为其基本热辐射与约翰逊—奈奎斯特（白）噪声密切相关 [38]。热电阻器会沿其单一模式产生电磁波，并沿传输线在一个空间维度上传播；这与热物体在自由空间中各向同性地产生电磁波如出一辙，参见例如 [39]。电阻器产生的一维白噪声功率，等于天线指向同温度三维黑体时接收到的功率 [40]。除了基础热力学之外，白噪声还应用于应用电子学、计量学、材料科学、信号处理和电信等领域。例如，在微波光子学中，单通道普朗克曲线为理解和减轻热噪声对电子系统的影响提供了理论框架 [41]；尤其是在高频或低温条件下，量子效应的影响更为显著。

II. 拉莫尔加速度与温度

A. 拉莫尔平衡的前奏

拉莫尔 [42]发现了加速运动的点电荷所辐射的总功率的非相对论公式。用国际单位制表示为 [43]，

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}a^2 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}a^2, \tag{4}$$

其中，真空磁导率 μ_0 和真空介电常数 ϵ_0 与光速的关系为 $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$。这里，e 是电荷，$a = \dot{v}$ 是非相对论加速度。

在低速情况下，对于具有渐近惯性的有限运动，辐射出的总能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} P\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

在平衡状态下，均匀加速点电荷可能会被认为以恒定功率进行热辐射。然而，可以看出，永恒的恒定加速度不会产生全局有限能量。

最近，有研究表明，某种具有逆速度 v、末速度 s 和自由参数 κ （单位为加速度）的相对论轨迹 [44]

$$\frac{1}{v} = \frac{c}{\kappa z} + \frac{1}{s}, \tag{6}$$

辐射出的总能量有限，为 [45]，

$$E = \frac{\mu_0 e^2 \kappa}{24\pi}\left(\frac{\tanh^{-1} s/c}{s/c} - 1\right), \tag{7}$$

与有限时段内的恒定功率 [46]，一致

$$\bar{P}_c = \frac{\mu_0 e^2 \kappa^2}{48\pi c}. \tag{8}$$

相应地，这种平衡发射与均匀的局部[1] 加速度 [49]，

$$\bar{\kappa}(u) = \frac{v''(u)}{v'(u)} \to \kappa, \tag{9}$$

其中，$v(u)$ 是超前轨迹，即 $v = t + r$；使用光锥坐标，以迟滞时间 $u = t - r$ 表示。在下一节中，我们将证明，该轨迹在整个运动过程中都会发射热辐射谱。

B. 经典热谱推导

对于运动点电荷发出的辐射，可以得到经典谱，并证明其呈现普朗克分布。该计算将通过首先计算角分布 $\mathrm{d}I(\omega)/\,\mathrm{d}\Omega \equiv \mathrm{d}^2E/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega$，得到谱 $I(\omega) = \mathrm{d}E/\mathrm{d}\omega$ 。

为清楚起见，本文采用国际单位制，并从运动点电荷的一般辐射谱开始，

[1] 这也称为“剥离函数”，例如参见 [47, 48]。我们将其称为剥离加速度，简称“剥离”。

（参见 Zangwill 的国际单位制公式 23.89，第 (911) 页 [50] 或 Jackson 的高斯单位制公式 (14.67)，第 (701) 页 [51]）：

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{16\pi^3 c}\left|\hat{\boldsymbol{n}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \boldsymbol{\beta}(t) e^{i\phi}\right|^2. \tag{10}$$

其中 $\phi = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}(t)$，而 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是 $\boldsymbol{k}$ 的方向。轨迹函数为

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{sc}{\kappa} W(e^{\kappa t/c})\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{11}$$

其中 W 是 Lambert乘积对数，而 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是运动方向上的单位向量（我们选择它沿着 z轴）。有量纲量 $0 < s < c$是电子的最终速度。利用 $\boldsymbol{k} = (\omega/c)\hat{\boldsymbol{n}}$ 并简化叉积，

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{16\pi^3 c}\left|\sin\theta \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \dot{z}(t) e^{i\phi}\right|^2, \tag{12}$$

其中 $\phi = \omega(t - [z(t)/c]\cos\theta)$。对轨迹求逆以消去乘积对数，得到

$$t(z) = \frac{c}{\kappa}\ln\left(\frac{\kappa z}{sc}\right) + \frac{z}{s}, \tag{13}$$

对 z 而非 t 进行积分，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{16\pi^3 c}\left|\sin\theta \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z e^{i\phi(z)}\right|^2, \tag{14}$$

with

$$e^{i\phi(z)} = \left(\frac{\kappa z}{cs}\right)^{\frac{ic\omega}{\kappa}} e^{i\frac{z\omega}{s}\left(1-\frac{s}{c}\cos\theta\right)}. \tag{15}$$

这里的积分在附录 C中计算，结果为

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 c e^2 s^2 \sin^2\theta}{16\pi^3(c - s\cos\theta)^2}\frac{2\pi c\omega/\kappa}{e^{2\pi c\omega/\kappa} - 1}. \tag{16}$$

这是方程（2）的国际单位制版本。方程（16）的分布球形三维图见图 1 。对 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ 积分，

$$I(\omega) = \frac{\mu_0 c e^2}{2\pi^2}\left(\frac{c\eta}{s} - 1\right)\frac{2\pi c\omega/\kappa}{e^{2\pi c\omega/\kappa} - 1}. \tag{17}$$

这恰好是国际单位制下的方程（3。这里 $\eta = \tanh^{-1} s/c$。这是方程（3）的国际单位制版本。黑体曲线的图见图 2 $I(\omega)$，即方程（17）。

谱密度方程（17）与 1+1维黑体的普朗克分布非常相似。事实上，方程（17）对应于某一温度下的辐射。温度公式列于方程（1）中，更多详情见第 IIC 节。

我们强调，这里的推导完全是经典的，而谱密度方程（17）表明，这种辐射确实具有热性质 [8, 39]。这意味着我们观察到了由加速度导致的真实温度效应，即 Davies-Fulling-Unruh 效应，而无需诉诸量子理论。

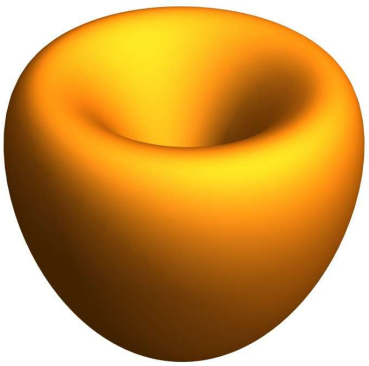

图 1。方程（16）的图像，即分布 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$。这里采用单位电荷、自然单位制以及 $\omega = \kappa = 1$。电子的最终速度为 $s = 0.9$。谱分布呈直线分配，在前向方向附近达到峰值，但峰值并不恰好位于前向方向。

