# Kerker变换：在定向谐波的离散基底中展开场

Parker R. Wray‡ 和 Harry A. Atwater，†, *
‡加州理工学院电气工程系，美国加利福尼亚州帕萨迪纳，邮编 91125
†加州理工学院 Thomas J. Watson应用物理实验室，美国加利福尼亚州帕萨迪纳，邮编 91125* 通讯作者
haa@caltech.edu

**摘要**
我们提出一种线性坐标变换，可将散射和发射问题的解展开为前向和后向定向矢量谐函数的基底。该变换为不同波长与尺寸之比范围内具有定向散射/发射的系统提供直观的代数和几何解释。通过复平面中的开环和闭环等值线，可以轻松理解 Kerker效应、广义 Kerker、横向Kerker效应以及其他形式的高方向性散射/发射。此外，任何散射/发射系统的理论最大指向性都可以轻松确定。变换后的远场谐波坐标与极角无关；前向和后向谐波之间的干涉相互作用较弱，而同类型谐函数之间的干涉会改变指向性。文中给出了高方向性散射的示例，包括平面波照明下产生 Kerker 散射的磁性球体和产生定向散射的光子纳米喷流，以及与发射体近场耦合的亚波长球体产生的广义后向 Kerker 发射和横向 Kerker 发射。最后，将 Kerker变换下散射/发射问题的解与传统的米氏展开进行对比。

**引言**
球谐函数是一组定义在球体上的基本振动模式，有助于深入理解粒子对电磁波的散射/发射[1–3]。尽管这些谐波对于理解波长尺度物体的散射/发射至关重要，但其类似原子的空间轮廓并不能为描述角动量或定向散射/发射等现象提供简洁的表示方法。幸运的是，对球谐函数进行线性变换，便能以一种富有洞见且在数学上简单的方法研究光学自旋和轨道角动量[4,5]。本文表明，通过另一种同样简单的线性变换，球谐函数也能提供一种直观的基底，用于描述强定向散射/发射。因此，所得基底为研究高度定向现象提供了一个框架，这对电磁学中的许多领域都极具价值[6–16]，同时保留了使球谐函数广受欢迎的诸多优点。

在 Mie（矢量球谐函数）框架下，Kerker效应是一种通过近乎精确地抵消前向或后向强度之一，实现较大前向与后向散射/发射比的方法。这是通过相同阶数的电型（$\boldsymbol{\Psi}^{E}_{nmp}$）与磁型（$\boldsymbol{\Psi}^{M}_{nmp}$）类原子模式的精确干涉实现的，其中 $n$ 是极量子数，$m$ 是方位量子数，而 $p$ （0 = 为偶，1 = 为奇）是方位奇偶性[16]。由谐波的广义组合导致前向或后向近乎精确抵消的情形，归类为广义Kerker效应[17,13]。这不要求模式之间的相对振幅或相位受到任何限制，只要求它们共同干涉，从而在一个方向上实现精确抵消。两个方向上的抵消称为横向Kerker效应[12]。在精确前向或后向方向上的这些抵消条件，可形式化为精确前向（$\theta = 0$）或后向（$\theta = \pi$）功率流[18,19]表达式中的零点。原则上，这类零解有无穷多个。除少数简单示例（例如 $c^{M}_{n1p} = c^{E}_{n1p}$）外，这些解可能难以直观理解，因为它们源自包含 $n$、 $m$、 $p$、 $t$ 项的二次多项式。此外，定向散射是一个更全面的概念，不一定涉及 Kerker 条件。它还涵盖其他指标，例如指向性和旁瓣行为。精确前向和后向功率流的零条件无法揭示这些性质。许多研究表明，不满足零条件的其他干涉组合（例如，不产生 Kerker效应的组合）也能产生高度定向散射/发射。例如，光子纳米喷流通常具有大量旁瓣，同时前向功率流占主导且指向性很强，但后向功率流并未趋近于零，仍可能不可忽略[14]。因此，重要的是要注意，尽管 Kerker变换以 Milton Kerker 的开创性研究命名，Kerker基

旨在高效表示所有高度定向散射/发射，而不仅仅是 Kerker 条件。该基还旨在帮助深入理解描述方向性的指标，例如指向性和旁瓣。

为了说明 Mie 基中定向散射的一般复杂性，考虑两个系统

$$\begin{aligned} &System\ 1 \quad -2a\boldsymbol{\Psi}^{E}_{111} - 2ib\boldsymbol{\Psi}^{E}_{211} + c\boldsymbol{\Psi}^{E}_{311} - ic\boldsymbol{\Psi}^{M}_{310}:: \\ &System\ 2 \quad -2a\boldsymbol{\Psi}^{E}_{111} - 2b\boldsymbol{\Psi}^{M}_{210} + c\boldsymbol{\Psi}^{E}_{311} - ic\boldsymbol{\Psi}^{M}_{310}, \end{aligned}$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{z}^{+} \ll \infty$。这些系统是否具有方向性？哪个系统的前向与后向比更大？旁瓣方面发生了什么？任一系统能否属于 Kerker、广义 Kerker 或横向 Kerker 情形？我们能对指向性作出什么推断？这些问题的答案如何取决于 $a$、 $b$ 和 $c$ 的选择？随着引入相位并考虑更多谐波，这些问题会变得更加复杂。其困难根本上源于米氏谐波：它们旨在帮助人们理解类原子行为，而非方向性。更复杂的是，许多定向散射的实例都发生在跨越波动与射线光学区域的粒子中，例如光子纳米喷流。当夹杂物中约有 2 个显著谐波时（例如尺寸较小的夹杂物），产生方向性的谐波干涉条件很简单。在谐波数量非常多的极限情况下（例如夹杂物尺寸远大于波长），直接进行谐波分析并不可行，此时需通过射线光学近似来理解方向性。在这两个区域之间（2–50 个谐波），射线光学可能不够准确，而波动光学又不够直观（例如上文提出的 4 谐波系统示例）。

实现定向散射/发射的参数空间十分广阔。受 Kerker 效应启发，我们提出一种线性坐标变换，旨在提供一种更直观的基底，用于分析在波动光学计算可行的所有尺寸范围内的定向散射/发射，同时保留球矢量谐波的重要特性，这些特性使其不可或缺。这种线性变换称为 Kerker变换，由此得到的基底称为 Kerker基；它由基于米氏谐波构造的前向和后向型谐波组成。Kerker谐波具有以下优点：前向和后向型谐波之间的相互作用较弱；同类型谐波之间的干涉则经过专门设计，可分别控制相应方向的指向性和旁瓣。在这一框架下，定向散射的代数条件简单易懂，并且可基于开闭曲线在复平面中作出直观的几何解释。值得注意的是，Kerker 散射、横向 Kerker 散射（同时抑制前向与后向强度）以及广义Kerker散射的条件都很容易直观理解。理论最大指向性的条件也同样易于直观理解。

Kerker 与 Mie 谐波展开之间的区别概括如下：

*Kerker* 框架能够轻松表示定向散射，而类原子散射则源于复杂的干涉。在 *Mie* 框架中，类原子散射易于表示，而定向散射则源于复杂的干涉。

本文其余部分分为三个章节。第一节简要回顾米氏展开，并介绍 Kerker 展开。第二节结合电磁场，详细研究 Kerker 展开的特征。重点强调并讨论 Kerker 基为定向系统带来的新见解，并将其与 Mie 基进行比较。最后一节介绍 Kerker、横向 Kerker、广义 Kerker以及一般高度定向散射/发射系统的案例研究，并比较以 Kerker 基和 Mie 基表示的解。本文还讨论了尺寸与波长比范围广泛的散射系统和发射系统。此外，我们也回答了上文提出的关于*系统1*和*系统2*的示例问题。最后，我们总结研究结果。

**定义 Kerker 变换**

米氏理论用电型（$\boldsymbol{\Psi}^{E}_{nmp}$）和磁型（$\boldsymbol{\Psi}^{M}_{nmp}$）球矢量谐波展开向外传播的散射或发射电磁场。顾名思义，电型谐波在远场中模拟电型类原子多极模式，而磁型谐波则模拟磁型类原子多极场模式。在 Mie 框架下，频域中的时谐电场和磁场展开为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{1}\left(c^{M}_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{M}_{nmp}(\boldsymbol{r},k) + c^{E}_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{E}_{nmp}(\boldsymbol{r},k)\right) \\ \boldsymbol{H} &= \frac{-ik}{\mu\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{1}\left(c^{E}_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{M}_{nmp}(\boldsymbol{r},k) + c^{M}_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{E}_{nmp}(\boldsymbol{r},k)\right), \end{aligned} \quad (1)$$

其中，$c^{E}_{nmp}$ 和$c^{M}_{nmp}$ 分别是复电型和磁型散射系数。尽管这些系数被称为电型和磁型，但实际上，两个系数都可以根据所观察的是电场还是磁场，对电型或磁型谐波进行缩放

。例如，磁场会由电型系数缩放磁型谐波。）这是因为 $\boldsymbol{H}$ =? -. 01D $\nabla \times \boldsymbol{E}$，而矢量球谐函数在旋度算子作用下会改变类型：$\nabla \times \boldsymbol{\Psi}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r},k) = k\boldsymbol{\Psi}^{1-t}_{nmp}(\boldsymbol{r},k)$，其中$t = 0 = M$ 和$t = 1 = E$。矢量球谐函数由标量球谐函数和球贝塞尔函数构造而成，详见附录。本文中的所有展开都采用足够通用的形式，以表示线性、各向同性均匀宿主介质中的任意可实现电磁场分布；该介质的磁导率为$\mu$，介电常数为$\epsilon$。假设所有场均为角频率$\omega$下的时间谐波。随后通过傅里叶变换生成任意时间脉冲。时间谐波依赖关系为隐含条件，不作明确写出。所有粗体变量均为向量，根据物理背景属于 C³ 或 R³，，并采用标准球基$\boldsymbol{e}$Q3、 $\boldsymbol{e}$Q$_{\theta}$，和$\boldsymbol{e}$Q$_{\phi}$。空间位置表示为$\boldsymbol{r}$ =R$r\boldsymbol{e}$Q$_{r}$ + $\phi\boldsymbol{e}$Q$_{\phi}$ + $\theta\boldsymbol{e}$Q$_{\theta}$U，其中$r$、 $\phi$和$\theta$ 分别为径向、方位角和极坐标。宿主介质的波数为$k^2 = \omega^2\epsilon\mu$。在米氏展开和 Kerker展开中，我们都采用一种便捷方法：为谐波指定类型变量$t \in [0,1]$和宇称变量$p \in [0,1]$，以便在适用时用紧凑形式书写方程。因此，$1-t$ 等价于翻转谐波类型，而$1-p$ 会翻转宇称。这种紧凑形式有助于阐明米氏与Kerker基组之间的根本差异；我们认为，在初次介绍Kerker变换时，传达这一概念至关重要。相应地，我们还对米氏谐波采用余弦与正弦展开（因此引入宇称变量和$m \geq 0$），因为这也最能体现米氏展开与Kerker展开之间的差异。不过，我们注意到，复方位角表示可以优雅地简化下文讨论的许多解析表达式。因此，我们建议读者在纸上分别写出每种类型和宇称下的展开，并同时写出复方位角形式。这样做将有助于揭示 Kerker变换的简洁性，而所选用的记号在一定程度上掩盖了这一点。全文中，$n$、 $m$、 $p$和$t$ 的求和上下限均与方程 1 中的上下限相同。我们将省略求和上下限的明确写法，改用简写 Snmpt。

Kerker基将电场和磁场展开为高度定向的前向（$\boldsymbol{\Upsilon}^{f}_{nmp}$）和后向型（$\boldsymbol{\Upsilon}^{b}_{nmp}$）谐波。在Kerker框架下，场的展开式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \sum_{nmp}\left(c^{f}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{f}_{nmp}(\boldsymbol{r},k) + c^{b}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{b}_{nmp}(\boldsymbol{r},k)\right)\\ \boldsymbol{H} &= \frac{k}{\mu\omega}\sum_{nmp}(-1)^{p}\left(c^{f}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{f}_{nm1-p}(\boldsymbol{r},k) - c^{b}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{b}_{nm1-p}(\boldsymbol{r},k)\right),\end{aligned} \quad 2$$

其中，$c^{f}_{nmp}$ 和$c^{b}_{nmp}$ 分别是复数前向和后向散射系数。不同于米氏展开，同一类型的Kerker 系数只与相同类型的谐波相乘。（例如，在电场和磁场中，前向系数始终与前向谐波相乘。）这是因为Kerker谐波在旋度运算下不会改变类型：$\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r},k) = (-1)^{t-p}ik\boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nm1-p}(\boldsymbol{r},k)$，其中$t = 0 = f$ 和$t = 1 = b$。相反，旋度会引起Kerker谐波的宇称变化，而改变宇称等价于方位角相移， $\boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nmp}(r,\theta,\phi,k) = \boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nm1-p}$?$r,\theta,\phi + \frac{\pi}{2}$， $k$D。在旋度运算下保持类型不变，是简化定向系统中解析表达式的重要组成部分。Kerker谐波通过线性变换与矢量球谐函数相关

$$\boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r},k) = (-1)^{t(n+m+1)}(i)^{n}\left(\boldsymbol{\Psi}^{M}_{nmp}(\boldsymbol{r},k) + (-1)^{t-p}i\boldsymbol{\Psi}^{E}_{nm1-p}(\boldsymbol{r},k)\right). \quad 3$$

Kerker 谐波的完整分量展开见附录。Kerker 系数与 Mie 系数之间的关系为

$$c^{t}_{nmp} = \frac{1}{2}(-1)^{t(n-m-1)}(-i)^{n}\left(c^{M}_{nmp} + (-1)^{1-t-p}ic^{E}_{nm1-p}\right), \quad 4$$

其中 $t = 0 = f$ 和 $t = 1 =$ $b$。因此，电磁散射/发射问题可以在 Ker
ker 或 Mie 基中求解，然后再
根据分析需要变换到另一种基。

需要注意的是，尽管 Kerker谐波由电型和磁型米氏谐波的叠加构成，但这一基底并不等同于用于研究角动量的变换。Kerker基不保持圆偏振或螺旋度（例如，它不等同于 $\boldsymbol{\Psi}^{M}_{nmp} \pm \boldsymbol{\Psi}^{E}_{nmp}$）。Kerker谐波不是轨道角动量算符的特征向量（$^{1}{}_{k}\nabla\times$），这一点从上文讨论的旋度所导致的宇称变化中显而易见。尽管如此，已有多项研究探讨了 Kerker条件与适当旋转对称的散射/发射系统中螺旋度守恒之间的联系[5,20]。通过构造同样保持手性的 Kerker谐波，也可以在 Kerker基中研究这类联系。为此，可对常规 Kerker谐波进行线性变换，使其包含两种宇称。例如， $\boldsymbol{Q}^{t}_{nmh}(\boldsymbol{r},k) = \boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nm0}(\boldsymbol{r},k) + (-1)^{t-h}i\boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nm1}(\boldsymbol{r},k)$，其中，h $= 0 = L$ 表示左旋偏振，h $= 1 = R$ 表示右旋偏振。该基底是角动量算符的特征向量，因为，

$\nabla \times \boldsymbol{Q}^t_{nmh} = (-1)^h k \boldsymbol{Q}^t_{nmh}$。因此，无论系统是否具有角动量守恒，都可以利用 Kerker谐波高效地理解其中的定向散射。

