arXiv:2303.03691v1 [math.DG] 7 Mar 2023

$\mathbb{R}^n$中紧致超曲面的表面积公式

YEN-CHANG HUANG

Abstract. 经典的柯西表面积公式指出， n维欧几里得空间$\mathbb{R}^n$ 中任意 n维凸体的边界 $\partial K = \Sigma$ 的表面积，可由 $\mathbb{S}^{n-1}$中沿所有方向的 Σ 投影面积的平均值得到。在本文中，我们通过定义 $\mathbb{S}^{n-1}$中沿任意方向的投影面积这一自然概念，将该公式推广到$\mathbb{R}^n$ 中任意 n维子流形的边界。由这一新概念导出的表面积公式，不仅与克罗夫顿公式的结果一致，也与 De Jong 利用管状邻域所得的结果 [4] 一致。我们还定义了Σ 到任意 r维子空间上的投影 r体积，并获得了 Σ的平均投影 r体积的递归公式。

1. Introduction and main results

求取欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中具有边界 $\Sigma = \partial K$ 、维数为 k 的嵌入子流形 K 的体积，是微分几何中颇具意义的研究课题之一。已有大量结果用于度量 K的体积和表面积。例如， K 的表面积可以通过将欧几里得度量限制于 Σ ，并对 K [1, 切空间中无穷小平行多面体的（$k-1$）维体积进行积分来测量（见第 2 节2]）；也可以通过 De Jong 推导的 Σ 管状邻域的 n维勒贝格测度与（$n-k$）球体积之比的极限来获得 [4]。

在这些笔记中，我们将始终把注意力限制在积分几何 [11] 和凸几何 [12]所发展的方法上。该方法的有效性已在几何断层成像及其他科学领域的应用中得到验证（更多详情见 [6]）。这种方法的基本假设是， K 必须是凸的，因为最初的证明是通过在 K内接凸多面体的极限过程建立的。当 $k = n$时，我们发现，通过引入一个自然概念来描述 Σ 在任意 r维子空间 $r \leq n-1$ 上的投影表面积（见定义1），可以放宽对 K 的凸性假设。这一新概念还为克罗夫顿公式提供了另一种证明。该公式指出，可以通过“计数”所有直线与 Σ 的交点数来得到 Σ 的表面积（见下文引理 2和定理2），并由此将柯西表面积公式推广到任意K （定理3）。我们还将投影表面积推广到更高余维的子空间，即将 Σ 投影到 r子空间所得的投影 r体积（$1 \leq r \leq n-1$）（定义2），并推导出 Σ 平均投影面积的递归公式（定理 4）。

文献中似乎只有少数研究涉及非凸边界的投影面积与表面积之间的关系。两个较为相关的概念可能是 J. Favard [5] 提出的积分几何测度，以及近期 Bouafia-Pauw [2]提出的概念；二者都

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：53C17，次分类：53C65、53C23。*Key words and phrases.* 欧几里得空间、柯西表面积公式、投影。本研究由台湾国家科学及技术委员会（NSTC）资助，补助编号：110-2115-M-024 -002 -MY2。

基于几何测度论的方法。运动学公式无需引入投影的概念，也能得到类似结果，例如 [14,15]。如前所述，De Jong[4] 为 r维子流形在 $\mathbb{R}^n$ ($1 \le r \le n-1$)中的体积给出了几何定义，并通过考察管状邻域的 r维体积与法丛中单位球的体积之比，推导出一个 r维体积公式。他声称，当子流形的维数为 n 且具有 C^1边界时，该公式成立。然而，我们将采用李群的平行变换和活动标架法，在 r子空间上构造 r维体积形式，以表示 Σ 的 r维投影体积（参见第 2 节中情况 1 和情形 2 的讨论）。在命题1中，我们还将证明，我们推导出的表面积（见定理3）与其研究 [4]中的表面积一致。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，柯西表面积公式指出， $\mathbb{R}^n$ 中的凸超曲面Σ 的表面积，可以表示为 Σ 沿（$n-1$）维单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$的所有法向方向投影面积的平均值：

定理1（定理5.5.2 [9]）。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 n维凸体（即具有非空内部的凸集），其边界 $\partial K = \Sigma$ 可求长。 K的表面积（或称（$n-1$）维体积），记为 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma)$，由下式给出

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|\nu^\perp) dS_\nu. \tag{1}$$

这里， dS_ν 是 $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$处的曲面面积元， ω_{n-1} 是 $\mathbb{R}^{n-1}$中单位球的（$n-1$）维体积，而 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|\nu^\perp)$是 Σ 在与单位外法向 ν垂直的（$n-1$）维子空间 $\nu^\perp$ 上的正交投影的（$n-1$）维体积。

Σ 的正交投影面积 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|\nu^\perp)$可由积分公式明确表示为

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|\nu^\perp) = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\nu} \in \mathbb{S}^{n-1}} |\nu \cdot \tilde{\nu}| dS_{\tilde{\nu}}, \tag{2}$$

其中， $dS_{\tilde{\nu}}$ 是 $\tilde{\nu} \in \mathbb{S}^{n-1}$处的曲面面积元。恒等式（1）和（2）均可通过在 Σ中内接一个凸 m多面体，并计算 m 趋于无穷时该多面体表面积的极限来证明。多面体的凸性确保了在$\nu^\perp$ 中的任意一点，Σ 的投影面积的计数重数几乎处处为二（我们可以假设该多面体包含原点，并且 $\nu^\perp$ 中的每一点都分别从 $\nu^\perp$ 的“正面”和“背面”被投影两次）。详细内容请参见 [9] 中的定理5.5.2的证明，或 [11, 第 217] 页。然而，对于非凸 K，这种方法并不适用，因为其中未必存在内接的凸多面体。

不过，一般来说，定理1并不适用于任意超曲面 Σ，公式（1）在一种特殊非凸情形下仍然成立：当 $\Sigma = \partial K$ 的补集$K^c = \mathbb{R}^n \setminus K$ 为凸集时。事实上，假设 K 是一个补集 K^c为凸集的非凸集，根据引理3（见下文），我们将证明 K^c 的闭包 $\overline{K^c}$ 是凸集。由于 Σ 与 K 和 K^c具有相同的边界，因此可以将公式（1）应用于凸部分 ∂K^c，从而求得 $\Sigma = \partial K$ 的表面积。

因此，如果超曲面 Σ 是从非凸子集 K 得到的，且其补集K^c 也是非凸的，那么上一段中的论证便不再成立。一个简单的例子是，当Σ 是星形区域 S的边界时，其补集 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 也是非凸的。本文的主要目标是将投影面积的概念推广到非凸边界，并为任意边界推导柯西表面积公式 (1)。

我们来谈谈定理1的一些问题。首先，当 $K = \mathbb{S}^{n-1}$时，下面的引理表明，单位球面的正交投影的表面积与投影方向的选择无关。

引理 1（引理 5.5.1 [9]）。对于任意 $\nu \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}|\nu^{\perp}) = \frac{1}{2}\int_{\tilde{\nu}\in\mathbb{S}^{n-1}} |\nu \cdot \tilde{\nu}| dS_{\tilde{\nu}} = \omega_{n-1}. \tag{3}$$