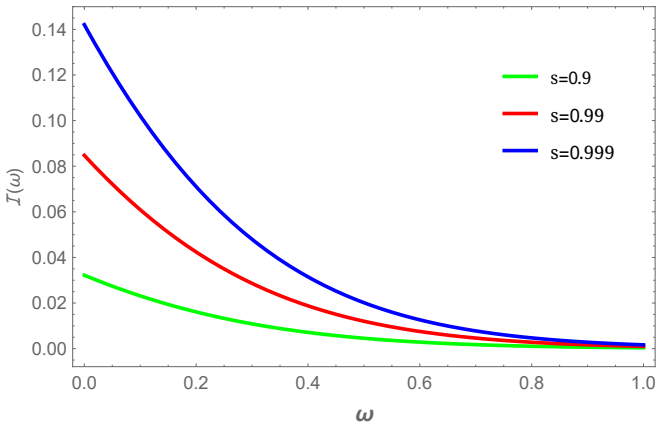

图 2。方程（17）的曲线图，即谱，$I(\omega)$。这里我们使用单位电荷、自然单位制和 $\kappa = 1$。电子的最终速度为 $s = 0.9$，$s = 0.99$，以及 $s = 0.999$，分别对应绿色、红色和蓝色。该图展示了峰值位于深红外颜色处的一维黑体辐射的形状，$\omega = 0$

C. 两个温度计的故事

接下来我们需要定义温度 T，使其符合方程（17）中的一维空间黑体普朗克分布，

$$I(\omega) \sim \frac{2\pi c\omega/\kappa}{e^{2\pi c\omega/\kappa} - 1}. \tag{18}$$

我们是否使用问题中预先存在的 [52], 经典尺度： $\mu_0 c e^2$?

$$\frac{2\pi c\omega}{\kappa} \overset{?}{\leftrightarrow} \frac{\mu_0 c e^2 \omega}{k_B T}. \tag{19}$$

或者，我们是否通过 $\hbar$ 引入一个额外的尺度，而它通常与量子理论相关?

$$\frac{2\pi c\omega}{\kappa} \overset{?}{\leftrightarrow} \frac{\hbar\omega}{k_B T}. \tag{20}$$

前者可称为斯托尼尺度[2] [53] 而后者是温度单位为开尔文的普朗克尺度。采用后者，即与普朗克常数相关的量子传统温度定义，式（20）表明，经典拉莫尔辐射就是量子 Davies-Fulling-Unruh 效应，其发射遵循普朗克分布，温度为:

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c k_B}. \tag{21}$$

注意 κ 是局部匀加速电子的加速度参数，其轨迹由方程（6）给出。常数 κ 的动力学含义是迟滞时间 $u \to \infty$ 下的高速 $s \to c$ 剥离 [54]的双重极限： $\kappa\left(u\right) = v''\left(u\right)/v'\left(u\right) = 2\mathcal{A}e^{\eta} = 2\,\mathrm{d}\eta\left(u\right)/\mathrm{d}u$，即

$$\lim_{u\to\infty}\lim_{s\to c}\bar{\kappa}(u) = \kappa. \tag{22}$$

这里， $\mathcal{A}(u)$ 是固有加速度， $\eta(u)$ 是快度，而 $\bar{\kappa}(u)$ 是剥离加速度 [47, 48]。

III. 电子-镜面联系

在本节中，我们将联系两个在本质上看似截然不同的系统。其中一个是沿某条直线轨迹运动的点电荷，位于3+1 闵可夫斯基时空中。另一个是在 1+1维空间中运动的镜子。结果表明，这两个系统中的辐射谱相同，这意味着二者之间存在着深层的内在联系。

A. 运动点电荷的设置

我们考虑一个四维电流为[3] 的点电荷（例如参见 Jackson 第 11 节。9 [51]）

$$j_\mu = (\rho, \boldsymbol{j}) \tag{23}$$

其电荷密度和流密度为

$$\rho = e\,\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(t))\,, \quad \boldsymbol{j} = e\,\boldsymbol{v}(t)\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(t))\,. \tag{24}$$

此外，我们将重点讨论沿 z 轴的直线运动情形，因此

$$j_x = j_y = 0\,, \tag{25}$$

在这种情况下，辐射能量谱密度的公式如下（参见式（10），另见 [51]中的式（14.70））：

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^2}{16\pi^3}\sin^2\theta\,|j_z(\omega, k_z)|^2\,, \tag{26}$$

其中 $k_z = \omega\cos\theta$（对于这种直线运动，能量分布不依赖于波矢的 k_x, k_y 分量）。总辐射能量通过对密度进行积分求得:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{tot}} &= \int_0^\infty d\omega \int d\Omega \frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{1}{16\pi^3}\int_0^\infty d\omega \int d\Omega\ \omega^2\sin^2\theta\,|j_z(\omega, k_z)|^2\,. \end{aligned} \tag{27}$$

B. 与运动镜的联系

现在考虑一个 1+1 维运动镜 [2–4]。我们取该镜子沿着上一小节中点电荷所遵循的相同轨迹运动。由于点电荷做直线运动，这是可行的。

1+1 设置可以大致描述如下，例如 [55]。考虑一个具有标准拉格朗日量的无质量标量场。在平凡的闵可夫斯基真空中，时空是均匀的，不存在辐射。然而，当引入运动镜（动态卡西米尔效应）后，由于此时存在非平凡的边界条件，真空受到扰动 [56]。镜子导致标量场量子的产生，而这些量子表现为辐射。镜子的总辐射能量由公式给出，例如 [57],

$$E^{\beta}_{\mathrm{tot}} = \int_0^\infty dp \int_0^\infty dq\ p\,|\beta_{pq}|^2\,, \tag{28}$$

其中 β_{pq} 是贝塔博戈留博夫系数 [58]; 频率模 q 对应入射平面波形式， p对应出射平面波形式，参见例如 [59]。这里，贝塔系数是完全反射镜 [33, 60, 61]两侧各自平方值的总和。

遵循 Nikishov-Ritus [28], ，我们希望将 $|\beta_{pq}|^2$与运动点电荷的某个特征量联系起来，另见 [29–32]。由于 $|\beta_{pq}|^2$ 对应于一个一维系统，我们可以预期， 3+1 系统中的相应量应是一个洛伦兹标量。我们由四维电流 j_μ 构造一个标量 $-j_\mu j^\mu = \boldsymbol{j}^2 - \rho^2$。在傅里叶空间中，我们考虑相应的量

$$|j_\mu(\omega, k_z)|^2 \equiv |\boldsymbol{j}(\omega, k_z)|^2 - |\rho(\omega, k_z)|^2\,. \tag{29}$$

---

[2] 若采用斯托尼尺度，式（19），则 α 其中精细结构常数为 $\hbar = \mu_0 c e^2/4\pi\alpha$，温度可写为

$$T = \frac{\mu_0 e^2\kappa}{2\pi k_B} = 2\alpha\frac{\hbar\kappa}{c k_B} \quad \to \quad T = 2\alpha\kappa.$$

