arXiv:2303.03734v2 [math.AG] 2 Feb 2024

$P = W$ 阿贝尔簇上的 P 现象

Barbara Bolognese、Alex KÜRONYA 和 Martin ULIRSCH

摘要。设 X 为一个复阿贝尔簇。我们证明了（上同调）$P = W$ 猜想和几何 $P = W$ 猜想的一个类似结果，将 X 上拓扑平凡的半稳定 Higgs 丛的 Dolbeault 模空间与 X的基本群特征的 Betti 模空间的精细拓扑结构联系起来。我们的方法在几何上的核心，是阿贝尔簇上 Dolbeault 模空间的谱数据态射；它自然地分解 Hitchin 态射，其目标并非多重典范截面的仿射空间，而是一个适当的对称积。

目录

引言 1
1. 复阿贝尔簇上的 Dolbeault 模空间 5 2. Hitchin 纤维化及其紧化 9 3. 非阿贝尔 Hodge 对应 11 4. 一个几何 $P = W$ 现象 13 5. perverse 滤过 15 6. 权重滤过与一个上同调 $P = W$ 现象 18 参考文献 21

引言

复代数簇的上同调带有一系列复杂的附加结构，这些结构由其代数簇的性质所决定。这一领域中一个特别令人振奋的方面，是研究与代数簇基本群相关的模空间；这些研究源于非阿贝尔 Hodge理论，尤其是 Corlette、Donaldson、Hitchin 和 Simpson 的开创性工作[Cor88，Don87，Hit87，Sim92]。

本文旨在研究与一个固定阿贝尔簇 X相关的这类模空间。更具体地说，我们证明了 de Cataldo–Hausel–Migliorini 的（上同调） $P = W$ 猜想de Cataldo–Hausel–Migliorini [dCHM12] 以及 Katzarkov–Noll–Pandit– Simpson 的几何 $P = W$ 猜想Katzarkov–Noll–Pandit– Simpson [KNPS15] （两者最初都只针对曲线提出）在阿贝尔簇 X上的对应版本；我们指出，这是首类两个 $P = W$ 猜想均得到验证的高维簇。

非阿贝尔 Hodge 理论为我们提供了与一个光滑射影代数簇 X 相关的两个（或者实际上是三个）至关重要的模空间：基本群特征的 *Betti* 模空间 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$，以及参数化 X 上 Higgs 丛的 *Dolbeault* 模空间 $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$（此外还有 de Rham 模空间，但它在本文余下部分中不会发挥任何作用）。这两个模空间都是拟射影代数簇，作为复代数簇它们显然并不同构（一个是仿射的，另一个不是）。然而，Simpson 的工作 [Sim94a、Sim94b] 为我们提供了 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 与 $M^{r}{}_{\mathrm{Dol}}(X)$ 之间的一个实解析同构。

Dolbeault 模空间有一个显著特点：它带有*Hitchin* 映射 [Hit87], ，这是一个到基空间的本征映射，而该基空间由整体截面构造而成。我们可以将其视为一种“阿贝尔化”过程，或 Strominger–Yao–Zaslow 镜像对称性的一种形式。对于

从 $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$的上同调环中看出 Hitchin 映射的作用是很自然的，但在 Betti 模空间 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$的上同调中则不那么明显。这类现象最初由 Hausel–Rodriguez-Villegas[HRV08] 在曲线上观察到，并以“奇妙庞加莱对偶”为题；随后，为了解释这些现象，他们提出了 $P=W$ 猜想de Cataldo–Hausel–Migliorini 在 [dCHM12]中提出的猜想预言，Betti 模空间与 Dolbeault 模空间之间的实解析同构，会将 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 上同调中的权重滤过（源自混合Hodge理论）与 $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 上同调中的 perverse 滤过（源自 Hitchin 纤维化）互换。

Katzarkov–Noll–Pandit–Simpson的几何 $P=W$ 猜想 [KNPS15] 旨在通过比较两个模空间在无穷远处邻域的几何（这些邻域记录了它们截然不同的紧化），从几何角度解释上同调猜想中令人惊讶的等式。如今， [MMS22，定理 A] 已证明，在曲线情形且满足一些技术性假设时，几何 $P=W$ 猜想蕴含上同调$P=W$ 猜想的最高权部分。