$\mathbb{S}^{n-1}$ 的这一自然性质在定理1的证明中起着关键作用（参见 [9]，或定理3中的证明）。我们还注意到，引理 1 的逆命题一般并不成立。存在一些 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致超曲面，它们不是标准球面，但具有恒定的投影面积。例如， $\mathbb{R}^2$ 中的勒洛三角形和 $\mathbb{R}^n$ 中的等宽体（参见 [3]）都不是圆球面，但具有恒定的投影面积。

其次，众所周知，高斯映射 $\nu : \Sigma = \partial K \to \mathbb{S}^{n-1}$ 是双射，当且仅当 K 是凸的。此外，如果 K 严格凸，那么高斯映射是微分同胚。由于定理1和引理 1 中考虑的曲面 Σ 是凸的，因此两个积分所取的定义域都是 $\mathbb{S}^{n-1}$，可通过微分同胚 ν 与 Σ 进行识别。因此，对非凸超曲面 Σ，定理1的自然推广可视为在其自身上的积分 Σ 。

我们回顾一下 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的一些基本背景。空间$\mathbb{R}^n$ 可视为一个 n 维李群，其自然的左平移 L_q 定义为：对于任意点 q、$p \in \mathbb{R}^n$，$L_q p = q + p$。对于任意 $r \in \mathbb{R}^n$，其逆平移和复合分别定义为 $(L_q)^{-1}r = L_{q^{-1}}r$ 和 $(L_q \circ L_{p^{-1}})r = L_{qp^{-1}}r = q - p + r$。对于每个点 $p \in \mathbb{R}^n$，我们可以将整个空间 $\mathbb{R}^n$ 与切空间 $T_p\mathbb{R}^n$ 认同。在本文中，只要上下文清楚，对于任意点 $q \in \mathbb{R}^n$ 以及从原点 O 出发并终止于 q 的向量 Oq，我们将滥用相关记号。因此，对于任意点 $p \in \mathbb{R}^n$ 和任意切向量 $q \in T_0\mathbb{R}^n$，$\vec{\ }$ 左平移的推前 $L_{p*}q$ 是这样得到的向量：将向量 Oq 移动到从 p 出发且平行于 $\vec{Oq}$ 的向量。类似地，$(L_p^*)(\omega(q))$ 表示在 q 处的 r-形式 ω 的拉回。我们坚持在 $\mathbb{R}^n$ 中使用李群记号（例如，使用 $L_p q$ 而不是$p+q$表示向量加法），因为我们相信本文中的所有内容都可以不加修改地应用于任意光滑李群。特别地，最近作者还证明了海森堡群中区域的柯西表面积公式；海森堡群可视为田中-韦伯斯特曲率为零的严格伪凸 CR 流形（见 [7]）。我们还使用记号 $n(p) \in \mathbb{S}^{n-1}$ 表示 $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ 处的外单位法向量 $n(p)$，并使用 $n(p)^{\perp}$ 表示垂直于 $n(p)$ 的子空间。

我们将嵌入 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$中的具有可求长边界 $\Sigma = \partial K$ 的 n维紧致子流形记为 K，其中采用 $\mathbb{R}^n$上的通常拓扑。下面给出紧超曲面（不一定是凸的）的投影面积定义。

定义1. 紧超曲面 Σ在 $\mathbb{R}^n$ 中沿方向 $n(p) \in \mathbb{S}^{n-1}$ 投影到子空间 $n(p)^{\perp}$ 上的（正交）加权投影面积为

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n(p)^{\perp}) = \frac{1}{2}\int_{q\in\Sigma} |L_{qp^{-1}*}n(p) \cdot \tilde{n}(q)| d\Sigma_q, \tag{4}$$

其中， $L_{qp^{-1}*}n(p)$是 $p \in \mathbb{S}^{n-1}$处外单位法向量 $n(p)$的推前， $\tilde{n}(q)$是 $q \in \Sigma$处的外单位法向量， $d\Sigma_q$ 是 $q \in \Sigma$处 Σ 的面积元。

注 1. 我们对 (4) 作如下几何解释。在每个点 $q \in \Sigma$处， q处带有面积元的被积项 $|L_{qp^{-1}*}n(p) \cdot \tilde{n}(q)|d\Sigma_q$，是 $d\Sigma_q$ 投影到平面 $n(p)^\perp$ 上 q 的投影点处的投影无穷小面积元，而该积分则是 Σ 投影到 $n(p)^\perp$ 上的投影面积，并按重数计数。换言之，设 ℓ 是一条平行于 $n(p)$的直线，使得 $\ell \cap \Sigma \neq \emptyset$和 $\ell \cap n(p)^\perp \neq \emptyset$，则 $\ell \cap \Sigma$上的所有点沿 ℓ投影到 $\ell \cap n(p)^\perp$上的同一点，计数次数取决于 $\ell \cap \Sigma$的数量。这就是我们称该积分为加权投影面积的原因。当 Σ为凸时， $\ell \cap \Sigma$上的点的数量几乎处处为二；但一般而言，该数量取决于投影方向和 Σ。

根据注释1，下面的引理将给出定义1的一种几何等价定义。该引理指出， $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n(p)^\perp)$的值等于对所有平行于 n的直线上的交点数进行积分。

引理 2. 设 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个紧超曲面， $n(p) \in \mathbb{S}^{n-1}$是一个单位向量。假设 ℓ 是任意一条平行于 $n(p)$的直线，并与正交补 $n^\perp(p)$相交于点 u，则定义1中 Σ在子空间 $n(p)^\perp$ 上的投影面积可由下式给出

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n(p)^\perp) = \frac{1}{2}\int_{\ell \perp n(p)^\perp} \#(\ell \cap \Sigma) dn_u^\perp, \tag{5}$$

其中，$\#(\ell \cap \Sigma)$是 ℓ 与 Σ的交点数； $dn_u^\perp$ 是 $n(p)^\perp$ 在$u \in n(p)^\perp \cap \ell$处的面积元。

证明. 为简单起见，我们固定任意一点 $p \in \mathbb{S}^{n-1}$，并记 $n = n(p)$和 $n^\perp = n(p)^\perp$。假设直线 ℓ 平行于 n ，并与 Σ 交于点 q。那么 ℓ 必与子空间 $n^\perp$ 在唯一一点 u相交。我们可以在 q和u 处分别选取两个标准正交标架 $\{q, e_i\}$ 和 $\{u, \bar{e}_j\}$, $1 \le i, j \le n$，使其满足条件

$$\begin{cases} \text{at the point } q: & e_1 \in T_q\Sigma^\perp, e_2, e_\alpha \in T_q\Sigma, \\ \text{at the point } u: & \bar{e}_1 \in \ell, \bar{e}_2, \bar{e}_\alpha \in T_u n^\perp, \\ e_\alpha = \bar{e}_\alpha & \text{for } \alpha = 3, \cdots, n. \end{cases} \tag{6}$$

根据标架的构造，过渡矩阵 $[a_j^i]$ 由 $\bar{e}_j = \Sigma_{i=1}^n e_i a_j^i$给出，即，其中

$$\begin{cases} a_1^1 & = a_2^2 = \cos\theta, \\ a_2^1 & = -a_1^2 = -\sin\theta, \\ a_\beta^\alpha & = \delta_\beta^\alpha, \text{ the Kronecker delta}, 3 \le \alpha, \beta \le n, \end{cases}$$