**Kerker变换的特征**

与米氏谐波相比，Kerker基的一个主要优势是在远场中具有更简洁的表达式。远场Kerker谐波为

$$\boldsymbol{\Upsilon}^t_{far,nmp}(\boldsymbol{r},k) = i\frac{e^{ikr}}{kr} X^t_{nm}(\theta) \begin{bmatrix} 0\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ +sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2} + t\pi\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ +cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix} + O\left\{\frac{1}{(kr)^2}\right\}, \quad 5$$

其中

$$X^t_{nm}(\theta) = \frac{(-1)^{t(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}}\left(\tau^m_n(\theta) + (-1)^t m\pi^m_n(\theta)\right) \quad 6$$

是一个实值函数，用于描述前向 $X^f_{nm}(\theta)$和后向 $X^b_{nm}(\theta)$的极角依赖性。方程 5 表明，矢量分量之间仅通过简单的三角关系有所差异。方程 6 定义了 Kerker 极角函数与 Mie极角函数 $\tau^m_n(\theta)$ 和 $m\pi^m_n(\theta)$ 之间的关系。根据构造，远场Kerker谐波的所有矢量分量都具有相同的极角依赖性。这种极角不变性是Kerker谐波的一个关键特征，使我们能够专注于 $X^t_{nm}$，从而理解其方向性特征。相比之下，米氏展开的每个矢量分量都具有不同的极角展开。

图1绘制了量子数达到 $n = 4$ 和 $m = 4$时的 Kerker ($X^t_{nm}$) 和 Mie ($\tau^m_n, m\pi^m_n$，上象限) 极角函数。

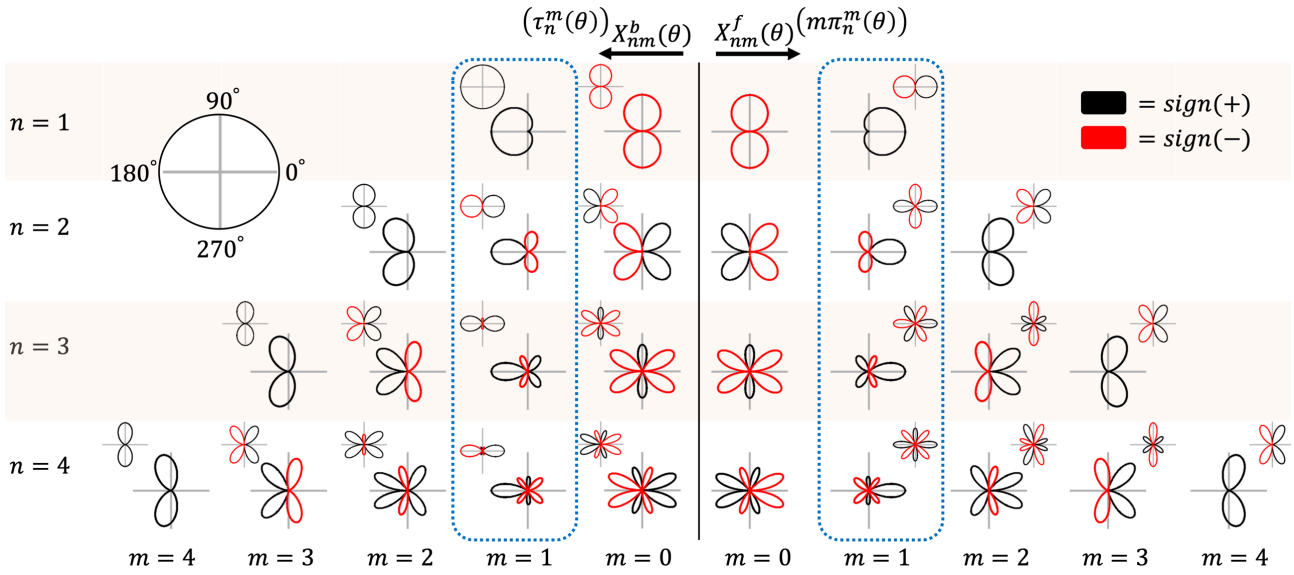


**图1**。Kerker 和 Mie 极角函数表（右上角）。行和列分别表示极角量子数和方位量子数。前向型和后向型函数及其对应的 $m\pi^m_n$ 和 $\tau^m_n$ 函数分别位于右侧和左侧。函数以极坐标绘制，极角由左上角的图例标示。半径的正值和负值分别以黑线和红线表示。蓝色虚线圈出的列包含在精确前向或后向方向上取非零值的极角函数。

从这幅图中，我们可以看到 $X^t_{nm}$ 的三个特点，这些特点旨在便于研究定向系统:

(1) $X^t_{nm}$ 两种类型之间存在简单的关系：后向Kerker函数是前向Kerker函数旋转 180°得到的。（即，$X^t_{nm}(\theta) = X^{1-t}_{nm}(\pi - \theta)$。）这不仅便于理解，还意味着只需计算并存储一种类型。相比之下，Mie极角函数之间不存在旋转关系，其形状也截然不同。这是因为$\pi^m_n$ 与缔合勒让德多项式相关，而$\tau^m_n$ 与缔合勒让德多项式的导数相关。此外，Mie极函数的180°旋转会导致不同的反演宇称

关系，这些关系取决于量子极数。即， $\tau_n^m(\pi-\theta) = (-1)^{n-m+1}\tau_n^m(\theta)$，且 $\pi_n^m(\pi-\theta) = (-1)^{n-m}\pi_n^m(\theta)$。这进一步增加了为米氏谐波推导直观干涉关系的难度，因为波瓣的符号会随极数和谐波类型而改变。Kerker函数无需这种符号关系。

(2) Kerker极函数具有很强的方向性，而且主瓣和旁瓣的概念清晰。因此，这些函数能够轻松表示定向场。这与米氏对应函数不同，后者没有明确的旁瓣定义。对于每个 Kerker 谐波，瓣的总数可由 $n-m+1$ 直接给出，而非主导半球中旁瓣所占的比例则由 $ceil?^{n-m}{}_2$ D.§1 给出。此外，对于所有瓣，极量子数较大的谐波具有更窄的波束宽度。因此，只需了解 Kerker 谐波的量子数，就能推断出远场方向性、相对波束宽度和旁瓣情况，包括每个谐波在前向和后向半球中的旁瓣集中程度。米氏极函数无法提供这样的直观信息，因为它们并非为此目的而设计。例如，对比 $\tau_3^1$ 和 $\pi_3^1$的场分布。这些米氏极函数的瓣数、瓣的振幅、宽度和符号都各不相同。

(3) 米氏极函数既不相互正交，彼此之间也不正交。相比之下，同类型且方位角数相同的 Kerker 极函数在区域 $\int \partial\theta \sin(\theta) X_{nm}^t(\theta) X_{n'm}^t(\theta)^{\pi}{}_0$ 上相互正交。

与米氏理论类似，图1 中的 $m=1$ 列（以蓝色虚线圈出）是唯一具有非零精确前向场或后向场的列。基于物理原因，这一列尤为重要，通常占主导地位。例如，散射／发射物体的对称性（如其为球形）可能会排除 $m \neq 1$。在 Kerker 基中，$m=1$ 列的主瓣恰好以正前向（$\theta=0$）或正后向（$\theta=\pi$）方向为中心，且在相反方向上完全没有场。我们将在后文展示，这一特性简化了计算前向与后向比值的解析表达式。尽管如此，Kerker 基仍是对所有 $m \geq 1$ 的定向展开，如图1所示。只要场能够表示为球谐展开，它就能将任意散射／发射系统描述为定向谐波的展开。§2

根据表面等效原理，散射场/辐射场也可表示为电流密度（$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}\mathrm{Q}_r \times \boldsymbol{E}$）和磁流密度（$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{e}\mathrm{Q}_r \times \boldsymbol{H}$）。这类关系在近场到远场变换等应用中具有重要意义。Kerker基与相应的前向（$\boldsymbol{j}_{nmp}^f$）和后向驱动电流密度基相配，其中 $\boldsymbol{j}_{nmp}^t(\boldsymbol{r},k) = \boldsymbol{e}\mathrm{Q}_r \times \boldsymbol{\Upsilon}_{nmp}^t(\boldsymbol{r},k)$。由此

$$\boldsymbol{j}_{far,nmp}^t(\boldsymbol{r},k) = i\frac{e^{ikr}}{kr}X_{nm}^t(\theta)\begin{bmatrix} 0\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ -cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2} + t\pi\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix} + O\left\{\frac{1}{(kr)^2}\right\}, \quad 7$$

我们发现，Kerker远场谐波的所有优良性质同样适用于Kerker远场电流密度。特别是，$X_{nm}^t$ 依赖关系保持不变。这为理解哪些电流分布会在远场产生定向散射提供了一种方法。

利用远场Kerker基，时间平均远场坡印廷矢量为

$$\langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu\omega kr^2}(\|A(\phi,\theta)\|^2 + \|B(\phi,\theta)\|^2)\hat{\boldsymbol{e}}_r, \quad 8$$

其中

$$A(\theta,\phi) = \sum_{nmp} cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(c_{nmp}^f X_{nm}^f(\theta) + c_{nmp}^b X_{nm}^b(\theta)\right)$$
$$B(\theta,\phi) = \sum_{nmp} sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(c_{nmp}^f X_{nm}^f(\theta) - c_{nmp}^b X_{nm}^b(\theta)\right). \quad 9$$

§1 请注意， m极角函数的定义域为 $\theta$ $\in [0,\pi]$ 并计入波瓣 ithin thi角区域。

§2 与米氏谐波一样，Kerker 谐波也是相对于全局坐标系定义的。为了高效表示偏离全局定义的前向/后向方向的定向光束，可以在与目标方向对齐的新全局坐标系下求解该系统，也可以使用基于 Wigner-D 函数的矢量球谐函数旋转定理。

方程9中的? $c^f_{nmp}X^f_{nm}(\theta) \pm c^b_{nmp}X^b_{nm}(\theta)$D项表明，理解前向和后向极角函数如何相互干涉是有益的。幸运的是，这些极角函数经过专门设计，可将能量集中在各自的主导半球内。因此，前向和后向谐波之间的干涉很弱。换言之，一类（前向/后向）的主瓣只会与另一类（后向/前向）的旁瓣发生相互作用。图2阐释了这一概念。从图中可以看出，这种微弱的相互作用为直观理解不同类型模式之间的干涉提供了一种便捷方法。可以认为它们在各自的主导半球内近似互不干涉。 §3 这为近似复杂系统中的谐波干涉提供了一条经验法则。相比之下，Mie谐波的电型和磁型之间存在很强的相互干涉，因此产生的散射/发射瓣不具有任何经验法则可循。

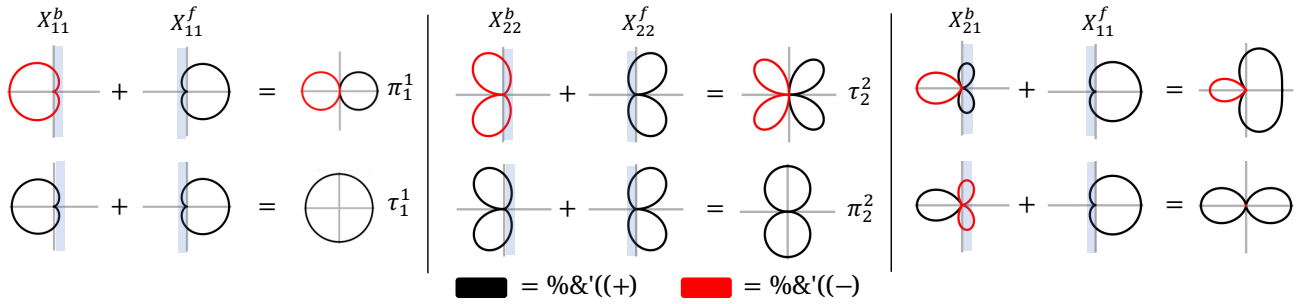


**图2**。相反类型 Kerker 极角函数之间干涉的示例。颜色约定和角度方向遵循图

1 $X^f_{nm} - X^b_{nm}$ $X^f_{nm} +$ 中的定义。 $X^b_{nm}$

因此，顶行和底行分别对应于和干涉。阴影区域标示了每个函数的非主导半球。左侧和中间的示例展示了如何还原米氏函数，而右侧示例则展示了不同极量子数之间更一般的干涉。 这些函数绘制在极坐标中，极角由左上角的图例给出。半径的正值和负值分别用黑线和红线表示。

图2最右侧的示例展示了不同类型、不同量子数的极角函数之间最一般的干涉形式。图2左侧和中间的示例展示了量子数相同、类型相反的极角函数之间的干涉。这两种情况很重要，因为它们体现了可还原出米氏角函数的逆变换。通过重新排列方程6，可以看到 $X^f_{nm}(\theta) + (-1)^{n+m+1}X^b_{nm}(\theta) = 2\tau^{|m|}_n(cos\,\theta)$ 和 $X^f_{nm}(\theta) - (-1)^{n+m+1}X^b_{nm}(\theta) = 2m\pi^{|m|}_n(\cos\theta)$。更一般地说，在Kerker基中，通过产生逆Kerker变换的干涉可以实现类原子场：

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}_{nmp}(\boldsymbol{r}) = (-1)^{t(1-p)}i^{-(n+t)}\frac{1}{2}\boldsymbol{\Upsilon}^f_{nmt-p}(\boldsymbol{r}) - (-1)^{n+m+t}\boldsymbol{\Upsilon}^b_{nmt-p}(\boldsymbol{r}) \qquad 10$$

其中，同样地，$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}_{nmp}(\boldsymbol{r})$ 是米氏矢量谐波，且 $t = 0 = M$ 和 $t = 1 = E$。方程10和方程3将我们在引言中用斜体概括的内容形式化。定向场需要在米氏展开中进行复杂的干涉，而类原子场需要在Kerker展开中进行复杂的干涉。

根据远场坡印廷矢量，远场强度定义为 $I(\theta,\phi) = \langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle \cdot r^2\boldsymbol{e}\mathrm{Q}_r$。沿方位角方向对该强度积分可得

$$I(\theta) = I^f_0 + I^f_1 + I^b_0 + I^b_1 = \frac{\pi}{\mu\omega k}\sum_{tmp}(1+\delta_{m0})\left\|\sum_n c^t_{nmp}\,X^t_{nm}(\theta)\right\|^2, \qquad 11$$

其中，$(1+\delta_{m0})$ 项源于 $c^M_{n01} = c^E_{n01} = 0$ 这一事实。有趣的是，方程11表明，方位角积分强度确实不受前向和后向谐波之间的干涉，也不受不同宇称之间干涉的影响。这再次体现了 Kerker 谐波的另一项实用特性。总方位角积分强度可视为由四个互不干涉的部分场产生，每个部分场的强度为 $I^t_p(\theta) = \frac{\pi}{\mu\omega k}\sum_m (1+$

$\delta_{m0})\left\|\sum c^t_{nmp}\,X^t_{nm}(\theta)\right.$ ! $\left.\right\|^2$。对于任意给定的极角，这些部分强度在几何上可解释为从原点出发、由 $\sum c^t_{nmp}X^t_{nm}(\theta)$ ! 首尾相接相干叠加所形成的距离之和。这个结果为定向散射提供了直观的几何解释，这一点将在本节后文中变得更加明显。此外，

§3 由于旁瓣集中在更靠近水平方向的位置（$\theta = \pi/2$），前向和后向谐波之间的相互作用在该角区域附近更为显著。

值得注意的是，四个部分场代表了最一般的形式。在具有对称性的系统中，例如球体受到平面波或偶极激发时，一个前向部分场和一个后向部分场就能完整描述该系统。此外，通常只有 $m = 1$ 项是显著的。因此，方程11通常可以进行多种简化。