上同调 $P=W$ 猜想（针对紧黎曼曲面）。更具体地说，设 X为一条亏格为 $g\geq 1$ 的紧黎曼曲面，$p\in X$ 为其上的一个固定点。固定一个次数 $d\geq 0$ 和一个本原d次单位根 μ_d。非阿贝尔霍奇对应[Sim92、Sim94a、Sim94b] 给出一个实解析同构：一方是 $M^{r,\,d}_{\mathrm{Dol}}(X)$，即 X 上秩为 $r\geq 1$、次数为 d 的半稳定 Higgs 丛的 Dolbeault 模空间；另一方是 X 上秩为 r、且绕 p的单值化固定为 $\mu_d I_r$ 的局部系统的 Betti 模空间。换言之，后者是几何不变理论商

$$M^{r,d}_{\mathrm{Betti}}(X)=\left\{A_k,B_k\in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \text{ for } k=1,\dots,g \;\middle|\; [A_1,B_1]\cdots[A_g,B_g]=\mu_d I_r\right\}/\!\!/_{\mathrm{GL}_r\mathbb{C}}\ .$$

这为我们提供了这两个上同调环之间的一个同一

$$H^*\left(M^{r,d}_{\mathrm{Dol}}(X),\mathbb{Q}\right)=H^*\left(M^{r,d}_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\right)$$

认，而它们分别属于先验上（事实上也确实）截然不同的代数簇。

该 $P=W$ de Cataldo–Hausel–Migliorini 猜想 [dCHM12] 预言了一个出人意料的等式

$$P_k H^*\left(M^{r,d}_{\mathrm{Dol}}(X),\mathbb{Q}\right)=W_{2k}H^*\left(M^{r,d}_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\right)=W_{2k+1}H^*\left(M^{r,d}_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\right)$$

介于与 Hitchin 纤维化相关的 $H^*\left(M^{r,d}\mathrm{Dol}(X)\ \mathbb{Q}\right)$ 上的 perverse 滤过，与按 Deligne [Del71, Del 74] 的意义定义的 $H^*\left(M^{r,d}\mathrm{Betti}(X)\ \mathbb{Q}\right)$ 上的权重滤过之间（至少当 d 和 r 互素时）。在 $r=2$ 和 $d=1$、亏格 $g\geq 2$ 任意的情形下， $P=W$ 猜想已由 [dCHM12] 证明；对于与 d 互素的任意素数秩 $r\geq 1$，该猜想也已由 [dCMS22] 证明。两篇近期预印本[MS22, HMMS22] 给出了 $P=W$ 猜想在所有 $g\geq 2$ 与 $r\geq 1$ 互素于 d 的情形下的证明（另见[MSY23]，其中给出了第三种证明；以及 [Fel23]，其中概述了近期进展）。当 r 与 d不互素时，模空间并不光滑，并且在交叉上同调层面有其自身的一系列 $P=W$ 猜想（详情参见例如 [FM22]）。

一个上同调 $P=W$ 现象，适用于阿贝尔簇。本文的主要结果是一个类似的 $P=W$ 现象：当我们将紧黎曼曲面替换为一个 $X=\mathbb{C}^g/L$ 维数为 $g\geq 1$的复阿贝尔簇时。我们将在下文第1 节和第3 节看到，Dolbeault 模空间 $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 拓扑平凡的秩为 r 的半稳定 Higgs 丛，以及 Betti 模空间

$$M^r_{\mathrm{Betti}}(X)=\mathrm{Hom}\left(L,\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\right)/\!\!/_{\mathrm{GL}_r\mathbb{C}}$$

具有适当的 r 次对称幂的结构。这使我们能够在第 3.2 节明确写出非阿贝尔霍奇对应，从而得到一个实解析同构η^r_X： $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\xrightarrow{\sim} M^r\mathrm{Betti}(X)$，进而得到一个识别

$$H^*\left(M^r_{\mathrm{Dol}}(X),\mathbb{Q}\right)=H^*\left(M^r_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\right)\ . \tag{1}$$

正如我们将在下文第 2 节看到的，Hitchin 态射自然地经由所谓的谱数据态射

$$\mathrm{sd}_X \colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^r \mathbb{C}^g$$

（按照[CN20]的术语），其底空间是仿射空间 r的第 $\mathbb{C}^g$ 重对称幂（而非仿射空间）。谱数据态射是适当的。其纤维是$\widehat{}$对偶阿贝尔簇 X 的自然对称幂， X。Dolbeault 模空间自然带有辛轨形结构，使得 sd_X 成为轨形拉格朗日纤维化（详情见下文命题 2.4 ）。

