关于(ψ,ϕ)-压缩的若干耦合不动点定理及其分形应用

Athul P [a]，*D. Ramesh Kumar*[b]，*

a，*b*数学系，高等科学学院，韦洛尔理工学院，韦洛尔-*632014*，*TN*，印度

arXiv:2303.03710v1 [math.FA] 7 Mar 2023

摘要

本文在定义于$(0,\infty)$上的实值函数 ψ 和 ϕ 满足某些广义条件的情况下，得到了(ψ,ϕ)-压缩的耦合不动点定理。此外，我们还给出了适用于同一(ψ,ϕ)-压缩的耦合不动点定理的一个广义版本。基于这些不动点定理，并利用分形与不动点之间的关系，我们提出了一种生成分形的新方法。我们建立了一类由广义(ψ,ϕ)-压缩构成的新型迭代函数系统。我们还将这些结果推广到耦合分形。

数学主题分类（2020）：主要分类 47H09，47H10；次要分类 28A80关键词：不动点，联合$(\psi,\ \phi)$-压缩，耦合不动点，迭代函数系统，耦合分形。

1 引言与预备知识

由 Banach 于 1922年 证明的 Banach 压缩映射原理是一条著名的不动点定理。该定理在数学的不同分支以及科学技术的其他领域都有许多应用。许多数学家以不同方式推广了 Banach 压缩映射原理，并在不动点理论中取得了令人振奋的成果。Boyd 和 Wong[5] 于 1969年提出了 Banach 压缩映射原理的一种推广。

定理 1.1。（*Boyd* 和 *Wong [5]*）设 $(X,\ d)$ 为完备度量空间，且 $T:\ X\ \to X$ 是满足以下条件的自映射

$$d\left(T(x),T(y)\right)\leq\phi\left(d(x,y)\right)\ \ for\ each\ x,y\in X,$$

*通讯作者。电子邮箱：rameshkumard14@gmail.com

其中 $\phi:\ \mathbb{R}^+ \to [0,\infty)$ 从右侧上半连续，并满足条件$0 \le \phi(t) < t$，对于 $t > 0$。则 T 在 X 中有唯一的不动点 x_0，且对于任意 $x \in X$，迭代序列 $\{T^n(x)\}$收敛于 x_0。

后来，在 1975 年，Matkowski [8] 证明了 Boyd-Wong 不动点定理的另一种变体。在这一变体中，函数 ϕ 的连续性被某些更一般的条件所替代。

定理 1.2。*(Matkowski [8])* 设(X,d) 是一个完备度量空间，且 $T:X \to X$ 满足

$$d(T(x),T(y)) \le \phi(d(x,y)) \quad \text{for each } x,y \in X,$$

其中 $\phi:(0,\infty) \to (0,\infty)$ 是非递减的，并满足条件 $\lim_{n\to\infty}\phi^n(t) = 0$ 对于 $t > 0$成立。则 T 在 X 中有唯一不动点 x_0，且对于任意 $x \in X$，迭代序列 $\{T^n(x)\}$ 收敛于 x_0。

Petko D. Proinov 针对广义(ψ,ϕ)-压缩映射提出了 Banach 压缩映射原理的一种近期推广形式。我们将讨论 P. D. Proinov 提出的一些思想。

定义 1.1. *[15]* 设 T 是度量空间(X,d)上的一个自映射。若 T 满足压缩型条件，则称其为(ψ,ϕ)-压缩映射

$$\psi(d(Tx,Ty)) \le \phi(d(x,y)), \quad \text{for all } x,y \in X \text{ with } d(Tx,Ty) > 0, \tag{1}$$

其中 $\psi,\phi:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是两个函数，满足 $\phi(t) < \psi(t)$ 对任意 $t > 0$均成立。

P. D. Proinov 给出的主要结果是：

定理 1.3. *[15]* 设(X,d) 是一个完备度量空间，且 $T:X \to X$ 是满足条件 *(1)* 的映射，其中函数 $\psi,\phi:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(i) ψ 是非递减的；*(ii)* $\phi(t) < \psi(t)$ 对任意 $t > 0$成立；
(iii) $\limsup_{t\to\epsilon+}\phi(t) < \psi(\epsilon+)$。

那么，T 有唯一的不动点 $\xi \in X$，且对于每个 $x \in X$，迭代序列 $\{T^n x\}$ 都收敛到 ξ。

在2021年，O. Popescu [14] 通过修改并改进 P. D. Proinov 证明的一些结果，提出了另一种推广。

定理 1.4. *[14]* 设(X,d) 是一个完备度量空间，且 $T:X \to X$ 是一个满足条件 *(1)* 的映射，其中函数 $\psi,\phi:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(i) ψ 是非递减的；

(ii) 下确界$_{t>\epsilon}$ ψ（t）$>-\infty$ 对任意 $\epsilon>0$;

(iii) 若 $\{\psi(t_n)\}$ 和 $\{\phi(t_n)\}$ 是具有相同极限的收敛序列，且 $\{\psi(t_n)\}$ 严格递减，则当 n 趋于无穷时，$t_n\to 0$；

(iv) 上极限$_{t\to\epsilon+}$ ϕ（t）$<$下极限$_{t\to\epsilon+}$ ψ（t）对任意 $\epsilon>0$; *(v)* T 具有闭图，
或 上极限$_{t\to 0+}$ ϕ（t）$<$最小值$\{$下极限$_{t\to\epsilon}$ ψ（t），$\psi(\epsilon)\}$ 对任意 $\epsilon>0$。

那么，T 有唯一的不动点 $\xi\in X$，且对每个 $x\in X$，迭代序列 $\{T^n x\}$ 都收敛到 ξ。

本文将 P. D. Proinov 和 O. Popescu 提出的上述不动点定理推广到耦合不动点问题。这类问题通常讨论形如 $T:X\times X\to X$ 的映射的不动点，其中 X 是一个完备度量空间。此外，我们通过将完备度量空间的乘积替换为两个不同完备度量空间的乘积（例如 $X\times Y$），证明了耦合不动点定理的一个推广版本。作为不动点理论的一项重要应用，我们还将研究拓展到分形理论。本文提出了一种利用广义 (ψ,ϕ)-压缩构造分形的新方法，为此我们采用由广义 (ψ,ϕ)-压缩组成的新迭代函数系统这一思想。这不同于 Hutchinson 和 Barnsley [4], 提出的经典分形生成方法，后者使用 Banach 压缩映射原理。最后，受耦合不动点定理的启发，我们证明了广义 (ψ,ϕ)-压缩映射的耦合自相似集的存在性与唯一性。

2 （ψ, ϕ）-压缩的耦合不动点定理

本节给出我们的主要结果，将 P. D. Proinov 和 O. Popescu 的不动点定理推广到耦合不动点问题。

定义 *2.1.* 设 *(X, d)* 为一个度量空间，$\psi,\phi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是两个映射。若映射 $T:X\times X\to X$ 满足：对于 $z=(x,y)$，$w=(u,v)\in X$，有 $max\{d(T(x,y),T(u,v)),d(T(y,x),T(v,u))\}>0$，则称其为联合的 *(ψ, ϕ)*-压缩，

$$\psi(d(Tz,Tw))\le\phi(\max\{d(x,u),d(y,v)\}) \tag{2}$$

对于完备度量空间 (X,d)，我们定义 $X^*=X\times X$。
定义 $d^*:X^*\times X^*\to\mathbb{R}$ 使得 $d^*((x、y),(u、v))=$最大值$\{d(x、u)、d(y、v)\}$。很容易看出，如果 e

看到，当$(X、d)$是一个完备度量空间时，那么$(X^*、d^*)$也是一个完备度量空间。对于映射$T: X \times X \to X$，我们可以如下定义迭代序列：

$$\begin{cases} T^2(x,y) &= T\left(T(x,y),T(y,x)\right) \\ T^3(x,y) &= T\left(T^2(x,y),T^2(y,x)\right) \\ &\vdots \\ T^n(x,y) &= T\left(T^{n-1}(x,y),T^{n-1}(y,x)\right) \end{cases}$$