方程 8 和 11 强调了理解同类型 Kerker 极角函数之间干涉的重要性。图3定义了前向极角函数之间的这种关系。我们省略了后向函数的示例，因为与米氏谐波不同，反演对称性意味着结果只需旋转 180° 后便相同。图3显示，同类型谐波的相长干涉会增强主瓣，并使远场整体上具有更强的指向性。同样，相消干涉会减弱主瓣并降低指向性。这种直观的干涉关系有助于识别具有指向性的系统。相加同类型系数会增强指向性，相减则会降低指向性。这一条件很容易推广到复值系数，并可基于将系数视为复平面中的向量，得到直观的几何解释。从这幅图景可以看出，方向相近的同类型 Kerker 系数会增强指向性，而方向相反的系数则会降低指向性。

在严格的前向和后向方向上，Kerker 极角函数被设计成具有如下简单形式

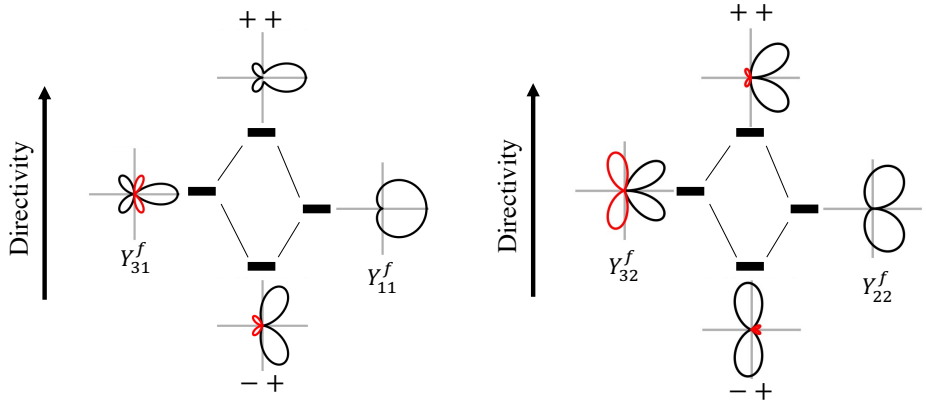


**图3**。 同类型 Kerker 极角函数之间干涉的示例。左侧示例是 $m = 1$时具有相同宇称的极数的组合。右侧示例是对于不具有精确前向散射/发射的方位数，具有相反宇称的极数的组合（$m \neq 1$）。

$$X_{nm}^{f}(\theta = 0) = \frac{1}{2}K_n\delta_{m1} \quad X_{nm}^{f}(\theta = \pi) = 0$$
$$X_{nm}^{b}(\theta = 0) = 0 \quad X_{nm}^{b}(\theta = \pi) = \frac{1}{2}K_n\delta_{m1}, \qquad 12$$

其中 $K_n = \sqrt{(2n+1)}$方程 12 对 Kerker谐波 的一项性质进行了形式化描述，该性质可以从图1中推断出来。只有对于 $m = 1$ 量子数，Kerker谐波 才具有精确的前向或后向波瓣。此外，这些函数在相反方向上的场恰好为零。因此，在精确的前向和后向方向上，前向和后向谐波之间始终不存在相互作用。这一性质使得计算精确前向和后向强度以及前向与后向比值的表达式更加简洁，并且具有直观的几何意义。

精确前向和后向方向上的远场强度为

$$I(\theta = 0) = \frac{\pi}{2\mu k\omega}\left(\sum_p \left\|\sum_n K_n c_{n1p}^{f}\right\|^2\right)$$
$$I(\theta = \pi) = \frac{\pi}{2\mu k\omega}\left(\sum_p \left\|\sum_n K_n c_{n1p}^{b}\right\|^2\right). \qquad 13$$

方程13表明，精确的前向与后向强度可以从几何角度理解为：在复平面中，将缩放后的前向系数和后向系数相干相加所得矢量的模，$\sum_n K_n c_{n1p}^{t}$。前向与后向之比即为这些矢量长度之比。这为 Kerker 系数与最终的前向和后向强度之间建立了有用的几何联系。当相加后的矢量趋近于闭合回路时，该方向上的散射/发射较弱。方程13是方程11的一个具体例子，适用于以下重要情形

其中 $\theta = 0$ 或 $\pi$。§4 在此条件下，缩放因子 $X_{nm}^{t}$ 可简化为方程12所给出的形式。对于任意方向，同样适用矢量加法规则，但缩放因子则基于方程11。

方程 13 提供了直观的几何条件，帮助理解 Kerker效应。前向或后向 Kerker 散射现在可视为以下特殊情形：所有 $c_{n1\mathrm{p}}^{b}$'s 或所有 $c_{n1\mathrm{p}}^{f}$'s 分别为零。例如，发生前向 Kerker 散射的物体不会有后向 Kerker 系数，$c_{n1\mathrm{p}}^{b}$。这就是这些系数被称为“ Kerker 系数”的原因。广义前向或后向 Kerker 散射也可以理解为以下情形：$\sum_n K_n c_{n1p}^{b}$或 $\sum K_n c_{n1p!}^{f}$ 分别为零。这对应于一种类型的向量首尾相接后形成复平面中的闭合环路。横向Kerker效应发生在两种类型的向量都形成闭合环路时。也就是说，$\sum_n K_n c_{n1p}^{b}$和 $\sum K_n c_{n1p!}^{f}$ 为零。对于前向场或后向场并非恒为零的定向散射形式，可通过比较相干相加后的前向向量与后向向量的长度来识别。也就是说，前向与后向比等于前向向量总长度与后向向量总长度之比。请注意，这些条件适用于用于描述该场的所有相关宇称。图4示意了基于 Kerker 系数的不同类型定向散射的几何表示。与在 Mie 框架中满足这些条件所需的复杂模态干涉关系相比，这些解释要容易得多。下一节将通过示例进一步讨论这一点。

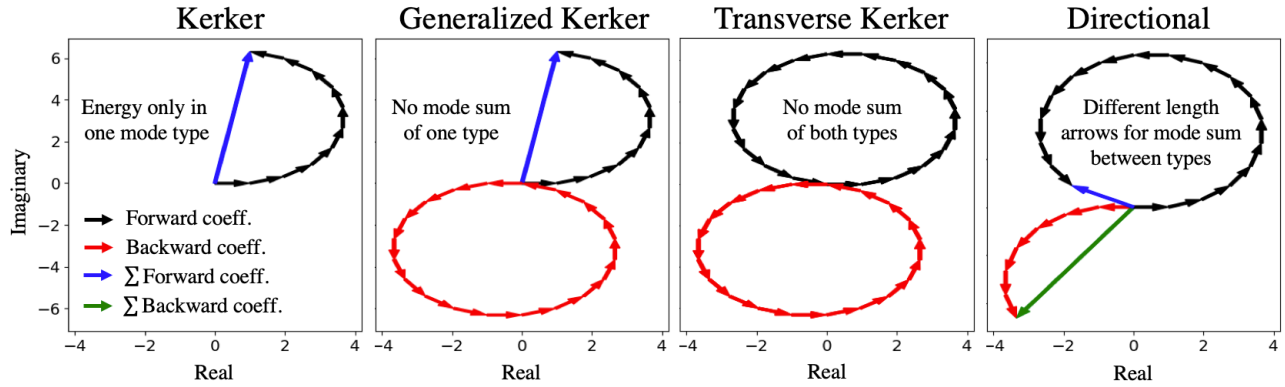


**图4**。复平面中以闭回路和开回路表示的不同类型定向散射/发射示意图。各个前向和后向模式分别用黑色和红色箭头表示。同类型模式首尾相连，并从 $n = 1$（尾端位于原点）开始逐步递增至 $n = n_{max}$。前向模式与后向模式的相干和分别以蓝色和绿色箭头表示。这些箭头从原点出发，指向极角最大阶数矢量的端点。最左侧示意图展示了前向 Kerker行为，其中不存在后向模式。左侧中间的示例展示了前向广义Kerker效应，其中后向模式在精确后向方向相干抵消。右侧中间的示意图展示了横向Kerker效应：两种模式在精确前向和后向方向均相干抵消，只留下横向（旁瓣）散射/发射。最右侧示意图展示了一般的后向优先散射/发射。

最后，考察 Kerker展开下总功率流和指向性的表达式很有启发性。与矢量球谐函数一样，Kerker谐波在球体上彼此正交。因此，总散射/发射功率为

$$W_{scatter/emit} = W_0^f + W_1^f + W_0^b + W_1^b = \frac{\pi}{2\mu\omega k}\sum_{tnmp}(1+\delta_{m0})\left\|c_{nmp}^{t}\right\|^2, \qquad 14$$

其中总功率由前向或后向部分功率构成，$W_p^t = \frac{\pi}{2\mu\omega k}\sum(1+\delta_{m0})\left\|c_{nmp}^{t}\right\|^2$ $_{nm}$。不同于将总功率分配给电型和磁型激发的米氏谐波，方程 14 表明，Kerker谐波将功率分配给前向和后向类型的激发。这有助于直观理解总功率中集中于特定半球的比例。该比例也可以从几何角度理解，其中每个部分功率（以及总功率）由散射系数首尾相接后在复平面中的弧长给出

§4 与方程11一样，方程13以适用于任意系统的最一般形式书写。如果散射/发射系统具有适当的对称性，方程13可以简化，使每种类型只需一种宇称。其他简化方式，如减少方位角阶数或极角阶数，也同样适用。

。也就是说，弧长越长，集中到该谐波类型中的总功率比例越大。将方程 13 的起点到终点的向量长度除以方程 14 的弧长，便可得到前向或后向指向性的直观定义：

$$D^{t'} = 4\pi \frac{\sum_p \left\| \sum_n K_n c_{n1p}^{t'} \right\|^2}{\sum_{tnmp}(1+\delta_{m0}) \left\| c_{nmp}^{t} \right\|^2}, \qquad 15$$

其中 $D^f = D(\theta = 0)$ 和 $D^b = D(\theta = \pi)$。方程15将图3中关于指向性的论述形式化，并将指向性直接与复平面中 Kerker 系数的行为联系起来。指向性与从原点到端点的长度成正比，与弧长成反比。基于这一框架，我们可以严格推导出使指向性最大化的条件，并将这些条件与复平面中的直观曲线联系起来。

当更多同类型的复系数（各自表示为复平面中的向量）在复平面中指向相似方向时，方程15的分子增大，而弧长保持不变。三角不等式表明，当所有同类型的向量都指向完全相同的方向时，方程15的分子达到最大值，

$$\sum_{np} = \sum_{\#} \left\| K_n c_{n1p}^{t'} \right\|^2$$

。也就是说，将各系数首尾相接相加后形成的曲线是一条直线。所有向量指向同一方向这一几何表征，就是完全相长干涉的条件。不过，要使指向性最大化，还应使方程15的分母最小。为此，分母中所有未出现在分子里的系数都应为零。由于 $K_n > 1$，我们可以得出：

当系统具有 $n_{max}$ 个谐波阶数时，理论上的最大指向性出现在满足 *Kerker* 条件且所有 *Kerker* 系数发生相长干涉的情况下。

因此，Kerker 散射是实现理论最大指向性的必要条件，但并非充分条件。此外，广义 Kerker 永远无法达到理论最大指向性，因为尽管非期望方向上的原点至端点距离为零，但该方向上的弧长并不为零。

**示例**

为凸显 Kerker 变换的实用性，我们给出四个关于定向散射的示例，并研究它们在 Kerker 展开和米氏展开下的结果。本节旨在举例说明何时从米氏框架切换到 Kerker 框架会有所助益。为凸显 Kerker 展开的普适性，我们研究亚波长及大于波长的粒子在近场和远场激励下的情况。所有示例汇总于图 5。

图 5 的第一行和第二行分别展示了各系统的示意图及其对应的方位角积分远场极坐标强度分布。左侧示例为具有 Milton Kerker 最初提出用于解释 Kerker 散射的材料属性的球体的散射响应；此时 $\epsilon = \mu$。其响应完全没有后向场，并且对于球体支持的所有量子数，均满足 Kerker 条件。中间偏左的示例为广义后向 Kerker 发射，此时前向强度几乎被完全抑制。实现该发射的系统由一个位于直径为 164nm 的 $TiO_2$ 球体下方 90nm 处、波长为 374nm 的发射体与球体近场耦合后的综合响应构成（$\eta = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = 2.42$）[21]。中间偏右的示例为来自直径为 120nm 的 Si 球体的横向 Kerker 散射（$\eta = 3.92 + i2.49E^{-2}$）[22],，该散射通过将两个波长为 609nm 的发射体与球体耦合实现。两个发射体分别位于球体上方和下方 204nm 处。最右侧的示例通过产生光子纳米喷流，实现高度定向的前向散射。该散射通过用波长为 400nm 的平面波照射直径为 1200nm 的 $SiO_2$ 球体（$\eta = 1.43 + i2.52E^{-3}$）[23] 实现。所有情况下，背景介质均假定为空气。平面波或偶极发射体照射球体时的散射解分别见[19]和[24]。

图 5 的第三行和第四行分别将经 $K_n$ 缩放的 Kerker（上行）和 Mie（下行）系数绘制为复平面上的矢量。这种绘图方法很常用，因为它同时描述了振幅和相位，这对于理解定向散射 [8,25] 是必要的。左侧示例清楚地展示了前向 Kerker 散射：后向系数（红色箭头）满足 Kerker 条件，即所有 $c_{n10}^{b}$ 都为零。前向系数（黑色箭头）发生相长干涉，产生非零的总前向强度（蓝色箭头）。相比之下，若使用 Mie 系数来确定 Kerker 前向条件，则需要系统地比较每一对电型和磁型谐波之间的角度和相位关系。尽管对于 $n_{max} \approx 3$ 而言这是一项可行的任务，但若不使用尺子和量角器，仍很难确定该系统是否确切满足 Kerker 前向条件。