如下文第 5 节所述，谱数据态射使我们能够赋予 $H^*\big(M^r_{\mathrm{Dol}}(X,\ \mathbb{Q})\big)$perverse 滤过结构

$$P_k H^*\big(M^r_{\mathrm{Dol}}(X), \mathbb{Q}\big) \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ith $P_k H^*\big(M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\ \mathbb{Q}\big) = 0$对于 $k < 0$ 和 $P_k H^*\big(M^r{}_{\mathrm{Dol}}(X)\ \mathbb{Q}\big) = H^*\big(M^r{}_{\mathrm{Dol}}(X)\ \mathbb{Q}\big)$对于 $k \geq g$
w

另一方面，Betti 模空间 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 是仿射的，且至多具有商奇点。因此，利用 Deligne 的经典结果 [Del71，Del74] 上同调环 $H^*\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\ \mathbb{Q}\big)$ 具有自然的权重滤过

$$W_k H^*\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X), \mathbb{Q}\big) \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{Z}$$

其中 $W_k = 0$对应于 $k < 0$，而$W_k = H^*\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\ \mathbb{Q}\big)$对应于 $k \geq 2g$。

T下面的定理 A 在我们的情形中确立了一种（上同调） $P = W$ 现象 .

定理 A (P=阿贝尔簇上的 W）。设 X 是一个维数为 $g \geq 1$的复阿贝尔簇。那么，在由非阿贝尔霍奇对应诱导的识别 (1) 下，我们有

$$P_k H^*\big(M^r_{Dol}(X), \mathbb{Q}\big) = W_{2k} H^*\big(M^r_{Betti}(X), \mathbb{Q}\big) = W_{2k+1} H^*\big(M^r_{Betti}(X), \mathbb{Q}\big)$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}$均成
立。

证明的一个关键思路是，将两个模空间分别识别为适当的对称积，并利用关于对称积与权重滤过及 perverse 滤过相容性的结果。类似技巧也见于 [FM22]（特别是其中对 [FM22，定理 7 的证明。6]），作者研究了那些允许辛约化的特征簇上的 $P = W$ 现象，尤其考察了 A 为椭圆曲线的情形。与这一早期方法的主要区别在于，我们使用谱数据态射而非 Hitchin 态射，这使我们能够超越一维 X的情形。

定理 A 结合 [FS21] 以及关于 P- 滤过的相对硬 Lefschetz 定理，可推出以下结论：

定理 B (奇异 Poincaré 和奇异硬 Lefschetz)。 设 X 是一个维数为 $g \geq 1$的复阿贝尔簇。

(i) 那么 $M^r_{Betti}(X)$ 是 *Hodge–Tate* 型，并且有

$$H\big(M^r_{Betti}(X); \frac{1}{qt^2}, t\big) = (qt)^{-2gr} \cdot H\big(M^r_{Betti}(X); q, t\big)$$

对于混合 *Hodge* 多项式 $H(\circ\ ;\ q,\ t) = H(\circ\ ;\ \sqrt{q},\ \sqrt{q},\ t)$ 的 $M^r_{Betti}(X)$。

(ii) 设 L 是 $H^2\big(M^r_{Dol}(X)\ \mathbb{Q}\big) \cong H^2\big(M^r_{Betti}(X)\ \mathbb{Q}\big)$中的一个超平面类。那么，与 L作 k重乘法诱导出一个同构

$$L^k \colon \mathrm{Gr}^W_{2gr-2k} H^*\big(M^r_{Betti}(X), \mathbb{Q}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^W_{2gr+2k} H^{*+2k}\big(M^r_{Betti}(X), \mathbb{Q}\big)\ .$$

定理B 是奇妙庞加莱对偶定理和奇异硬 Lefschetz 定理的一个类比，这两个定理最初是在 [HRV 08] 的秩2 情形中发现的。

阿贝尔簇上的一种几何 $P = W$ 现象。在 [KNPS15] 中，作者提出了紧黎曼曲面上这一 $P = W$ 现象的一种几何实现，它揭示了 Dolbeault 模空间与 Betti 模空间在无穷远处的几何之间存在对应关系（更多详情见[Mig17，第 5] 节，以及 [MMS22] ）。

设 X 是一个维数为 g的复阿贝尔簇。基于我们在下文第3.2 节对非阿贝尔霍奇对应的明确描述，我们确立了 $P = W$ 在X上的现象。

正如下文第2 节将要看到的，受 [Hau98、Sim97、dC21], Dolbeault 模空间$M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ $\overline{M}^r{}_{\mathrm{Dol}}(X)$ $N^r_{\mathrm{Dol}}(X)\overline{M}^r{}_{\mathrm{Dol}}(X)$ $N^r_{\mathrm{Dol}}(X)$无穷远邻域$\mathrm{Sym}^r\left(\mathbb{C}^g\right)$ $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ S^{2gr-1}/S_r。