表示自然单位制的箭头设定了 $\hbar = c = k_B = 1$。

[3] 从此处起，我们采用自然单位制，并令光速c、普朗克常数 $\hbar$、真空磁导率 μ_0 和玻尔兹曼常数 k_B 均为 1。在这些单位制中，真空介电常数 $\varepsilon_0 = 1$，而电子电荷是一个无量纲数 $e^2 = 4\pi\alpha \approx 0.092$。我们选用的时空度规符号为（+, −, −, −），与 Jackson 中的相同 [51]。

在式（29）中，ω 被视为傅里叶变换参数，可以取正值，也可以取负值。通常将物理频率 ω 视为正值，因为频率的符号没有物理意义。这也有其依据：计算总能量时，我们必须对所有频率积分，而同样可以只取分布的偶部分，仅对非负频率积分，参见 [51]第 14.5 节。

为了遵循这一约定，而不是 $|j_\mu(\omega,\ k_z)|^2$ ，我们应考虑以下和式

$$|j_\mu(\omega,k_z)|^2+|j_\mu(-\omega,k_z)|^2\,. \tag{30}$$

在本节中，我们将检验式（30）和$|\beta_{pq}|^2$ 是否确实彼此相关。事实上，它们彼此成正比。我们给出以下公式来描述这种对应关系：

$$\frac{|j_\mu(\omega,k_z)|^2+|j_\mu(-\omega,k_z)|^2}{(2\pi)^2e^2}=|\beta_{pq}|^2\,. \tag{31}$$

请注意，比例系数取决于傅里叶变换的约定。关于我们的约定，见下文式（38）。

为支持这一所提出的公式，我们将检验点粒子情形和运动镜情形下辐射能量的公式是否给出相同结果。我们将从总能量出发，见式（27）和式（28）。

事实证明，式（27）和式中的积分可通过积分变量（33）的变换相互转换。我们将通过变换式（28）中的积分来说明这一点。首先，让我们转到频率空间中的光锥坐标：

$$2p=\omega+k_z\,,\quad 2q=\omega-k_z, \tag{32}$$

雅可比为 $1/2$，并且我们有（注意积分上下限）

$$\begin{aligned}e^2E^\beta_{\rm tot}&=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\int_{-\omega}^{+\omega}\mathrm{d}k_z\frac{1}{2}\frac{\omega+k_z}{2}\frac{|j_\mu(\omega,k_z)|^2+|j_\mu(-\omega,k_z)|^2}{(2\pi)^2}\\&=\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\int_{-\omega}^{+\omega}\mathrm{d}k_z\omega(|j_\mu(\omega,k_z)|^2+|j_\mu(\omega,-k_z)|^2)\\&=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\int_{-\omega}^{+\omega}\mathrm{d}k_z\ \omega\ |j_\mu(\omega,k_z)|^2\,.\end{aligned} \tag{33}$$

在第二行中，我们用到了 $j_\mu(-\omega,\ k_z)\ =\ j_\mu(\omega,\ -k_z\ ^*,)$ 这源于坐标空间中的四维电流为实值。接下来，我们可以与点电荷公式（27）进行比较。在后一个方程中，只有 $|\boldsymbol{k}|=\omega$ 的波会对积分作出贡献。这有助于我们确定接下来的变量替换：在

在方程（33）中，我们根据 $\omega,\ k_z$ 将 $\omega,\ \theta$ 替换为 $k_z=|\boldsymbol{k}|\cos\theta=\omega\cos\theta$。雅可比为 $\omega\sin\theta$，因此有

$$\begin{aligned}e^2E^\beta_{\rm tot}&=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}(\cos\theta)\ \omega^2\ |j_\mu(\omega,\omega\cos\theta)|^2\\&=\frac{1}{16\pi^3}\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}\Omega\ \omega^2\ \sin^2\theta|j_z(\omega,\omega\cos\theta)|^2\,.\end{aligned} \tag{34}$$

此处我们使用了电荷守恒定律

$$\omega\rho(\omega,\boldsymbol{k})-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}(\omega,\boldsymbol{k})=0\,, \tag{35}$$

这与方程（25）结合起来，使我们能够将方程（29）中的洛伦兹标量表示为

$$|j_\mu|^2=\left(1-\frac{k_z^2}{\omega^2}\right)|j_z|^2=\sin^2\theta\ |j_z|^2\,. \tag{36}$$

正如我们所见，方程（34）的最后一行恰好就是点电荷的方程（27）中的公式，

$$E^{\rm pt}_{\rm tot}=e^2E^\beta_{\rm tot}\,. \tag{37}$$

此外，由于这一等式对任意直线轨迹都成立，因此能量之间以及能量密度之间都必须存在对应关系。这种对应关系可从我们刚才给出的推导中读出，见附录A。

C. 应用：特定轨迹

现在来看，在方程（13）所给的轨迹这一具体情形下，这种一般对应关系如何成立。我们采用以下傅里叶变换约定：

$$j_\mu(\omega,\boldsymbol{k})=\int\mathrm{d}^4x j_\mu(t,\boldsymbol{x})e^{-ik\cdot x}\,, \tag{38}$$

其中 $x_\mu=(t,\ \boldsymbol{r})$、$k_\mu=(\omega,\ \boldsymbol{k})$ 和 $k\cdot x=k_\mu x^\mu=\omega t-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$。

a. 傅里叶变换 首先来看电流的三维部分$\boldsymbol{j}$的傅里叶变换。利用狄拉克δ函数可以进行空间积分，得到

$$\boldsymbol{j}(\omega,\boldsymbol{k})=e\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}t\boldsymbol{v}(t)e^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}(t))}\,. \tag{39}$$

在我们的轨迹上，方程（13）

$$\begin{aligned}j_z(\omega,k_z)&=e\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i(\omega t-k_zz(t))}\\&=e\int_0^\infty\mathrm{d}ze^{-i(\omega t(z)-k_zz)}\,.\end{aligned} \tag{40}$$

注意第二行中的 dr 积分，以及对于这种直线轨迹，流不依赖于 k_x， k_y。将方程（13）中的轨迹代入，我们得到

$$j_z(\omega,k_z)=e\int_0^\infty \mathrm{d}z\left(\frac{\kappa z}{s}\right)^{-i\frac{\omega}{\kappa}} e^{-iz\left(\frac{\omega}{s}-k_z\right)}. \tag{41}$$

该积分在附录 C 中计算，结果为

$$j_z(\omega,k_z)=e\left(\frac{\kappa}{\omega-k_z s}\right)^{-i\frac{\omega}{\kappa}}\frac{se^{-i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{\omega-k_z s}\Gamma\left(1-i\frac{\omega}{\kappa}\right). \tag{42}$$

绝对值的平方很容易计算，另见公式（C7），

$$|j_z(\omega,k_z)|^2=\frac{2\pi s^2e^2}{(\omega-k_z s)^2}\frac{|\omega|/\kappa}{e^{\frac{2\pi|\omega|}{\kappa}}-1}. \tag{43}$$