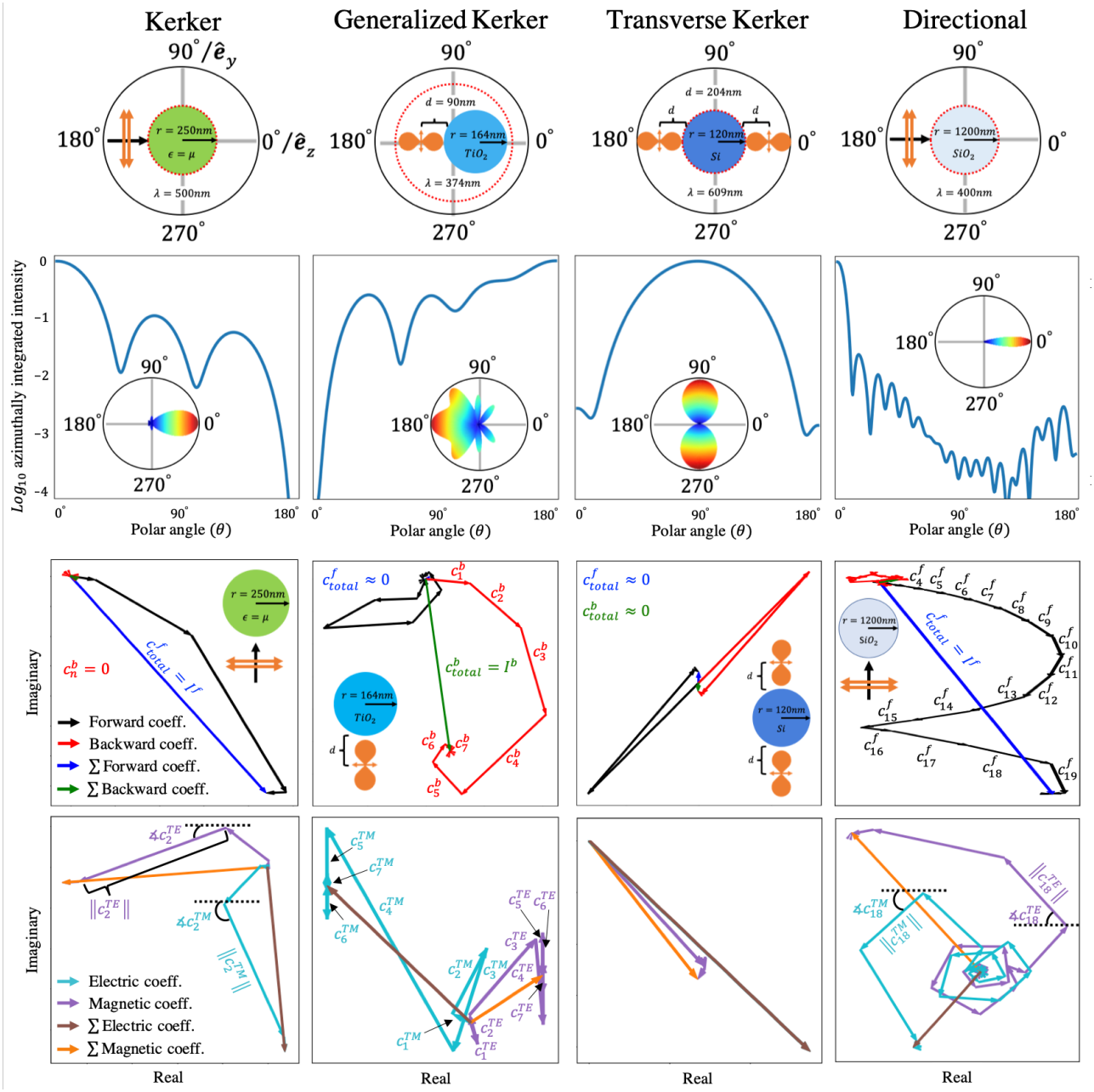


**图 5.** 高方向性散射/发射示意图（第 1 行）、对应的以 10 为底取对数的方位角积分远场极坐标强度图（第 2 行），以及对应的 $K_n$ 缩放 Kerker（第 3 行）和 Mie（第 4 行）系数在复平面中的矢量表示。第一个示例（第 1 列）为精确 Kerker 散射系统，由半径为 250nm 的磁性球体（$\epsilon = \mu$）构成，并由沿 $e\mathrm{Q}_z$ 方向传播、波长为 500nm 的平面波激发。第二个示例（第 2 列）展示了通过近场耦合一个 164nm 的 $TiO_2$ 球体与一个在 374nm 波长下发射的偶极子，实现的广义后向 Kerker 发射。偶极子位于球体底部下方 90nm 处的 z 轴上，其偶极矩沿 $e\mathrm{Q}_y$ 方向。第三个示例（第 3 列）为横向 Kerker 散射：一个 120nm 的硅球体由两个偶极子同时激发，两者均在 609nm 波长下发射。两个偶极子分别位于球体上方和下方 204nm 处，均位于 z 轴上，偶极矩沿 $e\mathrm{Q}_y$ 方向。最后一个示例（第 4 列）展示了由光子纳米喷流产生的高方向性散射，该纳米喷流由一个 1200nm 的 $SiO_2$ 球体形成，并由波长为 426nm 的平面波激发。所有情况下，球体均以原点为中心，红色虚线圆之外的区域定义了展开的有效域。所有强度均按 $I(\theta)/\max(I)$ 归一化，并共用同一对数刻度。同类型系数首尾相连，并从 $n = 1$（尾端位于原点）逐步递增至 $n = n_{max}$。

左侧中间示例中的 Kerker 系数展现了广义后向 Kerker 行为。这一点显而易见：前向系数的相干和形成一个闭合回路，$\sum K_n c^f_{n10!} \approx 0$；而后向系数的相干和则形成非零的开放回路，代表总后向强度（绿色箭头）。后向系数路径长度中的弧段以及前向系数形成的回路表明存在多余的旁瓣，因为这些矢量

它们的方向并不完全相同。这些旁瓣在方位角积分强度中十分明显。Mie 系数在复平面中呈现零散的变化模式。由于 $n_{max} \approx 7$ 且没有明显可辨的干涉关系，这些系数无法揭示定向发射或旁瓣的特性。显然，Mie 系数并不适合用于解决这个问题。

中右侧的示例呈现横向 Kerker 行为，表现为前向和后向 Kerker 系数均沿闭合回路变化，$\sum K_n c^f_{n10!} \approx 0$ 和 $\sum_n K_n c^b_{n10} \approx 0$。虽然 Mie 系数没有呈现复杂的模式，但与 Kerker 系数相比，它们并不能让人立即看出这些系数会产生横向 Kerker 行为。

最后，右侧的示例显示，光子纳米喷流产生了高度前向的定向散射，这可从 Kerker 系数中的开放等高线看出。方向性是通过每个基底系统中约 20 个显著谐波之间的干涉实现的。在 Kerker基中，前向箭头总和明显大于后向箭头总和，表明散射强烈偏向前向。此外，每个系数的幅值都相近。因此，没有单个谐波主导旁瓣。这一点从方位角积分强度中可见：其中出现了许多大小相近的旁瓣。电和磁米氏系数呈螺旋状分布，表明电型系数与磁型系数具有相似的相位和幅值行为。这种模式几乎满足 Kerker 条件。不过，正如非零的后向 Kerker 系数所表明的那样，该系统并非 Kerker 散射。此外，电型系数与磁型系数之间的差异最终会导致两类箭头不同步，使整体方向性更难判断。最后，Mie 系数完全无法揭示旁瓣的性质。

除了在复平面中观察系数外，还可以根据第二节中定义的性质，研究 Kerker 基中定向场的解析形式，从而培养直觉。例如，采用 Kerker 基后，引言中的两个系统现在可以改写为

$$System\ 1: \quad a\boldsymbol{\Upsilon}^f_{111} + b\boldsymbol{\Upsilon}^f_{210} + c\boldsymbol{\Upsilon}^f_{311} + a\boldsymbol{\Upsilon}^b_{111} - b\boldsymbol{\Upsilon}^b_{210}$$
$$System\ 2: \quad a\boldsymbol{\Upsilon}^f_{111} + b\boldsymbol{\Upsilon}^f_{210} + c\boldsymbol{\Upsilon}^f_{311} + a\boldsymbol{\Upsilon}^b_{111} + b\boldsymbol{\Upsilon}^b_{210},$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \ll \infty$。只需直接观察即可得出关于这两个系统的以下结论：首先，无论选择 $a$、$b$ 还是 $c$，两个系统始终都是前向占优。前向与后向比值分别与以下量成正比：
‖$a*7*G‖$ ‖$a-7‖$ 和 ‖$a*7*G‖$ ‖$a*7‖$。因此，系统1的前向与后向比值始终较大。假设 $a$、$b$ 和 $c$ 的数值相近，则两个系统在 $\theta \in [0, \pi]$ 或更小的范围内都预期会出现三个波瓣（前向半球内有两个波瓣，后向半球内有一个波瓣）§[5]。系统2具有后向相长干涉，$a + b$，因此有利于在精确后向方向附近形成波瓣。反之，系统1具有后向相消干涉，$a - b$，这有利于将功率从 $\theta = \pi$ 推向两侧。如果 $a$、$b$ 或 $c$ 中任一项占主导，则系统会退化为更接近相应占主导的 Kerker 谐波。侧瓣的预测也会相应改变。最后，两个系统都明显满足前向 Kerker 条件，因为无论选择 $a$、$b$ 还是 $c$，$\boldsymbol{\Upsilon}$(&&$^b$ $= 0$。不过，两个系统都不完全满足前向 Kerker 条件，因为 $\boldsymbol{\Upsilon}$&&&7 和 $\boldsymbol{\Upsilon}$'&)7 均不为零。如果 $a = b$（经过适当归一化），系统1有可能成为广义 Kerker 系统。由于 $a$ 和 $b$ 受正整数限制，系统2只能成为广义定向系统。我们鼓励读者回到引言，尝试从 Mie 框架出发得出这些结论。补充信息中展示了两个系统在 $a$、$b$ 和 $c$ 取不同值时的示例。

**结论**

我们提出一种线性变换，将米氏理论中的类原子矢量球谐函数转换为前向和后向定向矢量谐函数，并展示如何运用该方法理解定向散射/发射系统。这些定向谐波称为 Kerker 谐波，其远场表达式十分简单，主要由 Kerker 极角函数决定。这些函数对主瓣和旁瓣有清晰的定义；前向和后向类型之间的耦合较弱，而同类型谐函数之间的耦合则决定指向性。由此得到的方位角积分强度以及精确的前向或后向强度，均具有简单的解析形式，因此可以直观地将 Kerker、广义 Kerker、横向 Kerker和高度定向散射/发射定义为复平面中 Kerker 系数形成的开环和闭环等值线

§5这一预测依据第二节提出的旁瓣公式（适用于单个谐函数）、异类型耦合可忽略这一经验法则，以及对同类型耦合一般行为的认识。通过审视 Kerker 谐波的行为来理解旁瓣，旨在据此作出有依据的推测。一般来说，不进行计算就无法完全准确地预测旁瓣行为。例如，前向和后向谐波之间的干涉通常会改变旁瓣。对于在 $\theta = \pi/2$ 附近且类型不同的旁瓣，这种影响更为显著。因此，推断该方向附近旁瓣的确切位置和强度时必须谨慎。其他特征，例如某个特定谐波是否存在 Kerker效应，则完全可以通过观察得出结论。

总功率流与这些系数的弧长有关。这为理论最大指向性的条件提供了简单的定义。在复平面中观察时，与 Mie 基相比，采用 Kerker基能够以更直观的概念呈现 Kerker、广义 Kerker、横向 Kerker和高指向性系统的示例。这些示例探讨了该变换在散射和发射系统中的应用，涵盖从亚波长到大于波长的尺寸范围（例如，20 个显著谐波）。

## 补充信息

包括对……的分量展开 Kerker谐波、所有主要方程的推导，以及两个所提出的系统在不同值下的示例 $a$、$b$ 和 $c$。

## 作者贡献声明

P.R.W. 设计了研究思路并建立了理论框架。H.A.A. 监督了项目进展。所有作者都参与了手稿的撰写和编辑工作。


## 资金来源

本研究获得美国陆军研究办公室多学科大学研究计划（MURI）拨款 W911NF-18-1-0240 的资助。


## 利益冲突

作者声明不存在利益冲突，也没有财务利益。

参考文献


(1) Jones, M. N.; Jones, M. N. 《经典场论中的球谐函数与张量》；Wiley，1985。(2) Varshalovich, D. A.; Moskalev, A. N.; Khersonskii, V. K. 《角动量量子理论》；世界科学出版公司，1988。https://doi.org/10.1142/0270。(3) Stratton, J. A. 《电磁理论》，第一版；麦格劳-希尔图书公司，1941。(4) Bohren, C. F. 光学活性球壳对电磁波的散射。《化学物理学杂志》1975，62（4），1566–1571。https://doi.org/10.1063/1.430622。(5) Fernandez-Corbaton, I. 具有离散旋转对称性的系统的前向和后向螺旋度散射系数。《光学快报》（OE）2013，21（24），29885–29893。https://doi.org/10.1364/OE.21.029885。(6) Coenen, T.; Bernal Arango, F.; Femius Koenderink, A.; Polman, A. 单个等离激元散射体的定向发射。《自然·通讯》2014，5（1），3250。https://doi.org/10.1038/ncomms4250。(7) Curto, A. G.; Volpe, G.; Taminiau, T. H.; Kreuzer, M. P.; Quidant, R.; van Hulst, N. F. 与纳米天线耦合的量子点的单向发射。《科学》2010，329（5994），930–933。https://doi.org/10.1126/science.1191922。(8) Cihan, A. F.; Curto, A. G.; Raza, S.; Kik, P. G.; Brongersma, M. L. 用于单层二硫化钼高定向性光发射的硅米氏谐振器。《自然·光子学》2018，12（5），284–290。https://doi.org/10.1038/s41566-018-0155-y。(9) Qu, Y.; Pan, M.; Qiu, M. 热辐射的方向性与光谱调控及其在辐射制冷和红外光源中的应用。《物理评论应用》2020，13（6），064052。https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.13.064052。(10) Fu, Y. H.; Kuznetsov, A. I.; Miroshnichenko, A. E.; Yu, Y. F.; Luk'yanchuk, B. 硅纳米颗粒的定向可见光散射。《自然·通讯》2013，4（1），1527。https://doi.org/10.1038/ncomms2538。(11) Yang, Y.; Miroshnichenko, A. E.; Kostinski, S. V.; Odit, M.; Kapitanova, P.; Qiu, M.; Kivshar, Y. S. 全介质超表面的多模定向性。《物理评论B辑》2017，95（16），165426。https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.165426。(12) Shamkhi, H. K.; Sayanskiy, A.; Valero, A. C.; Kupriianov, A. S.; Kapitanova, P.; Kivshar, Y. S.; Shalin, A. S.; Tuz, V. R. 基于横向Kerker效应的全介质超表面隐身与完美吸收。arXiv:1905.*10538 [*physics*]* **2019**。(13) Liu, W.; Kivshar, Y. S. 纳米光子学与超光学中的广义Kerker效应。《光学快报》2018，26（10），13085。https://doi.org/10.1364/OE.26.013085。(14) Itagi, A. V.; Challener, W. A. 光子纳米喷流的光学。《美国光学学会杂志A辑》2005，22（12），2847。https://doi.org/10.1364/JOSAA.22.002847。(15) Li, X.; Chen, Z.; Taflove, A.; Backman, V. 利用增强后向散射和三维光子纳米喷流进行纳米颗粒光学分析。《光学快报》（OE）2005，13（2），526–533。https://doi.org/10.1364/OPEX.13.000526。(16) Kerker, M.; Wang, D.-S.; Giles, C. L. 磁性球体的电磁散射。《美国光学学会杂志》1983，73（6），765。https://doi.org/10.1364/JOSA.73.000765。(17) Alaee, R.; Filter, R.; Lehr, D.; Lederer, F.; Rockstuhl, C. 高定向性纳米天线的广义Kerker条件。《光学快报》2015，40（11），2645。https://doi.org/10.1364/OL.40.002645。(18) Tzarouchis, D.; Sihvola, A. 介质球的光散射：米氏共振展望。《应用科学》2018，8（2），184。https://doi.org/10.3390/app8020184。(19) Bohren, C. F.; Huffman, D. R. 《小颗粒对光的吸收与散射》；Wiley-VCH：魏因海姆，2004。