一般而言，Betti 模空间 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$不具有标准紧化。得益于[Ste06、Thu07], 的结果， $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$的正规交叉紧化的对偶复形的同伦类型与紧化的选择无关（见[Har17，定理1.2] ，其中给出了轨形版本）。由于Betti 模空间 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$是一个开卡拉比–丘轨形，我们还可以得到更好的结论：一旦知道 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$具有除子对数终端（dlt）紧化，那么所有与之保正则双有理的其他dlt紧化都有分段线性同胚的对偶复形（根据 [dFKX17，命题 11]）。因此，稍微滥用一下记号，将对偶复形简单记作 $\Delta\left(M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\right)$是合理的。 [MMS22第 2]节指出，我们可以将 $\Delta\left(M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\right)$ 视为 M^rBetti(X)本质骨架的链环，意义见[KS06、MN15、NXY19]。如上所述，我们用 $N^r_{\mathrm{Betti}}(X)$表示一个适当的无穷远邻域。

定理 C (几何 $P = W$ 阿贝尔簇)。 设 X 是一个维数为$g \geq 1$的复阿贝尔簇。*Betti* 模空间 $M^r_{Betti}(X)$ 存在一个 *dlt* 紧化，并且对偶复形 $\Delta\left(M^r_{Betti}(X)\right)$ 与 S^{2gr-1}/S_r 之间存在自然的分段线性同胚，使得自然图表

$$
\begin{array}{ccc}
N^r_{Dol}(X) & \xrightarrow[\eta^r_X]{\sim} & N^r_{Betti}(X) \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{sd}}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\
S^{2gr-1}/S_r & \xrightarrow{\sim} & \Delta\left(M^r_{Betti}(X)\right)
\end{array}
\tag{2}
$$

可交换，其中：

- $N^r{}_{Dol}(X)$ 和 $N^r{}_{Betti}(X)$ 是合适的无穷远邻域，在这些邻域上 η^r_X 是一个同胚；$\sim$
- 映射 sd_X 是谱数据态射 sd_X 与从$\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g) - \{[0]\}$ 沿着经过原点的射线到 S^{2gr-1}/S_r 的形变收缩的复合；并且
- 映射 ρ 是到 $\Delta\left(M^r{}_{Betti}(X)\right)$上的一个合适的形变收缩。

对于紧黎曼曲面，类似于（2）中图表的箭头仅为同伦等价，而形变收缩 ρ 仅在同伦意义下良定义。对于阿贝尔簇，图表（2）无需借助同伦即可交换；直观地说，这是因为椭圆曲线的情形也如此（参见 [MMS22，第 5]节），而阿贝尔簇的情形是对这一情况的推广。

迈向 $P = W$ 高维现象。迄今为止， $P = W$ 此类现象似乎只出现在紧黎曼曲面上的各种版本的 Dolbeault 模空间和 Betti 模空间，以及这些模空间的推广中，即某些类型的簇簇 [Zha21] 和超凯勒簇 [HLSY21] （另见 [dCHM13，第 4 节，4] 其中对此方向进行了一些推测）。

定理A 和C 完整描述了当$P = W$ 现象在 X 为阿贝尔簇时，其上同调性质和几何性质。它们是探讨其他代数簇的 Betti/Dolbeault 模空间是否也会出现$P = W$ 此类现象。

在寻找这种推广时，需要考虑以下几个关键点：

(1) Hitchin 纤维化分解为谱数据态射，是高维簇的 Hitchin 态射分解的一个特例，后者源自 [CN20]。深入理解谱数据态射的几何性质至关重要。(2) 正如 [KNPS15], 所述，Hitchin 基中出现球面似乎是曲线情形所特有的。在下文的注记 4.1 中，我们将解释为何 S^{2gr-1}/S_r 并非 g的球面，$r \geq 2$而只是一个 $\mathbb{Q}$-同调球面。这与 Kollár 和 Xu 关于开 Calabi-Yau 簇的对偶复形同伦类型的一般猜想相契合 [KX16，问题 4] 。(3) 定理C 可以用本质骨架来表述；一般而言，也可以从 Kontsevich–Soibelman 意义下 SYZ 纤维化的非阿基米德方法来表述 [KS06] (另见 [MN15，NXY19，MMS22])。这说明了与 SYZ 镜像对称相关技术相互作用的重要性。