且 θ 是平面 $T_q\Sigma$ 与 $n^\perp$之间的角。设 $\{\omega^1, \omega^2, \omega^\alpha\}$ 和 $\{\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^\alpha\}$ 分别是 $\{e_i\}$ 和 $\{\bar{e}_i\}$ 的对偶形式。可以证明， $\bar{\omega}^i = \Sigma_{j=1}^n b_j^i \omega^j$ 其中矩阵$[b_i^j] = [a_i^j]^{-1}$。因此，通过将点 $q \in \Sigma$与 $u \in n^\perp$对应起来，可得在 q 和 u 处的面积元 $d\Sigma_q$ 与 $dn_u^\perp$ 之间的关系如下:

$$\begin{aligned} dn_u^\perp &= \bar{\omega}^2 \wedge \bar{\omega}^3 \wedge \cdots \wedge \bar{\omega}^n \\ &= (\sin\theta\omega^1 + \cos\theta\omega^2) \wedge \omega^3 \wedge \cdots \wedge \omega^n \\ &= \sin\theta\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \cdots \wedge \omega^n + \cos\theta\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \cdots \wedge \omega^n \\ &= \sin\theta\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \cdots \wedge \omega^n + \cos\theta d\Sigma_q. \end{aligned} \tag{7}$$

限制在 Σ 上时，由 (7) 可得投影公式

$$dn_u^\perp\big|_\Sigma = |\cos\theta| d\Sigma_q \tag{8}$$

（这里我们对余弦取绝对值，以得到正的表面积）。对所有平行于 n 的直线 ℓ 积分，可得

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n^{\perp}) = \frac{1}{2}\int_{q\in\Sigma} |L_{qp^{-1}{}_*} n(p)\cdot\tilde{n}(q)|d\Sigma_q = \frac{1}{2}\int_{q\in\Sigma} |\cos\theta|d\Sigma_q = \frac{1}{2}\int_{u\in\ell\cap n^{\perp}} \#(\ell\cap\Sigma)dn_u^{\perp}$$

并完成证明。 □

回顾一下， $\mathbb{R}^2$ 中的柯西表面积公式指出，可求长平面曲线γ 的周长等于对 γ 和任意直线 ℓ的交点数 #($\ell\cap\gamma$) 进行积分。它已通过多种形式推广到更高维情形（参见 [11, 第 14] 章或 [13]）。请注意，与柯西表面积公式不同，克罗夫顿公式对曲线和超曲面不需要凸性假设，因此，引理 2 中的 $\mathcal{V}_{n-1}$(Σ|$n^{\perp}$(p)) 似乎是一个合理的定义，可将柯西公式和克罗夫顿公式联系起来。

前面的结果——引理 2——将为 $n\geq 1$的 $\mathbb{R}^n$ 中克罗夫顿公式给出一个更简单的证明。在此之前，我们先介绍一些基本设定。令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{R}^n$中有向直线的集合。设$\ell\in\mathcal{L}$ ，且 $\ell^{\perp}$ 是它经过原点的正交补。 ℓ 可通过以下过程唯一确定：首先，选取一条经过原点且平行于 ℓ 的直线 ℓ' ，并用单位向量n(p) $\in\mathbb{S}^{n-1}$ 表示某个 $p\in\mathbb{S}^{n-1}$的方向 ℓ' 。其次，将 ℓ' 平移至点 $u=\ell\cap\ell^{\perp}$处的 ℓ 。通过将 $\ell^{\perp}$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$视为相同，集合 $\mathcal{L}$ 与 $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}$之间存在自然的一一对应关系，

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L} & \longleftrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} & \times & \mathbb{R}^{n-1}, \\ \ell & \longleftrightarrow & (n(p) & , & u). \end{array}$$

因此，我们可将 $(2n-2)$-形式 $d\ell := dS_p\wedge d\ell_u^{\perp}$视为 $\mathcal{L}$上的不变测度，其中 dS_p是 $p\in\mathbb{S}^{n-1}$处的面积元，而 $d\ell_u^{\perp}$是 $\ell^{\perp}$ 在 $u=\ell\cap\ell^{\perp}$处的面积元。注意， $dS_p\wedge d\ell_u^{\perp}$在 $\mathbb{R}^n$中的刚体运动（旋转和平移）下保持不变。

定理2（ $\mathbb{R}^n$中的克罗夫顿公式）。设 K 为一个具有可求长边界 $\partial K=\Sigma$的 n维紧致子流形。令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有有向直线的集合，并用 #($\ell\cap\Sigma$) 表示 $\ell\in\mathcal{L}$ 与 Σ的交点数。则 K 的表面积 $\mathcal{V}_{n-1}$(Σ) 由下式给出

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma) = \frac{1}{2\omega_{n-1}}\int_{\ell\in\mathcal{L}} \#(\ell\cap\Sigma)d\ell, \tag{9}$$

其中， $d\ell = dS_p\wedge d\ell_u^{\perp}$是在 $\mathcal{L}$ 上的不变测度，由 $p\in\mathbb{S}^{n-1}$处的面积元 dS_p和 $u=\ell\cap\ell^{\perp}$处的面积元 $d\ell_u^{\perp}$构成， ℓ 的正交补 $\ell^{\perp}$ 经过原点。

证明。对于任意一条方向为 n（p） $\in\mathbb{S}^{n-1}$ 且 $\ell\cap\Sigma=q\neq\emptyset$ 的直线 $\ell=\ell_p\in\mathcal{L}$ ，令 $\phi_{p,\ q}$ 为 ℓ_p 与 $q\in\Sigma$ 处法向量之间的角。注意到引理 2 中的 $d\ell_u^{\perp}=dn_u^{\perp}$ 。利用

引理 1、定义1和引理 2，经过直接推导可得

$$\begin{aligned}
2\omega_{n-1}\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma) &= 2\int_{q\in\Sigma}\omega_{n-1}d\Sigma_q = \int_{q\in\Sigma}\int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}|\cos\phi_{p,q}|dS_p d\Sigma_q \\
&= \int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}\int_{q\in\Sigma}|\cos\phi_{p,q}|d\Sigma_q dS_p \\
&= \int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}} 2\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n(p)^{\perp})\ dS_p \\
&= \int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\ell\perp\ell_p^{\perp}}\#(\ell\cap\Sigma)d\ell_u^{\perp}dS_q \\
&= \int_{\ell\in\mathcal{L}}\#(\ell\cap\Sigma)d\ell.
\end{aligned}$$

□

下面的引理是本文的动机之一。

引理3. 若 K 及其补集 K^c 在 $\mathbb{R}^n$ 中均为凸集，则边界$\Sigma=\partial K$ 是一个超平面。

证明. 由于 K 及其补集 K^c 的闭包$\overline{K^c}$ 均为闭凸集，因此它们分别可以表示为一族 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{G}$ 闭半空间的交集，即 $K=\cap_{f\in\mathcal{F}}f$和 $\overline{K^c}=\cap_{g\in\mathcal{G}}g$。我们断言所有元素 $f\in\mathcal{F}$ 和 $g\in\mathcal{G}$ 彼此平行。这里所说的平行，是指两个半平面的超平面平行。事实上，固定一个元素 $f\in\mathcal{F}$，并假设存在 $g\in\mathcal{G}$ 使得 g 与 f不平行。一方面，我们有$f^c\cap g^c=(f\cup g)^c\neq\emptyset$。另一方面，由 $\mathbb{R}^n=K\cup\overline{K^c}\subset f\cup g$可得$(f\cup g)^c=\emptyset$，从而产生矛盾。因此，对于固定的 f， $\mathcal{G}$ 中的所有元素都与 f平行。由于 f 可以任意选取，我们得出 $\mathcal{F}$ 中的所有元素都与 $\mathcal{G}$中的元素平行，因此 Σ 是一个超平面。□

