arXiv:2303.03725v1 [cs.LO] 7 Mar 2023

模糊逻辑与马尔可夫核

ROGIER BRUSSEE

Abstract. 模糊逻辑是一种运用布尔谓词进行推理的方法；对于这些谓词，我们掌握的只是介于 0 和 1 之间的置信值，而非定义明确的真值。人们很容易将这种置信度解释为概率。我们使用参数化的概率分布——马尔可夫核——来实现这一点。由此，我们可以通过对布尔值的乘积空间进行概率计算，得到一般的模糊逻辑联结词，这凸显了联合置信函数的重要性。我们详细讨论二元逻辑联结词，并将“经典”模糊联结词视为一般联结词置信度的界。我们进一步拓展多变量逻辑公式，以至于能够定义模糊量词并估计置信度。

1. Introduction

模糊集这一概念试图将这样的想法形式化：如果我们有一个事物集合 X，以及元素 $x \in X$具有某种性质 P（即谓词函数$P\colon X \to \mathbb{B}$），那么我们就可以用函数 $p\colon X \to [0,1]$ 来表达对命题 $P(x)$ 为真的置信程度，这通常称为“信念”。谓词与一个子集 $X_P = \{x \in X \mid P(x)\} \subset X$ 一一对应，因此，信念函数 $p(x)$ 可以解释为对 x 属于 X_P 的置信程度，即“模糊”隶属函数。人们很容易把这个隶属函数解释为概率。不过仔细一想，这种解释有些问题，因为 $p(x)$ 是定义在 X 上的函数，显然不是 X 上的概率分布，因为无法将不同点 $x \in X$ 上的置信度“加起来”得到置信度 1；即使在离散空间中，也没有理由认为这些置信度之和应当为 1。尽管如此，自模糊逻辑诞生以来，人们一直在讨论模糊逻辑的解释及其与概率论的关系 [Ga][DP1][DP2][LSBDW][Za]。本文将讨论一种基于概率论、尤其是马尔可夫范畴的模糊逻辑直接解释。该解释将信念函数视为一个伪装得不露痕迹的、取值于布尔值的马尔可夫核。也就是说，我们不把信念函数解释为 X 上的概率分布，而是将置信函数解释为一个由 X参数化、定义在布尔值上的概率分布。Loginov [Lo] 似乎提出过一些颇为相似的想法，不过其依据是条件概率，而非马尔可夫核。

Date: 2023年3月8日。*Key words and phrases.* 模糊逻辑，马尔可夫核，概率论。1

本文的主要贡献在于，这种解释为模糊逻辑及其性质提供了一种直接明了的概率解释，而这些性质可以直接由传统布尔逻辑的性质和标准概率计算推出。具体来说，我们可以立即得到一族模糊联结词，例如“与”和“或”，它们由谓词为真（或不为真）的置信度参数化。从更概念的角度看，在这种解释中，只有在我们拥有谓词的联合置信度，也就是两个布尔值上的联合概率分布时，逻辑联结词才有恰当的定义；仅有分别给出的信念函数是不够的，因为它们只能确定边缘分布。这在直觉上是合理的：即使我们对谓词 P只有 50% 的置信度，对 $P \wedge \neg P$仍然可以有 0% 的置信度，也可以对 $P \vee \neg P$有 100% 的置信度。当然，两个谓词之间的强相关性会反映在 $(P, \neg P)$ 的联合分布中，但联合置信度也能表达更微妙的相关性，例如“如果 P_1，那么 P_2 更有可能成立”。当前的方法使我们能够以自然的方式利用相关谓词的联合置信度／信念。事实上，为二元逻辑关系提供模糊／概率解释的同一论证，也适用于更一般的逻辑公式系统。我们甚至可以将这一框架扩展到对无限集合进行量化。不过，这种马尔可夫解释虽然实用且精确，却也要求指定联合置信函数；对于 n 个谓词，这些函数有 $2^n - 1$ 个自由度。因此，逻辑联结词的上下界，或基于独立性等假设得出的结果，便很有用。事实证明，合理的界限和独立性简化确实存在，而且由“传统”模糊形式的联结词（复数！）给出，这也“解释”了为什么带有逻辑色彩的方法往往行之有效。

本文的组织结构如下：第 2 节定义马尔可夫核和马尔可夫范畴，以便快速回顾并统一记号。第 3 节介绍模糊逻辑，主要同样是为了统一记号，并明确我们采用的模糊逻辑形式。第 5 节用马尔可夫核重新表述信念函数，并以此定义二元逻辑联结词。作为这种概率解释的应用，我们描述它与“经典”逻辑联结词之间的关系，并证明德摩根律。最后，我们在第 5 节讨论一般情形和量词。

本文其余部分使用标准记号 $\mathbb{R}$ 表示实数，$\mathbb{N}$ 表示非负整数，$[a,b]$、$(a、b]$ 或 $(a、b)$ 表示闭区间或（半）开区间，并使用不太标准的记号 $\mathbb{B} = \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}$ 表示布尔值。

1.1. 利益冲突。作者谨此感谢 RNOB Regio deal Noord Oost Brabant 的支持，并声明除此之外在本研究中不存在利益冲突。

2. Markov kernels

马尔可夫核是概率分布的参数化版本。正如概率分布将随机值形式化，马尔可夫

核将具有随机值的函数形式化。其形式化定义借鉴了测度论概率论的语言，但主要是为了给一套运转顺畅的机制提供坚实基础。本节之所以重要，主要是因为我们广泛使用本节中的语言，尤其是推前的函子性。部分读者可能只想粗略浏览一下马尔可夫核和推前的定义，并在需要时再回头查阅其他定义。

设 $X = (X, \mathcal{A})$ 和 $Y = (Y, \mathcal{B})$ 是两个可测空间，即由集合及其上可测子集的 σ-代数 [Ru, Ch 1] 组成。

定义 1. 马尔可夫核 [Do, Appendix VI] $F : X \to Y$ 是一个映射 $\mathcal{B} \times X \to [0, 1]$，满足

- *for each* $B \in \mathcal{B}$*, the map*

$$F(B, \text{-}) : X \to [0, 1] \tag{1}$$

$$x \mapsto F(B, x) \tag{2}$$

是定义在 X 上的可测函数，

- 对于每个 $x \in X$，映射

$$F(\text{-}, x) : \mathcal{B} \to [0, 1] \tag{3}$$

$$B \mapsto F(B, x) \tag{4}$$

是 Y 上的概率测度。

作为一种方便（显然不对称！）的记法，我们用 $F(dy|x)$ 表示由点 $x \in X$ 在 Y 上定义的概率测度。同样，我们用 $F(B|x) = \int_B F(dy|x)$ 表示 $F(B, x)$。这种记法也让人联想到条件概率。虽然这样理解并无不妥，但这两个概念彼此相关，在技术和概念上却略有不同：条件概率是一个马尔可夫核，它相对于“论域” X上的某个概率测度几乎处处定义。这个 X 上的背景测度可能成为理解上的障碍，尤其是当人们宽泛地将测度等同于离散空间上的函数时。人们也用这种记法表示参数化概率分布，例如 $G(d^n x|\Sigma, \mu)$ 表示一个定义在 R^n 上、由其协方差矩阵 Σ 和均值 μ 参数化的高斯分布。