该公式适用于 $|\omega|\geqslant|k_z|$（这是我们所关注的情形，参见上文的讨论）。

电荷密度的傅里叶变换可以类似地计算：

$$\rho(\omega,k_z)=e\left(\frac{\kappa}{\omega-k_z s}\right)^{-i\frac{\omega}{\kappa}}\frac{k_z se^{-i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{\omega(\omega-k_z s)}\Gamma\left(1-i\frac{\omega}{\kappa}\right). \tag{44}$$

绝对值为

$$|\rho(\omega,k_z)|^2=\frac{k_z^2}{\omega^2}\frac{2\pi s^2e^2}{(\omega-k_z s)^2}\frac{|\omega|/\kappa}{e^{\frac{2\pi|\omega|}{\kappa}}-1}. \tag{45}$$

注意，公式（42）和公式（44）满足公式（35）所示的电荷守恒定律，这是一个很好的检验。利用公式（43）和公式（45）中的傅里叶变换，我们可以写出标量公式（30）：

$$\frac{|j_\mu(\omega,k_z)|^2+|j_\mu(-\omega,k_z)|^2}{(2\pi)^2e^2}=\left(1-\frac{k_z^2}{\omega^2}\right)\frac{4\pi s^2(\omega^2+k_z^2s^2)}{(\omega^2-k_z^2s^2)^2}\frac{\omega/\kappa}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}}-1}. \tag{46}$$

请注意，在此公式中 $\omega>0$ 是物理频率。

b. 与镜子的联系 现在我们希望与沿 1+1运动的镜子建立联系。相应镜子 [45] 的贝塔 Bogolubov 系数为

$$|\beta_{pq}|^2=\frac{2s^2pq}{\pi\kappa(p+q)}\frac{a^{-2}+b^{-2}}{e^{2\pi(p+q)/\kappa}-1}, \tag{47}$$

其中 $a=p(1+s)+q(1-s)$，且 $b=p(1-s)+q(1+s)$。

容易验证，变量替换式（32）将此贝塔公式（47）转化为流的绝对值平方公式（46），从而证实了我们的通用公式（31）。通过显式积分，我们验证了总辐射能量相同，见公式（37）。我们还检查了附录A 中给出的算法是一致的。

我们还对另外几条轨迹明确检验了这种对应关系。两个重要示例——史瓦西和 Carlitz-Willey——在附录 B 中有所描述。

c. 能量-ζ函数 为了将点电荷与镜子联系起来，我们使用了上述光锥坐标，见公式（32）。然而，还有另一组同样有用的有趣坐标。具体而言，考虑新的变量 m、ζ 定义为

$$\begin{aligned}2p&=\omega(1+\cos\theta)=me^{\zeta},\\ 2q&=\omega(1-\cos\theta)=me^{-\zeta},\end{aligned} \tag{48}$$

这一变换也可以等价地表示为

$$\omega=p+q=m\cosh\zeta,\quad k_z=p-q=m\sinh\zeta \tag{49}$$

或者表示为

$$\zeta=-\ln\tan\frac{\theta}{2},\quad m=\omega\sin\theta. \tag{50}$$

这些变量并非新变量，参见例如 [31], ，但我们认为文献可能低估了它们的实用性。

通过这一坐标变换，可以得到一个解析的“中间”结果。辐射出的总能量可表示为

$$E=\int p\,|\beta_{pq}|^2\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q, \tag{51}$$

并利用 dpd$q=(m/2)dmd\zeta=(1/4)dm^2d\zeta$，我们可以使用 $\kappa=\mu_0=c=1$ 对 m 从 0 积分到 ∞，

$$E(\zeta)=\frac{s^2e^{\zeta}\mathrm{sech}^3\zeta}{48\pi}\frac{\left((1+s^2)\cosh(2\zeta)+1-s^2\right)}{\left((1-s^2)\cosh(2\zeta)+1+s^2\right)^2}, \tag{52}$$

然后对 ζ 积分，得到

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \tag{53}$$

从而得到式（60）。幸运的是， E（ζ）有解析结果，而例如E（p）、 E（m）或 E（q）则难以处理。图3展示了能量平台变平所体现的热辐射特征。

IV. 相关区间

A. 热极限

在自然单位制下，请注意，我们的一维黑体谱，即式（17），

$$I(\omega)=\frac{e^2}{2\pi^2}\left(\frac{\eta}{s}-1\right)\frac{2\pi\omega/\kappa}{e^{2\pi\omega/\kappa}-1}, \tag{54}$$

在频率 ω上完全呈现热特性。如何利用量子类比移动镜来理解这一点？或者，

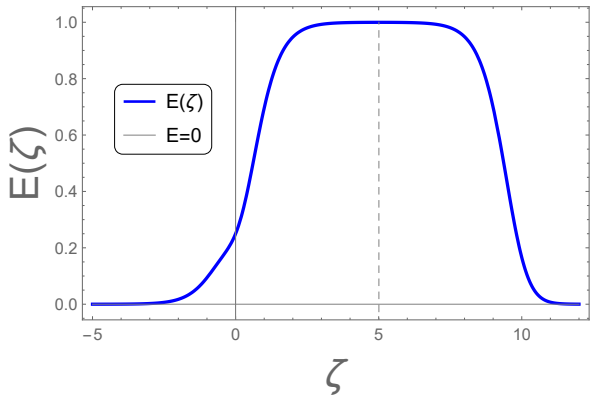

图 3。方程（52）的曲线图，显示镜子/电子发出的能量随 ζ 的变化，其中 $\kappa = 1$，最终速度为超相对论速度 $s = 0.999,999,994$。最终速度的选择使得平台的最大 $E_{\max} = 0.999$ 出现在约 $\zeta_0 = 5.00$；此处 $E(\zeta)$ 按 24π 缩放。该平台表明能量以恒定速率辐射，证实了与普朗克分布粒子相称的一段平衡辐射时期。

即使用模频率 p 和 q? 首先，我们考察式（47）在高速下的极限，

$$\lim_{s\to 1} |\beta_{pq}|^2 = \frac{p^2+q^2}{2\pi\kappa pq\left(e^{2\pi(p+q)/\kappa}-1\right)(p+q)}. \tag{55}$$

接下来，我们遵循霍金的做法 [1]，取方程（47）中他所谓的“高频极限”，即 $q \ll p$。对于小 $q = (\omega - k_z)/2$ 的最低阶，便可得到通常的热结果，例如富林的方程 1 [62]

$$|\beta_{pq}|^2 = \frac{1}{2\pi\kappa q}\frac{1}{e^{2\pi p/\kappa}-1}. \tag{56}$$

这个公式作为与永恒黑体辐射相关的热普朗克分布而广为人知，例如 Carlitz-Willey [54]或德西特镜子 [63]。它也出现在上述史瓦西[34], —Reissner–Nordstr¨om [35], 和克尔 [36]黑洞镜类比的晚期。因此，我们的结果证实了超相对论极限 $s \to 1$ 以及高频区域 $q \ll p$中的热辐射。