接下来，我们证明主要定理：任意紧致超曲面在 $\mathbb{R}^n$ 中的表面积，等于单位球面上加权投影面积积分的平均值。

定理3. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个带边界 $\Sigma=\partial K$的紧致 n维子集。则其表面积为

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{q\in\mathbb{S}^{n-1}}\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n(q)^{\perp})dS_q.$$

证明. 利用（2）和定义1，我们立即得到

$$\begin{aligned}
\int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n(p)^{\perp})dS_p &= \frac{1}{2}\int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}\int_{q\in\Sigma}|\tilde{n}(q)\cdot n(p)|d\Sigma_q dS_p \\
&= \frac{1}{2}\int_{q\in\Sigma}\int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}|\tilde{n}(q)\cdot n(p)|dS_p d\Sigma_q \\
&= \int_{q\in\Sigma}\omega_{n-1}d\Sigma_q \\
&= \omega_{n-1}\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma),
\end{aligned}$$

结论随即得出。 □

定理3的一个直接应用是：若一个超曲面在所有超平面上的投影面积都较小，则其表面积也较小；特别地，我们由此得到两个紧致超曲面的投影表面积比较定理。请注意，根据亚历山德罗夫投影定理 [6, 第115页，定理3.3，6], 即使两个凸体在所有方向上的投影面积都相同，它们也可能完全不同。事实上，存在不全等的凸多面体 Σ_i、 $i=1$、2，使得 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_1|n(p)^\perp) = \mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_2|n(p)^\perp)$ 对所有 $p\in\mathbb{S}^{n-1}$ 均成立（见 [6, 第121页，定理3.3，17]）。因此，以下推论给出了判定两个超曲面的表面积是否相同的必要条件，但不能判定它们是否全等。

推论 1. 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的两个紧致超曲面 Σ_i, $i=1$,2，若对所有 $p\in\mathbb{S}^{n-1}$ 都有 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_1|n(p)^\perp) \le \mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_2|n(p)^\perp)$，则 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_1) \le \mathcal{V}_{n-1}\Sigma_2)$。特别地，若对所有 $p\in\mathbb{S}^{n-1}$ 都有 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_1|n(p)^\perp) = \mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_2|n(p)^\perp)$，则 $\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_1) = \mathcal{V}_{n-1}(\Sigma_2)$。

最后，我们将证明，定理3中的表面积公式与 De Jong 在 [4] 中推导出的公式等价。更确切地说，给定一个 k 维子流形 $M\subset\mathbb{R}^n$ 和一个紧子集$A\subset M$，De Jong 给出了一种更简便的方法来证明极限

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\mu_n(Tub_\epsilon A)}{\beta_{n-k}\epsilon^{n-k}} \tag{10}$$

存在，且可用于定义 A 的 k 维体积。这里，$Tub_\epsilon A=\{p+a;\ p\in A, a\in N_pM, |a|<\epsilon\}$, N_pM 表示 p 处切空间 T_pM 的正交补；$\cdot(\cdot)$ 是 n 维勒贝格测度，而 β_{n-k} 是 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中单位球的 $(n-k)$ 维体积（例如，$\beta_1=2, \beta_2=\pi, \beta_3=\frac{4\pi}{3}$ ）。特别地，当 $A=M:=\Sigma=\partial K$，其中 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个光滑的 n 维紧致子流形（即式 (10) 中的 $k=n-1$ ）时，K 的表面积可通过以下方式求得

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma)=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\mu_n(Tub_\epsilon\Sigma)}{2\epsilon}, \tag{11}$$

命题1. 对任意具有光滑边界 $\partial K=\Sigma$ 的 n 维子流形 K，由式 (11) 得到的表面积等于由定理3得到的表面积。

证明。由于局部上 Σ 可由一个光滑定义函数表示，我们可以假设对于任意开子集 $W\subset\Sigma$，存在一个光滑函数 $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_n): U\subset\mathbb{R}^{n-1}\to W\subset\mathbb{R}^n$，使得 $W=\{\phi_n(x_1,\cdots,x_{n-1})=0;$ 任意点 $(x_1,\cdots,x_{n-1})\in U\}$。令 $B=\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)$ for $1\le i\le n$and $1\le j\le n-1$ 为一个 $n\times(n-1)$-矩阵。则 $q\in W$处的曲面面积元 $d\Sigma_q$ 满足

$$d\Sigma_q=\sqrt{\det(B^T\cdot B)}dx_1\cdots dx_{n-1},$$

其中 B^T 表示矩阵转置。因此，根据定义1

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n-1}(W|n(p)^\perp) &= \frac{1}{2}\int_{q\in W}|L_{qp^{-1}*}n(p)\cdot\tilde{n}(q)|d\Sigma_q\\ &= \frac{1}{2}\int_U|\cos\theta|\sqrt{\det(B^T\cdot B)}dx_1\cdots dx_{n-1},\end{aligned} \tag{12}$$

其中 θ 是 W 的单位法向量 $\tilde{n}(q)$与 $n(p)$之间的角。因此，根据(12)

$$\begin{aligned}(13)\qquad \int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{V}_{n-1}(W|n(p)^{\perp})dS_p &= \frac{1}{2}\int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}\int_U |\cos\theta|\sqrt{\det(B^T\cdot B)}dx_1\cdots dx_{n-1}dS_p \\ &= \frac{1}{2}\int_U 2\omega_{n-1}\sqrt{\det(B^T\cdot B)}dx_1\cdots dx_{n-1} \\ &= \omega_{n-1}\int_U \sqrt{\det(B^T\cdot B)}dx_1\cdots dx_{n-1} \\ &= \omega_{n-1}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\mu_n(Tub_\epsilon W)}{2\epsilon}.\end{aligned}$$

这里，我们用到了 [4, 第 83] 页推导出的最后一个恒等式。最后，由于Σ 的光滑性， Σ 可由这类可求和的开子集 W覆盖。根据单位分解的标准论证，我们得出

$$\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{p\in\mathbb{S}^{n-1}}\mathcal{V}_{n-1}(\Sigma|n^{\perp}(p))dS_p = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\mu_n(Tub_\epsilon\Sigma)}{2\epsilon},$$

并完成证明。 □

2. GENERALIZATION TO HIGHER CODIMENSIONS

本节中，我们将把 Σ 中的紧超曲面投影到 $\mathbb{R}^n$ 中的低维子空间，并考察其投影体积。具体而言，我们计划定义 Σ, $1\le r\le n-1$的投影r维体积（简称投影 r体积），即将其投影到 $\mathbb{R}^n$中任意 r维子空间所得的体积，并求出平均投影 r体积的递归公式（见（24））。对于 [11], 中的任意点 $q\in\mathbb{R}^n$，我们采用 Santal´o 的记号，将经过 q、位于 $\mathbb{R}^n$ 中的 $L_{r[q]}$ 记作r维平面（简称r平面），并将 $L^{\perp}_{r[q]}$ 记作它的正交补。注意，对于任意点 $q\in L_{r[0]}$，都存在唯一一个经过 q 且垂直于 $L_{r[0]}$的仿射（$n-r$）平面 $L^{\perp}_{n-r[q]}$。事实上，通过将 $L^{\perp}_{n-r[0]}$ 平移至 q，即可得到仿射正交补的唯一性和存在性；也就是说，对于任意 $v\in L^{\perp}_{n-r[0]}\}$，有 $L^{\perp}_{n-r[q]}=\{q+v$,。