σ-代数以及函数 $F(B|\text{-})$ 的可测性是一种便捷的技术设置，使我们能够毫无顾虑地定义积分；根据 σ 代数的不同，它可以禁止利用选择公理进行病态构造（例如，如果 X 和 Y 是拓扑空间，而 σ-代数是相应的博雷尔代数，那么所有连续函数都被允许），或者为对空间进行某种“像素化”提供内置适应。定义的核心在第二部分：它使我们能够将马尔可夫核视为概率“函数”，为 Y 中的每个 $dy|x$ 分配一个概率分布 $F(dy|x)$

而不是为 X 中的每个 x 指定一个具体值。反过来，每个普通可测函数 $f\colon X \to Y$ 都可以通过 $F(dy|x) = \delta_{f(x)}(dy)$ 定义一个马尔可夫核[1]，即

$$F(B|x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) \in B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

特别地，X 上的恒等函数具有如下马尔可夫核

$$1_X(dx'|x) = \delta_x(dx') \tag{6}$$

和函数一样，马尔可夫核也可以复合：若 $F\colon X \to Y$ 和$G\colon Y \to Z$ 是马尔可夫核，则这些核的复合 $G \circ F$定义为

$$(G \circ F)(dz|x) = \int_Y G(dz|y)F(dy|x) \tag{7}$$

也就是说，对于每个可测子集 $C \subset Z$ 和 $x \in X$，我们定义

$$(G \circ F)(C|x) = \int_Y G(C|y)F(dy|x) \tag{8}$$

可以验证，$G \circ F$确实是一个马尔可夫核，$\circ$满足结合律，且1_X 是 X上的恒等映射。这使可测空间和马尔可夫核具有范畴 [McL 的结构，参见 I 节。2], 这个马尔可夫范畴 [Pa], (又称 Lawvere 范畴 [La], , 又称 Giry 单子[Gi] , 又称随机范畴[Vo]) 。该范畴有一个始对象，即空集 $\emptyset$，以及一个终对象，即单点集 $\star = \{*\}$。可测集 X 上的概率测度 $\mathbb{P}$ 与马尔可夫核 $P\colon \star \to X$ “是同一回事”，因为马尔可夫核完全由概率测度 $P(dx|*) = \mathbb{P}(dx)$ 确定。因此，概率空间（X、$\mathcal{A}$、$\mathbb{P}$）与马尔可夫范畴中的基点空间 $\star \to X$ “是同一回事”，我们将它们视为相同。更一般地，若 X 带有一个以 S为参数的概率分布族（即一个马尔可夫核 $\mathbb{P}\colon S \to X$），那么对于每个核 $F\colon X \to Y$，我们都有一个推前$F_*\mathbb{P} = F \circ \mathbb{P}\colon S \to Y$。推前[2]：是一个协变函子，也就是说，对于$G\colon Y \to Z$，我们有

$$(F \circ G)_* = F_*G_* \tag{9}$$

这种函子性仅仅是在表达这样一个事实：$\circ$ 在这里是结合的。如果一个核来自可测函数 $f\colon X \to Y$，那么推前就非常明确。对于 $B \in \mathcal{B}$

$$(f_*P)(B|s) = P(f^{-1}(B)|s) \tag{10}$$

[1]如果 σ-代数 $\mathcal{B}$ 在 Y 上不能分离点，不同的函数可能定义出相同的核。[2]此外，还有一个函子性的逆变拉回：一个核 $\phi\colon Y \to T$ 会通过 $F^*\phi = \phi \circ F$给出一个核$F^*\phi\colon X \to T$，它满足 $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

也就是说，这只是以 $s \in S$ 为参数的测度推前。给定 $F_1 \colon X \to Y_1$ 和 $F_2 \colon X \to Y_2$，通常并不存在唯一的马尔可夫核

$$F_{12} : X \to Y_1 \times Y_2 \tag{11}$$

边缘分布为 $\pi_{1*}F_{12} = F_1$ 和 $\pi_{2*}F_{12} = F_2$，其中 π_1、π_2 分别是到第一和第二个坐标的投影。这是因为边缘概率分布通常无法确定联合概率分布，尽管边缘分布可能对联合分布有很强的限制。不过，我们可以定义一个条件独立（即对每个x都独立）的联合核 $F_1 \otimes F_2 \colon X \to Y_1 \otimes Y_2$，它由乘积测度 [Ru 定义，定义 7.7]

$$(F_1 \otimes F_2)(d(y_1, y_2)|x) = F_1(dy_1|x)F_2(dy_2|x). \tag{12}$$

对于可测子集 $B_1 \times B_2 \subset Y_1 \times Y_2$，它由 $(F_1 \otimes F_2)(B_1 \times B_2|x) = F_1(B_1|x)F_2(B_2|x)$ 给出，随后利用卡拉西奥多里扩张定理将其唯一地扩张到乘积σ-代数上。

为了说明我们将如何处理逻辑联结词 $\wedge$ 和 $\vee$，不妨先从更熟悉的随机变量相加情形入手。因此，首先假设 $(X, \mathcal{A})$ 不仅是一个可测空间，还是某个概率测度 $\mathbb{P}$ 下的概率空间 $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$。回顾一下，在这种设定中，随机变量或随机变量 [3] 是一个可测映射 $f \colon X \to \mathbb{R}$。随机变量 f 的分布律是推前测度 $f_*\mathbb{P}$，它是 $\mathbb{R}$ 上的概率分布。具体而言，对于区间 $(-\infty, b] \subset \mathbb{R}$，推前测度给出的累积分布

$$(f_*\mathbb{P})((-\infty, b]) = \mathbb{P}(f^{-1}(-\infty, b]) = \mathbb{P}(f(x) \leq b). \tag{13}$$

对于 $F \colon X \to \mathbb{R}$ 马尔可夫核，我们有推前概率测度 $F_*\mathbb{P} = F \circ \mathbb{P}$，其累积分布为

$$(F_*\mathbb{P})((-\infty, b]) = \int_X F((-\infty, b]|x)\mathbb{P}(dx) \tag{14}$$

对于两个随机变量 $f_1, f_2 \colon (X, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$，我们可以良好地定义求和函数 $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$。它们的和 $f_1 + f_2$ 的分布律是概率测度 $(f_1 + f_2)_*\mathbb{P}$。然而，众所周知，一般来说，和的分布律并不能由两个随机变量各自的分布律 $f_{1*}\mathbb{P}$ 和 $f_{2*}\mathbb{P}$ 确定。例如，若 f 服从均值为 0、标准差为 1 的正态分布，且 $f_1 = f$, $f_2 = f$，那么 f_1 和 f_2 也服从标准差为 1 的正态分布，而 $f_1 + f_2 = 2f$ 服从标准差为 2 的正态分布；但若 $f_1' = f$, $f_2' = -f$，那么 f_1 和 f_2 仍服从标准差为 1 的正态分布，但显然 $f_1 + f_2 = 0$。决定和的分布律的是定义在 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的联合分布 $(f_1 \times f_2)_*\mathbb{P}$。根据函子性，这一点成立，因为如果我们