定理 2.1. 设(X,d)是一个完备度量空间，且$T:X \times X \to X$ ψ满足条件 *(2)*，其中$\psi,\phi:(0,\infty) \to \mathbb{R}$满足以下条件：

(i) ψ是非递减的；

(ii) 对每个$t > 0$，$\phi(t) < \psi(t)$；

(iii) 对每个$\epsilon > 0$，上极限$\phi(t) < \psi(\epsilon+)$。$t\to\epsilon+$

那么存在唯一一点$\xi^* = (x^*,y^*) \in X \times X$，使得

$$\begin{cases} x^* = T(x^*,y^*) \\ y^* = T(y^*,x^*) \end{cases}$$

并且对于任意$(x,y) \in X \times X$，迭代序列$x_n = T^n(x,y)$和$y_n = T^n(y,x)$分别收敛到x^*和y^*。

证明。由于 (X, d) 是完备度量空间，根据前面的讨论，我们有 (X*, d*) 也是完备度量空间。现在我们定义一个映射 T* : X* → X* ，使得对于 (x, y) ∈X*，T*(x, y) =(T(x, y), T(y, x))。令 z =(x, y)，w =(u, v) ∈X*，且 d*(T*z, T*w) > 0。如果 d*(T*z, T*w) =max{d(T(x, y), T(u, v)), d (T(y, x), T(v, u))} = d (T(x, y), T(u, v))，那么由条件 (2) 可得，

$$\begin{aligned} \psi\left(d^*\left(T^*z,T^*w\right)\right) &= \psi\left(d\left(T(x,y),T(u,v)\right)\right) \\ &\le \phi\left(\max\{d(x,u),d(y,v)\}\right) \\ &= \phi\left(d^*(z,w)\right). \end{aligned}$$

另一方面，假设 d*(T*z, T*w) =max{d(T(x, y), T(u, v)), d(T(y, x), T(v, u))} =d(T(y, x), T(v, u))。如上所述，可得 ψ (d* (T*z, T*w)) ≤ ϕ (d*(z, w))。因此，对于任意 z, w ∈X*，若 d*(T*z, T*w) > 0，则有 ψ (d* (T*z, T*w)) ≤ϕ (d*(z, w))，这意味着自映射 T* 在完备度量空间 (X*, d*) 中满足条件 (1)。然后，根据假设中的条件 (i)- (iii) 和定理 1.3，我们可以

得出存在唯一的 $\xi^* = (x^*, y^*) \in X^*$，使得 $T^*\xi^* = \xi^*$。也就是说，$(T(x^*, y^*), T(y^*, x^*)) = (x^*, y^*)$，这意味着 $x^* = T(x^*, y^*)$，$y^* = T(y^*, x^*)$。此外，对于任意 $z = (x, y) \in X^*$，迭代序列 $\{T^{*n}(z)\}$ 收敛到 ξ^*。也就是说，对于任意 $(x, y) \in X \times X$，迭代序列 $x_n = T^n(x, y)$ 和 $y_n = T^n(y, x)$ 分别收敛到 x^* 和 y^*。证明完毕。

□

同样地，我们可以得到定理 1.4 关于耦合不动点的推广。

定理 2.2。设 (X,d) 是一个完备度量空间，且 $T: X \times X \to X$ 是一个满足条件（2）的映射，其中 $\psi, \phi: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(i) $\phi(t) < \psi(t)$ 对任意 $t > 0$;

(ii) 下确界$_{t>\epsilon}\psi(t) > -\infty$ 对任意 $\epsilon > 0$;

(iii) 若 $\{\psi(t_n)\}$ 和 $\{\phi(t_n)\}$ 是具有相同极限的收敛序列，且 $\{\psi(t_n)\}$ 严格递减，则当 $n \to \infty$ 时，$t_n \to 0$；

(iv) 对任意 $\epsilon > 0$，$\limsup t\to\epsilon+ \ ^{\phi}(t) < \liminf_{t\to\epsilon+} \psi(t)$；

(v) T 具有闭图，或者对任意 $\epsilon > 0$，$\limsup t\to 0+ \ ^{\phi}(t) < \min\{\liminf_{t\to\epsilon} \psi(t), \psi(\epsilon)\}$。

那么存在唯一一点 $\xi^* = (x^*,y^*) \in X \times X$，使得

$$\begin{cases} x^* = T(x^*, y^*) \\ y^* = T(y^*, x^*) \end{cases}$$

并且对于任意 $(x,y) \in X \times X$，迭代序列 $x_n = T^n(x,y)$ 和 $y_n = T^n(y,x)$ 分别收敛到 x^* 和 y^*。

证明。定义一个映射 $T^*: X^* \to X^*$，使得 $T^*(x,y) = (T(x,y), T(y,x))$ 对 $(x,y) \in X^*$成立。由定理 2.1 的证明可知，T^* 满足条件 (1)。

假设 T 的图是闭图。那么，对于任意序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ in X，若 $x_n \to x$、$y_n \to y$，且当 $n \to \infty$ 时，$T(x_n, y_n) \to \alpha$ and $T(y_n, x_n) \to \beta$，则有 $T(x, y) = \alpha$ and $T(y, x) = \beta$。由此可得，对于任意序列 $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$，若 $(x_n, y_n) \to (x, y)$ 且 $T^*(x_n, y_n) \to (\alpha, \beta)$，则 $T^*(x, y) = (\alpha, \beta)$，这意味着 T^* 的图是闭图。因此，若 T 的图是闭图，则 T^* 的图也闭。于是，根据假设中的条件 (i)- (v) 和定理 1.4，结论成立。

□

例2.1. 设 $M = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\}$，且 $X = M \cup \{0\}$。定义 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 为 $d(x,y) = |x - y|$。容易验证，(X,d) 是一个完备度量空间。此外，考虑配备最大度量的完备度量空间 $X \times X$，其度量定义为

$$d^*((x,y),(u,v)) = \max\left\{|x-u|, |y-v|\right\} \text{ for any } (x,y),(u,v) \in X \times X.$$

定义映射 $T: X \times X \to X$，使得

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\min\{m,n\}+1}} & \text{if } (x,y) \in M \times M \\ \frac{1}{2^{n+1}} & \text{if } (x,y) \in (M \times \{0\}) \cup (\{0\} \times M) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

此外，定义 $\psi, \phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{if } t \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{3t}{2} & \text{if } t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 3t & \text{if } t \geq 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad \phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} & \text{if } t \in (0, \frac{1}{2}) \\ t & \text{if } t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 2t & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

这里，函数 ψ 和 ϕ 满足定理 *2.2* 的条件 *(i)- (v)*。

情况 ***1***：对于 $m,n,p,q \geq 0$，当 $\min\{m,n\} \neq \min\{p,q\}$ 时，我们有

$$\begin{aligned} \psi\left(d\left(T\left(\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right), T\left(\frac{1}{2^p},\frac{1}{2^q}\right)\right)\right) &= \psi\left(\left|\frac{1}{2^{\min\{m,n\}+1}} - \frac{1}{2^{\min\{p,q\}+1}}\right|\right) \\ &= \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2^{\min\{m,n\}}} - \frac{1}{2^{\min\{p,q\}}}\right| \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \phi\left(d^*\left(\left(\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{1}{2^p},\frac{1}{2^q}\right)\right)\right) &= \phi\left(\max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^q}\right|\right\}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}\max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^q}\right|\right\} & \text{if } m,n,p,q > 0 \\ \max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^q}\right|\right\} & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

情形 ***2***：对于 $m,n,p \geq 0$ 且 $\min\{m,n\} \neq p$，可得

$$\psi\left(d\left(T\left(\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right), T\left(\frac{1}{2^p},0\right)\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{1}{2^{\min\{m,n\}+1}} - \frac{1}{2^{p+1}}\right|\right) = \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2^{\min\{m,n\}}} - \frac{1}{2^p}\right|$$

and

$$\begin{aligned} \phi\left(d^*\left(\left(\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{1}{2^p},0\right)\right)\right) &= \phi\left(\max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \frac{1}{2^n}\right\}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}\max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \frac{1}{2^n}\right\} & \text{if } \max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \frac{1}{2^n}\right\} < \frac{1}{2} \\ \max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \frac{1}{2^n}\right\} & \text{if } \max\left\{\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^p}\right|, \frac{1}{2^n}\right\} \geq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{if } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