紧黎曼曲面（亏格为 ≥ 1）与阿贝尔簇的共同点是，它们都是 $K(\pi, 1)$-代数簇，即普遍覆盖可缩的复代数簇。

问题 **D.** 在 $K(\pi,1)$-代数簇上，*Betti/Dolbeault* 模空间会出现 $P = W$ 现象吗？

$K(\pi,1)$-代数簇的上同调自然同构于其基本群的群上同调。因此，从启发式角度看，可以将 $K(\pi, 1)$-代数簇视为拓扑由其基本群决定的代数簇。我们认为，$K(\pi, 1)$-代数簇构成一类自然的高维代数簇，在这类代数簇上，探索 $P = W$ 现象或许会有所收获。

致谢。 感谢 Emilio Franco、Andreas Gross、Johannes Horn、Inder Kaur、Martina Lanini、Mirko Mauri、Enrica Mazzon 和 Annette Werner 在本项目不同阶段进行的深入讨论并提出宝贵意见。特别感谢 Camilla Felisetti 允许我们与她讨论研究方法的细节，也感谢 Matthias Kreck 向我们介绍了评注4.1中的论证。

本项目获得了德国研究基金会（DFG）TRR 326 项目“一致化结构的几何与算术”（项目编号 444845124）、德国研究基金会（DFG）专项资助项目“从黎曼曲面到热带曲线（再回到黎曼曲面）”（项目编号 456557832）以及 LOEWE 资助项目“代数与几何中的一致化结构”的资助。

1. 复阿贝尔簇上的 Dolbeault 模空间

本节将明确描述阿贝尔簇上半稳定 Higgs 丛的模空间。

1.1. Higgs 丛与（半）稳定性的预备知识。

令 X 为一个 n维光滑复射影代数簇。我们用 Ω^1_X 表示 X 的余切丛，并始终默认固定一个超平面类 H。我们的结果不依赖于 H的选取。

定义 1.1. X 上的*Higgs*层 是一个二元组（E, ϕ），其中 E 是 X上的凝聚层，且 $\phi \in H^0(X, \mathcal{E}nd(E) \otimes \Omega^1_X)$，满足 $\phi \wedge \phi = 0$。当且仅当 E是局部自由的，我们称这样的二元组为*Higgs* 丛。

Higgs 层的自然稳定性概念与无挠凝聚层的斜率稳定性概念非常相似。回顾一下，如果 E 是一个无挠层，它相对于 H 的斜率 定义为

定义为

$$\mu(E)=\mu_H(E)=\frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)}=\frac{c_1(E)\cdot H^{n-1}}{\mathrm{rk}(E)}\ .$$

定义 1.2。若子层 $F\subset E$满足 ϕ-不变，即 $\phi(F)\subset F\otimes\Omega^1_X$。若 Higgs 层满足 $\mu(F)\leq\mu(E)$，则称其为半稳定。此外，若对任意非零的 ϕ-不变子层 $F\subsetneq E,$，都有 $\mu(F)<\mu(E)$，则称 E 为稳定。最后，若 (E,ϕ) 是由斜率相同的稳定 ϕ-不变子层直和而成，则称其为多稳定 。

下文中，若向量丛 E 在 X 上的 $H^*(X,\mathbb{Q})$ 中所有陈类均平凡，则称其为拓扑平凡。

注 1.3。若半稳定的无挠Higgs层 $(E,\ \phi)$ 是拓扑平凡的，则 E 由 [Sim94b，命题 66]可知是一个向量丛；事实上，它是由陈类均为零的稳定Higgs丛扩张而成的。任何斜率为零的 Higgs子层都是陈类为零的严格子丛。由 [Sim94b，命题 66] 我们还知道，对于拓扑平凡的 Higgs 丛，Gieseker（半）稳定性等价于斜率（半）稳定性。为明确起见，我们采用斜率（半）稳定性；但我们的所有结果对 Gieseker（半）稳定性同样成立。

处理 Higgs 层时，一个关键工具是以下两种滤过，它们分别通过半稳定商空间或稳定商空间对层进行滤过：

- 设 E 为一个无挠Higgs层。 E 的*Harder–Narasimhan*滤过是唯一的滤过

$$0=F_0\subsetneq F_1\subsetneq\ldots\subsetneq F_{s-1}\subsetneq F_s=E$$

  其具有 ϕ-不变子层 F_i 和半稳定子商 $E_i:=F_i/F_{i=1}$，对于 $1\leq i\leq s$，满足：当 $i<j$时，$\mu(E_i)>\mu(F_j)$。
- 设 F 为一个半稳定无挠Higgs层。 E 的*Jordan–Hölder*滤过是该滤过 on

$$0=G_0\subsetneq G_1\subsetneq\ldots\subsetneq G_{s-1}\subsetneq G_s=F$$

  其具有 ϕ-不变子层 G_i，以及半稳定子商 $H_i:=G_i/G_{i=1}$，对于 $1\leq i\leq s$，满足：对每个 i 和 j，$\mu(H_i)=\mu(H_j)$。