给定一个 r 维平面 $L_{r[0]}$ 和一个固定点 $q\in\Sigma$。记 u 为 q 在 $L_{r[0]}$上的正交投影。则存在唯一一个包含 p 和 q、且垂直于 $L_{r[0]}$的 $(n-r)$ 维平面。将这个 $(n-r)$ 维平面记为 $L^{\perp}_{n-r[q]}$。显然， $q\in L_{r[0]}\cap L^{\perp}_{n-r[q]}$。现在讨论交集 $T_p\Sigma\cap L^{\perp}_{n-r[q]}$的维数。由于以下讨论对任意向量子空间也成立，我们可以通过令以下符号来简化记法

$$M = T_p\Sigma,\ V = L_{r[0]},\ V^{\perp} = L^{\perp}_{n-r[q]}.$$

显然，$\dim(M\cap V^{\perp})\le\min\{\dim(M),\ \dim(V^{\perp})\}=\dim(V^{\perp})=n-r$。此外，由于 M 和 $V^{\perp}$的和 $M+V^{\perp}=\{m+v, m\in M, v\in V^{\perp}\}$ 的维数至多为 n，因此我们有

$$n-r-1\le\dim(M)+\dim(V^{\perp})-\dim(M+V^{\perp})=\dim(M\cap V^{\perp})\le n-r.$$

因此，对于维数 $\dim(M\cap V^{\perp})$，需要考虑两种情况： $n-r-1$ 和 $n-r$。对于第一种情况，我们将构造 M 投影到 V 上的 r-体积形式；对于第二种情况，我们将证明所有 r-形式都为零，因此对这类点积分时，其测度为零。

情况 1. 当 $\dim(M \cap V^{\perp}) = n-r-1$ 时，令 ν 为 M 的单位法向量。我们可以选择空间 $M \bigoplus span\{\nu\} = \mathbb{R}^n$ 中的标准正交基 $\{e_\alpha, e, e_\beta\}$，以及M中的标准正交基 $\{e_\alpha, u_\delta\}$，使其满足以下条件: $(1 \le \alpha \le n-r-1$、$n-r+1 \le \beta \le n$ 和 $n-r \le \delta \le n-1)$:

(1) $span\{e_\alpha\} = M \cap V^{\perp}$,

(2) $span\{e_\alpha, e\} = V^{\perp}$, (3)

$span\{e_\beta\} = V$, (4)

$span\{e_\alpha, u_\delta\} = M$。

注意，由于 $\dim(V^{\perp} \setminus (M \cap V^{\perp})) = 1$，单位向量 e 唯一确定（相差一个符号），且与向量 e_α、e_β 和 u_δ 的选取无关。由于点 $p \in M$，无穷小变化 dp 仍包含在 M 中，因此我们有向量值一形式

$$dp = \sum_{\alpha=1}^{n-r-1} A^\alpha e_\alpha + \sum_{\delta=n-r}^{n-1} B^\delta u_\delta$$

其中某些联络 1-形式为 A^α、B^δ。此外，dp 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量，因此可将其表示为基底 $\{e_\alpha, e, e_\beta\}$ 的线性组合，即

$$dp = \left(\sum_{\alpha=1}^{n-r-1} \omega^\alpha e_\alpha\right) \wedge \omega e \wedge \left(\sum_{\beta=n-r+1}^{n} \omega^\beta e_\beta\right),$$

对于某些 1-形式 ω^α、ω 和 ω^β。因此，对于任意的 $\beta = n-r+1$、$\cdots$、n，有

$$\omega^\beta = dp \cdot e_\beta = \sum_{\delta=n-r}^{n-1} B^\delta (u_\delta \cdot e_\beta),$$

因此

$$\bigwedge_{\beta=n-r+1}^{n} \omega^\beta = \Delta \cdot \bigwedge_{\delta=n-r}^{n-1} B^\delta, \tag{14}$$

其中，$\Delta = \det(u_\delta \cdot e_\beta)$ 是元素为 $u_\delta \cdot e_\beta$ 的 $(r \times r)$-矩阵的行列式。注意，值 Δ 满足 $-1 \le \Delta \le 1$，它表示 $M \setminus V^{\perp}$ 与 V 之间的角的余弦，等价地，也表示 ν 与 e 之间的角的余弦。事实上，回顾霍奇星算子 $*$ 满足以下性质

$$*(\eta \wedge (*\zeta)) = \langle \eta, \zeta \rangle,$$

对于任意外 r-形式 η、ζ，其中 $\langle$、$\rangle$ 是 r-形式的内积。将 $\eta = \bigwedge_\delta u_\delta$和 $\zeta = \bigwedge_\beta e_\beta$ 代入该恒等式，并利用正交分解

$$\mathbb{R}^n = M \bigoplus span\{\nu\} = span\{e_\alpha\} \bigoplus span\{u_\delta\} \bigoplus span\{\nu\} \ni e,$$

直接计算可得

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \det(u_\delta \cdot e_\beta) \\
&= \langle \bigwedge_\delta u_\delta, \bigwedge_\beta e_\beta \rangle \\
&= *\Big(\bigwedge_\delta u_\delta \wedge (* \bigwedge_\beta e_\beta) \Big) \\
&= *(\bigwedge_\delta u_\delta \wedge e \bigwedge_\alpha e_\alpha) \\
&= (e \cdot \nu) * (\bigwedge_\delta u_\delta \wedge \nu \bigwedge_\alpha e_\alpha) \\
&= e \cdot \nu,
\end{aligned} \tag{15}
$$

如所需。为了我们的目的（见（18）），我们将取（14）中 $|\Delta|$ of Δ 的绝对值，使得 r-体积形式 $\wedge_\beta \omega^\beta$ 是正测度。关于任意维数的两个子空间之间的角的更多细节，请参阅 [8, 定理 1] 和 [10]。

（14）的几何意义可以解释如下：通过在 $\mathbb{R}^n$ 中的平行移动识别原点 $O \in V$（从而也识别 q）和 p，$\bigwedge_\beta \omega^\beta$（分别为 $\bigwedge_\delta B^\delta$）是在 V 中 q 处（分别是在 $M \setminus V^\perp$ 中 p 处，不垂直于 V 的 M 中的子空间）的 r 维体积元素。公式（14）描述了投影后的 r-形式 $\bigwedge_\beta \omega^\beta$ 是 $\bigwedge_\delta B^\delta$ 到平面 V 上的正交投影，并且该投影与向量 e_α、e、e_β 和 u_δ 的选择无关。因此，我们构造了 M 到 V 上的自然投影 r-体积元素，并完成了第一种情形的讨论。

在讨论第二种情形之前，让我们将前述构造应用于 $\mathbb{R}^n$ 中的紧超曲面。

命题 2. 对于任意一个经过原点的 r-平面 $L_{r[0]}$ 和任意一点 $q \in L_{r[0]}$，存在唯一一个经过 q 的 $(n-r)$-平面 $L^\perp_{n-r[q]}$，满足