[3] 本文中，大写的“字母表末尾”拉丁字母表示（测度）空间，而非随机变量。

定义 $\mathsf{add}(y_1, y_2) = y_1 + y_2$，那么 $f_1 + f_2 = \mathsf{add} \circ (f_1 \times f_2)$，而联合分布为

$$(f_1 + f_2)_*\mathbb{P} = (\mathbf{add} \circ (f_1 \times f_2))_*\mathbb{P} = \mathbf{add}_* \left((f_1 \times f_2)_*\mathbb{P}\right). \tag{15}$$

对于马尔可夫核 $F_1, F_2 :\ X \to \mathbb{R}$ 存在一个非常相似的复杂情况：它们并未定义一个明确的核，无法合理地称其为“$F_1 + F_2$”。为了计算和的分布，我们需要一个联合马尔可夫核，即一个核 $F_{12} : X \to \mathbb{R}^2$，其边缘分布为 $\pi_{1*}F_{12} = F_1$ 和 $\pi_{2*}F_{12} = F_2$，其中 π_1, π_2 仍分别是到第一和第二个坐标的投影。这样的联合核肯定存在，因为我们总可以假设 F_1 和 F_2 条件独立，并取 $F_1 \otimes F_2$

条件独立（即对每个 x 都独立），并在 $\mathbb{R}^2$ 上取 $F_{12} = F_1 \otimes F_2$。然而，如前所述，尽管 F_{12} 受到边缘分布 F_1 和 F_2 的约束，但通常并不存在唯一确定的选择。不过，给定一个联合马尔可夫核，我们就有一个马尔可夫核，滥用记号时可将其称为和

$$F_1 +_{F_{12}} F_2 := \mathbf{add}_* F_{12}. \tag{16}$$

这里的记号 $+_{F_{12}}$ 旨在表示我们使用联合马尔可夫核 F_{12} 来定义加法。这个记号有点多余，因为 F_{12} 已经确定了 F_1 和 F_2，但如果似乎不会引起混淆，我们就写作

$$F_1 +_{12} F_2 := F_1 +_{F_{12}} F_2. \tag{17}$$

由于 F_{12} 虽然并非由边缘分布唯一确定，但仍可能受到实质性限制，因此 $F_1 +_{12} F_2$ 也受到限制。

例1。考虑两个马尔可夫核 F_1、$F_2 :\ \Delta \to \mathbb{R}$，定义在区间$\Delta_1 = [0, 1]$ 上，取值于 $\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$，表示两次伯努利试验中两个参与方的损失或收益；每次试验中，出现正面（h）的概率为 $p \in \Delta$，出现反面（t）的概率为（$1 - p$）。参与方1在正面时获胜，参与方2在反面时获胜。我们不知道的是这两次伯努利试验之间的相关性。于是我们有

$$F_1(dy_1|p) = (p\delta_{+1} + (1 - p)\delta_{-1})(dy_1) \tag{18}$$
$$F_2(dy_2|p) = ((1 - p)\delta_{+1} + p\delta_{-1})(dy_2) \tag{19}$$

写出该核的另一种等价方式，是将其表示为不同结果的概率

$$F_1(+1|p) = p, \qquad F_2(+1|p) = (1 - p) \tag{20}$$
$$F_1(-1|p) = 1 - p \qquad F_2(-1|p) = p \tag{21}$$
$$F_1(B|p) = 0 \qquad F_2(B|p) = 0 \ \textit{if}\ \pm 1 \notin B \tag{22}$$

其中，我们在离散集的概率分布中采用了通常的记号滥用，例如写作 $F_1(+1|p) = F_1(\{-1\}|p)$，并将继续

这样做。联合马尔可夫核随后可参数化为

$$F_{12}((+1,+1)|p) = p_{ht}, \qquad F_{12}((+1,-1)|p) = p_{hh} \tag{23}$$

$$F_{12}((-1,+1)|p) = p_{tt} \qquad F_{12}((-1,-1)|p) = p_{th} \tag{24}$$

$$F_{12}(B|p) = 0 \ if \ (\pm 1, \pm 1) \notin B \tag{25}$$

其中，条件 F_{12} 以 F_1 和 F_2 为边缘分布，得出

$$p_{hh} + p_{ht} = p \qquad p_{hh} + p_{th} = p \tag{26}$$

$$p_{th} + p_{tt} = 1 - p \qquad p_{ht} + p_{tt} = 1 - p \tag{27}$$

满足不等式 $p_{ab} \geq 0$。方程组等价于

$$p_{hh} + p_{ht} + p_{th} + p_{tt} = 1 \tag{28}$$

$$p_{hh} + p_{ht} = p \tag{29}$$

$$p_{ht} + p_{tt} = 1 - p \tag{30}$$

其解的形式为

$$p_{hh} = q \qquad p_{ht} = p - q \tag{31}$$

$$p_{th} = p - q \qquad p_{tt} = 1 - 2p + q \tag{32}$$

其中 $\min(2p-1, 0) \leq q \leq p$。给定这个联合核，和核为

$$(F_1 +_{12} F_2)(+2|p) = p_{ht} = p - q \tag{33}$$

$$(F_1 +_{12} F_2)(0|p) = p_{hh} + p_{tt} = 1 - 2p + 2q \tag{34}$$

$$(F_1 +_{12} F_2)(-2|p) = q_{th} = p - q \tag{35}$$

我们对模糊逻辑所做的事情大致相同，只不过不是把数字相加，而是对布尔值应用“与”或“或”。

3. Fuzzy Logic

对于集合 X，给定谓词P： $X \to \mathbb{B}$ 中的信念（置信度） p ： $X \to [0,1]$ ，$\neg P(x)$中的信念为 $1 - p(x)$。

$$(\neg p) = 1 - p \tag{36}$$

对于两个性质 P_1、 P_2 及其信念函数 p_1、 p_2，我们考察 $P_1(x) \wedge P_2(x)$ 中的信念（置信度），或者等价地，考察$x \in X_{P_1} \cap X_{P_2}$ 中的信念（置信度）关于 x 的函数形式。已有若干种自然的模糊“与”定义，它们仅取决于数值 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ [ATV]，其中包括:

$$p_1 \underline{\wedge} p_2 = \max(0, p_1 + p_2 - 1) \tag{37}$$

$$p_1 \curlywedge p_2 = p_1 p_2 \tag{38}$$

$$p_1 \overline{\wedge} p_2 = \min(p_1, p_2). \tag{39}$$

请注意，如果 p_1 andp_2 只取 0 或 1，那么所有选择都会归结为通常的“与”连接词 $p_1 \wedge p_2$，并且

$$p \underline{\wedge} q \leq p \curlywedge q \leq p \overline{\wedge} q \tag{40}$$

同样，考虑 $P_1(x) \vee P_2(x)$ 中的信念（置信度），即 $x \in X_{P_1} \cup X_{P_2}$ 的置信度，其中

$$p_1 \underline{\vee} p_2 = \max(p_1, p_2) \tag{41}$$

$$p_1 \curlyvee p_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \tag{42}$$

$$p_1 \overline{\triangledown} p_2 = \min(1, p_1 + p_2). \tag{43}$$

已被提出。再次注意，当 p_1 和 p_2 仅取值 0 或 1 时，所有选择都化为通常的“或”联结词 $p_1 \vee p_2$，并且

$$p_1 \underline{\vee} p_2 \leq p_1 \curlyvee p_2 \leq p_1 \overline{\triangledown} p_2. \tag{44}$$