(20) Zambrana-Puyalto, X.; Fernandez-Corbaton, I.; Juan, M. L.; Vidal, X.; Molina-Terriza, G. 对偶对称性与Kerker条件。《光学快报》 **2013**，*38*（11），1857。https://doi.org/10.1364/OL.38.001857。(21) Sarkar, S.; Gupta, V.; Kumar, M.; Schubert, J.; Probst, P. T.; Joseph, J.; König, T. A. F. 通过胶体等离激元自组装光栅实现杂化导模共振。《*ACS*应用材料与界面》 **2019**，*11*（14），13752–13760。https://doi.org/10.1021/acsami.8b20535。(22) Aspnes, D. E.; Studna, A. A. Si、Ge、GaP、GaAs、GaSb、InP、InAs和InSb在1.5至6.0 EV范围内的介电函数与光学参数。《物理评论*B*辑》 **1983**，*27*（2），985–1009。https://doi.org/10.1103/PhysRevB.27.985。(23) Marcos, L. V. R.; Larruquert, J. I.; Méndez, J. A.; Aznárez, J. A. $SiO_2$ 和$Ta_2O_5$ 薄膜的自洽光学常数。《光学材料快报》（*OME*） **2016**，*6*（11），3622–3637。https://doi.org/10.1364/OME.6.003622。(24) Tai, C. 《电磁理论中的并矢格林函数》；IEEE出版社，1994。(25) Fang, J.; Wang, M.; Yao, K.; Zhang, T.; Krasnok, A.; Jiang, T.; Choi, J.; Kahn, E.; Korgel, B. A.; Terrones, M.; Li, X.; Alù, A.; Zheng, Y. 利用单个介质纳米球调控激子发射的指向性。39。

# Kerker变换：在定向谐波的离散基底中展开场的补充信息

## I. KERKER谐波的旋度

Kerker基通过以下变换与矢量球谐函数相关

$$\boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r}) = (-1)^{t(n+m+1)}(i)^{n}\left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}i\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nm1-p}(\boldsymbol{r})\right) \quad I.1$$

其中 $t = 0 = f$ 和 $t = 1 = b$。因此，方程 I.1 的旋度为：

$$\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r}) = (-1)^{t(n+m+1)}(i)^{n}\left(\nabla \times \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}i\nabla \times \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nm1-p}(\boldsymbol{r})\right) \quad I.2$$

根据米氏谐波的性质，$\nabla \times \boldsymbol{\Psi}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r}) = k\boldsymbol{\Psi}^{1-t}_{nmp}(\boldsymbol{r})$，其中 $t = 0 = M$ 和 $t = 1 = E$，方程 I.2 可改写为

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r}) = (-1)^{t(n+m+1)}(i)^{n}k\left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}i\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nm1-p}(\boldsymbol{r})\right)\\
&= (-1)^{t(n+m+1)}(i)^{n}(-1)^{t-p}ki\left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - (-1)^{-(t-p)}i\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nmp}(\boldsymbol{r})\right)\\
&= (-1)^{t(n+m+1)}(i)^{n}(-1)^{t-p}ki\left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - (-1)^{t+p}i\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nmp}(\boldsymbol{r})\right)\\
&= (-1)^{t-p}ki\boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nm1-p}(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \quad I.3$$

注意，括号内的 $(-1)^{-(t-p)}$ 取值与 $(-1)^{t+p}$相同。当两者取值相反时，它们均为 $-1$；当取值相同时，均为 $1$。

## II. Kerker展开下电磁场的形式

Mie框架下电场和磁场的展开式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{1} c_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nmp} + c^{E}_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nm1-p}\\
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{ik}{\mu\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{1} c^{E}_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nmp} + c_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nm1-p}
\end{aligned} \quad II.2$$

其中，$c^{E}_{nmp}$ 和$c_{nmp_M}$分别为电型和磁型散射系数 .

Kerker框架下的场展开式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{1} c^{f}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{f}_{nmp}(\boldsymbol{r}) + c^{b}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{b}_{nmp}(\boldsymbol{r})\\
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \frac{k}{\mu\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{1}(-1)^{p}\left(c^{f}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{f}_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^{b}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{b}_{nm1-p}(\boldsymbol{r})\right),
\end{aligned} \quad II.2$$

其中，$c^{f}_{nmp}$ 和$c^{b}_{nmp}$ 分别为前向和后向散射系数。Kerker基与矢量球谐函数之间通过以下变换相关

$$\begin{aligned}
c_{n}\boldsymbol{\Upsilon}^{t}_{nmp}(\boldsymbol{r}) &= (-1)^{t(n+m+1)}(i)^{n}\left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}i\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nm1-p}(\boldsymbol{r})\right)\\
\mathrm{c}^{t}_{nmp} &= \frac{1}{2}(-1)^{t(n-m-1)}(-i)^{n}\left(c^{M}_{nmp} + (-1)^{1-t-p}ic^{E}_{nm1-p}\right),
\end{aligned} \quad II.3$$

其中 $t = 0 = f$ 和 $t = 1 = b$。然后

$$c^t_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^t_{nmp}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}i\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r})\right)\left(c^M_{nmp} + (-1)^{1-t-p}ic^E_{nm1-p}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) \\ +(-1)^{1-t-p}ic^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}ic^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}, \quad \textit{II.4}$$

其中使用了以下简化：$(-1)^{t(n+m+1)}(-1)^{t(n-m-1)} = (-1)^{2tn} = 1$，$(-i)^n(i)^n = (-1)^n(i)^n = (-1)^{2n} = 1$, and $(-1)^{t-p}(-1)^{1-t-p} = (-1)^{1-2p} = -1$.

按类型展开方程 I.4，得

$$c^t_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^t_{nmp}(\boldsymbol{r}) + c^{1-t}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{1-t}_{nmp}(\boldsymbol{r}) =$$
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + 2c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) \\ +(-1)^{1-t-p}ic^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}ic^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) \\ +(-1)^{t-p}ic^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{1-t-p}ic^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} \quad \textit{II.5}$$
$$= c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r})$$

其中使用了简化式 $(-1)^{t-p} + (-1)^{1-t-p} = (-1)^{-p}((-1)^t - (-1)^{-t}) = 0$ 。因此，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{tnmp} c^t_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^t_{nmp}(\boldsymbol{r}) = \sum_{nmp} c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^M_{nmp}(\boldsymbol{r}) + c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^E_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) \quad \textit{II.6}$$

为求解磁场，我们首先展开以下项

$$c^t_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^t_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-1+p}i\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right)\left(c^M_{nmp} + (-1)^{1-t-p}ic^E_{nm1-p}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r}) \\ +(-1)^{1-t-p}i\left(c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) + c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right) \end{pmatrix}, \quad \textit{II.7}$$

其中使用了简化式 $(-1)^{t-1+p}(-1)^{1-t-p} = 1$ 和 $(-1)^{t-1+p} = (-1)^{1-t-p}$ 。

按类型从方程 II.7 中相减，得

$$c^t_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^t_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^{1-t}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{1-t}_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) =$$
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right) - \left(c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right) \\ +(-1)^{1-t-p}i\left(c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) + c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right) \\ +(-1)^{1+t-p}i\left(c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) + c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right) \end{pmatrix} \quad \textit{II.8}$$
$$= (-1)^{p+t}(-i)\left(c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) + c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right)$$

相应地,

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{\mu\omega}\sum_{nmp}(-1)^p\left(c^f_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^f_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^b_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^b_{nm1-p}(\boldsymbol{r})\right)$$
$$= \frac{k}{\mu\omega}\sum_{nmp}(-1)^p(-1)^{p+0}(-i)\left(c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) + c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r})\right) \quad \textit{II.9}$$
$$= \frac{-ik}{\mu\omega}\sum_{nmp} c^E_{nm1-p}\boldsymbol{\Psi}^M_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) + c^M_{nmp}\boldsymbol{\Psi}^E_{nmp}(\boldsymbol{r}).$$

请注意，当 $t = 0$ 时，$c^f_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^f_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^b_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^b_{nm1-p}(\boldsymbol{r})$ 是 $c^t_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^t_{nm1-p}(\boldsymbol{r}) - c^{1-t}_{nmp}\boldsymbol{\Upsilon}^{1-t}_{nm1-p}(\boldsymbol{r})$ 的特例。

## III. Kerker谐波的矢量展开

米氏谐波展开为

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}(\nu)}_{nm\,1}{}^{0}(\boldsymbol{r}) = \frac{z^{(\nu)}_n(kr)}{\sqrt{2n(n+1)}}\begin{pmatrix} -\sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{pmatrix} m\pi^{|m|}_n(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - \begin{pmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{pmatrix}\tau^{|m|}_n(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\Big)$$
$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}(\nu)}_{nm\,1}{}^{0} = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{pmatrix} n(n+1)\frac{z^{(\nu)}_n(kr)}{kr}P^{|m|}_n(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ +\frac{\dot{z}^{(\nu)}_n(kr)}{kr}\begin{pmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{pmatrix}\tau^{|m|}_n(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \begin{pmatrix} -\sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{pmatrix} m\pi^{|m|}_n(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{pmatrix} \quad \textit{III.1}$$

其中

$$z_n^{(\nu)}(kr) = \begin{cases} j_n(kr) & \nu = 0, r \neq \infty \\ h_n(kr) & \nu = 1, r \neq 0 \end{cases} \qquad \textit{III.2}$$

and $\dot{z}_n^{(\nu)}(kr) = \partial_{kr}\left(krz_n^{(\nu)}(kr)\right) = z_n^{(3)}(kr) + kr\partial_{kr}\left(z_n^{(3)}(kr)\right)$.

Kerker谐波展开为

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{nm_1^0}^{t(\nu)} = (-1)^{t(n+m+1)}(i)^n\left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{M}}_{nm_1^0}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p}i\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{E}}_{nm_0^1}(\boldsymbol{r})\right)$$

$=$

$$\hbar_{nmp}^t\begin{bmatrix} (-1)^{t-p}n(n+1)i\frac{z_n^{(\nu)}(kr)}{kr}\begin{matrix}sin(m\phi)\\cos(m\phi)\end{matrix}P_n^{|m|}(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ +\left((-1)^{1-p}z_n^{(\nu)}(kr)\begin{matrix}sin(m\phi)\\cos(m\phi)\end{matrix}m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta) + (-1)^{t-p}i\frac{\dot{z}_n^{(\nu)}(kr)}{kr}\begin{matrix}sin(m\phi)\\cos(m\phi)\end{matrix}\tau_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ +\left(-z_n^{(\nu)}(kr)\begin{matrix}cos(m\phi)\\sin(m\phi)\end{matrix}\tau_n^{|m|}(cos\,\theta) + (-1)^{t-p}(-1)^p i\frac{\dot{z}_n^{(\nu)}(kr)}{kr}\begin{matrix}cos(m\phi)\\sin(m\phi)\end{matrix}m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix}$$

$$= \hbar_{nmp}^t\begin{bmatrix} (-1)^t n(n+1)i\frac{z_n^{(\nu)}(kr)}{kr}\begin{matrix}sin(m\phi)\\-cos(m\phi)\end{matrix}P_n^{|m|}(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ \begin{matrix}sin(m\phi)\\-cos(m\phi)\end{matrix}\left(-z_n^{(\nu)}(kr)m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta) + i\frac{\dot{z}_n^{(\nu)}(kr)}{kr}(-1)^t\tau_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ \begin{matrix}cos(m\phi)\\sin(m\phi)\end{matrix}\left(-z_n^{(\nu)}(kr)\tau_n^{|m|}(cos\,\theta) + i\frac{\dot{z}_n^{(\nu)}(kr)}{kr}(-1)^t m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix} \qquad \textit{III.3}$$

$$= \hbar_{nmp}^t\begin{bmatrix} n(n+1)\,sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)i\frac{z_n^{(\nu)}(kr)}{kr}(-1)^t P_n^{|m|}(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(-z_n^{(\nu)}(kr)m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta) + i\frac{\dot{z}_n^{(\nu)}(kr)}{kr}(-1)^t\tau_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(-z_n^{(\nu)}(kr)\tau_n^{|m|}(cos\,\theta) + i\frac{\dot{z}_n^{(\nu)}(kr)}{kr}(-1)^t m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix}$$

其中 $\hbar_{nmp}^t = \frac{(-1)^{t(n+m+1)}(i)^n\sqrt{2n(n+1)}}{}$，第四个等号使用了恒等式 $sin)m\phi - \pi 2、\_ = -cos(m\phi)$ 和 $cos)m\phi - \pi 2、\_ = sin(m\phi)$。

尽管方程 III.3 的最终形式很简洁，但它并不是用 Kerker 极角函数表示的。将方程 III.3 展开到远场（第五节）时，可以很容易地根据球汉克尔函数的渐近关系推导出 Kerker 极角函数。不过，值得说明的是，即使在近场中，也可以看到一种基于这些函数的表示形式。这可以通过将方程 III.3 重写为

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{nmp}^{t(\nu)} = (i)^n\begin{bmatrix} (-1)^{t(n+m+1)}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\,sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)i\frac{z_n^{(\nu)}(kr)}{kr}(-1)^t P_n^{|m|}(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sum_\rho(-1)^{\rho-t}Z_{nm}^{\rho(\nu)}(kr)X_{nm}^{\rho-t}(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sum_\rho Z_{nm}^{\rho(\nu)}(kr)X_{nm}^{\rho-t}(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix} \qquad \textit{III.4}$$

where $Z_{nm}^{\rho(\nu)}(kr) = \frac{(-1)^{\rho(n+m+1)}}{2}\left(-z_n^{(\nu)}(kr) + (-1)^\rho i\frac{\partial_{kr}\left(krz_n^{(\nu)}(kr)\right)}{kr}\right)$ and $\rho \in [0,1]$. Also, $X_{nm}^{\rho-t}(\theta) =$

$\frac{(-1)^{(\rho-t)(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}}\left(\tau_n^m(\theta) + (-1)^{(\rho-t)}m\pi_n^m(\theta)\right)$ and $t \in [0,1]$.