情形 ***3***：若 $m,p \geq 0$ 且 $m \neq p$，可得

$$\psi\left(d\left(T\left(\frac{1}{2^m},0\right),T\left(\frac{1}{2^p},0\right)\right)\right)=\psi\left(\left|\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\right|\right)=\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^p}\right|$$

and

$$\begin{aligned}\phi\left(d^*\left(\left(\frac{1}{2^m},0\right),\left(\frac{1}{2^p},0\right)\right)\right)&=\phi\left(\max\left\{\left|\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^p}\right|,0\right\}\right)\\&=\begin{cases}\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^p}\right| & if\ \left|\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^p}\right|<\frac{1}{2}\\ \left|\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^p}\right| & if\ \left|\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^p}\right|\geq\frac{1}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

另一方面

$$\psi\left(d\left(T\left(\frac{1}{2^m},0\right),T\left(0,\frac{1}{2^p}\right)\right)\right)=\psi\left(\left|\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\right|\right)=\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^p}\right|$$

and

$$\begin{aligned}\phi\left(d^*\left(\left(\frac{1}{2^m},0\right),\left(0,\frac{1}{2^p}\right)\right)\right)&=\phi\left(\max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^p}\right\}\right)\\&=\begin{cases}\frac{1}{4}\max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^p}\right\} & if\ \max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^p}\right\}<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & if\ \max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^p}\right\}=\frac{1}{2}\\ 2 & if\ \max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^p}\right\}=1.\end{cases}\end{aligned}$$

情况 ***4***：对于 $m,\ n>0$，我们有

$$\psi\left(d\left(T\left(\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right),T(0,0)\right)\right)=\psi\left(\frac{1}{2^{\min\{m,n\}+1}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{\min\{m,n\}}}\right)$$

and

$$\begin{aligned}\phi\left(d^*\left(\left(\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right),(0,0)\right)\right)&=\phi\left(\max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right\}\right)\\&=\begin{cases}\frac{1}{4}\max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right\} & if\ \max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right\}<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & if\ \max\left\{\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^n}\right\}=\frac{1}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

情形 ***5***：对于 $m>0$，我们得到

$$\psi\left(d\left(T\left(1,\frac{1}{2^m}\right),T(0,0)\right)\right)=\psi\left(\frac{1}{2^{\min\{0,m\}+1}}\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

and

$$\phi\left(d^*\left(\left(1,\frac{1}{2^m}\right),(0,0)\right)\right)=\phi\left(\max\left\{1,\frac{1}{2^m}\right\}\right)=\phi(1)=2$$

此外，

$$\psi\left(d\left(T\left(\frac{1}{2^m},0\right),T(0,0)\right)\right)=\psi\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

and

$$\phi\left(d^*\left(\left(\frac{1}{2^m},0\right),(0,0)\right)\right)=\phi\left(\frac{1}{2^m}\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^m}\right) & if\ m>1\\ \frac{1}{2} & if\ m=1.\end{cases}$$

情形 ***6***:

$$\psi\left(d\left(T(1,0),T(0,0)\right)\right)=\psi\left(d\left(T(\frac{1}{2^0},0),T(0,0)\right)\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

and

$$\phi\left(d^*\left((1,0),(0,0)\right)\right)=\phi(1)=2.$$

根据上述所有情形，我们可以观察到，对于任意 (x,y)，$(u,v)\in X\times X$，有

$$\psi\left(d\left(T(x,y),T(u,v)\right)\right)\leq\phi\left(d^*\left((x,y),(u,v)\right)\right)$$

因此，T 满足条件 *(2)* 以及定理 *2.2* 的所有假设。显然，$(x,y)=(0,0)$是 T 的唯一耦合不动点。

3 (ψ,ϕ)-压缩的扩展耦合不动点

本节将讨论耦合不动点中更一般的问题。这里，我们不再考虑同一个完备度量空间的乘积，而是讨论两个不同完备度量空间的乘积。

设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个完备度量空间。定义 $Z=X\times Y$，以及一个函数$\mu:Z\to\mathbb{R}$，使得

$$\mu(z,w)=\mu\left((x,y),(u,v)\right)=\max\{d(x,u),\rho(y,v)\}\text{ for any }z=(x,y),w=(u,v)\text{ in }Z. \tag{3}$$

容易看出，由于(X,d) 和(Y,ρ) 是完备度量空间，因此度量空间(Z,μ) 也是完备的。

定义 *3.1.* 设 *(X, d)* 和 *(Y, ρ)* 是两个完备度量空间。设 $T:X\times Y\to X$ 和 $S:X\times Y\to Y$ 是两个映射。若对于 $z=(x,y)$、$w=(u,v)\in X\times Y$，满足 $max\{d(T(x,y),T(u,v)),\rho(S(x,y),S(u,v))\}>0$，则称 T 和 S 为扩展联合 (ψ,ϕ)-压缩映射，此时有

$$\begin{aligned}\psi(d(Tz,Tw))&\leq\phi(\max\{d(x,u),\rho(y,v)\})\\ \psi(\rho(Sz,Sw))&\leq\phi(\max\{d(x,u),\rho(y,v)\})\end{aligned} \tag{4}$$

*whe*其中 $\psi,\phi:\ (0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是两个函数，使得对于每个 t，都有 $\phi(t)<\psi(t)>0$.

引理 *3.1.* 设 *(X, d)* 和 *(Y, ρ)* 是两个完备度量空间。设 $T: X \times Y \to X$ 且 $S: X \times Y \to Y$ 是扩展的联合 *(ψ, φ)*-压缩，其中 $\psi, \phi: (0, \infty) \to \mathbb{R}$。定义 $F_{TS}: X \times Y \to X \times Y$ 为 $F_{TS}(x, y) = (T(x, y), S(x, y))$，其中 $(x, y) \in X \times Y$。则 F_{TS} 是一个 *(ψ, φ)*-压缩。

证明。 设 $Z = X \times Y$，且 μ 是方程（3）中定义的度量。注意，(Z, μ) 是一个完备度量空间，并假设 $z = (x,y)$，$w = (u,v) \in Z$。那么

$$\begin{aligned} \psi\left(\mu\left(F_{TS}(z), F_{TS}(w)\right)\right) &= \psi\left(\mu\left(\left(T(x,y), S(x,y)\right), \left(T(u,v), S(u,v)\right)\right)\right) \\ &= \psi\left(\max\left\{d\left(T(x,y), T(u,v)\right), \rho\left(S(x,y), S(u,v)\right)\right\}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

假设 $\mu\left(F_{TS}(z), F_{TS}(w)\right) = d\left(T(x, y), T(u, v)\right)$。那么根据条件（4），方程（5）变为:

$$\begin{aligned} \psi\left(\mu\left(F_{TS}(z), F_{TS}(w)\right)\right) &= \psi\left(d\left(T(x,y), T(u,v)\right)\right) \\ &\leq \phi\left(\max\{d(x,u), \rho(y,v)\}\right) \\ &= \phi\left(\mu(z,w)\right). \end{aligned}$$

另一方面，若 $\mu(F_{TS}(z), F_{TS}(w)) = \rho(S(x, y), S(u, v))$，则通过与上述类似的论证可得:

$$\mu\left(F_{TS}(z), F_{TS}(w)\right) \leq \phi\left(\mu(z,w)\right).$$

因此，映射 F_{TS} 是一个(ψ, ϕ)-压缩。 □

我们将映射T 和S 的迭代序列定义如下:

$$\begin{cases} T^2(x,y) &= T\left(T(x,y), S(x,y)\right) \\ S^2(x,y) &= S\left(T(x,y), S(x,y)\right) \\ T^3(x,y) &= T\left(T^2(x,y), S^2(x,y)\right) \\ S^3(x,y) &= S\left(T^2(x,y), S^2(x,y)\right) \\ &\vdots \\ T^n(x,y) &= T\left(T^{n-1}(x,y), S^{n-1}(x,y)\right) \\ S^n(x,y) &= S\left(T^{n-1}(x,y), S^{n-1}(x,y)\right) \end{cases}$$