我们稍后将看到，$\underline{\wedge}$ 和 $\overline{\wedge}$ 是这样一类联结词的单参数族的极值，其中 $\curlywedge$ 为中间值；$\underline{\vee}$、$\overline{\triangledown}$ 和 $\curlyvee$的情形也类似。

对于所提出的模糊“与”和“或”联结词，经典德摩根定律

$$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b),\ \forall a, b \in \mathbb{B} \tag{45}$$

针对布尔真值具有模糊类比

$$p_1 \underline{\vee} p_2 = \neg((\neg p_1) \overline{\wedge} (\neg p_2)) \tag{46}$$

$$p_1 \curlyvee p_2 = \neg((\neg p_1) \curlywedge (\neg p_2)) \tag{47}$$

$$p_1 \overline{\triangledown} p_2 = \neg((\neg p_1) \underline{\wedge} (\neg p_2)) \tag{48}$$

我们稍后将看到，存在适用于整个单参数族的德摩根定律，其中公式 (46)、(47) 和 (48) 是特殊情形。

4. Fuzzy logic connectives and Markov kernels

有了马尔可夫核这一概念，我们便可以将可测集 $(X, \mathcal{A})$ 上的模糊集或模糊谓词解释为谓词核 $P\colon X \to \mathbb{B}$。第 3 节中的信念函数 $p\colon X \to [0,1]$ 等价于一个谓词核，其满足

$$P(\mathbf{T}|x) = p(x) \tag{49}$$

$$P(\mathbf{F}|x) = 1 - p(x). \tag{50}$$

反过来，核谓词以这种方式定义了一个信念函数。同样，我们在离散集的概率分布中滥用了记法，例如在这里将 $P(\mathbf{T}|x)$ 写作 $P(\{\mathrm{T}\}|x)$。这种解释将使我们能够通过适当地运用函子性，把模糊逻辑视为经典逻辑的“影子”。在此过程中，我们很快会发现需要使用联合置信函数或联合核。正如第 2 节所述，引入子集的 σ-代数并假设 p 可测，是一个技术细节。事实上，对于后续的大部分内容，我们都可以取 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ 为 X 的整个幂集。

4.1. 逻辑连接词“非”。作为热身，考虑“非”联结词 $\neg$ 的信念函数。存在一个与之关联的函数

$$\mathbf{not} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \tag{51}$$

$$t \mapsto \neg t \tag{52}$$

$\neg P$ 的马尔可夫核： $X \to \mathbb{B}$ 随后以函子方式在谓词核上定义

$$(\neg P) := (\mathbf{not}_* P). \tag{53}$$

其对应的信念函数为

$$\begin{aligned}
(\neg p)(x) &= (\neg P)(\mathbf{T}|x) && (54)\\
&= (\mathbf{not}_* P)(\mathbf{T}|x) && (55)\\
&= P(\mathbf{not}^{-1}(\mathbf{T})|x) && (56)\\
&= P(\{\mathbf{F}\}|x) && (57)\\
&= 1 - P(\mathbf{T}|x) && (58)\\
&= 1 - p(x) && (59)
\end{aligned}$$

正如预期。

4.2. 逻辑“与”连接词。现在，正如两个取值于 $\mathbb{R}$ 的马尔可夫核之和在没有联合核的情况下并未被良好定义一样，要定义谓词马尔可夫核 P_1 和 P_2（简称马尔可夫谓词）的逻辑“与”连接词，我们需要一个联合马尔可夫谓词 P_{12}，它将 P_1 和 P_2 提升。具体来说：给定马尔可夫谓词 P_1、P_2： $X \to \mathbb{B}$，它们由 $P_i(\mathbf{T}|x) = p_i(x)$ 唯一定义，我们需要一个联合马尔可夫谓词 $P_{12} : X \to \mathbb{B}^2$，其条件边缘分布为 $\pi_{1*}P_{12} = P_1$ 和 $\pi_{2*}P_{12} = P_2$，其中 π_i 是到第 i 个坐标的投影。同样，由于作为 (12) 的一个特例，我们可以假设 P_1 和 P_2 独立，从而得到联合马尔可夫谓词 $P_{12} = P_1 \otimes P_2$，因此这样的提升存在。这里可以非常明确地写出：

$$(P_1 \otimes P_2)((a,b)|x) = P_1(a|x)P_2(b|x). \tag{60}$$

然而，由于 $\mathbb{B}^2$ 很小，我们可以轻松写出一般的马尔可夫谓词提升 P_1 和 P_2:

$$P_{12}((\mathbf{F},\mathbf{F})|x) = p_{FF}(x) \qquad P_{12}((\mathbf{F},\mathbf{T})|x) = p_{FT}(x) \tag{61}$$

$$P_{12}((\mathbf{T},\mathbf{F})|x) = p_{TF}(x) \qquad P_{12}((\mathbf{T},\mathbf{T})|x) = p_{TT}(x) \tag{62}$$

其中 $p_{ab}(x) \geq 0$ 对所有 x 均成立，且

$$p_{FF}(x) + p_{FT}(x) = 1 - p_1(x) \qquad p_{FF}(x) + p_{TF}(x) = 1 - p_2(x) \tag{63}$$

$$p_{TF}(x) + p_{TT}(x) = p_1(x) \qquad p_{FT}(x) + p_{TT}(x) = p_2(x). \tag{64}$$

这些方程等价于

$$p_{FF}(x)+p_{FT}(x)+p_{TF}(x)+p_{TT}(x)=1 \tag{65}$$

$$p_{TF}(x)+p_{TT}(x)=p_1(x) \tag{66}$$

$$p_{FT}(x)+p_{TT}(x)=p_2(x) \tag{67}$$

它有解

$$p_{FF}(x)=q(x) \qquad p_{TF}=(1-p_2(x))-q(x) \tag{68}$$

$$p_{FT}(x)=(1-p_1(x))-q(x) \qquad p_{TT}=p_1(x)+p_2(x)-1+q(x). \tag{69}$$

因此，在这种参数化方式下（也可能有其他方式），联合马尔可夫谓词由一个“信念函数” $q(x)$确定，该函数表示两个谓词同时为假的信念。不等式 $p_{ab}(x) \geq 0$ 将不等式

$$0 \leq q_{\min}(x) \leq q(x) \leq q_{\max}(x) \leq 1 \tag{70}$$

for $q(x)$，其中

$$q_{\min}(x) := \max(0, 1-(p_1(x)+p_2(x))) \tag{71}$$

$$q_{\max}(x) := 1-\max(p_1(x), p_2(x)). \tag{72}$$

我们还定义

$$q_{\text{indep}}(x) := (1-p_1(x))(1-p_2(x)). \tag{73}$$

给定联合马尔可夫谓词后，我们现在可以通过函子性，滥用记号为“与”连接词定义一个马尔可夫谓词 $P_1 \wedge_{12} P_2$

$$P_1 \wedge_{12} P_2 := P_1 \wedge_{P_{12}} P_2 := \mathbf{and}_* P_{12}. \tag{74}$$