(1) 正交分解 $L_{r[0]} \bigoplus L^\perp_{n-r[q]} = \mathbb{R}^n$，且 (2) 若 $L^\perp_{n-r[q]} \cap \Sigma \neq \emptyset$，则对于任意满足 $L^\perp_{n-r[q]} \nsubseteq T_p\Sigma$ 的点 $p \in L^\perp_{n-r[q]} \cap \Sigma$，存在唯一的（相差一个符号）单位向量 $e_{p,\ q}$，它属于 $L^\perp_{n-r[q]} \setminus T_p\Sigma$。

证明. (1) 由假设可知结论显然。

(2) 假设 $p \in L^\perp_{n-r[q]} \cap \Sigma$。由于 $L^\perp_{n-r[q]} \nsubseteq T_p\Sigma$，$\dim(L^\perp_{n-r[q]} \cap T_p\Sigma) = n-r-1$。于是，在 p 处，我们有正交分解 $L^\perp_{n-r[q]} = (L^\perp_{n-r[q]} \cap T_p\Sigma) \bigoplus U$，其中 U 是 $L^\perp_{n-r[q]}$ 中 $(L^\perp_{n-r[q]} \cap T_p\Sigma)$ 的某个正交补。此外，由于 $\dim(U) = \dim(L^\perp_{n-r[q]}) - \dim(L^\perp_{n-r[q]} \cap T_p\Sigma) = 1$，我们可以在一维仿射子空间 U 中，选取一个以点 p 为起点、长度为一的唯一向量（相差一个符号），结论即得。

□

我们指出，在命题 2 的 (2) 中，通常，截面 $L^\perp_{n-r[q]} \cap \Sigma$ 可能由有限个或无限个连通分支组成。但出于我们的目的，对于任意经过 Σ 上某点的 $(n-r)$-平面，我们只考虑具有有限个截面的超曲面 Σ。

命题 3. 对于任意 $p \in \Sigma$ 以及任意经过 p 的 $(n-r)$-平面 $U \nsubseteq T_p\Sigma$，存在唯一的 r-平面 $L_{r[0]}$ 经过原点，并存在唯一的点 $q \in L_{r[0]}$，使得

(1) $q \in U \cap L_{r[0]}$ 和 $U \bigoplus L_{r[0]} = \mathbb{R}^n$（因此，我们可以将 $U = L^{\perp}_{n-r[q]}$ 记作命题 2 中所示的形式），以及 (2) $\dim(U \setminus T_p\Sigma) = 1$。

此外，根据 (2)，存在唯一的单位向量 $e \in U \setminus T_p\Sigma$，它与在命题 2 的 (2) 中构造的向量 $e_{p,\ q}$重合。

证明. (1) r-平面 $L_{r[0]}$ 可由与 U正交的仿射子空间唯一确定，即，对所有 $y \in U\}$，$L_{r[0]} = \{x \in \mathbb{R}^n, x \cdot y = 0$，因此点 q由 $L_{r[0]} \cap U$处的唯一点给出。

(2) 横截性假设 $U \nsubseteq T_p\Sigma$ 立即推出该结论。

最后，由 (2) 可知，我们可以得到唯一的（相差一个符号）单位向量 $e \in U \setminus T_p\Sigma$。由于向量$e$ 由 U、$L_{r[0]}$、 p 和 q 唯一确定，在命题 2 中令 $U = L^{\perp}_{n-r[q]}$，则唯一向量$e_{p,\ q}$ 恰好就是向量 e。□

注 2. 对任意固定点 $p \in \mathbb{R}^n$， $\mathbb{R}^n$ 的自然正交分解意味着存在一个一一对应：将 r-平面 $L_{r[0]}$ 对应到经过p的一个 $(n-r)$-平面 $L^{\perp}_{n-r[q]}$，其中 q 是 p 在 $L_{r[0]}$上的正交投影。令$G_{n,\ r}$ 为格拉斯曼流形，即 $\mathbb{R}^n$中的所有r-维子空间构成的集合。根据命题 3，若 $p \in \Sigma$，映射

$$\begin{array}{rccc} \phi_p : G_{n,r} & \to & G_{n-r,1} \\ L_{r[0]} & \mapsto & \phi(L_{r[0]}) = e \in L^{\perp}_{n-r[q]} \setminus T_p\Sigma \end{array} \tag{16}$$

除去垂直于 $T_p\Sigma$ 的 r-平面 $L_{r[0]}$（即命题 2 (2) 中某个点 $q \in L_{r[0]}$ 对应的 $L^{\perp}_{n-r[q]} \subseteq T_p\Sigma$）外，这是一个双射。

接下来，我们继续讨论 $\dim(M \cap V^{\perp})$ 的第二种情形。

情形 2。当 $\dim(M \cap V^{\perp}) = n-r$ 时，这意味着 $V^{\perp}$包含在 M 中。我们声称，通过与情况 1 类似的构造， r-形式 $\wedge_\beta \omega^\beta$ 消失。可以在 $M \bigoplus span\{\nu\} = \mathbb{R}^n$ 中选取标准正交基$\{e_\alpha, e_\beta\}$，并在 M 中选取 $\{e_\alpha, u_\delta\}$，使其满足 $(1 \le \alpha \le n-r,\ n-r+1 \le \beta \le n$,$n-r+1 \le \delta \le n-1)$

(1) $span\{e_\alpha\} = M \cap V^{\perp} = V^{\perp}$,

(2) $span\{e_\beta\} = V$, (3)

$span\{e_\alpha, u_\delta\} = M$。

与情况 1 类似，一方面，由于 $p = M \cap V^{\perp}$， $dp = \sum_{i=1}^{n} \omega^i e_i$ 对于某些联络 1-形式ω^i。另一方面，通过写出

$$dp = \sum_{\alpha=1}^{n-r} A^\alpha e_\alpha + \sum_{\delta=n-r+1}^{n-1} B^\delta u_\delta,$$

并与 e_β, $n-r+1 \le \beta \le n$ 取内积，可得

$$\omega^\beta = dp \cdot e_\beta = \sum_{\delta=n-r+1}^{n-1} B^\delta (u_\delta \cdot e_\beta).$$

由此可得

$$\bigwedge_{\beta=n-r+1}^{n}\omega^{\beta}=\bigwedge_{\beta=n-r+1}^{n}\Big(\sum_{\delta=n-r+1}^{n-1}B^{\delta}(u_{\delta}\cdot e_{\beta})\Big)=0. \tag{17}$$

最后一个等式成立，是因为楔积将 $(r-1)$ 个一形式 B^{δ} 变成一个 r 形式，而其中必定有某些 B^{δ} 重复。这就结束了对情形 2 的讨论。

与情况 1 相反，情形 2 表明，若 $V^{\perp}\subset M$（等价地说，V 垂直于 M），则 M 中任意 r 体积元在 V 上的正交贡献为零。综合两种情形，在考虑所有投影的 r 体积 $\wedge_{\beta=n-r+1}^{n}\omega^{\beta}$ 上的积分时，(14) 和 (17) 表明我们可以忽略情形 2，只考虑情况 1，即 $\dim(M\cap V^{\perp})=n-r-1$。