其中$(x,y) \in X \times Y$。
现在，我们可以将定理 1.3 推广到扩展的联合(ψ, ϕ)-压缩，从而得到更一般化的耦合不动点。

定理3.1。 设(X, d)，(Y, ρ) 是两个完备度量空间，且 $T: X \times Y \to X$ 和 $S: X \times Y \to Y$ 是扩展的联合(ψ, ϕ)-压缩。若函数 ψ，ϕ 满足以下条件:

(i) ψ 是非递减的;

(ii) $\phi(t) < \psi(t)$ 对每个 $t > 0$均成立;

(iii) 上极限 $\phi(t) < \psi(\epsilon+)$ 对每个 $\epsilon > 0$、$t \to \epsilon+$均成立

那么存在唯一点 $\xi^* = (x^*, y^*) \in X \times Y$，使得，

$$\begin{cases} x^* = T(x^*, y^*) \\ y^* = S(x^*, y^*) \end{cases}$$

并且，对于任意$(x,y) \in X \times Y$，序列 $x_n = T^n(x,y)$ 和 $y_n = S^n(x,y)$ 分别收敛到 x^* 和 y^* 。

证明。定义映射 $F_{TS}: X \times Y \to X \times Y$，使得对于 (x, y) $\in$ X $\times$ Y，有 F_{TS}(x, y) = (T(x, y), S(x, y))。由引理 3.1，F_{TS} 是一个 (ψ,ϕ)-压缩。因此，假设中的条件 (i)-(iii) 和定理 1.3 得出该结果。 □

定理 3.2。 设 $(X,d),(Y,\rho)$ 是两个完备度量空间，$T: X \times Y \to X$ 和 $S: X \times Y \to Y$ 是扩展的联合 (ψ,ϕ)-压缩。若函数 ψ,ϕ 满足以下条件:

(i) $\phi(t) < \psi(t)$ 对任意 $t > 0$;

(ii) 下确界$_{t>\epsilon}\ \psi(t) > -\infty$ 对任意 $\epsilon > 0$;

(iii) 如果 $\{\psi(t_n)\}$ 和 $\{\phi(t_n)\}$ 是具有相同极限的收敛序列，且 $\{\psi(t_n)\}$ 严格递减，则当 $n \to \infty$时，$t_n \to 0$;

(iv) 上极限 $t \to \epsilon+\ ^{\phi}(t) <$ 下极限$_{t\to\epsilon+}\ \psi(t)$ 对任意 $\epsilon > 0$;

(v) T 和 S 的图为闭图，或 上极限 $t \to 0+\ ^{\phi}(t) <$ 最小值{下极限$_{t\to\epsilon}\ \psi(t),\ \psi(\epsilon)$} 对任意 $\epsilon > 0$。

那么存在唯一一点 $\xi^* = (x^*, y^*) \in X \times Y$，使得，

$$\begin{cases} x^* = T(x^*, y^*) \\ y^* = S(x^*, y^*) \end{cases}$$

并且，对于任意$(x,y) \in X \times Y$，序列 $x_n = T^n(x,y)$ 和 $y_n = S^n(x,y)$ 分别收敛于 x^* 和 y^* 。

证明。定义映射 $F_{TS}: X \times Y \to X \times Y$，使得对于 $(x, y) \in X \times Y$，$F_{TS}(x, y) = (T(x, y), S(x, y))$。根据引理 3.1，有 F_{TS} 是一个 (ψ,ϕ)-压缩。假设 T 和 S 的图像是闭的。那么，对于 $X \times Y$ 中的任意序列 $\{(x_n, y_n)\}$，若 $(x_n, y_n) \to (x, y)$，$T(x_n, y_n) \to \alpha$且 $S(x_n, y_n) \to \beta$，则有 $T(x, y) = \alpha$ 且 $S(x, y) = \beta$。由于 $T(x_n, y_n) \to \alpha$ 且 $S(x_n, y_n) \to \beta$，我们得到 $F_{TS}(x_n, y_n) = (T(x_n, y_n), S(x_n, y_n)) \to (\alpha, \beta)$。此外，$T(x, y) = \alpha$ 且 $S(x, y) = \beta$ 意味着 $F_{TS}(x, y) = (\alpha, \beta)$。因此，我们可以得出：若 $\{(x_n, y_n)\}$在 $X \times Y$ 中，且 $(x_n, y_n) \to (x, y)$，并且 $F_{TS}(x_n, y_n) = (T(x_n, y_n), S(x_n, y_n)) \to (\alpha, \beta)$，则 $F_{TS}(x, y) = (\alpha, \beta)$。这意味着，如果 T 和 S 具有闭图，那么 F_{TS} 具有闭图。结合这一事实、假设中的条件 (i)- (v) 以及定理 1.4，我们即可完成证明。

□

更一般地，假设上述定义的映射 T 和S 满足以下压缩条件：

$$\begin{aligned} \psi(d(Tz, Tw)) &\le \phi_1(\max\{d(x, u), \rho(y, v)\}) \\ \psi(\rho(Sz, Sw)) &\le \phi_2(\max\{d(x, u), \rho(y, v)\}) \end{aligned} \tag{6}$$

对于 $z = (x, y)$、$w = (u, v) \in X \times Y$，满足 $\max\{d(T(x, y), T(u, v)), \rho(S(x, y), S(u, v))\} > 0$，其中 ψ、ϕ_1、ϕ_2：$(0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的函数：对于 $i = 1, 2$ 以及任意 $t > 0$，$\phi_i(t) < \psi(t)$。定义函数 ϕ：$(0, \infty) \to \mathbb{R}$ 如下：$\phi(t) = \max\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$，对于 $t > 0$。由于对于 $i = 1, 2$ 以及任意 $t > 0$，$\phi_i(t) < \psi(t)$，因此对于任意 $t > 0$，我们得到 $\phi(t) < \psi(t)$。于是可以得到以下引理。

引理 *3.2.* 设 *(X, d)* 和 *(Y, ρ)* 是两个完备度量空间，且 $Z = X \times Y$。设 $T: Z \to X$ 和 $S: Z \to Y$ 满足条件 *(6)*。定义映射 $F_{TS}: Z \to Z$，使得对于 $(x, y) \in Z$，有 $F_{TS}(x, y) = (T(x, y), S(x, y))$。那么 F_{TS} 是一个 (ψ, ϕ)-压缩。

证明。 注意，(Z, μ) 是一个完备度量空间。设$z = (x,y)$，$w = (u,v) \in Z$。

$$\begin{aligned} \psi(\mu(F_{TS}(z), F_{TS}(w))) &= \psi(\mu((T(x, y), S(x, y)), (T(u, v), S(u, v)))) \\ &= \psi(\max\{d(T(x, y), T(u, v)), \rho(S(x, y), S(u, v))\}) \end{aligned} \tag{7}$$

假设 $\mu(F_{TS}(z), F_{TS}(w)) = d(T(x, y), T(u, v))$，那么根据条件 (6)，方程 (7) 变为

$$\begin{aligned} \psi(\mu(F_{TS}(z), F_{TS}(w))) &= \psi(d(T(x, y), T(u, v))) \\ &\le \phi_1(\max\{d(x, u), \rho(y, v)\}) \\ &= \phi_1(\mu(z, w)) \\ &\le \phi(\mu(z, w)). \end{aligned}$$

另一方面，如果 $\mu\left(F_{TS}(z),\ F_{TS}(w)\right)\ =\ \rho\left(S(x,\ y),\ S(u,\ v)\right)$，那么再次根据条件 (6)，方程 (7) 变为:

$$\begin{aligned}\psi\left(\mu\left(F_{TS}(z),F_{TS}(w)\right)\right) &= \psi\left(\rho\left(S(x,y),S(u,v)\right)\right)\\ &\leq \phi_2\left(\max\{d(x,u),\rho(y,v)\}\right)\\ &= \phi_2\left(\mu(z,w)\right)\\ &\leq \phi\left(\mu(z,w)\right).\end{aligned}$$

因此在这两种情况下，我们都有 $\mu\left(F_{TS}(z),F_{TS}(w)\right)\ \leq \phi\left(\mu(z,w)\right)$。因此，映射 F_{TS} 是一个 (ψ,ϕ)-压缩。 □