至于式 17 中的和核，这种记法有点不妥，因为 P_1 和 P_2已经由 P_{12} 确定，而 P_1 和 P_2 并不能确定联合马尔可夫谓词 P_{12}。它完全由其信念函数确定

$$(P_1 \wedge_{12} P_2)(\mathbf{T}|x) := (\mathbf{and}_* P_{12})(\mathbf{T}|x) \tag{75}$$

$$= P_{12}(\mathbf{and}^{-1}(\mathbf{T})|x) \tag{76}$$

$$= P_{12}(\{(\mathbf{T},\mathbf{T})\}|x) \tag{77}$$

$$= p_{TT}(x) \tag{78}$$

$$= p_1(x)+p_2(x)+q(x)-1 \tag{79}$$

即由联合核定义的模糊“与”的信念函数为

$$p_1(x) \wedge_{q(x)} p_2(x) := (P_1 \wedge_{12} P_2)(\mathbf{T}|x) = p_1(x)+p_2(x)+q(x)-1. \tag{80}$$

根据关于 $q(x$ 的不等式 (70)，我们得到

$$\max(0, p_1(x)+p_2(x)-1) \leq p_{TT}(x) \leq \min(p_1(x), p_2(x)) \tag{81}$$

并且，当 $q(x) = q_{\min}(x)$（对于下界），或$q(x) = q_{\max}(x)$（对于上界）时，这些不等式是紧的。根据定义 (37)、(39)

$$p_1(x) \underline{\wedge} p_2(x) = p_1(x) \wedge_{q_{\min}} p_2(x) \tag{82}$$

$$p_1(x) \overline{\wedge} p_2(x) = p_2(x) \wedge_{q_{\max}} p_2(x) \tag{83}$$

因此

$$p_1(x)\underline{\triangle}p_2(x) \le p_1(x) \wedge_{q(x)} p_2(x) \le p_1(x)\overline{\wedge}p_2(x). \tag{84}$$

若 P_1 和 P_2 条件独立，且 $P_{12} = P_1 \otimes P_2$，则有

$$p_{FF}(x) = (1-p_1(x))(1-p_2(x)) = q_{\text{indep}} \tag{85}$$

$$p_{TT}(x) = p_1(x)p_2(x) = p_1(x) + p_2(x) + q_{\text{indep}} - 1 \tag{86}$$

因此，与 (38) 比较可得

$$p_1(x) \curlywedge p_2(x) = p_1(x) \wedge_{q_{\text{indep}}} p_2(x) \tag{87}$$

4.3. 逻辑连接词“或”。我们可以类似地处理“或”联结词。沿用“与”联结词中的记号滥用方式，我们定义一个马尔可夫谓词

$$P_1 \vee_{12} P_2 := P_1 \vee_{P_{12}} P_2 := \mathbf{or}_* P_{12} \tag{88}$$

其信念函数为 $p_1(x) \vee_{q(x)} p_2(x) := P_1 \vee_{P_{12}} P_2(\mathbf{T}|x)$。于是可得

$$p_1(x) \vee_{q(x)} p_2(x) := (\mathbf{or}_* P_{12})(\mathbf{T}|x) = 1 - q(x). \tag{89}$$

根据 $q(x)$ 的不等式 (70)，我们得到以下不等式

$$\max(p_1, p_2) \le 1 - q(x) \le \min(1, p_1(x) + p_2(x)) \tag{90}$$

当 $q(x) = q_{\max}(x)$（对于下界）且 $q = q_{\min}$（对于上界）时，这些界是精确的。由 (41) 和 (43)，不等式 (90) 可改写为

$$p_1(x)\underline{\vee}p_2(x) \le p_1(x) \vee_{q(x)} p_2(x) \le p_1(x)\overline{\vee}p_2(x). \tag{91}$$

最后，对于条件独立的情形 $P_{12} = P_1 \otimes P_2$，我们有

$$(\mathbf{or}_*(P_1 \otimes P_2))(\mathbf{T}|x) = 1-(1-p_1)(1-p_2) = p_1(x)+p_2(x)-p_1(x)p_2(x), \tag{92}$$

由 (42) 和 (73)，我们得到

$$p_1(x) \vee_{q_{\text{indep}}} p_2(x) = p_1(x) \curlyvee p_2(x) \tag{93}$$

4.4. 逻辑蕴涵。对于其他逻辑联结词，尤其是蕴涵，我们也可以完全采用相同的方法。对于 a、$b \in \mathbb{B}$，我们有

$$\mathbf{impl}(a,b) = a \to b = \neg a \vee b = \neg(a \wedge \neg b). \tag{94}$$

因此，我们定义一个马尔可夫谓词

$$P_1 \to_{12} P_2 := P_1 \to_{P_{12}} P_2 := \mathbf{impl}_* P_{12} \tag{95}$$

其信念函数为

$$p_1(x) \to_{q(x)} p_2(x) = \mathbf{impl}_* P_{12}(\mathbf{T}|x) = 1 - P_{TF}(x) = p_2(x) + q(x). \tag{96}$$

现在定义

$$p_1(x)\underline{\to}p_2(x) = p_2(x) + q_{\min}(x) = \max(p_2(x), 1 - p_1(x)) \tag{97}$$

$$p_1(x) \rightsquigarrow p_2(x) = p_2(x) + q_{\text{indep}}(x) = 1 - p_1(x) + p_1(x)p_2(x) \tag{98}$$

$$p_1(x)\overline{\to}p_2(x) = p_2(x) + q_{\max}(x) = \min(1, 1 + p_2(x) - p_1(x)) \tag{99}$$

我们有

$$p_1(x)\underline{\rightarrow}p_2(x) \leq p_1(x)\rightarrow_{q(x)}p_2(x) \leq p_1(x)\overline{\rightarrow}p_2(x) \tag{100}$$

4.5. 德摩根定律。利用直接计算，很容易证明一般的模糊德摩根定律。我们还将给出一个更具概念性的证明，说明它是经典德摩根定律（45）和函子性的结果。我们有恒等式

$$q = (1-p_1)+(1-p_2)+(p_1+p_2+q-1)-1 = (\neg p_1)+(\neg p_2)+(p_1\wedge_q p_2)-1. \tag{101}$$

换句话说，德摩根定律（45）的一般模糊类比为

$$\neg\left(p_1(x)\vee_{q(x)}p_2(x)\right) = (\neg p_1(x))\wedge_{(p_1(x)\wedge_{q(x)}p_2(x))}(\neg p_2(x)) \tag{102}$$

or

$$p_1(x)\vee_{q(x)}p_2(x) = \neg\left((\neg p_1(x))\wedge_{(p_1(x)\wedge_{q(x)}p_2(x))}(\neg p_2(x))\right). \tag{103}$$

为了更具概念性地推导（102），将经典布尔德摩根定律（45）改写为

$$\mathbf{not}\circ\mathbf{or} = \mathbf{and}\circ(\mathbf{not}\times\mathbf{not}). \tag{104}$$

根据函子性

$$\mathbf{not}_*\mathbf{or}_* = (\mathbf{not}\circ\mathbf{or})_* \tag{105}$$
$$= (\mathbf{and}\circ(\mathbf{not}\times\mathbf{not}))_* \tag{106}$$
$$= \mathbf{and}_*(\mathbf{not}\times\mathbf{not})_*. \tag{107}$$