两个半稳定 Higgs 层 E、E' 被称为 *S*-等价，记作 $E\sim_S E'$，如果它们各自的 Jordan–Hölder 因子同构。每个半稳定 Higgs 丛都与一个多稳定 Higgs 丛 S-等价：事实上，如果 (F,ϕ) 是一个具有 Jordan–Hölder因子 H_1、...、H_n 的半稳定 Higgs 丛，那么它与多稳定 Higgs 丛 $(H_1,\phi|_{H_1})\oplus\ldots\oplus(H_n,\phi|_{H_n})$ S-等价。

1.2. **阿贝尔簇上 Higgs 丛的（半）稳定性**。本节将完整刻画复阿贝尔簇上的拓扑平凡的半稳定 Higgs 丛。

命题 1.4。设 X 是一个维数为 g 的复阿贝尔簇。那么，X 上的 *Higgs* 丛 (E,Φ) 是半稳定的，当且仅当其底层向量丛 E 是半稳定的。

命题1.4 拓展了 [FGPN14], 中的命题 4.1，该命题讨论的是椭圆曲线的情形。在开始证明之前，我们指出如下事实：若 $F\subseteq E$ 是一个子丛，那么根据定义， F 在ϕ-不变，当且仅当 $\phi(F)\subseteq F\otimes\Omega^1_X$。由于在阿贝尔簇上有 $\Omega^1_X\cong\mathcal{O}_X^{\oplus g}$，这一条件变为

$$\phi(F)\subseteq F^{\oplus g}\subseteq E^{\oplus g}\ .$$

命题 *1.4*的证明。若 E 是半稳定的，那么每个子丛的斜率都不大于 F的斜率，因此 Higgs 丛 (E,Φ) 必然是半稳定的。

反过来，假设 E 并非半稳定，记

$$0=F_0\subsetneq F_1\subsetneq\ldots\subsetneq F_{s-1}\subsetneq F_s=E$$

为其 Harder–Narasimhan滤过。回想一下，当 $i<j$ 时， $E_i := F_i/F_{i=1}$ 关于 $1 \le i \le s$ 的子商均为半稳定，且 $\mu_\alpha(E_i) > \mu_\alpha(F_j)$。此外

$$H^0(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E_i, E_j)) = 0 \quad \text{for all } i<j.$$

考虑 E 的最大 destabilizing 子丛 F_1。若 $F_1 \subseteq \ker\phi$，则 F_1 是 Φ-不变的，且斜率严格大于 E 的斜率，因此 Higgs 丛（E， ϕ）不是半稳定的。因此，不失一般性，可以假设 $\Phi(F_1) \neq 0$。令 $0 \le l \le s$ 为满足 $\phi(F_1) \subseteq F_l$，但同时满足 $\phi(F_1) \not\subseteq F_{l-1}$ 的最小指标。根据 l 的选取，Higgs 场 ϕ 诱导一个非零态射

$$\phi_1 \colon E_1 = F_1 \longrightarrow \left(F_l^{\oplus g}\right) / \left(F_{l-1}^{\oplus g}\right) \cong \left(F_l/F_{l-1}\right)^{\oplus g} = E_l^{\oplus g}$$

然而，右侧是半稳定的，其斜率／希尔伯特多项式为

$$\mu\left(E_l^{\oplus g}\right) = \mu(E_l) < \mu(E_1)\ ,$$

which除非 $l=1$，否则 h 不可能。这意味着 $\phi(F_1) \subseteq F_1^{\oplus g}$，也就是说 F_1 是 ϕ-不变的 . □