我们的目标是为满足压缩条件 (6) 的映射 T 建立一个不动点定理。在此之前，我们需要证明以下引理。

引理 3.3。 设 $\phi_1,\phi_2:(0,\infty)\ \to\ \mathbb{R}$ 是两个函数，使得对于 $t_0\ >\ 0$，上极限 $\phi_i(x)$ 存在，对于 $t\to t_0 i\ =1,2$。若定义 $\phi(t)\ =\max\{\phi_1(t),\ \phi_2(t)\}$，则

$$\limsup_{t\to t_0}\phi(t)\ \leq\ \max\{\limsup_{t\to t_0}\phi_1(t),\limsup_{t\to t_0}\phi_2(t)\}.$$

证明。 根据函数上极限的定义和性质，由于 $t_0\ >\ 0$ 且上极限 $\phi_i(t)$ 存在，集合

$$A_i=\{l\in\mathbb{R}:\exists\{t_n\},t_n>0,t_n\to t_0,t_n\neq t_0\text{ for all }n>0,\text{ such that }\phi_i(t_n)\to l\}$$

非空，且 $\limsup_{t\to 0}\phi_i(t)\ =\max A_i$ 当 $i\ =1$时，2。

由于 $\limsup_{t\to t_0}\phi_i(t)$ 存在，因此 $\limsup_{t\to t_0}\phi(t)$ 也存在。现在我们定义

$$A=\{l\in\mathbb{R}:\exists\{t_n\},t_n>0,t_n\to t_0,t_n\neq t_0\text{ for all }n>0,\text{ such that }\phi_i(t_n)\to l\}.$$

于是 A 非空，且 $\limsup_{t\to t_0}\phi_i(t)\ =\max A$。

设$l\ \in A$。根据定义，存在一个序列 $\{t_n\}$ 属于$(0,\infty)$，满足$t_n\ \to t_0$,$t_n\ \neq t_0$，对所有n 均成立，使得 $\phi(t_n)\ \to l$。因此，对于 $\epsilon>0$，存在$N\ \in\mathbb{N}$ 使得

$$|\phi(t_n)-l|<\epsilon\ \text{ whenever }n\geq N.$$

Tha即，$|\max\{\phi_1(t_n),\ \phi_2(t_n)\}-l|<\epsilon$ 当$n\ \geq N$时。对于$k\ \in\mathbb{N}$，定义

$$N_k(\phi_i)=\left\{n\in\mathbb{N}:|\phi_i(t_n)-l|<\frac{1}{k}\right\}\quad\text{for }i=1,2.$$

对于每个 k，$N_k(\phi_1)$ 或 $N_k(\phi_2)$ 至少有一个非空。此外，对于每个 k 和 $i = 1,2$，$N^{k+1}(\phi_i) \subseteq N_k(\phi_i)$。因此，对于至少一个 $i = 1,2$，我们有 $N_k(\phi_i) \neq \emptyset$ 对所有 k 均成立。不失一般性，假设 $N_k(\phi_1) \neq \emptyset$ 对所有 k 均成立。接着，取 $n_k \in N_k(\phi_1)$，得到 $\{t_n\}$ 的一个子序列$\{t_{n_k}\}$，使得对于所有 $k \geq m$，$|\phi_1(t^{n_k}) - l| < \frac{1}{m}$。这意味着 $\phi_1(t^{n_k}) \to l$。因此 $l \in A_1$。由此可得，若 $l \in A$，则 $l \in A_1 \cup A_2$，，从而 $\limsup \phi(t) = \max A \leq \max\{\max A_1, \max A_2\} = \max\{\limsup \phi_1(t), \limsup \phi_2(t)\}_{t\to t_0}$
$_{t\to t_0 t\to t_0}$

□

根据这些引理，我们可以得到以下结果。

定理 3.3. 设$(X,d),(Y,\rho)$ 是两个完备度量空间，$T:X \times Y \to X$，$S:X \times Y \to Y$ 是满足条件 *(6)* 的两个映射。若函数 ψ,ϕ_1 和 ϕ_2 满足以下条件：

(i) ψ 是非递减的；

(ii) $\phi_i(t) < \psi(t)$ 对每个 $t > 0$ 和 $i = 1,2$均成立；*(iii)* 上极限 $\phi_i(t) < \psi(\epsilon+)$ 对每个 $\epsilon > 0$ 均成立。$_{t\to\epsilon+}$

那么存在唯一一点 $\xi^* = (x^*,y^*) \in X \times Y$，使得，

$$\begin{cases} x^* = T(x^*,y^*) \\ y^* = S(x^*,y^*) \end{cases}$$

并且对于任意$(x,y) \in X \times Y$，序列 $x_n = T^n(x,y)$ 和 $y_n = S^n(x,y)$ 分别收敛到 x^* 和 y^* 。

证明。我们定义映射 $F_{TS}: X \times Y \to X \times Y$，使得 $F_{TS}(x, y) = (T(x, y), S(x, y))$，其中 $(x, y) \in X \times Y$。根据引理 3.1，我们有 F_{TS} 是一个 (ψ,ϕ)-压缩，其中 $\phi(t) = \max\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$，对 $t > 0$成立。由于对每个 $t > 0$ 和 $i = 1, 2$，都有 $\phi_i(t) < \psi(t)$，因此对每个 > 0，都有$\phi(t) < \psi(t)$。现在，根据假设中的条件 (ii) 和引理 3.3，我们得到对每个 $\epsilon > 0$，$\limsup \phi(t) < \psi(\epsilon+)$。因此，函数 ψ 和 ϕ 满足定理 1.3 假设中的条件 $_{t\to\epsilon+}$(i)-(iii)。于是，由定理 1.3 和引理 3.2 可得结论。

□

4 迭代 带有(ψ,ϕ)–压缩的迭代函数系统 s

根据 M. F. Barnsley [4]，，分形在数学上可以被定义为某些集合映射的不动点。

设(X,d) 为一个完备度量空间，$\mathcal{H}(X)$ 表示所有非空紧

X的子集。
对于任意A、$B \in \mathcal{H}(X)$，我们将集合A 到集合B 的距离定义为

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \max\{d(x,B) : x \in A\} \\ &= \max_{x\in A}\min_{y\in B} d(x,y). \end{aligned}$$

现在我们在 $\mathcal{H}(X)$ 中定义豪斯多夫距离如下:

$$h_d(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}.$$

容易验证，h_d 在 $\mathcal{H}(X)$上定义了一个度量。此外，我们有如下结果:

引理 4.1. *[4]* 设(X,d) 是一个完备度量空间。则$(\mathcal{H}(X),h_d)$ 是一个完备度量空间。此外，若 $\{A_n\}$ 是X中的一个柯西序列，则，

A =极限$_{n\to\infty}A_n = \{x \in X:$ ∃一个柯西序列 $\{x_n\}$ 属于 X，使得 $x_n \in A_n$ 且 极限$_{n\to\infty}x_n = x\}$。

空间 $(\mathcal{H}(X), h_d)$ 通常称为分形空间。

引理 4.2. *[17, 18]* 若 $\{A_i: i = 1, 2, \ldots\ldots n\}$, $\{B_i: i = 1, 2, \ldots\ldots n\}$ 是 $\mathcal{H}(X)$中的两个有限集族，则 $h_d\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq$最大值$\{h_d(A_i, B_i): i = 1, 2, \ldots\ldots n\}$。

现在我们准备好证明分形领域中的一些结果。

引理 *4.3.* 设 *(X, d)* 为完备度量空间，且 $w: X \to X$ 是一个满足条件 *(1)* 的连续映射，其中函数 ψ,ϕ 均为非递减函数。则定义为 $\hat{w}: \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$，$\hat{w}(A) = w(A) = \bigcup_{a\in A}\{w(a)\}$ 的映射 $\hat{w}$，对于 $A \in \mathcal{H}(X)$，也满足 $(\mathcal{H}(X), h_d)$ 中的条件 *(1)*。