因此我们得到

$$\mathbf{not}_*(\mathbf{or}_*P_{12}) = \mathbf{and}_*\left((\mathbf{not}\times\mathbf{not})_*P_{12}\right), \tag{108}$$

因此

$$(\mathbf{not}_*(\mathbf{or}_*P_{12}))(\mathbf{T}|x) = \mathbf{and}_*\left((\mathbf{not}\times\mathbf{not})_*P_{12}\right)(\mathbf{T}|x) \tag{109}$$

但联合核的“q”（非 ×非）$_*P_{12}$ 是

$$((\mathbf{not}\times\mathbf{not})_*P_{12})(\mathbf{F},\mathbf{F})|x) = P_{12}((\mathbf{T},\mathbf{T})|x) = p_1(x)\wedge_{q(x)}p_2(x) \tag{110}$$

而（非 ×非）$_*P_{12}$ 的边缘分布“p_1”和“p_2”是

$$(\pi_{i*}(\mathbf{not}\times\mathbf{not})_*P_{12})(\mathbf{T}|x) = (\mathbf{not}_*\pi_{i*}P_{12})(\mathbf{T}|x) \tag{111}$$
$$= (\mathbf{not}_*P_i)(\mathbf{T}|x) \tag{112}$$
$$= \neg p_i(x) \tag{113}$$

因此，用信念函数表示（109）式的左端和右端，我们得到德摩根定律（102）。

5. Systems of logic expressions

现在应该已经很清楚：为了使用马尔可夫谓词解释来定义多变量模糊逻辑谓词，一般来说，我们需要逻辑变量的联合分布概率分布。一组一般的逻辑公式可以看作一个映射 L: $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$、$0 \leq n$、$m < \infty$。事实上，单个映射 L_0： $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ 总可以看作是在 $\mathbb{B}[t_1, ..., t_n]$ 中计算一个元素 L_0，其中 $\mathbb{B}[t_1, ..., t_n]$ 是由 n 个字母生成的自由布尔代数。为简化记号，考虑 $n = 2$ 情形，一般情形与此类似。我们可以定义

$$\tilde{L}_0(t_1, t_2) = L_0(\mathbf{T}, \mathbf{T})t_1t_2 \vee L_0(\mathbf{F}, \mathbf{T})\bar{t}_1t_2 \vee L_0(\mathbf{T}, \mathbf{F})t_1\bar{t}_2 \vee L_0(\mathbf{F}, \mathbf{F})\bar{t}_1\bar{t}_2 \tag{114}$$

其中并置表示 $\wedge$ 和 $\bar{t} = \neg t$。由于 $\mathbb{B}[t_1, ..., t_n]$中的每个逻辑公式都可以唯一地写成范式，即由 t的单项式和 $\bar{t}$的单项式通过“或”运算˜组合而成，我们看到映射 L_0 定义了 L_0，反之亦然。因此，我们将不再区分这两种记法。

那么，假设给定联合马尔可夫谓词 $P_{\{1,...,n\}} : X \to \mathbb{B}^n$，或者等价地，给定一组完整的 2^n 联合信念（置信度）函数

$$p_{a_1...a_n}(x) = P_{\{1,...,n\}}((a_1 \dots a_n)|x) \tag{115}$$

每个“位串”$(a_1, \dots a_m) \in \mathbb{B}^n$对应一个。它们满足离散集上概率分布的通常条件

$$\sum_{(a_1,...a_n)} p_{a_1,...a_n}(x) = 1 \text{ and } p_{a_1,...a_n}(x) \geq 0 \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n. \tag{116}$$

因此，我们有 $2^n - 1$ 个自由度，受 n 个条件约束，每个条件对应于来自边缘分布$P_i = \pi_{i*}P_{\{1,...n\}}$的信念（置信度）函数 $p_1(x) \dots p_n(x)$。当然，也可以考虑中间边缘分布，例如每一对变量对应的中间边缘分布。根据上述 $n = 2$ 情形，这些中间边缘分布由信念函数 $p_i(x)$定义；对于每一对变量，其信念

$$q_{ij} = \pi_{ij*}P_{\{1,...n\}}((\mathbf{F}, \mathbf{F})|x) = q_{ji} \tag{117}$$

两者都不成立，得到 $n + n(n-1)/2$ 个条件。 [4]

无论如何，利用函子性，给定一组联合马尔可夫谓词$P_{\{1,...,n\}}$：$X \to \mathbb{B}^n$ 和一组逻辑公式 $L : \mathbb{B}^n \to B^m$，我们可以定义应用于 $P_{\{1,...,n\}}$ 的 L 模糊版本，作为一个联合马尔可夫谓词$X \to \mathbb{B}^m$

$$L_{1...n}(P_1, \dots P_n) := L_{P_{1...n}}(P_1, \dots P_n) := L_*P_{1...n} \tag{118}$$

[4]根据具体应用，还可以作出其他可能很自然的假设，从而进一步减少自由度。例如，若我们可以假设 P_1、.....、P_n 条件独立，则有 $p_{a_1...a_n}(x) = \prod_{i=1}^n p_{a_i}(x)$。联合马尔可夫谓词在置换下的不变性确保 $p_{a_1...a_n}$ 只取决于“位串” a_1、.....、a_n 中 T 的数量，从而得到 $(n + 1)$ 个自由度，其中边缘分布 $p_1(x) = \dots = p_n(x)$ 有 1 个条件。

同样，假装它分别是马尔可夫谓词 P_1、 $\dots P_n$ 的模糊逻辑谓词，是一种荒谬的符号滥用。该马尔可夫谓词完全由联合信念（置信度）函数确定。

$$p_{L,a_1\dots a_m}(x) = (L_* P_{\{1,\dots,m\}})((a_1 \dots a_m)|x) \tag{119}$$

每个“位串”$(a_1, \dots a_m) \in \mathbb{B}^m$对应一个，它们同样满足概率分布的条件 $\sum_{(a_1, \dots a_m)} p_{L,\ a_1,\ \dots a_m}(x) = 1$ 和$p_{L,\ a_1,\ \dots a_m}(x) \geq 0$。

5.1. 模糊量化。假设 n, m 有限的一般设置仍无法涵盖所有自然示例。我们特别希望使用逻辑量词 $\exists_{i\in I} P_I = \vee_{i\in I} P_i$ 和 $\forall_{i\in I} P_i = \wedge_{i\in I} P_i$。对于有限集，这已由上述内容涵盖；但对于可数集的情形，我们还可以进行扩展。不过，在可数情形下，量词仍定义一个映射 $B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{B}$。空间 $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ 是一个（非平凡的）可测空间 [5]，我们研究可测的“逻辑联结词”： $\mathbb{B}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{B}$。不出所料， $\exists$ 和 $\forall = \neg \circ \exists \circ (\neg^{\mathbb{N}})$ 是可测的。我们只讨论 $\exists$ 量词；利用德摩根定律， $\forall$ 量词可归约为它，也可以用类似方法处理，依此类推。另见 [LK] 。我们的目标是推导其信念函数合理的下界和上界，这些界只需要有限边缘分布，因此更易处理。

首先考虑可数无限的情形

$$\mathbf{or}_{\mathbb{N}}(t_1, t_2, \dots) = \vee_{i\in\mathbb{N}}.t_i \tag{120}$$