解释 我们可以从以下角度解释 3+1 电子。由式（2）可见，角分布在 $\theta = \cos^{-1}(s)$ 处达到峰值；在超相对论极限下，$s \to 1$ 大部分能量几乎沿前方小角度方向辐射出去$\theta \sim \sqrt{2(1-s)}$。

要得到辐射谱 $I(\omega)$，必须对角分布在整个立体角上进行积分。然而，在最终速度较高时，该积分在小角度 θ 处已基本饱和，因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\theta\sim 0} \sim I(\omega) \tag{57}$$

相差一个系数。

现在让我们回过头来看看镜子。用 ω 和 θ（见式（48））表示，条件 $q \ll p$ 就简化为 $\theta \ll 1$。因此，超相对论镜子对应于超相对论电子的前向辐射。由于$|\beta_{pq}|^2$ 与 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ 直接相关（见附录A0 b），式（57）告诉我们，$|\beta_{pq}|^2$ 在此极限下与 $I(\omega)$ 成正比，即给出热普朗克分布。

B. 红外极限

我们的电子会发射软粒子，它们具有较长的波长，无法探测其源的内部结构 [64]。谱 $I(\omega)$，式（3），是否与深红外极限一致?

在 $\omega \to 0$的深红外极限下，谱$I(\omega)$，式（17），用国际单位制表示为

$$I_{\text{infra}} = \frac{\mu_0 c e^2}{2\pi^2}\left(\frac{\tanh^{-1} s/c}{s/c} - 1\right), \tag{58}$$

与频率无关 ω。这与众所周知的与频率无关的深红外结果一致，并刻画了阶跃函数轨迹，参见例如 Zangwell 的问题 23.16、[50], Nikishov-Ritus 第 2 [28]，节或 Jackson 第 15.1A 节 [51]。

C. 全局极限

谱的总能量 $I(\omega)$ 预计是有限的。在全局极限下，考虑发射出的所有颜色，可以通过对式（$I(\omega)$）中的17）关于 ω进行积分，求得总能量，

$$E = \int_0^\infty I(\omega)\,\mathrm{d}\omega, \tag{59}$$

用国际单位制表示为，

$$E = \frac{\mu_0 e^2 \kappa}{24\pi}\left(\frac{\tanh^{-1}(s/c)}{s/c} - 1\right). \tag{60}$$

这是式（7），与对相对论拉莫尔功率按时间积分的结果一致 [46] 另见 [45]。这一总能量已得到实验验证；例如[65]，并且长期以来一直与β衰变相关联 [66]。它也是瞬时碰撞形式主义所得到的能量 [67, 68]。

V. 结论

经典计算揭示，运动点电荷能够发射完全呈热态的辐射。这一过程揭示，温度与加速度成正比。其与量子场论中 Davies-Fulling-Unruh 效应的相关性揭示了电子与运动镜之间的对应关系。

有望获得令人信服的实验验证。具体而言，未来有三条重要途径尤为突出：

•在辐射性自由中子β衰变过程中，电子所经历的极端加速度 [69], 为 RDKII 合作组实验[70]提供了一个理想系统，用于考察这一特定电子镜的轨迹，参见近期分析 [71]。

•更一般地，激光模拟黑洞蒸发（AnaBHEL）实验 [72] 表明，运动镜的相对论轨迹 [73] 是通过加速等离子体 [74]探测量子真空辐射谱物理的重要手段。

•运动镜启发度规，例如[75] 来自[76], 的度规，可支持实验研究，并可利用光学模拟系统，通过充满光纤的连续波光场脉冲提供高分辨率观测数据 [77]。

在理论方面，一个可能颇有意义的未来研究方向，是将上述方案应用于具有有限粒子数的非热渐近静止运动，例如 [78]。

致谢

作者感谢 V.Ritus，他在 95 岁高龄时慷慨地分享了几篇相关论文（应我们的请求）。我们感谢他对该领域的贡献，以及他愿意提供自己的知识和专长。部分资金来自纳扎尔巴耶夫大学的 FY2021-SGP-1-STMM教师发展竞争性研究资助项目，资助编号为 021220FD3951。

附录 A：电子-镜像对应关系的技术细节

在本附录中，我们介绍在 1+1 镜子与 3+1做直线运动的点电荷之间进行转换的两种算法。这些操作说明可以从第 IIIB 节所给出的推导中直接读出。

a. Recipe: from $|\beta_{pq}|^2$ to $I(\omega)$

1. 在镜子一侧，取 $|\beta_{pq}|^2$ 并代入 $p = \frac{\omega}{2}(1+\cos\theta)$, $q \equiv \frac{\omega}{2}(1-\cos\theta)$。

2. Integrate $\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}(\cos\theta)$.

3. 乘以 $e^2\omega^2/4$。结果为 $I(\omega)$——加速电子产生的辐射能量密度，即“谱”。

b. 计算步骤：从 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ 到 $|\beta_{pq}|^2$ 使用以下公式：

$$|\beta_{pq}|^2 = \frac{4\pi}{e^2\omega^2}\left[\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}(\omega,\cos\theta) + \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}(\omega,-\cos\theta)\right], \quad \text{(A1)}$$

其中 $p+q=\omega$ 和 $p-q=\omega\cos\theta$。

附录 B：电子-镜像对应关系的更多示例

在本附录中，我们再介绍两个该对应关系的示例：史瓦西轨迹和卡利茨-威利轨迹。这些示例与式（13）中的轨迹在性质上截然不同，因为此时电子会接近光速。（在镜子的情形中， 1+1 时空会形成视界。）

电子辐射通量在某些角度处会变得奇异。谱分布 $\mathrm{d}I(\omega)/\mathrm{d}\Omega$ 存在，但积分量 $I(\omega)$实际上发散。尽管如此，我们仍可以研究依赖于角度的谱分布。

我们发现，在远离红移极限下，$\mathrm{d}I(\omega)/\mathrm{d}\Omega$ 是热辐射，其温度由同一个式（1）给出。这意味着，位于电子后方的观察者将看到红移热辐射。

a. 史瓦西轨迹所谓的史瓦西镜，是 [34] 中研究的一种特殊运动镜。具有这种镜子的时空会在晚期形成视界。该系统与史瓦西黑洞直接相关，例如参见[37, 79, 80]。

此情形下镜子的轨迹可写成如下形式（晚期运动定义为沿 $+\hat{z}$ 方向）

$$t(z) = z - 4Me^{-z/2M}. \quad \text{(B1)}$$

对流式（40）进行傅里叶变换时，可换元为 $h = e^{-z/2M}$，然后应用附录 C中的结果。角功率分布由式（26）计算得出：

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega(1+\cos\theta)}{16\pi^2\kappa}\frac{1}{e^{\pi\omega(1-\cos\theta)/\kappa}-1}, \quad \text{(B2)}$$

其中 $\kappa = 1/4M$ （与“表面引力”相对应）。在远离红移极限 $\theta \sim \pi$ 下，分布式（B2）化为 1+1 普朗克分布。参数 κ 对应的温度表达式与式（1）完全相同。