证明。设 A, B $\in$ $\mathcal{H}$(X)，使得 h_d(ˆw(A), ˆw(B)) $>$ 0。假设 h_d (ˆw(A), ˆw(B)) =d (ˆ w(A), ˆw(B)) = sup x∈A inf $_{y\in B}$ d (w(x), w(y)) $>$ 0。由于 w 和 d 连续且 A 紧致，存在 a $\in$ A，使得 d (ˆw(A), ˆw(B)) = inf$_{y\in B}$ d (w(a), w(y)) $>$ 0，这意味着对每个 y $\in$ B，均有 d (w(a), w(y)) $>$ 0 。因此，对任意 y $\in$ B,

$$\begin{aligned} \psi\left(d\left(\hat{w}(A),\hat{w}(B)\right)\right) &= \psi\left(\inf_{y\in B} d\left(w(a),w(y)\right)\right) \\ &\leq \psi\left(d\left(w(a),w(y)\right)\right) \\ &\leq \phi\left(d(a,y)\right). \end{aligned}$$

取 $b \in B$，使得 $d(a,b) = \inf_{y\in B} d(a,y)$。由于 ϕ 是非递减的，

$$\begin{aligned}\psi\left(h_d\left(\hat{w}(A),\hat{w}(B)\right)\right) &= \psi\left(d\left(\hat{w}(A),\hat{w}(B)\right)\right)\\ &\le \phi\left(d(a,b)\right)\\ &= \phi\left(\inf_{y\in B} d(a,y)\right)\\ &\le \phi\left(\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y)\right)\\ &\le \phi\left(h_d(A,B)\right).\end{aligned}$$

另一方面，假设
$h_d(\hat{w}(A), \hat{w}(B)) = d(\hat{w}(B), \hat{w}(A)) = \sup x\in B \inf y\in A d(w(x), w(y)) > 0$，我们可以像上面一样进行推导，得到 $\psi(h_d(\hat{w}(A), \hat{w}(B))) \le \phi(h_d(A, B))$。证明至此完成。 □

注 4.1。引理 *4.3* 中的映射 $\hat{w}$ 称为由 w 生成的分形算子。要求映射 w 连续，以确保 $\hat{w}$ 将 $\mathcal{H}(X)$ 映射到自身。映射 $\hat{w}$ 的不动点 $A^* \in \mathcal{H}(X)$（如果存在）称为 w 的吸引子或自相似集。

定理4.1。设 (X,d) 是一个完备度量空间，且 $w : X \to X$ 是一个连续映射。若映射 w 满足条件 *(1)*，其中函数 $\psi,\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(i) ψ,ϕ 均为非递减函数；
(ii) $\phi(t) < \psi(t)$ 对任意 $t > 0$；
(iii) 上极限 $\phi(t) < \psi(\epsilon+), t \to \epsilon+$

那么存在唯一的吸引子，记作 $A^* \in \mathcal{H}(X)$，对应于 w。此外，对于任意 $A \in \mathcal{H}(X)$，由 $A\{A_n\}$ *in* $\mathcal{H}(X)$给出的序列，其中 $A_n = w^n(A)$，收敛到 A^*。

证明。设 $\hat{w}$ 是由w生成的分形算子。由引理 4.3 可知，$\hat{w}$ 满足条件 (1)。于是，假设中的条件*(i)- (iii)*和定理 1.3 保证 $\hat{w}$存在唯一的不动点，记作$A^* \in \mathcal{H}(X)$；此外，对于任意$A \in \mathcal{H}(X)$，序列 $\{A_n\}$（其中$A_n = \hat{w}^n(A)$）收敛到A^*。

这证明了该定理。 □

下一个引理将证明关于函数 $\hat{w}$ 的图的一个结果。

引理 4.4。设 (X,d) 是一个完备度量空间，且 $w : X \to X$ 是一个连续映射。若 $\hat{w}$ 是由 w 生成的分形算子，则 $\hat{w}$ 的图是闭的。

证明。设 (A_n) 是 $\mathcal{H}(X)$ 中的一个序列，使得 $A_n \to A$ 且 $\hat{}w(A_n) \to B$。只需证明 $B = \hat{}w(A)$即可完成证明。根据引理 4.1，我们有

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \{x \in X : \exists \text{一个柯西序列 } \{x_n\} \text{ 在 } X \text{ 中，使得 } x_n \in A_n,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$

and

$$B = \lim_{n\to\infty} \hat{}w(A_n) = \{x \in X : \exists \text{一个柯西序列 } \{x_n\},\ \text{使得 } x_n \in \hat{}w(A_n),\ \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \quad .$$

令 $x \in A$，则存在 X 中的柯西序列 $\{x_n\}$，其中 $x_n \in A_n$，使得 $x_n \to x$。由于 w 连续，我们得到 $w(x_n) \to w(x)$。换言之，存在序列 $\{w(x_n)\}$，其中 $w(x_n) \in \hat{}w(A_n)$，使得 $w(x_n) \to w(x)$。根据 B 的定义，$w(x) \in B$，这意味着 $w(A) \subseteq B$。另一方面，令 $x \in B$，则存在 X 中的柯西序列$\{x_n\}$，其中 $x_n \in \hat{}w(A_n)$，使得 $x_n \to x$。于是对每个 n，都存在 $y_n \in A_n$，使得 $x_n = w(y_n)$，因此我们可以写成 $w(y_n) \to x$。由于 (A_n) 是 $\mathcal{H}(X)$ 中的柯西序列，对于 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$h_d(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{for every } n, m \geq N.$$

于是，对所有 $n, m \geq N$，均有 $d(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{3}$，且 $d(A_m, A_n) < \frac{\epsilon}{3}$。根据定义，$d(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{3}$ 意味着对每个 $n, m \geq N$，都有 $d(y_n, A_m) < \frac{\epsilon}{3}$。由于 A_m 是紧的，存在 $a \in A_m$，使得对每个 $n \geq N$，都有 $d(y_n, a) = d(y_n, A_m) < \frac{\epsilon}{3}$。用类似的方法，对于 $d(A_m, A_n) < \frac{\epsilon}{3}$，可得存在 $b \in A_n$，使得对每个 $m \geq N$，都有 $d(y_m, b) < \frac{\epsilon}{3}$。由条件 $d(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{3}$，可得 $d(a, b) < \frac{\epsilon}{3}$。因此，

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, a) + d(a, b) + d(b, y_m) < \epsilon \quad \text{for every } n, m \geq N,$$

这意味着 $\{y_n\}$ 是 X 中的柯西序列。于是，存在 $y \in X$，使得当 $n \to \infty$ 时，$y_n \to y$。因此我们得到 $y \in A$。此外，由于 w 连续，可得 $w(y_n) \to w(y)$。这意味着 $x = w(y)$。因此 $x \in \hat{}w(A)$，从而证明 $B \subseteq \hat{}w(A)$。证明完毕。

□

作为定理 1.4 的一个应用，我们可以得到以下结果：

定理 4.2. 设(X,d) 是一个完备度量空间，且 $w : X \to X$ 是满足条件 *(1)* 的连续映射，其中非递减函数 $\psi, \phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(i) $\phi(t) < \psi(t)$ 对任意 $t > 0$; *(ii)* 下确界 $\inf_{t>\epsilon} \psi(t) > -\infty$ 对任意 $\epsilon > 0$;

(iii) 如果 $\{\psi(t_n)\}$ 和 $\{\phi(t_n)\}$ 是具有相同极限的收敛序列，且 $\{\psi(t_n)\}$ 严格递减，则当 $n \to \infty$时，$t_n \to 0$；

(iv) $\limsup_{t\to\epsilon+} \phi(t) < \liminf_{t\to\epsilon+} \psi(t)$ 对任意 $\epsilon > 0$ 均成立。

于是，存在唯一的吸引子，记为 $A^* \in \mathcal{H}(X)$，对应于 w。此外，对于任意 $A \in \mathcal{H}(X)$，由 $A\ \{A_n\}\ in\ \mathcal{H}(X)$给出的序列，其中 $A_n = w^n(A)$，收敛到 A^*。