其中对于每个 $I \subset \mathbb{N}$，都有对应的 a 或 $_I((t_i)_{i\in I} = \vee_{i\in I} t_i$。联合马尔可夫谓词 $P_{\mathbb{N}} : X \to \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ 给出边缘分布 $P_I \colon X \to \mathbb{B}^I$，并且对于 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \mathbb{N}$

$$(\mathbf{or}_{I_1 *} P_{I_1})(\mathbf{T}|x) = 1 - P_{I_1}((\mathbf{F}|x)_{i\in I_1}) \tag{121}$$

$$\leq 1 - P_{I_2}((\mathbf{F}|x)_{i\in I_2}) \tag{122}$$

$$= (\mathbf{or}_{I_2 *} P_{I_2})(\mathbf{T}|x). \tag{123}$$

特别地，由子集 $I = \{i\}$ 我们得到下界。

$$\sup_i \mathbb{P}_i(\mathbf{T}|x) = \sup_i p_i \leq (\mathbf{or}_{\mathbb{N}*}\mathbb{P}_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|x) \tag{124}$$

并且对于 $I = \{i, j\}$ ， 下界

$$\sup_{ij}(\mathbf{or}_{ij*} P_{ij})(\mathbf{T}|x) = \sup_{ij} p_i(x) \vee_{q_{ij}(x)} p_j(x) \leq (\mathbf{or}_{\mathbb{N}*}\mathbb{P}_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|x) \tag{125}$$

要得到一个合理的上界稍微困难一些。当然，我们有平凡的界

$$(\mathbf{or}_{\mathbb{N}*}\mathbb{P}_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}) \leq 1 \tag{126}$$

我们可以得到可能更优的界，如下定义：

$$C_I = \{t_i = \mathbf{T} \text{ for some } i \in I\} \subset \mathbb{B}^{\mathbb{N}}. \tag{127}$$

[5]可测集是由投影 $\mathbb{B}^{\mathbb{N}} \to B^M$ 下 $\mathbb{B}^M$ 的子集的逆像生成的 σ-代数， $M < \infty$

从不交划分 $\mathbb{N} = \coprod_n I_n$ 出发，我们有

$$\mathbb{B}^{\mathbb{N}} = \{(\mathbf{F}, \mathbf{F}, \ldots)\} \coprod \cup_n C_{I_n} \tag{128}$$

因此

$$1 = P_{\mathbb{N}}(\mathbb{B}^{\mathbb{N}}|x) \leq \mathbb{P}_{\mathbb{N}}((\mathbf{F}, \mathbf{F}, \ldots)|x) + \sum_n P_{\mathbb{N}}(C_{I_n}|x) \tag{129}$$

$$= \mathbb{P}_{\mathbb{N}}((\mathbf{F}, \mathbf{F}, \ldots)|x) + \sum_n P_{I_n}(C_{I_n}|x) \tag{130}$$

其中，我们对某个 $i \in I_n\} \subset \mathbb{B}^{I_n}\}$ 使用了C_{I_n} 和 $\{t_i = \mathbf{T}$，对某个 $i \in I_n\} \subset \mathbb{B}^{\mathbb{N}}\}$使用了 $\{t_i =$**T**。于是有

$$(\mathbf{or}_{\mathbb{N}*} P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|x) \leq \sum_n (\mathbf{or}_{I_n *} P_{I_n})(\mathbf{T}|x) \tag{131}$$

特别是对于 $I_n = \{n\}$

$$(\mathbf{or}_{\mathbb{N}*} P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|x) \leq \sum_n \mathbb{P}_{\{n\}}(\mathbf{T}|x) = \sum_n p_n(x) \tag{132}$$

对于 $I_n = \{i_n, j_n\}$

$$(\mathbf{or}_{\mathbb{N}*} P)(\mathbf{T}|x) \leq \inf_{\mathbb{N} = \cup_n \{i_n, j_n\}} \sum_n p_{i_n}(x) \vee_{q_{i_n j_n}(x)} p_{j_n}(x) \tag{133}$$

当然，这些界可能相当粗糙。将 $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ 分解为互不相交的部分，可以得到更好的界。例如，我们可以将其分解为

$$\mathbb{B}^{\mathbb{N}} = \{(\mathbf{F}, \mathbf{F}, \ldots)\} \coprod C_1 \coprod \coprod_{n \geq 2} C_n \setminus C_{n-1}. \tag{134}$$

然而，此时我们不再能够将其归约为具有有限个谓词的边际联合马尔可夫谓词，尽管附加假设可以使谓词 n 在给定谓词 $\mathbf{1}, \ldots n-1$ 的取值条件下成为马尔可夫谓词，并确定 $P_{\mathbb{N}}(C_n \setminus C_{n+1}|x)$，但我们将不再进一步探讨。最后，有限边缘分布确实决定了无限“或”：定义$C_M = C_{\{1,\ldots,M\}}$，我们有

$$C_{\mathbb{N}} = \cup_M C_M \tag{135}$$

因此

$$(\mathbf{or}_{\mathbb{N}*} P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|x) = P_{\mathbb{N}}(C_{\mathbb{N}}|x) = \lim_{M \to \infty} P_{\mathbb{N}}(C_M|x) = \lim_{M \to \infty} (\mathbf{or}_{M*} P_{\{1\ldots,M\}})(\mathbf{T}|x) \tag{136}$$

由单调收敛定理可得 .

这种可数无限情形出现于试图对（不一定可数的）集合 X 进行量化时，即为如下经典谓词表达式赋予模糊意义：

$$\exists x \in X : P(x) = \vee_{x \in X} P(x) \tag{137}$$

由上述内容可知，对于合理的模糊定义，我们应首先进行提升，得到联合马尔可夫谓词，从而提升（可能不可数的）

$P(\mathbf{T}|x)_{x\in X}$。由于 $P(\mathbf{T}|x)$ 是 x 的可测函数，因此它是一个取有限个值的简单函数序列的上确界。由此，我们可以得到一个取有限个值的函数序列，并取其可数极限。这表明我们应考虑一种提升

$$P_{\mathbb{N}} : X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{B}^{\mathbb{N}} \tag{138}$$

使得

$$(\pi_{i*}P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|(x_1, x_2, \dots,)) = P_{\mathbb{N}}(\{t_i = \mathbf{T}\}|(x_1, \dots x_n)) = P(\mathbf{T}|x_i) \tag{139}$$

同样，可以利用条件独立构造来构造这样的提升，但它不一定唯一。然后，我们可以沿用上述方法，定义 $\exists$ 量化的最一般模糊版本：

$$p_{\exists x:P(x)} = \sup_{(x_1,x_2,\dots)\in X^{\mathbb{N}}} (\mathbf{or}_{\mathbb{N}*}P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|(x_1, x_2, \dots)) \tag{140}$$

现在，我们可以通过转向边缘分布来求得有用的界。 $n = 1$ 的情形给出

$$\sup_{x,\in X} p(x) = \sup_{(x,x_2,\dots)} (\pi_{1*}P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|(x, x_2, \dots)) \leq p_{\exists x:P(x)} \tag{141}$$

$$\sum_{x\in X} p(x) = \sup_{(x_1,x_2,\dots)} \sum_i (\pi_{i*}P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|(x_1, x_2, \dots)) \geq p_{\exists x:P(x)} \tag{142}$$