## IV. 远场中的 Kerker基

在远场中，径向依赖由第一类球汉克尔函数描述，其渐近形式为

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{z}_n^{(3)}(kr) = \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr}, \quad kr \gg n^2$$
$$\lim_{r\to\infty} \partial_{kr}\left(kr z_n^{(3)}(kr)\right) = \lim_{r\to\infty}\left[z_n^{(3)}(kr) + kr\partial_{kr}\left(z_n^{(3)}(kr)\right)\right] = \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr} + (-i)^n e^{ikr}. \quad \textit{IV.1}$$

因此，

$$Z_{far,nm}^{\rho(v)}(kr) = \frac{(-1)^{\rho(n+m+1)}}{2}\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr}\left(i + (-1)^\rho\left(\frac{1}{kr} + i\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^{\rho(n+m+1)}}{2} i\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr}(1 + (-1)^\rho) + O\left\{\frac{1}{(kr)^2}\right\}$$
$$= \begin{cases} i\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr} + O\left\{\frac{1}{(kr)^2}\right\} & \rho = 0 \\ 0 & \rho = 1 \end{cases} \quad \textit{IV.2}$$

将 IV.1 的结果代入 IV.3，可得：

$$\boldsymbol{Y}_{far,nmp}^{t(1)} = (-1)^{t(n+m+1)}(i)^n\left(\boldsymbol{\Psi}_{nmp}^{M(1)}(\boldsymbol{r}) + (-1)^{t-p} i\boldsymbol{\Psi}_{nm1-p}^{E(1)}(\boldsymbol{r})\right)$$
$$=$$
$$\hbar_{nmp}^t\begin{bmatrix} \frac{(-i)^n e^{ikr}}{(kr)^2} n(n+1)\, sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)(-1)^t P_n^{|m|}(cos\,\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(i\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr} m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta) + \left(\frac{(-i)^n e^{ikr}}{(kr)^2} + i\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr}\right)(-1)^t\tau_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(i\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr}\tau_n^{|m|}(cos\,\theta) + \left(\frac{(-i)^n e^{ikr}}{(kr)^2} + i\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr}\right)(-1)^t m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix}$$
$$= \hbar_{nmp}^t i\frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr}\begin{bmatrix} n(n+1)\, sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)(-1)^t \frac{P_n^{|m|}(cos\,\theta)}{ikr}\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta) + \left(1 + \frac{1}{ikr}\right)(-1)^t\tau_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(\tau_n^{|m|}(cos\,\theta) + \left(1 + \frac{1}{ikr}\right)(-1)^t m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix} \quad \textit{IV.3}$$
$$= \frac{(-1)^{t(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}} i\frac{e^{ikr}}{kr}\begin{bmatrix} 0\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ (-1)^t\, sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(\tau_n^{|m|}(cos\,\theta) + (-1)^t m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left(\tau_n^{|m|}(cos\,\theta) + (-1)^t m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix} + O\left\{\frac{1}{(kr)^2}\right\}$$
$$= i\frac{e^{ikr}}{kr} X_{nm}^t(\theta)\begin{bmatrix} 0\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2} + t\pi\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{bmatrix} + O\left\{\frac{1}{(kr)^2}\right\}$$

where, $X_{nm}^t(\theta) = \frac{(-1)^{t(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}}\left(\tau_n^m(\theta) + (-1)^t m\pi_n^m(\theta)\right)$

## V. Kerker基中的时间平均远场坡印廷矢量

时间平均坡印廷矢量为

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2} Re\{\boldsymbol{E}_a \times \boldsymbol{H}_b^*\}$$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{1} c_{a,nmp}^{f}\boldsymbol{Y}_{nmp}^{f(\nu)} + c_{a,nmp}^{b}\boldsymbol{Y}_{nmp}^{b(\nu)}\right)\times \right.$$

$$\left.\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{m'=0}^{n'}\sum_{p'=0}^{1}(-1)^{p'}\left(c_{b,n'm'p'}^{*f}\boldsymbol{Y}_{n'm'1-p'}^{*f(\nu')} - c_{b,n'm'p'}^{*b}\boldsymbol{Y}_{n'm'1-p'}^{*b(\nu')}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{\sum_{ll'}(-1)^{p'}\frac{k}{\mu\omega}\begin{pmatrix} c_{a,l}^{f}c_{b,l'}^{*f}\boldsymbol{Y}_{nmp}^{f(\nu)} \times \boldsymbol{Y}_{n'm'1-p'}^{*f(\nu')} \\ -c_{a,l}^{f}c_{b,l'}^{*b}\boldsymbol{Y}_{nmp}^{f(\nu)} \times \boldsymbol{Y}_{n'm'1-p'}^{*b(\nu')} \\ +c_{a,l}^{b}c_{b,l'}^{*f}\boldsymbol{Y}_{nmp}^{b(\nu)} \times \boldsymbol{Y}_{n'm'1-p'}^{*f(\nu')} \\ -c_{a,l}^{b}c_{b,l'}^{*b}\boldsymbol{Y}_{nmp}^{b(\nu)} \times \boldsymbol{Y}_{n'm'1-p'}^{*b(\nu')} \end{pmatrix}\right\} \qquad V.3$$

方程 VI.1 表明，坡印廷矢量取决于求解 $\boldsymbol{Y}_{nmp}^{t(\nu)} \times \boldsymbol{Y}_{n'm'}^{*} \quad , \quad _{1-pt'(\nu')}$ 。

$$\boldsymbol{Y}_{nmp}^{t(\nu)} \times \boldsymbol{Y}_{n'm'1-p'}^{*t'(\nu')} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \\ Y_{nmp,r}^{t(\nu)} & Y_{nmp,\theta}^{t(\nu)} & Y_{nmp,\phi}^{t(\nu)} \\ Y_{n'm'1-p',r}^{*t'(\nu')} & Y_{n'm'1-p',\theta}^{*t'(\nu')} & Y_{n'm'1-p',\phi}^{*t'(\nu')} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(Y_{nmp,\theta}^{t(\nu)}Y_{n'm'1-p',\phi}^{*t'(\nu')} - Y_{nmp,\phi}^{t(\nu)}Y_{n'm'1-p',\theta}^{*t'(\nu')}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \\ -\left(Y_{nmp,r}^{t(\nu)}Y_{n'm'1-p',\phi}^{*t'(\nu')} - Y_{nmp,\phi}^{t(\nu)}Y_{n'm'1-p',r}^{*t'(\nu')}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \\ +\left(Y_{nmp,r}^{t(\nu)}Y_{n'm'1-p',\theta}^{*t'(\nu')} - Y_{nmp,\theta}^{t(\nu)}Y_{n'm'1-p',r}^{*t'(\nu')}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} \qquad V.2$$

在远场中，方程 V.2 得以简化，因为 $\nu = \nu' = 1$ 和 $\boldsymbol{Y}_{nmp,}^{\quad t(\nu)}{}_{r} = \boldsymbol{Y}_{n'm'1-p',rt'(\nu')}^{*} = 0$。远场中的方程 V.2 变为

$$\boldsymbol{Y}_{far,nmp}^{t(1)} \times \boldsymbol{Y}_{far,n'm'1-p'}^{*t'(1)} = \left(Y_{nmp,\theta}^{t(1)}Y_{n'm'1-p',\phi}^{*t'(1)} - Y_{nmp,\phi}^{t(1)}Y_{n'm'1-p',\theta}^{*t'(1)}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= i\frac{e^{ikr}}{kr}X_{nm}^{t}(\theta)\left(-i\frac{e^{-ikr}}{kr}\frac{X_{n'm'}^{t'}(\theta)}{c_{n'm'}}\right)\begin{pmatrix} sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2} + t\pi\right)cos\left(m'\phi - (1-p')\frac{\pi}{2}\right) \\ -\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(m'\phi - (1-p')\frac{\pi}{2} + t'\pi\right)\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{(kr)^2}X_{nm}^{t}(\theta)X_{n'm'}^{t'}(\theta)\begin{pmatrix} sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2} + t\pi\right)cos\left(m'\phi - (1-p')\frac{\pi}{2}\right) \\ -\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(m'\phi - (1-p')\frac{\pi}{2} + t'\pi\right)\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \qquad V.3$$

$$= \frac{1}{(kr)^2}X_{nm}^{t}(\theta)X_{n'm'}^{t'}(\theta)\begin{pmatrix} (-1)^{t}\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(m'\phi + p'\frac{\pi}{2}\right) \\ (-1)^{t'}\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(m'\phi + p'\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{(kr)^2}X_{nm}^{t}(\theta)X_{n'm'}^{t'}(\theta)\begin{pmatrix} (-1)^{t}(-1)^{p'}\ sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ (-1)^{t'}(-1)^{p'}\ cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

将方程 V.3 代入 V.1，得到，

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2} Re\{\boldsymbol{E}_a \times \boldsymbol{H}_b^*\} \qquad V.4$$

$$= \frac{1}{2} Re \left\{ \frac{1}{\mu\omega k r^2} \sum_{ll'} \begin{pmatrix} c^f_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X^f_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} \sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ -c^f_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X^b_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} \sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ +c^b_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X^f_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} -\sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ -c^b_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X^b_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} -\sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{2} Re \left\{ \frac{1}{\mu\omega k r^2} \sum_{ll'} \begin{pmatrix} c^f_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X^f_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} \sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ +c^f_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X^b_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} -\sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ +c^b_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X^f_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} -\sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ c^b_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X^b_{n'm'}(\theta) \begin{pmatrix} \sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +\cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{2} Re \left\{ \frac{1}{\mu\omega k r^2} \sum_{ll'} \left( \sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \left( c^f_{a,l} X^f_{nm}(\theta) - c^b_{a,l} X^b_{nm}(\theta) \right) \left( c^{*f}_{b,l'} X^f_{n'm'}(\theta) - c^{*b}_{b,l'} X^b_{n'm'}(\theta) \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. \cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \left( c^f_{a,l} X^f_{nm}(\theta) + c^b_{a,l} X^b_{nm}(\theta) \right) \left( c^{*f}_{b,l'} X^f_{n'm'}(\theta) + c^{*b}_{b,l'} X^b_{n'm'}(\theta) \right) \right) \right\} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

其中，最后一个等式来自 $\sin(m\phi - p\,\mathrm{D}\,7, \sin(m'\phi - p'\,\mathrm{D}\,7, \mathrm{N} c^f_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}05\ (\theta) - c^f_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}06\ (\theta) - c^b_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}05\ (\theta) + c^b_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}06\ (\theta) \backslash = \sin(m\phi - p\,\mathrm{D}\,7, \sin(m'\phi - p'\,\mathrm{D}\,7, \mathrm{C} c^f_{a,l} X^f_{nm}(\theta) - c^b_{a,l} X^b_{nm}(\theta), \mathrm{C} c^{*f}_{b,l} X^f_{nm}(\theta) - c^{*b}_{b,l} X^b_{nm}(\theta),$ 以及 $\cos(m\phi - p\,\mathrm{D}\,7, \cos(m'\phi - p'\,\mathrm{D}\,7, \mathrm{N} c^f_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}05\ (\theta) + c^f_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^f_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}06\ (\theta) + c^b_{a,l} c^{*f}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}05\ (\theta) + c^b_{a,l} c^{*b}_{b,l'} X^b_{nm}(\theta) X_{n'}\text{"}06\ (\theta) \backslash = \cos(m\phi - p\,\mathrm{D}\,7, \cos(m'\phi - p'\,\mathrm{D}\,7, \mathrm{C} c^f_{a,l} X^f_{nm}(\theta) + c^b_{a,l} X^b_{nm}(\theta), \mathrm{C} c^{*f}_{b,l} X_{n'}\text{"}05\ (\theta) + c^{*b}_{b,l} X_{n'}\text{"}06\ (\theta),$

如果 $\boldsymbol{E}_a = \boldsymbol{E}_b = \boldsymbol{E}$，那么方程 V.4 可以进一步简化为

$$\langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu\omega k r^2} (\|A(\phi,\theta)\|^2 + \|B(\phi,\theta)\|^2) \hat{\boldsymbol{e}}_r \qquad V.5$$

其中

$$A(\theta,\phi) = \sum_{nmp} \sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left( c^f_{nmp} X^f_{nm}(\theta) - c^b_{nmp} X^b_{nm}(\theta) \right)$$
$$B(\theta,\phi) = \sum_{nmp} \cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right)\left( c^f_{nmp} X^f_{nm}(\theta) + c^b_{nmp} X^b_{nm}(\theta) \right) \qquad V.6$$

## VI. Kerker基中的远场方位角积分强度

从远场坡印廷矢量出发,

$$\langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle = \frac{1}{2} Re\{\boldsymbol{E}_a \times \boldsymbol{H}_a^*\} =$$

$$\frac{1}{2} Re \left\{ \frac{1}{\mu\omega k r^2} \sum_{ll'} \left( \begin{array}{l} c_l^f c_{l'}^{*f} X_{nm}^f(\theta) X_{n'm'}^f(\theta) \left( \begin{array}{l} sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ + c_l^f c_{l'}^{*b} X_{nm}^f(\theta) X_{n'm'}^b(\theta) \left( \begin{array}{l} - sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ + c_l^b c_{l'}^{*f} X_{nm}^b(\theta) X_{n'm'}^f(\theta) \left( \begin{array}{l} - sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ c_l^b c_{l'}^{*b} X_{nm}^b(\theta) X_{n'm'}^b(\theta) \left( \begin{array}{l} sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m'\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \end{array} \right) \right\} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \qquad \textit{VI.1}$$

方程 VI.1 的方位角积分使用了以下正交关系,

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \sin(m'\phi)\, \partial\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \cos(m'\phi)\, \partial\phi = \begin{cases} 2\pi & m = m' = 0 \\ \pi & m = m' \neq 0 \\ 0 & m \neq m' \end{cases} \qquad \textit{VI.2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\phi) \sin(m'\phi)\, \partial\phi = \begin{cases} 0 & m = m' = 0 \\ \pi & m = m' \neq 0 \\ 0 & m \neq m'. \end{cases}$$

从方程 VI.2 可知，所有非零积分都要求满足 $m = m'$。在此条件下，从 $m = 0$ 开始，方程 VI.1 中的方位角积分变为

$$\int_0^{2\pi} r^2 \partial\phi \langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle \delta_{m0} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 \partial\phi \frac{1}{2} Re \left\{ \frac{1}{\mu\omega k r^2} \sum_{ll'} \left( \begin{array}{l} c_{n0p}^f c_{n'0p'}^{*f} X_{n0}^f(\theta) X_{n'0}^f(\theta) \left( \begin{array}{l} sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ + c_{n0p}^f c_{n'0p'}^{*b} X_{n0}^f(\theta) X_{n'0}^b(\theta) \left( \begin{array}{l} - sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ + c_{n0p}^b c_{n'0p'}^{*f} X_{n0}^b(\theta) X_{n'0}^f(\theta) \left( \begin{array}{l} - sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ c_{n0p}^b c_{n'0p'}^{*b} X_{n0}^b(\theta) X_{n'0}^b(\theta) \left( \begin{array}{l} sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \end{array} \right) \right\} \qquad \textit{VI.3}$$

$$= \pi r^2 Re\left\{\frac{1}{\mu\omega k r^2}\sum_{ll'}\left(\begin{array}{l} c^f_{n0p}c^{*f}_{n'0p'}X^f_{n0}(\theta)X^f_{n'0}(\theta)\left(\begin{array}{l} sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right) \\ +c^f_{n0p}c^{*b}_{n'0p'}X^f_{n0}(\theta)X^b_{n'0}(\theta)\left(\begin{array}{l} -sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right) \\ +c^b_{n0p}c^{*f}_{n'0p'}X^b_{n0}(\theta)X^f_{n'0}(\theta)\left(\begin{array}{l} -sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right) \\ c^b_{n0p}c^{*b}_{n'0p'}X^b_{n0}(\theta)X^b_{n'0}(\theta)\left(\begin{array}{l} sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right)\end{array}\right)\right\}$$

计算方程 VI.3 中的三角函数可得

| | $\begin{array}{c} sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right)\end{array}$ | $\begin{array}{c} -sin\left(-p\frac{\pi}{2}\right)sin\left(-p'\frac{\pi}{2}\right) \\ +cos\left(-p\frac{\pi}{2}\right)cos\left(-p'\frac{\pi}{2}\right)\end{array}$ |
|---|---|---|
| $p=0,p'=0$ | 1 | 1 |
| $p=0,p'=1$ | 0 | 0 |
| $p=1,p'=0$ | 0 | 0 |
| $p=1,p'=1$ | 1 | $-1$ |

*VI.4*

因此，$p=p'$ 是唯一非零项，方程 VI.3 可以写成

$$\int_0^{2\pi} r^2\partial\phi\langle \boldsymbol{S}_{far}\rangle\delta_{m0}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= \pi r^2 Re\left\{\frac{1}{\mu\omega k r^2}\sum_{ll'}\left(\begin{array}{l} c^f_{n00}c^{*f}_{n'00}X^f_{n0}(\theta)X^f_{n'0}(\theta)+c^f_{n01}c^{*f}_{n'01}X^f_{n0}(\theta)X^f_{n'0}(\theta) \\ +c^f_{n00}c^{*b}_{n'00}X^f_{n0}(\theta)X^b_{n'0}(\theta)-c^f_{n01}c^{*b}_{n'01}X^f_{n0}(\theta)X^b_{n'0}(\theta) \\ +c^b_{n00}c^{*f}_{n'00}X^b_{n0}(\theta)X^f_{n'0}(\theta)-c^b_{n01}c^{*f}_{n'01}X^b_{n0}(\theta)X^f_{n'0}(\theta) \\ +c^b_{n00}c^{*b}_{n'00}X^b_{n0}(\theta)X^b_{n'0}(\theta)+c^b_{n01}c^{*b}_{n'01}X^b_{n0}(\theta)X^b_{n'0}(\theta)\end{array}\right)\right\}$$