附录 A 中的方法确实给出了施瓦西镜（镜子的两侧）的 betaBogoliubov 系数

$$|\beta_{pq}|^2 = \frac{1}{2\pi\kappa(p+q)^2}\left(\frac{q}{e^{2\pi p/\kappa}-1} + \frac{p}{e^{2\pi q/\kappa}-1}\right). \quad \text{(B3)}$$

有关该镜子的背景介绍，参见 [81]。

*b. Carlitz-Willey*轨迹 另一个值得关注的例子是 Carlitz-Willey 首先研究的轨迹 [49, 54],

$$z(t) = t + \frac{1}{\kappa} W\left(e^{-2\kappa t}\right) , \tag{B4}$$

其中 W 是 Lambert乘积对数，上述超越形式在 [82] 中引入，并在例如 [83–86]中进行了研究。晚期运动沿 $+\hat{z}$ 方向。

借助变量 $h = W(e^{-2\kappa t})$计算式（40中的傅里叶积分，详见附录C。由式（26）得到的角功率分布结果为

$$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega}{4\pi^2\kappa(1+\cos\theta)} \frac{1}{e^{\pi\omega(1-\cos\theta)/\kappa} - 1} . \tag{B5}$$

在远离红移极限 $\theta \sim \pi$ 下，分布式（B2）化简为 1+1 普朗克分布。温度用参数 κ 表示时，恰好与式（1）给出的表达式相同。

附录A 中的方法确实给出了 Carlitz-Willey镜像（两侧）的贝塔玻戈留波夫系数

$$|\beta_{pq}|^2 = \frac{1}{2\pi\kappa} \left(\frac{q^{-1}}{e^{\frac{2\pi p}{\kappa}} - 1} + \frac{p^{-1}}{e^{\frac{2\pi q}{\kappa}} - 1} \right) . \tag{B6}$$

附录C：傅里叶积分的计算

本节将推导本文所用傅里叶变换的一般公式,

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^\infty z^{i\alpha+\beta} e^{i\gamma z}\, \mathrm{d}z \tag{C1}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ 以及 $\alpha\cdot\gamma > 0$。对于复多值函数 $z^{i\alpha+\beta}$，我们选择标准的黎曼片，其中 $1^{i\alpha+\beta} = 1$，且割线从 0 延伸至 $-\infty$。

为计算该积分，我们将 z 变量替换为 ρ

$$z = \rho \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}(\gamma)}}{|\gamma|} \tag{C2}$$

并将 ρ 积分的积分路径旋转至实轴，得到

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{e^{-|\alpha|\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}(\beta+1)\,\mathrm{sign}(\gamma)}}{|\gamma|^{i\alpha+(\beta+1)}} \int_0^\infty \mathrm{d}\rho \rho^{i\alpha+\beta} e^{-\rho} . \tag{C3}$$

这是 Γ 函数的积分表示，因此

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{e^{-|\alpha|\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}(\beta+1)\,\mathrm{sign}(\gamma)}}{|\gamma|^{i\alpha+(\beta+1)}} \Gamma(i\alpha+(\beta+1)) . \tag{C4}$$

利用恒等式

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{C5}$$

我们可以计算

$$|\Gamma(i\alpha)|^2 = \frac{\pi}{\alpha\sinh\pi\alpha} , \quad |\Gamma(i\alpha+1)|^2 = \frac{\pi\alpha}{\sinh\pi\alpha} . \tag{C6}$$

这给出两个重要情形:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty z^{i\alpha-1} e^{i\gamma z}\, \mathrm{d}z \right|^2 &= \frac{2\pi}{|\alpha|} \frac{1}{e^{2|\alpha|\pi} - 1} , \\ \left| \int_0^\infty z^{i\alpha} e^{i\gamma z}\, \mathrm{d}z \right|^2 &= \frac{2\pi|\alpha|}{\gamma^2} \frac{1}{e^{2|\alpha|\pi} - 1} . \end{aligned} \tag{C7}$$

注意，第一个表达式实际上与 γ 无关。

[1] S.W. Hawking, 《黑洞的粒子产生》, 《数学物理通讯》43, 199–220（1975）。[2] Bryce S. DeWitt, 《弯曲时空中的量子场论》, 《物理报告》19, 295–357（1975）。[3] S. A. Fulling 和 P. C. W. Davies, 《二维时空中运动镜面的辐射：共形反常》, 《伦敦皇家学会会刊 A 辑》348, 393–414（1976）。[4] P.C.W. Davies 和 S.A. Fulling, 《运动镜面和黑洞的辐射》, 《伦敦皇家学会会刊 A 辑》A356, 237–257（1977）。[5] Stephen A. Fulling, 《黎曼时空中正则场量子化的非唯一性》, 《物理评论D》7, 2850–2862（1973）。[6] P. C. W. Davies, 《史瓦西和 Rindler 度规中的标量粒子产生》, 《物理学杂志 A》8, 609–616（1975）。[7] W. G. Unruh, 《黑洞蒸发札记》, 《物理评论D》14, 870–892（1976）。

[8] Timothy H. Boyer, 《无需量子假设推导黑体辐射谱》, 《物理评论》182, 1374–1383（1969）。[9] Gabriel Cozzella、Andr´e G. S. Landulfo、George E. A. Matsas 和 Daniel A. T. Vanzella, 《利用经典电动力学观测 Unruh 效应的提议》, 《物理评论快报》118, 161102（2017）, arXiv:1701.03446 [广义相对论与量子宇宙学]。[10] Gabriel Cozzella、Stephen A. Fulling、Andr´e G. S. Landulfo 和 George E. A. Matsas, 《作为 Unruh-DeWitt 探测器极限的均匀加速经典源》, 《物理评论D》102, 105016（2020）, arXiv:2009.13246 [hep- th]。[11]Ulf Leonhardt、Itay Griniasty、Sander Wildeman、E mmanuel Fort 和 Mathias Fink, 《Unruh 效应的经典类比》, 《物理评论A》98, 022118（2018）, arXiv:1709.02200 [广义相对论与量子宇宙学]。