证明。设 $\hat{}w$ 为由 w生成的分形算子。根据引理 4.3，显然 $\hat{}w$ 满足条件 (1)。随后，假设中的条件 *(i)- (iv)* 连同引理 4.4 和定理 1.4，保证 $\hat{}w$存在唯一的不动点，记为 $A^* \in \mathcal{H}(X)$；此外，对于任意 $A \in \mathcal{H}(X)$，序列 $\{A_n\}$，其中 $A_n = \hat{}w^n(A)$，收敛到 A^*。

这就证明了该定理。 □

现在，我们不再考虑 X 上的单个函数 w，而是考虑迭代函数系统 (IFS)$\{X; w_1, w2, \cdots, w_N\}$，其中 $w_i : X \to X$（i = 1, 2, ⋯, N）均为连续映射，并满足条件 (1)。函数 W： $\mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$，定义为 $W(A) = \bigcup \hat{}w_i(A)$，称为由迭代函数系统 $\{X; w_1, w2, \cdots, w_N\}$生成的分形算子。若点 $A \in \mathcal{H}(X)$ 满足 $NW(A) = \bigcup \hat{}w_i(A) = A$，即 W 的不动点，则称其为该迭代函数系统的吸引子。i=1下面考虑一种更一般的情形。

引理 4.5. 设(X,d) 是一个完备度量空间，且 $\{X;w_1,w_2,\cdots,w_N\}$ 是一个迭代函数系统，其中 $w_i : X \to X$ 是满足以下条件的连续映射：

$$\psi(d(w_i(x), w_i(y))) \le \phi_i(d(x,y)), \tag{8}$$

其中 $\psi, \phi_i : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 对于 $i = 1, 2, \cdots, N$ 均为非递减函数。若 W 是由迭代函数系生成的分形算子，则它满足条件 *(1)*，其中 $\phi(t) = \max_{1\le i\le N} \phi_i(t)$ 对于 $t \in (0,\infty)$。

证明。设 $A, B \in \mathcal{H}(X)$。那么，我们有 $\psi(h_d(\hat{}w_i(A), \hat{}w_i(B))) \le \phi_i(h_d(A,B))$ 对于 $i = 1, 2, \cdots, N$。由引理 4.2，得

$$\begin{aligned} 0 \le h_d(W(A), W(B)) &= h_d\left(\bigcup_{i=1}^{N} \hat{w}_i(A), \bigcup_{i=1}^{N} \hat{w}_i(B)\right) \\ &\le \max_{1\le i\le N} h_d(\hat{w}_i(A), \hat{w}_i(B)) \\ &= h_d\left(\hat{w}_j(A), \hat{w}_j(B)\right), \end{aligned}$$

f或某个 $j \in \{1, 2, \cdots N\}$。由于 ψ 和 ϕ_j 均为非递减函数，我们得到

$$\begin{aligned} \psi(h_d(W(A), W(B))) &\le \psi\left(h_d\left(\hat{w}_j(A), \hat{w}_j(B)\right)\right) \\ &\le \phi_j(h_d(A,B)) \\ &\le \phi(h_d(A,B)). \end{aligned}$$

至此，证明完毕。 □

作为该引理与定理 1.3 的直接推论，我们得到以下结果：

定理 4.3。设 （X，d） 为完备度量空间，且 $\{X; w_1, w_2, \cdots, w_N\}$ 是一个迭代函数系，其中 $w_i: X \to X$ 为满足条件 *(8)* 的连续映射。若映射 ψ，ϕ_i（$i = 1, 2, \cdots, N$）是非递减的，并满足以下条件：

(i) $\phi_i(t) < \psi(t)$ 对每个 $t > 0$;

(ii) $\limsup_{r \to \epsilon+} \phi_i(t) < \psi(\epsilon+)$ 对每个 $\epsilon > 0$，t

那么，*IFS* 存在唯一的吸引子 $A^* \in \mathcal{H}(X)$。此外，对于任意 $A \in \mathcal{H}(X)$，迭代序列 $A_n = W^n(A)$ 收敛到 A^*。

证明。定义映射 $\phi: (0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得 $\phi(t) = \max_{1 \le i \le N} \phi_i(t)$，其中 $t \in (0,\infty)$。于是，根据假设中的条件 *(i)*，显然，

$$\phi(t) = \max_{1 \le i \le N} \phi_i(t) \le \psi(t), \text{ for every } t > 0.$$

现在，根据假设中的条件 *(ii)* 以及引理 3.3 中的类似论证可得，对于每个 $\epsilon > 0$，$\limsup_{t \to \epsilon+} \phi(t) < \psi(\epsilon+)$。因此，函数 ψ 和 ϕ 满足定理 1.3 的条件 *(i)- (iii)*。于是，结合定理 1.3 和引理 4.5，证明立即得出。

□

现在来看一个例子：

例 4.1. 考虑带有欧几里得度量的完备度量空间 $\mathbb{R}$。我们定义两个映射 $w_1, w_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & if\ x \ge 0 \\ \frac{-2}{3}x & if\ x < 0 \end{cases} \quad and \quad w_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & if\ x \ge 0 \\ \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} & if\ x < 0 \end{cases}$$

定义三个函数 ψ，ϕ_1，$\phi_2: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t & if\ 0 < t \le 1 \\ 3t & if\ t > 1 \end{cases}, \phi_1(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & if\ 0 < t \le 1 \\ 2t & if\ t > 1 \end{cases} \quad and \quad \phi_2(t) = \begin{cases} t & if\ 0 < t \le 1 \\ \frac{5}{2}t & if\ t > 1 \end{cases}$$

很容易观察到，映射 w_1 和 w_2 是连续的，且 ψ，ϕ_1 和 ϕ_2 是非递减的，并满足定理 *4.3* 的条件 *(i)* 和 *(ii)*。

考虑映射 w_1，ψ 和 ϕ_1。设 $x, y \in \mathbb{R}$

情形 ***1***：对于 $x,y \geq 0$ 或 $x,y < 0$，我们得到

$$\psi\left(d\left(w_1(x), w_1(y)\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y\right|\right) = \begin{cases} \frac{4}{3}|x-y| & if\ |x-y| \leq 1 \\ 2|x-y| & if\ |x-y| > 1. \end{cases}$$

情形 ***2***：如果 $x \geq 0$且 $y < 0$，我们有

$$\psi\left(d\left(w_1(x), w_1(y)\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y\right|\right) = \begin{cases} \frac{4}{3}|x+y| & if\ |x+y| \leq 1 \\ 2|x+y| & if\ |x+y| > 1. \end{cases}$$

现在，对于任意 $x,y \in \mathbb{R}$，我们有

$$\phi_1\left(d(x,y)\right) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x-y| & if\ |x-y| \leq 1 \\ 2|x-y| & if\ |x-y| > 1. \end{cases}$$

因此，由上述情形可知，对于任意 $x,y \in \mathbb{R}$,

$$\psi\left(d\left(w_1(x), w_2(y)\right)\right) \leq \phi_1\left(d(x,y)\right).$$

类似地，若考虑映射 w_2, ψ 和 ϕ_2，则可得到以下几种情况。

情况 ***1***：对于 $x,y \geq 0$ 或 $x,y < 0$，有

$$\psi\left(d\left(w_2(x), w_2(y)\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right|\right) = \begin{cases} \frac{2}{3}|x-y| & if\ |x-y| \leq 1 \\ |x-y| & if\ |x-y| > 1. \end{cases}$$

情况 ***2***：若 $x \geq 0$ 且 $y < 0$，则得到

$$\psi\left(d\left(w_2(x), w_2(y)\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y\right|\right) = \begin{cases} \frac{2}{3}|x+y| & if\ |x+y| \leq 1 \\ |x+y| & if\ |x+y| > 1. \end{cases}$$

现在，对于任意 $x,y \in \mathbb{R}$，有

$$\phi_2\left(d(x,y)\right) = \begin{cases} |x-y| & if\ |x-y| \leq 1 \\ \frac{5}{2}|x-y| & if\ |x-y| > 1. \end{cases}$$

这里同样可以发现，对于任意 $x,y \in \mathbb{R}$,

$$\psi\left(d\left(w_2(x), w_2(y)\right)\right) \leq \phi_2\left(d\left(x,y\right)\right).$$