*VI.5*

注意，$X^t_{n0}(\theta)$ =(*')%(!&()√2!(!&') $\tau^0_n(\theta)$，且 $c^t_{n0p}$ =' 7$(-1)^{t(n-1)}(-i)^n$?$C_{n0p}$，+$(-1)^{1-t-p}ic^E_{n01-p}$@。因此，$c^t_{n0p}X^t_{n0}(\theta)$ =(*1)! 2√2!(!&') ? $C_{n0p}$，+$(-1)^{1-t-p}ic^E_{n01-p}$@。此外，$c_{n01}$，$=c^E_{n01}=0$，因此 $c^t_{n00}X^t_{n0}(\theta)$ =(*1)! 2√2!(!&') ( ~~$c_{n00}$~~ )，~~且~~ $c^t_{n01}X^t_{n0}(\theta)$ =(*1)! 2√2!(!&') $((-1)^t ic^E_{n00})$。鉴于 $c^t_{n00}X^t_{n0}(\theta)$ 不依赖于 t，~~则~~ $c^t_{n00}X^t_{n0}(\theta)c^{*t'}_{n00}X^{t'}_{n0}(\theta)$ =N! $^{M_{00}\ *M'_{00}}$N! !(!&') ! (!′&') $=A_{nn'}$。此外，$c^t_{n01}X^t_{n0}(\theta)c^{*t'}_{n01}X^{t'}_{n0}(\theta)$ =(*')%&%′N! $^{E_{00}\ *E'_{00}}$N! !(!&') ! (! &')。令 $B_{nn'}$ =N! $^{E_{00}\ *E'_{00}}$N! !(!&') ! (!′&') $=c^t_{n01}X^t_{n0}(\theta)c^{*t}_{n01}X^t_{n0}(\theta)$。则方程 VI.5 可以写成

$$\int_0^{2\pi} r^2\partial\phi\langle \boldsymbol{S}_{far}\rangle\delta_{m0}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$= \pi r^2 Re\left\{\frac{1}{\mu\omega k r^2}\sum_{nn'}4A_{nn'}+4B_{nn'}\right\}$$

$$= \pi r^2 Re\left\{\frac{1}{\mu\omega k r^2}\sum_{nn't}2c^t_{n00}X^t_{n0}(\theta)c^{*t}_{n00}X^t_{n0}(\theta)+2c^t_{n01}X^t_{n0}(\theta)c^{*t}_{n01}X^t_{n0}(\theta)\right\}$$

*VI.5*

$$= \pi r^2 Re\left\{\frac{1}{\mu\omega k r^2}\sum_{nn'tp}c^t_{n0p}X^t_{n0}(\theta)c^{*t}_{n0p}X^t_{n0}(\theta)\right\}$$

$$= 2\pi r^2 Re\left\{\frac{1}{\mu\omega k r^2}\sum_{tp}\|\sum_n c^t_{n00}X^t_{n0}(\theta)\|^2\right\}$$

当 $m\neq 0$ 时，方程 VI.1 的方位角积分变为

$$\int_0^{2\pi} r^2 \partial\phi \langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \int_0^{2\pi} r^2 \partial\phi \frac{1}{2}$$

$$Re\left\{ \frac{1}{\mu\omega k r^2} \sum_{ll'} \delta_{mm} \left( \begin{array}{l} c_l^f c_{l'}^{*f} X_{nm}^f(\theta) X_{n'm}^f(\theta) \left( \begin{array}{c} sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ + c_l^f c_{l'}^{*b} X_{nm}^f(\theta) X_{n'm}^b(\theta) \left( \begin{array}{c} -sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ + c_l^b c_{l'}^{*f} X_{nm}^b(\theta) X_{n'm}^f(\theta) \left( \begin{array}{c} -sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \\ c_l^b c_{l'}^{*b} X_{nm}^b(\theta) X_{n'm}^b(\theta) \left( \begin{array}{c} sin\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) sin\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \\ + cos\left(m\phi - p\frac{\pi}{2}\right) cos\left(m\phi - p'\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right) \end{array} \right) \right\} \quad \textit{VI.6}$$

然后，根据 VI.2 中的正交关系，

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} r^2 \partial\phi \langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{1}{2} Re\left\{ \frac{1}{\mu\omega k} \sum_{ll'} 2\pi \delta_{mm'} \delta_{pp'} \left( c_{nmp}^f c_{n'mp}^{*f} X_{nm}^f(\theta) X_{n'm}^f(\theta) + c_{nmp}^b c_{n'mp}^{*b} X_{nm}^b(\theta) X_{n'm}^b(\theta) \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{\mu\omega k} \sum_{tmp} \left\| \sum_n c_{nmp}^t X_{nm}^t(\theta) \right\|^2 \end{aligned} \quad \textit{VI.7}$$

## VII. 极角函数的正交性

Kerker 极角函数为

$$X_{nm}^{\rho-t}(\theta) = \frac{(-1)^{(\rho-t)(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}} \left( \tau_n^m(\theta) + (-1)^{(\rho-t)} m \pi_n^m(\theta) \right) \quad \textit{VII.1}$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_n^m(\theta) &= \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos(\theta)) \\ \pi_n^m(\theta) &= \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} \end{aligned} . \quad \textit{VII.2}$$

于是，

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \partial\theta \sin(\theta) X_{nm}^{\rho-t}(\theta) X_{n'm}^{\rho'-t'}(\theta) \\ &= \int_0^{\pi} \partial\theta \sin(\theta) \frac{(-1)^{(\rho-t)(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}} \frac{(-1)^{(\rho'+t')(n'+m+1)}}{\sqrt{2n'(n'+1)}} \left( \begin{array}{c} \left( \tau_n^m(\theta) + (-1)^{(\rho-t)} m \pi_n^m(\theta) \right) \\ \times \left( \tau_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho'-t')} m \pi_{n'}^m(\theta) \right) \end{array} \right) \\ &= \frac{(-1)^{(\rho-t)(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}} \frac{(-1)^{(\rho'-t')(n'+m+1)}}{\sqrt{2n'(n'+1)}} \int_0^{\pi} \partial\theta \sin(\theta) \left( \mathcal{A}_{nn'm}^{\rho\rho'}(\theta) + \mathcal{B}_{nn'm}^{\rho\rho'}(\theta) \right) \end{aligned} \quad \textit{VII.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{nn'm}^{\rho\rho'}(\theta) &= \tau_n^m(\theta) \tau_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho+\rho'-t-t')} m^2 \pi_n^m(\theta) \pi_{n'}^m(\theta) \\ \mathcal{B}_{nn'm}^{\rho\rho'}(\theta) &= (-1)^{(\rho'-t')} \tau_n^m(\theta) m \pi_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho-t)} m \pi_n^m(\theta) \tau_{n'}^m(\theta) \end{aligned} \quad \textit{VII.4}$$

方程 VI.4 来自

$$\begin{aligned} &\left( \tau_n^m(\theta) + (-1)^{(\rho-t)} m \pi_n^m(\theta) \right) \left( \tau_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho'-t')} m \pi_{n'}^m(\theta) \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \tau_n^m(\theta) \tau_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho'-t')} \tau_n^m(\theta) m \pi_{n'}^m(\theta) \\ + (-1)^{(\rho-t)} m \pi_n^m(\theta) \tau_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho+\rho'-t-t')} m \pi_n^m(\theta) m \pi_{n'}^m(\theta) \end{array} \right) \end{aligned} \quad \textit{VII.5}$$

方程 VII.3 的解取决于对 VII.4 中的方程进行积分所得的结果。

第一个积分为

$$\int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta)\, \mathcal{A}^{\rho\rho'}_{nn'm}(\theta) = \int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta) \left(\tau_n^m(\theta)\tau_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho+\rho'-t-t')} m^2 \pi_n^m(\theta)\pi_{n'}^m(\theta)\right) =$$

$$\int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta)) \frac{\partial}{\partial\theta} P_{n'}^m(\cos(\theta)) + (-1)^{(\rho+\rho'-t-t')} m^2 \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} \frac{P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)}\right) \quad \textit{VII.6}$$

令

$$u = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta)) \qquad v = P_{n'}^m(\cos(\theta))$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta))\right) \quad \frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} P_{n'}^m(\cos(\theta)) \quad \textit{VII.7}$$

然后，对 VII.6 中的第一项进行分部积分，得到

$$\int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta)) \frac{\partial}{\partial\theta} P_{n'}^m(\cos(\theta))$$

$$= \sin(\theta) \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} P_{n'}^m(\cos(\theta))|_0^\pi - \int_0^\pi \partial\theta P_{n'}^m(\cos(\theta)) \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta))\right) \quad \textit{VII.8}$$

VII.8 中的第一项为

$$\sin(\pi) \frac{\partial P_n^m(-1)}{\partial\theta} P_{n'}^m(-1) - \sin(0) \frac{\partial P_n^m(1)}{\partial\theta} P_{n'}^m(1) = 0\,. \quad \textit{VII.9}$$

利用恒等式

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta))\right) = \frac{m^2 P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} - n(n+1)\sin(\theta)\, P_n^m(\cos(\theta)), \quad \textit{VII.10}$$

VII.8 中的第二项为,

$$-\int_0^\pi \partial\theta P_{n'}^m(\cos(\theta)) \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta))\right)$$

$$= -\int_0^\pi \sin(\theta)\, \partial\theta \left(\frac{m^2 P_n^m(\cos(\theta)) P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\sin^2(\theta)} - n(n+1) P_n^m(\cos(\theta)) P_{n'}^m(\cos(\theta))\right) \quad \textit{VII.11}$$

因此，方程 VII.6 可写为,

$$\int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta)\, \mathcal{A}^{\rho\rho'}_{nn'm}(\theta)$$

$$= \int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta) \begin{pmatrix} n(n+1) P_n^m(\cos(\theta)) P_{n'}^m(\cos(\theta)) \\ +\left((-1)^{(\rho+\rho'-t-t')} - 1\right) m^2 \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} \frac{P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} \end{pmatrix} \quad \textit{VII.12}$$

$$= n(n+1)\delta_{nn'} + \int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta) \left((-1)^{(\rho+\rho'-t-t')} - 1\right) m^2 \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} \frac{P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)}$$

同样,

$$\int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta)\, \mathcal{B}^{\rho\rho'}_{nn'm}(\theta)$$

$$= \int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta) \left((-1)^{(\rho'-t')} \tau_n^m(\theta) m \pi_{n'}^m(\theta) + (-1)^{(\rho-t)} m \pi_n^m(\theta) \tau_{n'}^m(\theta)\right)$$

$$= \int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta) \left((-1)^{(\rho'-t')} m \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} \frac{P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} + (-1)^{(\rho-t)} m \frac{\partial P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)}\right) \quad \textit{VII.13}$$

$$= m\int_0^\pi \partial\theta \left((-1)^{(\rho'-t')} \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} P_{n'}^m(\cos(\theta)) + (-1)^{(\rho-t)} \frac{\partial P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta))\right)$$

令

$$u = P_{n'}^m(\cos(\theta)) \qquad v = P_n^m(\cos(\theta))$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} P_{n'}^m(\cos(\theta)) \quad \frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta)) \quad \textit{VII.14}$$

then

$$\int_0^\pi \partial\theta \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} P_{n'}^m(\cos(\theta)) \quad \textit{VII.15}$$

$= P_{n'}{}^{m}(\cos(\theta))P_n^m(\cos(\theta))|_0^\pi - \int_0^\pi \partial\theta \frac{\mathrm{FM}n'm(\mathrm{co\_}(\theta))}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta))$。

因此，VII.13 可写为

$$\int_0^\pi \partial\theta \sin(\theta)\, \mathcal{B}_{nn'm}^{\rho\rho'}(\theta)$$
$$= (-1)^{(\rho'-t')} m\left(P_{n'}^m(\cos(\theta))P_n^m(\cos(\theta))|_0^\pi\right) + m\left((-1)^{(\rho-t)} - \right. \qquad \textit{VII.13}$$
$$\left.(-1)^{(\rho'-t')}\right) \int_0^\pi \partial\theta \frac{\partial P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta))$$

那么，方程 VII.3 为

$$\int \partial\theta \sin(\theta)\, X_{nm}^{\rho-t}(\theta) X_{n'\text{"E'*8'}}(\theta)\ \mathrm{D}\ /$$
$$=$$
$$\frac{(-1)^{(\rho-t)(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}} \frac{(-1)^{(\rho'-t')(n'+m+1)}}{\sqrt{2n'(n'+1)}} \begin{pmatrix} n(n+1)\delta_{nn'} \\ +\left((-1)^{\left((\rho-t)+(\rho'-t')\right)} - 1\right) \int_0^\pi \partial\theta\, m^2 \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} P_{n'}^m(\cos(\theta)) \\ +m\left((-1)^{(\rho-t)} - (-1)^{(\rho'-t')}\right) \int_0^\pi \partial\theta \frac{\partial P_{n'}^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} P_n^m(\cos(\theta)) \end{pmatrix} \qquad \textit{VII.14}$$

若 $(\rho - t) = (\rho' - t')$，则，

$$\int \partial\theta \sin(\theta)\, X_{nm}^{\rho-t}(\theta) X_{n'\text{"E'*8'}}(\theta)\ \mathrm{D}\ /$$
$$= \frac{\delta_{nn'}}{2} \qquad \textit{VII.15}$$

若 $m = 0$，则，

$$\int \partial\theta\, \text{正弦}(\theta)\, X_{nm}^{\rho-t}(\theta) X_{n'\text{"E'*8'}}(\theta)\ \mathrm{D}\ /$$
$$= \frac{\mathrm{f}nn'}{2}(-1)^{(\rho-t)(n+1)}(-1)^{(\rho'\text{*\$'T(!\&')}} \qquad \textit{VII.16}$$

## VIII. Kerker 基底中的远场前向与后向强度 S

在前向方向，远场极化函数可简化为

$$\pi_n^{|m|}(\beta = 0) = \tau_n^{|m|}(\beta = 0) = {}_1\frac{}{2} H_n \delta_{|m|1}。 \qquad \textit{VIII.1}$$

其中，$H_n = \frac{}{\sqrt{2}}$ ¢$\overline{n(n+1)(2n+1)}$。因此，

$$X_{nm}^t(\theta = 0) = \frac{(-1)^{t(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}} \frac{1}{2} H_n \delta_{|m|1}(1 + (-1)^t m) = \frac{\sqrt{n(n+1)(2n+1)}\delta_{m1}\delta_{t0}}{\sqrt{4n(n+1)}} = \frac{\sqrt{(2n+1)}\delta_{m1}\delta_{t0}}{2} \qquad \textit{VIII.2}$$

在后向方向，远场极化函数满足以下关系：

$$\pi_n^m(\pi) = -(-1)^n \pi_n^m(0)$$
$$\tau_n^m(\pi) = (-1)^n \tau_n^m(0) \qquad \textit{VIII.3}$$

因此，

$$X_{nm}^t(\theta = \pi) = \frac{(-1)^{t(n+m+1)}}{\sqrt{2n(n+1)}} (-1)^n \frac{1}{2} H_n \delta_{|m|1}(1 - (-1)^t m) = \frac{(-1)^{(n+2)}(-1)^n}{\sqrt{2n(n+1)}} H_n \delta_{m1}\delta_{t1} =$$
$$\frac{\sqrt{(2n+1)}\delta_{m1}\delta_{t1}}{2} \qquad \textit{VIII.4}$$