根据上述讨论，我们给出任意紧超曲面 Σ 在任意低维子空间 $L_{r[0]}$ 上的加权投影面积的定义。

定义 2. 给定 Σ 中的紧超曲面 $\mathbb{R}^n$ 以及经过原点的任意 r维平面 $L_{r[0]}$，$1\le r\le n-1$。将 Σ 在 $L_{r[0]}$ 上的（正交）加权投影 r维体积 $\mathcal{V}_r(\Sigma|L_{r[0]})$ 定义为

$$\mathcal{V}_r(\Sigma|L_{r[0]})=\frac{1}{2}\int_{p\in\Sigma}L^{*}_{pq^{-1}}\Big(|\Delta(p)|\bigwedge_{\delta=1}^{r}B^{\delta}(p)\Big), \tag{18}$$

其中，$L^{*}_{pq^{-1}}$ 是左平移 $L_{pq^{-1}}$的拉回，q 是将 $p\in\Sigma$正交投影到 $L_{r[0]}$上的结果，$\Delta(p)$ 是 ν 到 $T_p\Sigma$ 的单位法向量与在 $L^{\perp}_{n-r[q]}$中由（16）定义的唯一向量 e 之间的角，$\bigwedge_{\delta=1}^{r}B^{\delta}(p)$ 是 $T_p\Sigma\setminus L^{\perp}_{n-r[q]}$中的 r维体积。此外，投影 r维体积 $\mathcal{V}_r(\Sigma|L_{r[0]})$ 的平均值定义为

$$E(\mathcal{V}_r(\Sigma|L_{r[0]}))=\frac{\int_{L_{r[0]}\in G_{n,r}}\mathcal{V}_r(\Sigma|L_{r[0]})dL_{r[0]}}{m(G_{n,r})}, \tag{19}$$

其中 $G_{n,\,r}$ 是由 $\mathbb{R}^n$中所有 r维子空间组成的格拉斯曼流形，$dL_{r[0]}$ 是不变密度，定义见下文（20），而 $m(G_{n,\,r})$ 是格拉斯曼流形 $G_{n,\,r}$ 的体积。

我们指出，当 $r=n-1$, $T_pM\cap L^{\perp}_{1[q]}=\{p\}$ 时，因此 $\wedge_{\delta=1}^{n-1}B^{\delta}$ 是 Σ 在 p 处的曲面面积元。因此，(18) 与 (4) 一致。当 $r=1$ 时，对于任意 Σ，我们有平均宽度 (19)。

回顾 [11, 第 202] 页，$L_{r[0]}$ 的不变密度由下式给出

$$dL_{r[0]}=\bigwedge_{\substack{1\le h\le n-r\\ n-r+1\le\beta\le n}}\omega^{h}_{\beta}, \tag{20}$$

其中

$$\omega^{h}_{\beta}=\begin{cases} de_{\beta}\cdot e_{\alpha} & \text{if } 1\le h\le n-r-1,\\ de_{\beta}\cdot e & \text{if } h=n-r,\end{cases}$$

（使用与情况 1 相同的指标 α,β），而 [11, 第 203] 页中的恒等式 (12.36) 给出

$$\int_{G_{r,q}}dL_{r[q]}=\frac{O_{n-q-1}O_{n-q-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-q-1}O_{r-q-r}\cdots O_1O_0} \tag{21}$$

对于 $0\le q<r\le n-1$。我们还指出，体积 $m(G_{n,\,r})=\frac{O_{n-1}\cdots O_{n-r}}{O_{r-1}\cdots O_1O_0}$，其中$O_r=\frac{2\pi^{(r+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}$ (()) 是 $\mathbb{R}^{r+1}$ 中的单位球表面积，而 Γ 表示伽马函数。对于

例如， $O_0 = 2$ （按惯例）， $O_1 = 2\pi$ 和 $O_2 = 4\pi$。注意， r-形式 $\bigwedge_{\beta=n-r+1}^{n} \omega^\beta$（分别为 $\bigwedge_{\delta=1}^{r} B^\delta$）是 $L_{r[q]}$ 中（分别在$T_p\Sigma \setminus L_{n-r[q]}^{\perp}$中）无穷小平行多面体的 r维体积。此外，若 Σ是凸的，则定义 (18) 和 (19) 分别与 [11], 中的 (13.1) 和 (13.2) 一致，因此我们得到了任意超曲面 Σ 的广义投影 r体积。

本文余下部分将致力于推导投影的 r-体积积分的递归公式。回顾一下， [11, 第 216 页（ 13.2）] 凸体投影的（$n-r$）-体积的积分（简称平均（$n-r$）-体积）定义为

$$I_r(K) = \int_{G_{n,r}} V(K'_{n-r}) dL_{r[0]} = \int_{G_{n,n-r}} V(K'_{n-r}) dL_{n-r[0]}, \tag{22}$$

其中， K'_{n-r} 是由以下交点组成的凸集： $L_{n-r[0]}$ 与经过 K 各点且垂直于$L_{n-r[0]}$ 的 r-平面相交所得的交点； V（K'_{n-r}）是 K'_{n-r}的（$n-r$）-体积。使用我们的记号，这意味着 V（K'_{n-r}） $= \mathcal{V}_{n-r}$（ $K|L_{n-r[0]}$）。若将（22）中 I_r（K）的定义推广到具有光滑边界 $\Sigma = \partial K$ 的任意紧致子流形 K，并以（18）中的体积替换（$n-r$）-体积 V（K'_{n-r}），则 Σ 的平均（$n-r$）-体积定义为

$$I_r(\Sigma) = \int_{G_{n,n-r}} \mathcal{V}_{n-r}(\Sigma|L_{n-r[0]}) dL_{n-r[0]} \tag{23}$$

这与（19）中所示的完全相同（相差一个常数 $m(G_{n,r})$ 。

定理 4. 设 K 是 n维紧致子流形，位于 $\mathbb{R}^n$ 中，其边界为 $\Sigma = \partial K$。将 $I_r(K)$记为（23）中定义的平均（$n-r$）体积。则有递归公式

$$I_r(K) = \frac{2}{O_{r-1}} \int_{G_{n,n-1}} I_{r-1}^{(n-1)}(K'_{n-1}) dL_{n-1[0]}, \tag{24}$$

其中， O_{r-1} 是 $\mathbb{R}^r$中单位球的表面积，而 $I_{r-1}^{(n-1)}(K'_{n-1})$是 K 在 $L_{n-1[0]}$上的投影 K'_{n-1} 的平均（$r-1$）体积。

注 3. 在 [11, 页，作者在假设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的凸体的条件下，推导出了相同的递归公式（参见该处的恒等式（13.7））。我们注意到，引入投影 r体积的新概念（即（4）和（18））后，即使对于非凸区域 K ，也可以应用类似的论证。定理 4 的证明主要基于恒等式（25）和（26），而这些恒等式与 K的凸性无关。

证明。给定 $\mathbb{R}^n$ 中的 r 平面 $L_r, 1 \le r \le n-1$。将 $L_{i+1}^{(r)}$ 记作包含在 L_r 中的 $(i+1)$ 平面，其中 $i+1 \le r \le n-1$。在 [11, 第 207 页（12.53）], 中，作者考察了线性子空间对 $(L_r, L_{i+1}^{(r)})$ 的集合的密度，并得到恒等式

$$dL_{i+1}^{(r)} \wedge dL_r^* = dL_{r[i+1]} \wedge dL_{i+1}, \tag{25}$$

其中， dL_r^* 是定向 r平面的密度， L_r 是相对于固定的（$i+1$）平面的 r平面的密度。若考虑 $\mathbb{R}^n$ 中经过固定原点 O 的线性空间，则（25）仍然成立，并可写为

$$dL_{i+1[0]}^{(r)} \wedge dL_{r[0]}^* = dL_{r[i+1]} \wedge dL_{i+1[0]}. \tag{26}$$