[12] B. M. Hegelich、L. Labun、O. Z. Labun、G. Torrieri 和 H. Truran，《线性加速下电子对辐射的响应：经典、量子电动力学和加速参考系的预言》，《物理评论D》105，096034（2022），arXiv:2201.10457 [hep-ph]。[13] Morgan H. Lynch、Eliahu Cohen、Yaron Hadad 和 Ido Kaminer，《加速度诱导热效应的实验观测》，《物理评论D》104，025015（2021），arXiv:1903.00043 [广义相对论与量子宇宙学]。[14] A. Di Piazza、L. Willingale 和 J. D. Zuegel，《多拍瓦物理优先事项（MP3）研讨会报告》，（2022），arXiv:2211.13187 [hep-ph]。[15]Gianluca Gregori、Giacomo Marocco、Subir Sarkar、Robert Bingham 和 Charles Wang，《测量加速电子发出的 Unruh 辐射》，（2023），arXiv:2301.06772 [广义相对论与量子宇宙学]。[16] G. W. Ford 和 R. F. O'Connell，《是否存在 Unruh 辐射？》，《物理快报A》350，17–26（2006），arXiv:quant-ph/0509151。[17] Massimo Pauri 和 Michele Vallisneri，《Unruh 效应和霍金效应的经典根源》，《基础物理学》29，1499 1520 1999 9903052 – （），arXiv:gr-qc/。[18] Shih-Yuin Lin，《Unruh 效应的经典对应》，（2001），arXiv:gr-qc/0105051。[19] Timothy H. Boyer，《经典电磁零点辐射中经典偶极振子的加速度热效应》，《物理评论D》29，1089（1984）。[20] D. C. Cole，《经典电磁零点辐射中空间延展电磁系统的加速度热效应：横向放置的经典振子》，《物理评论D》35，562–583（1987）。[21] T. H. Boyer，《穿过随机经典辐射时的加速度热效应》，《物理评论D》21，2137–2148（1980）。[22] Michael R.R. Good，《极端霍金辐射》，《物理评论D》101，104050（2020），arXiv:2003.07016 [广义相对论与量子宇宙学]。[23] Kuan-Nan Lin 和 Pisin Chen，《有限尺寸和厚度的相对论半透明镜产生的粒子》，（2021），arXiv:2107.09033 [广义相对论与量子宇宙学]。[24] Kuan-Nan Lin 和 Pisin Chen，《关于反射的思考》，（2022），arXiv:2212.00550 [广义相对论与量子宇宙学]。[25] Ignacio A. Reyes，《AdS2 中的运动镜、Page曲线与体熵》，《物理评论快报》127，051602（2021），arXiv:2103.01230 [hep-th]。[26]Ibrahim Akal、Yuya Kusuki、Noburo Shiba、Tadashi Takayanagi 和 Zixia Wei，《全息运动镜中的纠缠熵与 Page 曲线》，《物理评论快报》126，061604（2021），arXiv:2011.12005 [hep- th]。[27] L.H. Ford 和 Alexander Vilenkin，《运动镜的量子辐射》，《物理评论D》25，2569（1982）。[28] A.I. Nikishov 和 V.I. Ritus，《(1+1)空间中加速镜发射标量光子及其与经典电动力学中电荷辐射的关系》，《实验与理论物理学杂志》81，615–624（1995）。[29] V.I. Ritus，《(1+1)和(3+1)空间中镜与电荷辐射谱巧合的对称性与成因》，《实验与理论物理学杂志》87，25–34（1998），arXiv:hep-th/9903083。[30] V.I. Ritus，《 1+1空间中镜的量子辐射理论与 3+1空间中电荷的量子辐射理论中的真空-真空振幅》，《现代物理学国际期刊A》17，1033–1040 (2002). [31]V.I. Ritus，《从 Bogoliubov 变换推知的对称性：镜子在二维时空中诱发的过程与电荷在四维时空中诱发的过程之间的对称性》，《实验与理论物理学杂志》97，10–23（2003），arXiv:hep-th/0309181。[32] V. I. Ritus，《裸电荷的有限值，以及物理电荷与裸电荷之比的精细结构常数与真空中电磁场零点振荡的关系》，《物理科学进展》192，507–526（2022）。[33] Abay Zhakenuly、Maksat Temirkhan、Michael R. R. Good 和 Pisin Chen，《相对论加速辐射的量子功率分布：与完美反射运动镜子的经典电动力学类比》，Symmetry 13，653（2021），arXiv:2101.02511 [广义相对论与量子宇宙学]。[34] Michael R. R. Good、Paul R. Anderson 和 Charles R. Evans，《黑洞的镜面反射》，《物理评论D》94，065010（2016），arXiv:1605.06635 [广义相对论与量子宇宙学]。[35] Michael R.R. Good 和 Yen Chin Ong，《Reissner–Nordstr¨om 黑洞的粒子光谱》，《欧洲物理学杂志C辑》80，1169（2020），arXiv:2004.03916 [广义相对论与量子宇宙学]。[36] Michael R. R. Good、Joshua Foo 和 Eric V. Linder，《克尔黑洞的加速边界类比》，《经典与量子引力》

38, 085011 2021 2006 01349 ( ), [ ] arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 。[37] Frank Wilczek，《以微小代价实现量子纯度：消解黑洞悖论》，载于 *International Symposiumon Black holes, Membranes, Wormholes and Superstrings*（1993），第1–21页，arXiv:hep-th/9302096。[38] H. Nyquist，《导体中电荷的热扰动》，《物理评论》32，110–113（1928）。[39] B.M. Oliver，《热噪声与量子噪声》，《IEEE会刊》53，436–454（1965）。[40] R. H. Dicke，《微波频率下热辐射的测量》，《科学仪器评论》17，268–275（1946）。[41] V. J. Urick、Keith J. Williams 和 J ason D. McKinney，*Fundamentals of Microwave Photonics*（Wiley，霍博肯，新泽西州，2021）。[42] J. Larmor D.Sc. F.R.S.，《第六十三篇：论光谱磁影响理论及运动离子的辐射》，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》44，503–512（1897）。[43] David J Griffiths，*Introduction to electrodynamics; 4th ed.*（Pearson，波士顿，马萨诸塞州，2013），2017年由剑桥大学出版社再版。[44] Michael R. R. Good，*Reflecting at the Speed of Light*（世界科技出版公司，新加坡，2017）。[45] Michael R. R. Good 和 Paul C. W. Davies，《红外加速辐射》（2023），arXiv:2206.07291 [广义相对论与量子宇宙学]。[46] Michael R. R. Good，《论最低阶内韧致辐射的温度》（2023），arXiv:2211.00946 [广义相对论与量子宇宙学]。[47] Eugenio Bianchi 和 Matteo Smerlak，《二维时空中的纠缠熵与负能量》，《物理评论D》90，041904（2014），arXiv:1404.0602 [广义相对论与量子宇宙学]。[48] Carlos Barcelo、Stefano Liberati、Sebastiano Sonego 和 Matt Visser，《类霍金通量存在的最小条件》，《物理评论D》83，041501（2011），arXiv:1011.5593 [广义相对论与量子宇宙学]。[49] Robert D. Carlitz 和 Raymond S. Willey，《黑洞的寿命