$n = 2$ 情形更有意思。展开来说，这意味着，除了信念函数 $p(x)$ 之外，我们还有一个可测函数 $q(x_1, x_2) : X^2 \to [0, 1]$，使得 $q_{\min}(p(x_1)\ p(x_2)) \leq q(x_1, x_2) \leq q_{\max}(p(x_1)\ p(x_2))$；它与信念函数 $p(x)$ 一起定义了一个提升 $P_{1,\ 2} : X^2 \to \mathbb{B}^2$，使得（比较式（68）、（69））

$$p_{FF}(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) \qquad p_{FT}(x_1, x_2) = 1 - p(x_2) - q(x_1, x_2) \tag{143}$$

$$P_{TF}(x_1, x_2) = 1 - p(x_1) - q(x_1, x_2) \quad p_{TT}(x_1, x_2) = p(x_1) + p(x_2) - 1 - q(x_1, x_2). \tag{144}$$

于是我们得到上界和下界

$$\sup_{(x_1,x_2)\in X^2} p(x_1) \vee_{q(x_1,x_2)} p(x_2) \leq p_{\exists x:P(x)} \tag{145}$$

$$\sup_{(x_1,x_2,\dots)\in X^{\mathbb{N}}} \inf_{\mathbb{N}=\cup_n\{i_n,j_n\}} \sum_n p(x_{i_n}) \vee_{q(x_{i_n},x_{j_n})} p(x_{j_n}) \geq p_{\exists x:P(x)} \tag{146}$$

最后补充一点：我们定义模糊存在量词的方式，没有考虑我们如何对空间进行抽样 X 或者更准确地说，如何 $X^{\mathbb{N}}$。幸运的是，这很容易纳入马尔可夫核框架，而且实际上会让事情变得更简单。选择一个概率分布 $\mathbb{P} : \star \to X^{\mathbb{N}}$，也就是一种抽样策略。然后，复合

$$\star \xrightarrow{\mathbb{P}} X^{\mathbb{N}} \xrightarrow{P_{\mathbb{N}}} \mathbb{B}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{or}_{\mathbb{N}}} \mathbb{B} \tag{147}$$

是 $\mathbb{B}$上的一个概率分布，它给出一个单一数值 $p_{\mathbb{P}}$ ，表示 T 的概率

$$p_{\mathbb{P}} = \int_{X^{\mathbb{N}}} (\mathbf{or}_{\mathbb{N}*} P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|(x_1, x_2, \ldots)\mathbb{P}(d(x_1, x_2, \ldots)) \tag{148}$$

$$= \sum_{(a_1,a_2\ldots),\vee_i a_i=\mathbf{T}} \int_{X^{\mathbb{N}}} P_{\mathbb{N}}((a_1, a_2, \ldots)|(x_1, x_2, \ldots)\mathbb{P}(d(x_1, x_2, \ldots) \tag{149}$$

这个数的含义与存在性不同：在给定抽样策略 $\mathbb{P}$ 的情况下，它表示找到一个元组 $(x_1, x_2, \ldots)$，使谓词 P 对至少一个 x_i 为真的预期置信度。它确实给出了一个下界（150）

$$p_{\mathbb{P}} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P}}(\mathbf{or}_{\mathbb{N}*} P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|(x_1, \ldots)) \leq \sup(\mathbf{or}_{\mathbb{N}*} P_{\mathbb{N}})(\mathbf{T}|(x_1, \ldots) = p_{\exists x:P(x)}$$

对于许多用途而言，它或许比 $p_{\exists x:P(x)}$ 更有用。

6. Conclusion

我们将模糊逻辑描述为普通布尔逻辑的函子式“影子”。所有微妙之处都在于：应用布尔逻辑的对象不是布尔谓词，而是布尔值马尔可夫核（马尔可夫谓词），它们表达了谓词为真的置信度。然而，这意味着逻辑公式会受到谓词联合置信度的影响。我们描述了这种机制在简单情形下如何运作，包括二元逻辑关系、任意有限关系，以及存在量词等简单的无限关系。

7. 致谢

作者感谢 Uzay Kaymak 教授和 Hans Onvlee 博士提供的宝贵讨论。

References

[ATV] Alsina, Claudi 和 Trillas, Enric 和 Valverde, Lloren.c, *On some logical connectives for fuzzy sets theory*，《数学分析与应用杂志》93（1），15–26，Academic Press，1983，参见 https://core.ac.uk/download/pdf/82410529.pdf[DP1] Dubois, Didier 和 Prade, Henri, *Fuzzy sets, probability and measurements*，《欧洲运筹学杂志》40，135–154，North Holland，1989，参见 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221789903263[DP2] Dubois, Didier 和 Prade, Henri, *Fuzzy sets and probability: misunder-standings, bridges and gaps*，第二届 IEEE 国际模糊系统会议，1059–1068，IEEE，1993，参见 https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=327367[Do] Doob, Joseph L, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*，《数学科学基础丛书》262，Springer，1984[Ga] Gaines, Brian R, *Fuzzy and probability uncertainty logics*，《信息与控制》38（2），154–169，Elsevier，1978

[Gi] Giry, Mich`elle, *A categorical approach to proability theory*, 《拓扑与分析的范畴论方面》, 68–85, Springer, 1982, 参见 https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BFb0092872.pdf [La] Lawvere, F.W. *The category of probabilistic mappings* 研讨会讲义, 附 Gian Carlo Rota 的笔记。1962, 参见 https://ncatlab.org/nlab/files/lawvereprobability1962.pdf [LK] Liu, Yaxin 和 Kerre, Etienne E, *An overview of fuzzy quantifiers.(I). Inter-pretations*, 《模糊集与系统》95（1）, 1–21, Elsevier, 1998, [Lo] *Probability treatment of Zadeh membership functions and their use in pat-tern recognition*, Loginov, Vasiliy I, 《工程控制论》2, 68, SCRIPTA TECHNICA-JOHN WILEY & SONS, 605 THIRD AVE, NEW YORK, NY 10158, 1966[LSBDW] Laviolette, Michael 和 Seaman, John W. 和 Barrett, J Douglas. 和 Woodall, William H., *A probabilistic and statistical view of fuzzy methods*, 《Technometrics》37（3）, 249–261, Taylor & Francis, 1995, 参见 https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1995.10484327[McL] Mac La ne, Saunders, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, =Springer Science & Business Media, 2013[Pa] Panangaden, Prakash, *The category of Markov kernels*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 22, 171–187, Elsevier, 1999, 参见 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571066105806024, https://web.archive.org/web/20190419000326id /https://core.ac.uk/download/pdf/82421775.pdf [Ru] Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis P. 2*, McGraw-Hill, 1970, [Vo] Voevodsky, Vladimir, *Notes on categorical probability*, 2008, [Za] Zadeh, Lotfi A, *Discussion: Probability theory and fuzzy logic are comple-mentary rather than competitive*, 《Technometrics》37（3）, 271–276, Taylor & Francis, 1995

Jheronimus Academy of Data Science, Sint Janssingel 92 5211 DA den Bosch/ Technical University Eindhoven
Email address: R.Brussee@tue.nl, Rogier.Brussee@gmail.com