命题 1.5. 复阿贝尔簇 X 上的拓扑平凡半稳定 *Higgs* 丛是稳定的，当且仅当其秩为一。

我们的证明在某些方面推广了[FGPN14，命题 4。3], 该命题证明了在 X 是椭圆曲线时的一个类似结果。

命题*1.5*的证明。设(E,ϕ) 是 X上的一个拓扑平凡的稳定 Higgs 丛。由命题1.4 可知，其底层向量丛 E 是半稳定向量丛。根据 [MN84，Lan04] 上的拓扑平凡半稳定向量丛恰好是 X 上的齐性丛；因此 X我们有

$$t_x^* E \cong E$$

对于所有由 t_x 给出的 $x \in X$平移映射。齐性向量丛的分类 [Mat59、Miy73、Mor59、Muk78] 现在告诉我们

$$E \cong \bigoplus_i L_i \otimes U_i \tag{3}$$

其中 $L_i \in \mathrm{Pic}_0(X)$ 是满足 $c_1(L_i)=0$的线丛，而 U_i是幂零向量丛。我们可以将（3）改写为

$$E \cong \bigoplus_j L'_j \otimes U'_j$$

其中 L'_j 和 L'_k 在 $j \neq k$ 且 U'_j 是幂零丛的直和时不相互同构。注意到

$$H^0\big(X, \mathrm{Hom}(L_j, L_k)\big) = H^0(X, L_j^* \otimes L_k) = 0 \tag{4}$$

每当 $j \neq k$，由于 $L_j^* \otimes L_k$ 的所有陈类均为平凡类，但 $L_j^* \otimes L_k$ 并非平凡丛。

因此，同态 $\varphi\colon E \to E$分解为自同态 $\phi_i\colon L'_j \otimes U'_j \to L'_j \otimes U'_j$的直和。除非 $s=1$，否则这与 Higgs 丛（E,ϕ）的稳定性矛盾。因此我们有

$$E \cong L \otimes U$$

其中 $L \in \mathrm{Pic}_0(X)$，且 U 是幂零丛的直和。

存在自然同构

$$\mathrm{End}(E) \cong U^* \otimes L^* \otimes L \otimes U \cong U^* \otimes U \cong \mathrm{End}(U)\ .$$

由于 U 是幺幂对象的直和，因此存在唯一的最大秩平凡子丛 $\mathcal{O}_X^k \hookrightarrow U$ k。同态 $H^0(X, \mathcal{O}_X^k) \hookrightarrow H^0(X, U)$ 是单射。由于 ϕ 将 $\mathcal{O}_X^k$ 的非零截面

要么映为零，要么映为 U 的非零截面，因此我们得到 $\phi(\mathcal{O}_X^k) \subseteq \mathcal{O}_X^k$。这样的子丛的存在与 (E,ϕ) 的稳定性矛盾，除非 $\mathcal{O}_X^k \cong U$。因此我们有

$$\mathrm{End}(E) \cong \mathrm{End}(U,U) \cong \mathrm{End}(\mathcal{O}_X^k, \mathcal{O}_X^k) = \mathbb{C}^{k\times k} .$$

取 ϕ的一个非平凡特征空间 V。于是 $L\otimes V$在 ϕ作用下不变，而 V的存在与 (E,ϕ) 的稳定性相矛盾，除非 $k=1$。但这意味着 $E\cong L$，因此 Higgs 丛 (E,ϕ) 的秩为一。

反向结论显然成立。 □

1.3. **半稳定 Higgs 丛的模空间**。 在 [Sim94b] Simpson 构造了一个 Dolbeault 模空间 $M_{Dol}^r(X)$，它参数化了 r 上的秩为 X的拓扑平凡半稳定 Higgs 丛。它核心表示模函子

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}^r(X)\colon \mathbf{Sch}_{\mathbb{C}}^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

将一个 $\mathbb{C}$-概形 S映射为 $X\times S$上秩为 r的拓扑平凡半稳定 Higgs 层的同构类集合。 $M_{\mathrm{Dol}}^r(X)$ 的闭点对应于 S-等价类，即 r 上秩为 X 的拓扑平凡半稳定 Higgs 丛的 [Sim94b，命题 66]。

^在本小节余下部分，设 X 是一个维数为 $g\geq 1$ 的阿贝尔簇，并记其对偶阿贝尔簇为 X 。

命题 1.6. 沿用上述记号，*Dolbeault* 模空间 $M_{Dol}^r(X)$ 自然同构于^对称积 $\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C}^g)$。

^注意， X 上的主极化给出一个自然同构 $X\simeq X$，从而得到一个同构

$$M_{\mathrm{Dol}}^r(X) \cong \mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g) \cong \mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C}^g) .$$

命题 1.6 是 [FT17，定理 3 的特例。14]为了能在第 3 节中使用该证明，我们用本文的语言勾勒其主要思路。

证明。 考虑一个拓扑平凡的半稳定 Higgs 丛 (E,ϕ)，其秩为 r，定义在 X 上。由于 (E,ϕ) 是拓扑平凡的，因此它与若干拓扑平凡的稳定 Higgs 丛的直和 S-等价；根据上文的命题 1.5，这些稳定 Higgs 丛的秩均为一。因此有 $(E,\phi)\sim_S (L_1,\phi|_{L_1})\oplus\ldots\oplus(L_r,\phi|_{L_r})$。