,"《物理评论D》**36**，2336–2341（1987年）。

[50] Andrew Zangwill, 《电磁辐射》（剑桥大学出版社，剑桥，2013年）。[51] John David Jackson, 《电动力学》（Wiley，纽约州纽约市，1999年）。[52] J. D. Barrow, 《普朗克之前的自然单位》, 《英国皇家天文学会季刊》24，24–26（1983年）。[53] George Johnstone Stoney, 《关于自然单位制》, 《爱尔兰皇家都柏林学会科学纪要》3，51–60（1881年）。[54] Robert D. Carlitz和Raymond S. Willey, 《关于运动镜的反思》, 《物理评论D》36，2327–2335（1987年）。[55] N.D. Birrell和P.C.W. Davies, 《量子场论在弯曲时空中的应用》, *Quantum Fields in Curved Space*，剑桥数学物理专著（剑桥大学出版社，英国剑桥，1984年）。[56] Michael R. R. Good、Alessio Lapponi、Orlando Luongo和Stefano Mancini, 《通过部分反射的加速镜进行量子通信》, 《物理评论D》104，105020（2021年），arXiv:2103.07374 [广义相对论与量子宇宙学]。[57] W. R. Walker, 《运动镜产生粒子与能量》, 《物理评论D》31，767–774（1985年）。[58] Leonard E. Parker和D. Toms, 《量子场论在弯曲时空中的应用》, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Field and Gravity*，剑桥数学物理专著（剑桥大学出版社，2009年）。[59] Alessandro Fabbri和Jos

´ *Modeling* e *Black Hole Evaporation* 2005

Navarro-Salas, 《量子场论在弯曲时空中的应用》（帝国理工学院出版社，）。[60] Michael R. R. Good、Chiranjeeb Singha和Vasilios Zarikas, 《固定辐射能量下的极端电子加速》, 《熵》24，1570（2022年），arXiv:2211.00264 [广义相对论与量子宇宙学]。[61] Michael R. R. Good和Yen Chin Ong, 《电子作为微型镜子：具有渐近惯性的世界线辐射》, 《物理学》5，131–139（2023年），arXiv:2302.00266 [广义相对论与量子宇宙学]。[62] S. A. Fulling, 《关于加速度辐射近期研究的综述》, 《现代光学杂志》52，2207–2213（2005年）。[63] Michael R.R. Good、Abay Zhakenuly和Eric V. Linder, 《宇宙边缘的镜子：关于加速边界对应与德西特宇宙学的思考》, 《物理评论D》102，045020（2020年），arXiv:2005.03850 [广义相对论与量子宇宙学]。[64]Andrew Strominger, 《Les Houches黑洞讲座》, 载于 *NATO Advanced Study Institute: Les HouchesSummer School, Session 62: Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory*（1994年），arXiv:hep-th/9501071。[65] H. C. Ballagh *et al.*, 《深度非弹性中微子散射中μ子内轫致辐射的观测》, 《物理评论快报》50，1963–1966（1983年）。[66] C. S. Wang Chang和D. L. Falkoff, 《伴随原子核β衰变的连续伽马辐射》, 《物理评论》76，365–371（1949年）。[67] Vitor Cardoso、Oscar J. C. Dias和Jose P. S. Lemos, 《D维时空中的引力辐射》, 《物理评论D》67，064026（2003年），arXiv:hep-th/0212168。[68] Vitor Cardoso、Jose P. S. Lemos和Shijun Yoshida, 《近光速碰撞产生的电磁辐射：落入施瓦西黑洞的极端相对论性带电粒子》, 《物理评论D》68，084011，2003 0307104（），arXiv:gr-qc/。[69] J.S. Nico *et al.*, 《自由中子放射性衰变模式的观测》, 《自然》444，1059（2006年）。

[70] M. J. Bales *et al.*（RDK II），“自由中子的辐射 β 衰变的精密测量”, 《物理评论快报》116，242501（2016年），arXiv:1603.00243 [核实验物理]。[71] Morgan H. Lynch 和 Michael R. R. Good, “运动镜的实验观测”,（2022年），arXiv:2211.14774 [核实验物理]。[72] Pisin Chen *et al.*（AnaBHEL），“AnaBHEL（激光模拟黑洞蒸发）实验：概念、设计与现状”, 《光子学》9，1003（2022年），arXiv:2205.12195 [广义相对论与量子宇宙学]。[73]Pisin Chen 和 Gérard Mourou, “加速等离子体镜以探究黑洞信息丢失悖论”, 《物理评论快报》118，045001（2017年），arXiv:1512.04064 [广义相对论与量子宇宙学]。[74]Pisin Chen 和 Gérard Mourou, “穿越具有密度梯度的靶标的飞行等离子体镜轨迹”, 《等离子体物理学》 **27**, 123106 2020 2004 10615（），[ ] arXiv:。等离子体物理。[75] Michael R. R. Good 和 Eric V. Linder, “由幺正加速镜类比得到的修正史瓦西度规”, 《新物理学杂志》23，043007（2021年），arXiv:2003.01333 [广义相对论与量子宇宙学]。[76] Michael R.R. Good、Eric V. Linder 和 Frank Wilczek, “准热辐射场的运动镜模型”, 《物理评论D》101，025012（2020年），arXiv:1909.01129 [广义相对论与量子宇宙学]。[77] Alhan Moreno-Ruiz 和 David Bermudez, “史瓦西–普朗克度规的光学类比”, 《经典与量子引力》39，145001（2022年），arXiv:2112.00194 [广义相对论与量子宇宙学]。[78]W R Walker 和 P C W Davies, “一个精确可解的运动镜问题”, 《物理学A：数学与一般》15，L477–L480（1982年）。[79] Michael R.R. Good, “时空连续性与量子信息丢失”, 《宇宙》4，122（2018年）。[80] Wan Cong、Erickson Tjoa 和 Robert B. Mann, “利用运动镜收获纠缠”, 《高能物理杂志》06，021（2019年），[勘误：《高能物理杂志》07，051（2019年）], arXiv:1810.07359 [量子物理]。[81] Michael R. R. Good, “对黑镜的思考”, 载于 *2nd LaCosPA Symposium: Everything about Gravity, Celebrating the Centenary of Einstein's General Relativity* 2016 1602 00683 [ ] （）arXiv:。广义相对论与量子宇宙学。[82] Michael R.R. Good, “平直时空中自旋-统计与玻戈留博夫变换及加速条件”, 《现代物理学国际期刊A》28，1350008（2013年），arXiv:1205.0881 [广义相对论与量子宇宙学]。[83] Michael R. R. Good、Paul R. Anderson 和 Charles R. Evans, “加速镜产生粒子的时间依赖性”, 《物理评论D》88，025023（2013年），arXiv:1303.6756 [广义相对论与量子宇宙学]。[84]Ibrahim Akal、Yuya Kusuki、Noburo Shiba、Tadashi Takayanagi 和 Zixia Wei, “全息运动镜”, 《经典与量子引力》38，224001（2021年），arXiv:2106.11179 [hep-th]。[85] Michael R. R. Good、Alessio Lapponi、Orlando Luongo 和 Stefano Mancini, “通过运动镜辐射模拟黑洞蒸发质量演化”,（2023年），arXiv:2210.09744 [广义相对论与量子宇宙学]。[86]Ibrahim Akal、Taishi Kawamoto、Shan-Ming Ruan、Tadashi Takayanagi 和 Zixia Wei, “全息运动镜谱系”, 《高能物理杂志》 **08**, 296 2022 2205 02663（），[ ] arXiv:。hep-th。