因此，迭代函数系 $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$ 以及映射 ψ、ϕ_1 和 ϕ_2 满足条件 ***(8)*** 及定理 ***4.3*** 的假设。因此，根据定理 ***4.3***，由 $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A)$ 定义的映射 $W: \mathcal{H}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}$ 满足条件 ***(1)***，其中函数 ψ 和 $\phi = max\{\phi_1, \phi_2\}$。此外，我们可以观察到，$A = [0,1]$ 是该迭代函数系的唯一吸引子。我们有 $w_1([0,1]) = [0, \frac{2}{3}]$ 以及 $w_2([0,1]) = [\frac{2}{3}, 1]$。因此，$W([0,1]) = w_1([0,1]) \cup w_2([0,1]) = [0,1]$。

5 耦合分形的应用

本节将讨论联合 (ψ,ϕ)-压缩映射的耦合自相似集的存在性与唯一性。

定理 5.1. 设 (X,d) 是一个完备度量空间，且 $w:X\times X\to X$ 是一个满足条件 *(2)* 的连续映射，其中函数 $\psi,\phi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 满足以下条件：

(i) ψ,ϕ 均为非递减；

(ii) $\phi(t)<\psi(t)$ 对每个 $t>0$均成立；

(iii) 上确界 $\phi(t)<\psi(\epsilon+)$ 对每个 $\epsilon>0$ 均成立。$t\to\epsilon+$

那么存在唯一的元素 $(A^*,B^*)\in\mathcal{H}(X)\times\mathcal{H}(X)$ 使得

$$\begin{cases}A^*=w(A^*,B^*)\\B^*=w(B^*,A^*)\end{cases}$$

此外，对于任意元素 $(A,B)\in\mathcal{H}(X)\times\mathcal{H}(X)$，序列

$$\begin{cases}A^n=w^n(A,B)\\B^n=w^n(B,A)\end{cases}$$

分别收敛到 A^* 和 B^* 。

证明。我们定义算子 $w^*:X^*\to X^*$，使得 $w^*(x,y)=(w(x,y),w(y,x))$。由定理 2.1 可知，w^* 在完备度量空间 (X^*,d^*) 中满足条件 (1)。设 $W^*:\mathcal{H}(X^*)\to\mathcal{H}(X^*)$ 为由 w^*生成的分形算子。由定理 4.3 可知，算子 W^* 在完备度量空间 $(\mathcal{H}(X^*),h_{d^*})$ 中满足条件 (1)。因此，结论由定理4.1得出。

□

我们的下一个结果讨论了一个 IF 的耦合自相似集的存在性 S.

定理 5.2。 设 $w_i:X\times X\to X$ 对于 $i=1,2,\cdots,N$ 是连续且联合的 (ψ,ϕ_i)-压缩，并且 ψ,ϕ_i 满足以下条件：

（i） ψ，ϕ_i 对于 $i=1,2,\cdots,N$ 均为非递减；（ii）对于每个 $t>0$，$\phi_i(t)<\psi(t)$；（iii）对于每个 $\epsilon>0$，$\limsup_{t\to\epsilon+}\phi_i(t)<\psi(\epsilon+)$。

则存在唯一的一对$(A^*,\ B^*)\ \in \mathcal{H}(X)\ \times \mathcal{H}(X)$，使得

$$\begin{cases} A^* = \bigcup\limits_{i=1}^{N} w_i(A^*, B^*) \\ B^* = \bigcup\limits_{i=1}^{N} w_i(B^*, A^*). \end{cases}$$

此外，对于任意 $(A,B)\ \in \mathcal{H}(X)\ \times \mathcal{H}(X)$，序列

$$\begin{cases} A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{N} w_i(A, B) \\ B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{N} w_i(B, A) \end{cases}$$

分别收敛到 A^* 和 B^* 。

证明。定义 w_i^*: $X^* \to X^*$，其中 $w_i^*(x, y) = (w_i(x, y), w_i(y, x))$，对于 $i = 1, 2, \cdots, N$。由定理 2.1 的证明可知，每个映射 w_i^*都满足条件 (1)，其函数为ψ, ϕ_i，对于 $i = 1, 2, \cdots, N$。现在定义由迭代函数系 IFS$\{X^*; w_1^*, w_2^*, \cdots, w_N^*\}$, W^*: $\mathcal{H}(X^*) \to \mathcal{H}(X^*)$ 生成的分形算子 $W^*(A, B) = N\bigcup i=1 \hat{} w_i^*(A, B)$。根据引理 4.5，显然 W^* 满足条件 (1)，其中 $\phi = \max\limits_{1\le i\le N} \phi_i$。然后利用定理 4.3 即可完成证明。

□

参考文献

[1] B. Alqahtani、S. S. Alzaid、A. Fulga 和 A. F. R. L´opez de Hierro，错位b-度量空间上的 Proinov型压缩，差分方程进展 2021 (1) (2021) 1-16。

[2] I. Altun, N. A. Arifi, M. Jleli, A. Lashin 和 B. Samet，拟度量空间上一个新概念的(α,F_d)-压缩，《非线性科学与应用杂志》9 (2016) 3354-3361。[3] M. F. Barnsley，《超分形》，剑桥大学出版社 (2006)。[4] M. F. Barnsley，《无处不在的分形》，学术出版社 (2014)。[5] D. W. Boyd 和 J. S. W. Wong，关于非线性压缩，《美国数学学会会刊》20(2) (1969) 458-464。[6] D. Doric，广义(ψ,ϕ)-弱压缩的公共不动点，《应用数学快报》22 (2009) 1896-1900。

[7] M. Imdad, W. M. Alfaqih 和 I. A. Khan，弱 θ-压缩及其一些不动点结果，并应用于分形理论，差分方程进展 2018(1) (2018) 1-18。[8]J. Matkowski，函数方程的可积解，华沙：波兰科学院数学研究所 (1975)。[9] S. Moradi 和 A. Farajzadeh，关于$(\psi-\phi)$-弱压缩映射和广义$(\psi-\phi)$-弱压缩映射的不动点，《应用数学快报》25(10) (2012) 1257-1262。[10] M. Nazam、C. Park 和 M. Arshad，广义压缩的不动点问题及其应用，差分方程进展 2021(1) (2021) 1-15。[11] V. Parvaneh、G. G. Branch 和 G. Gharb，完备度量空间中的一些公共不动点定理，纯粹与应用数学国际期刊 76(1) (2012) 1-8。[12] A. Petruşel 和 A. Soos，完备度量空间中的耦合分形，非线性分析：建模与控制 23(2) (2018) 141-158。[13] A. Petruşel 和 G. Petruşel，通过 Meir–Keeler算子实现的耦合分形动力学，混沌、孤子与分形 122 (2019) 206-212。[14] A. Petruşel、G. Petruşel 和 Mu-Ming Wong，局部压缩的不动点结果及其在分形中的应用，《非线性与凸分析杂志》21(2) (2020) 403- 411。[15] O. Popescu，(ψ,ϕ)-弱压缩的不动点，《应用数学快报》24(1) (2011) 1-4。[16]O. Popescu，关于论文《度量空间中广义压缩映射的不动点定理》的一些评注，《不动点理论与应用杂志》23(4) (2021) 1-10。[17] P. D. Proinov，度量空间中广义压缩映射的不动点定理，《不动点理论与应用杂志》22(1) (2020) 1-27。[18] P. Rajan、M. A. Navascues 和 A. K. Bedabrata Chand，由广义 θ-压缩构成的迭代函数系统，分形与分数阶 5(3) (2021) 69。[19] N. A. Secelean，弱F-压缩及一些不动点结果，伊朗数学学会通报 42(3) (2016) 779-798。

[20] N. A. Secelean，可数迭代函数系统，*LAP Lambert AcademicPublishing*(2013).[21] N. A. Secelean、S. Mathew 和 D. Wardowski，拟度量空间中的新不动点结果及其在分形理论中的应用，差分方程进展 2019(1) (2019) 1-23.[22] N. A. Secelean，由*F*-压缩构成的迭代函数系统，不动点理论与应用 2013(1) (2013) 1-13.[23]S. Xu、W. Xu 和 D. Zhong，由广义压缩映射构成的一些新迭代函数系统，分析理论与应用 28(3) (2012) 269-277.