从方位角积分远场强度出发，

$$\int_0^{2\pi} r^2 \partial\phi \langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = Re\left\{\frac{\pi}{\mu\omega kr} \sum_{nn'mp} c_{nmp}^f c_{n'mp}^{*f} X_{nm}^f(\theta) X_{n'm}^f(\theta) + c_{nmp}^b c_{n'mp}^{*b} X_{nm}^b(\theta) X_{n'm}^b(\theta)\right\}$$
$$= Re\left\{\frac{\pi}{\mu\omega k} \sum_{tmp} \left\|\sum_n c_{nmp}^t X_{nm}^t(\theta)\right\|^2\right\}, \qquad \textit{VIII.5}$$

因此,

$$I(\theta=0^{\circ})=Re\left\{\frac{\pi}{\mu\omega k}\sum_p\left\|\sum_n c_{n1p}^{f}\frac{\sqrt{(2n+1)}}{2}\right\|^2\right\}=\frac{\pi}{2\mu\omega k}\sum_p\left\|\sum_n c_{n1p}^{f}K_n\right\|^2, \qquad VIII.6$$

其中 $K_n=¢(\overline{2n+1)}_{\circ}$

## IX. Kerker基中的总散射功率

总散射功率可通过对方位角积分功率在极角范围内进行积分求得,

$$\int_0^{2\pi}r^2\sin(\theta)\,\partial\phi\partial\theta\langle\boldsymbol{S}_{far}\rangle\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}=Re\left\{\frac{\pi}{\mu\omega kr}\sum_{tnn'mp}c_{nmp}^{t}c_{n'mp}^{*t}\int_0^{\pi}\partial\theta\sin(\theta)\,X_{nm}^{t}(\theta)X_{n'm}^{t}(\theta)\right\} \qquad IX.1$$

方程 IX.1 的解涉及求解积分,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\partial\theta\sin(\theta)\,X_{nm}^{t}(\theta)X_{n'm}^{t}(\theta)\\&=\int_0^{\pi}\partial\theta\sin(\theta)\frac{(-1)^{t\left((n+n')+2m+2\right)}}{\sqrt{2n(n+1)}\sqrt{2n'(n'+1)}}\left(\tau_n^m(\theta)+(-1)^t m\pi_n^m(\theta)\right)\left(\tau_{n'}^m(\theta)+(-1)^t m\pi_{n'}^m(\theta)\right)\\&=\frac{(-1)^{t(n+n')}}{2\sqrt{n(n+1)}\sqrt{n'(n'+1)}}\int_0^{\pi}\partial\theta\sin(\theta)\begin{pmatrix}\tau_n^m(\theta)\tau_{n'}^m(\theta)\\+(-1)^t m\pi_{n'}^m(\theta)\tau_n^m(\theta)\\+(-1)^t m\pi_n^m(\theta)\tau_{n'}^m(\theta)\\+m^2\pi_n^m(\theta)\pi_{n'}^m(\theta)\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad IX.2$$

利用恒等式,

$$\int_0^{\pi}\left(\tau_n^{|m|}(cos\,\theta)\tau_{n'}^{|m|}(cos\,\theta)+m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)m\pi_{n'}^{|m|}(cos\,\theta)\right)\sin(\theta)\,d\theta=n(n+1)\delta_{nn'}, \qquad IX.3$$

and

$$\int_0^{\pi}\left(\tau_n^{|m|}(cos\,\theta)m\pi_{n'}^{|m|}(cos\,\theta)+\tau_{n'}^{|m|}(cos\,\theta)m\pi_n^{|m|}(cos\,\theta)\right)\sin(\theta)\,d\theta=0 \qquad IX.4$$

方程 IX.2 为

$$\int_0^{\pi}\partial\theta\sin(\theta)\,X_{nm}^{t}(\theta)X_{n'm}^{t}(\theta)=\frac{(-1)^{t(n+n')}}{2\sqrt{n(n+1)}\sqrt{n'(n'+1)}}D_{nm}\delta_{nn'}=\frac{1}{2}\delta_{nn'} \qquad IX.5$$

因此，方程 IX.1 为

$$\int_0^{2\pi}r^2\sin(\theta)\,\partial\phi\partial\theta\langle\boldsymbol{S}_{far}\rangle\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}=Re\left\{\frac{\pi}{2\mu\omega k}\sum_{tnmp}\left\|c_{nmp}^{t}\right\|^2\right\} \qquad IX.6$$

## X. 引言中的示例

本节旨在展示主文引言中提出的系统示例里，Mie 谐波与 Kerker 谐波之间的数学变换。文中展示了各系统在 $a$、$b$、$c$ 这些示例取值下的时间平均远场坡印廷矢量分布。主文介绍了两个系统:

$$\begin{aligned}&System\ 1\colon\ -2a\boldsymbol{\Psi}_{111}^{E}-2ib\boldsymbol{\Psi}_{211}^{E}+c\boldsymbol{\Psi}_{311}^{E}-ic\boldsymbol{\Psi}_{310},\\&System\ 2\quad -2a\boldsymbol{\Psi}_{111}^{E}-2b\boldsymbol{\Psi}_{210}+c\boldsymbol{\Psi}_{311}^{E}-ic\boldsymbol{\Psi}_{310}\colon\ ,\ ,\ ,\end{aligned} \qquad X.1$$

其中 $a$、$b$、$c\in\mathbb{z}^{+}\ll\infty$。通过使用以下方法变换系数，这两个系统可以用 Kerker 基表示:

公式

$$c_{nmp}^{t} = \frac{1}{2}(-1)^{t(n-m-1)}(-i)^{n}\begin{pmatrix} c_{nmp}^{M} \\ +(-1)^{1-t-p} i c_{nm1-p}^{E} \end{pmatrix}. \qquad X.2$$

变换后的系数如下表所示

| $\mathbf{c}_{nmp}^{M}$ | $\mathbf{c}_{nm1^{*}p}^{E}$ | Kerker 系数变换 | $\mathbf{c}_{nmp}^{f}$ | $\mathbf{c}_{nmp}^{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{c_{110}^{M} = 0}$ | $c_{111}^{E} = -2a$ | $c_{110}^{t}$ $\frac{}{2}-i=(-1)^{t}(-1)^{1-t} i c_{110}^{E}$ | $c_{110}^{f} = a$ | $c_{110}^{b} = a$ |
| $\boldsymbol{c_{210}^{M} = -2b}$ | $c_{211}^{E} = 0$ | $c_{210}^{t} = \frac{1}{2}(-i)^{2} c_{210},$ | $c_{210}^{f} = b$ | $c_{210}^{b} = b$ |
| $\boldsymbol{c_{210}^{M} = 0}$ | $c_{211}^{E} = -2ib$ | $c_{210}^{t} = -\frac{i}{2}(-1)^{1-t}(c\ {}_{211}^{E})$ | $c_{210}^{f} = b$ | $c_{210}^{b} = -b$ |
| $\boldsymbol{c_{310}^{M} = -ic}$ | $c_{311}^{E} = c$ | $c_{310}^{t} = \frac{1}{2}(-1)^{t}(-i)^{3}(ic)(-1+(-1)^{1-t})$ | $c_{310}^{f} = c$ | $c_{310}^{b} = 0$ |

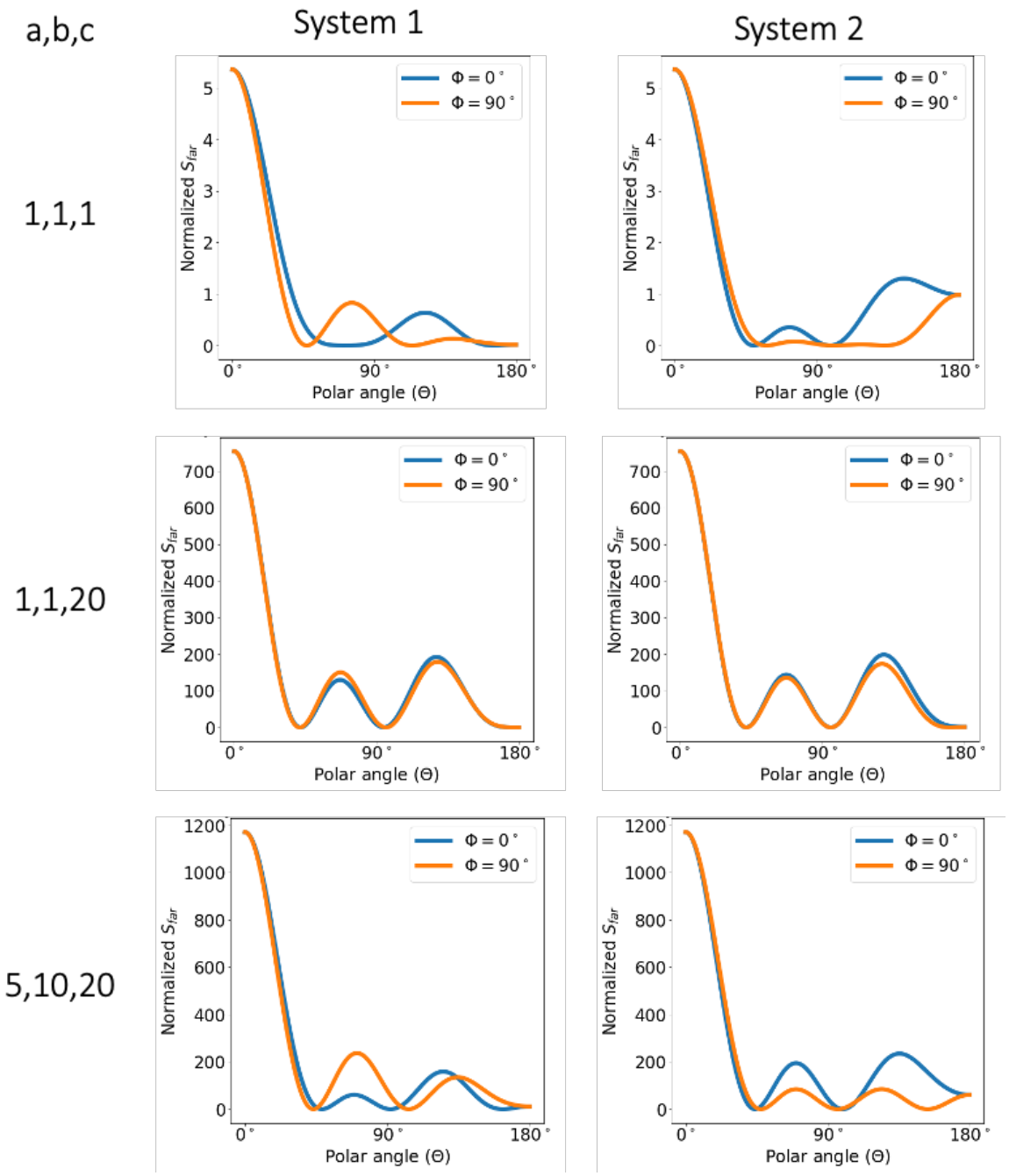


图 S1：方程 X.1 中针对不同 a、b 和 c 取值（左列）提出的系统1（中列）和系统2（右列）的时间平均坡印廷矢量。蓝线表示 $\phi = \pi/2$，橙线表示 $\phi = 0$。时间平均坡印廷矢量归一化为 $2\mu\omega kr^2 \langle \boldsymbol{S}_{far} \rangle = (\|A(\phi,\theta)\|^2 + \|B(\phi,\theta)\|^2)\boldsymbol{e}\mathrm{Z}_r$，其中 $A(\phi,\theta)$ 和 $B(\phi,\theta)$ 来自正文中的方程9。

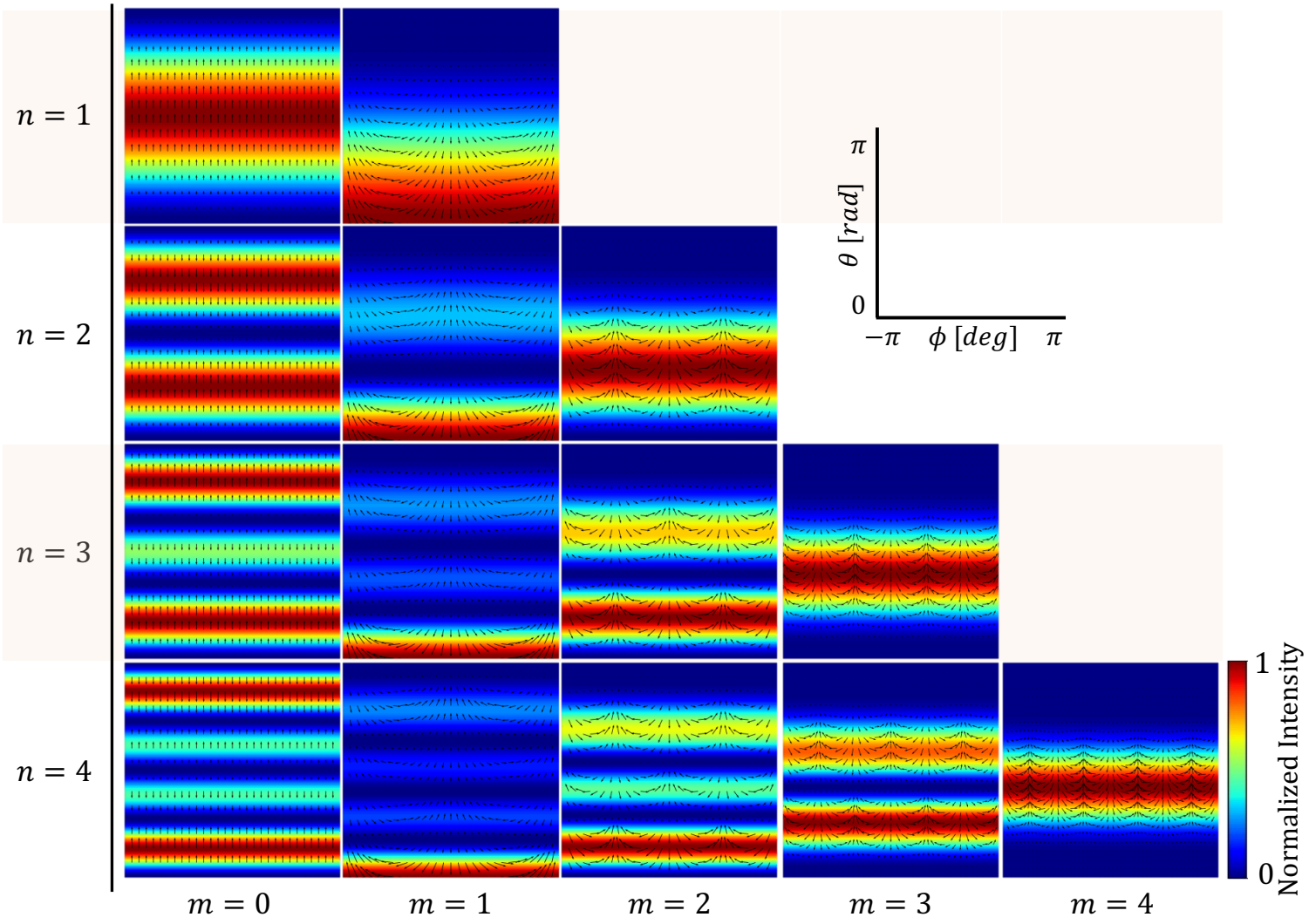


图 S2：远场前向 Kerker 谐波的时间平均强度以颜色编码显示，矢量偏振以黑色箭头叠加表示。每幅图中，x 轴为方位角，y 轴为极角。