特别地，当 L_r 是超平面，且 $L^{(r)}_{i+1[0]}$ 在 L_r中具有最大维数，即 $r=n-1$、$i+1=r$时，（26）变为

$$dL^{(n-1)}_{r[0]} \wedge dL^{*}_{n-1[0]} = dL_{n-1[r]} \wedge dL_{r[0]}. \tag{27}$$

类似地，将 (26) 限制在超平面 $L_{n-1[0]}$ 上（即将 n 替换为 $n-1$，并将 $i+1$ 替换为 $r-1$），可得

$$dL^{(r)}_{r-1[0]} \wedge dL^{*(n-1)}_{r[0]} = dL^{(n-1)}_{r[r-1]} \wedge dL^{(n-1)}_{r-1[0]}, \tag{28}$$

其中，上标 $(n-1)$ 强调此处考虑的子平面包含在平面 $L_{n-1[0]}$ 中。例如，$dL^{*(n-1)}_{r[0]}$ 是包含于 $L_{n-1[0]}$ 中、经过原点 O 的定向 r-平面的密度。将 (27) 乘以 $dL^{r}_{r-1[0]}$，将 (28) 乘以 $dL_{n-1[0]}$，并利用一个定向平面等价于两个无向平面这一事实，可得 $dL^{*}_{n-1[0]} = 2dL_{n-1[0]}$ 和 $dL^{*(n-1)}_{r[0]} = 2dL^{(n-1)}_{r[0]}$，于是得到

$$dL^{(n-1)}_{r[r-1]} \wedge dL^{(n-1)}_{r-1[0]} \wedge dL_{n-1[0]} = dL^{(r)}_{r-1[0]} \wedge dL_{n-1[r]} \wedge dL_{r[0]}. \tag{29}$$

现在让我们对所有的 $L_{r-1[0]}$ 和 $L^{(n-1)}_{r[0]}$ 对进行积分。令 Σ'_{n-1} 为 Σ 在 $L_{n-1[0]}$上的投影（$n-1$）体积。注意，Σ 在 $L_{n-r[0]}$ 上的投影（$n-r$）体积，等于 Σ'_{n-1} 在 $L_{n-r[0]}$ 上的投影（$n-r$）体积（按重数计）。一方面，对（29）式左边积分后得到

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{n,r}} \int_{G_{r,r-1}} \int_{G_{n-1,r}} V(K'_{n-r}) dL^{(n-1)}_{r[r-1]} \wedge dL^{(n-1)}_{r-1[0]} \wedge dL_{n-1[0]} \\
&= \int_{G_{n,r}} I^{(n-1)}_{r-1}(K'_{n-1}) dL_{n-1[0]} \wedge dL^{(n-1)}_{r[r-1]} \\
&= \int_{G^{(n-1)}_{r,r-1}} \int_{G_{n,n-1}} I^{(n-1)}_{r-1}(K'_{n-1}) dL_{n-1[0]} \wedge dL^{(n-1)}_{r[r-1]} \\
&= \int_{G_{n,n-1}} I^{(n-1)}_{r-1}(K'_{n-1}) dL_{n-1[0]} \cdot \int_{G^{(n-1)}_{r,r-1}} dL^{(n-1)}_{r[r-1]} \\
&= \frac{O_{n-r-1}}{2} \int_{G_{n,n-1}} I^{(n-1)}_{r-1}(K'_{n-1}) dL_{n-1[0]},
\end{aligned} \tag{30}$$

这里我们在前两个恒等式中用到了 $\int_{G_{r,\,r-1}} \int_{G_{n-1,\,r}} = \int_{G_{n-1,\,r-1},\,r} \int_{G_{n,\,r}} = \int_{G_{n,\,n-1}} \int_{G^{(n-1)}_{r\,r-1},}$，并在最后一个恒等式中用到了 (21) $\frac{O_{n-r-1}}{2} = \int_{G^{(n-1)}_{r\quad,\,r-1}} dL^{(n-1)}_{r[r-1]}$。另一方面，我们推导出 (29) 右侧的积分

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{n,r}} \int_{G_{r,r-1}} \int_{G_{n-1,r}} V(K'_{n-r}) dL^{(r)}_{r-1[0]} \wedge dL_{n-1[r]} \wedge dL_{r[0]} \\
&= \int_{G_{r,r-1}} \int_{G_{n-1,r}} I_r(K) dL^{(r)}_{r-1[0]} \wedge dL_{n-1[r]} \\
&= \frac{O_{r-1}}{2} \frac{O_{n-r-1}}{2} I_r(K).
\end{aligned} \tag{31}$$

同样，我们在最后一个等式中用 (21) 得到了 $\int_{G_{r,\ r-1}} dL^{(r)}_{r-1[0]} = \frac{O_{r-1}}{O_0}$ 和 $\int_{G_{n-1,\ r}} dL_{n-1[r]} = \frac{O_{n-r-1}}{O_0}$。结合 (30) 和 (31)，得到递归公式 (24)。□

References

[1] Yu Aminov, *The geometry of submanifolds*, CRC出版社，2001年。[2] Philippe Bouafia 和 Thierry De Pauw, *Integral geometric measure in separable banach space*, 《数学年刊》363（2015），第1期，269–304页。[3] Gulbank Chakerian, *Sets of constant width*, 《太平洋数学杂志》19（1966），第1期，13–21页。[4] Theo de Jong, *Volume of submanifolds*, 《数学学期报告》60（2013），第1期，81–83页。[5] J Favard, *Une definition de la longueur et de l'aire*, 《巴黎科学院院报》194（1932），344–346页。[6] Richard J Gardner, *Geometric tomography*, 第2版，第6卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[7] Yen-Chang Huang, *Cauchy's surface area formula in the heisenberg groups*, 《伊比利亚美洲数学杂志》（2021）。[8] Sheng Jiang, *Angles between euclidean subspaces*, 《几何学专论》63（1996），第2期，113–121页。[9] Daniel A Klain、Gian-Carlo Rota等, *Introduction to geometric probability*, 剑桥大学出版社，1997年。[10] Jianming Miao 和 Adi Ben-Israel, *On principal angles between subspaces in rn*, 《线性代数及其应用》171（1992），81–98页。[11] Luis Antonio Santal´o, *Integral geometry and geometric probability*, 剑桥大学出版社，2004年。[12] Rolf Schneider, *Convex bodies: the brunn–minkowski theory*, 剑桥大学出版社，2014年。[13] Emmanuel Tsukerman 和 Ellen Veomett, *Brunn-minkowski theory and cauchy's surface area formula*, 《美国数学月刊》124（2017），第10期，922–929页。[14] Chunna Zeng、Shikun Bai 和 Yin Tong, *A new integral formula for the angle between intersected submanifolds*, 《不等式与应用杂志》2016（2016），第1期，1–9页。[15] Gaoyong Zhang, *Dual kinematic formulas*, 《美国数学会会刊》351（1999），第3期，985–995页。

National University of Tainan、 Tainan city、 Taiwan R.O.C.
Email address: ychuang@mail.nutn.edu.tw