对于每个 $i\in\{0,\ldots,r\}$，都有 $\phi|_{L_i}\in \mathrm{Hom}(L_i, L_i\otimes\Omega_X^i) \cong \mathrm{Hom}(L_i, L_i^{\oplus})$，因此它可以表示为一串复数 $\boldsymbol{\lambda}_i=(\lambda_{i,\ 1},\ldots,\lambda_{i,\ g})$。于是我们可以定义一个映射

$$t_{\mathbb{C}}\colon M_{\mathrm{Dol}}^r(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g)$$

令其为

$$t_{\mathbb{C}}(E,\phi) = \big[(L_1,\boldsymbol{\lambda}_1),\ldots,(L_r,\boldsymbol{\lambda}_r)\big].$$

我们定义逆映射

$$t_{\mathbb{C}}^{-1} : \mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g) \longrightarrow M_{\mathrm{Dol}}^r(X)$$

映射为

$$\big[(L_1,\boldsymbol{\lambda}_1),\ldots,(L_r,\boldsymbol{\lambda}_r)\big] \longmapsto (L_1\oplus\cdots\oplus L_r, \boldsymbol{\lambda}_1\mathrm{Id}_{L_1}\oplus\boldsymbol{\lambda}_r\mathrm{Id}_{L_r}),$$

其中，$(L_1\oplus\cdots\oplus L_r, \boldsymbol{\lambda}_1\mathrm{Id}_{L_1}\oplus\boldsymbol{\lambda}_r\mathrm{Id}_{L_r})$ 是 (E,ϕ) 的 S-等价类中的多稳定元素。

这样， $t_{\mathbb{C}}$ 在 Dolbeault 模空间 $M_{\mathrm{Dol}}^r(X)$ 与 $\mathrm{Sym}^r\left(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g\right)$ 之间定义了一个双射。为了证明这个双射实际上是代数簇之间的同构，我们需要注意到存在一个自然变换

$$t : \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}^r(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(-, \mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g)\right)$$

由 $t_{\mathbb{C}}$ 上的 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$-值点给出。正如 [FT17 定理 3.14]，的证明中所述， Λ-模意义下的傅里叶–穆凯变换（见 [PR01] ）提供了一种函子性地将 $X\times S$ 上秩为 r 的（对于一个 $\mathbb{C}$-概形 S）拓扑平凡半稳定 Higgs 层关联到一个挠

^长度为 r 的层，定义在 $X\times\mathbb{C}^g\times S$ 上。但是，正如 [FT17 命题 3.16]，中所述，长度为 r 的挠层
^ ^定义在 $X\times\mathbb{C}^g$ 上，由对称积 $\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C}^g)$ 表示。□

注 1.7。利用 [GKUW23 第 1] 节中发展的技巧，可以证明命题 1.6 的一个推广，以描述固定秩和 Néron–Severi 类下上的半齐次 Higgs 丛（按 [Muk78] 的意义）的模空间：它同构于适当阿贝尔挠子^
$M_{H\text{上的}1}(X)$ 的适当对称幂，从而推广了对偶阿贝尔簇 X。

2. Hitchin 纤维化及其紧化

当 X 是紧黎曼曲面时，Dolbeault 模空间自然带有一个拉格朗日纤维化，其基底为仿射空间，且一般而言纤维为复环面；该纤维化称为*Hitchin* 态射

$$h_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{r}H^0\big(X,S^i\Omega^1_X\big)\qquad(5)$$
$$(E,\phi)\longmapsto\chi_\phi$$

该态射将每个 Higgs 丛 (E,ϕ) 映到其特征多项式χ_ϕ的系数，其中 $S^i\Omega^1$ 表示余切丛 Ω^1_X的 i 次对称幂。

例 2.1。对于椭圆曲线 X，典范丛 Ω^1_X 是平凡的，且模空间 $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$由命题 $\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C})$ 1.6同构于相应的 Hitchin 纤维化

$$h_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\cong\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}^r\cong\bigoplus_{i=1}^{r}H^0(X,\Omega^1)$$

可通过以下方式描述

$$\boldsymbol{\lambda}\longmapsto\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)=x^r+\sigma_1(\boldsymbol{\lambda})x^{r-1}+\cdots+\sigma_{r-1}(\boldsymbol{\lambda})x+\sigma_r(\boldsymbol{\lambda})\ .$$

这里 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\in\mathbb{C}^g$，而 $\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n$ 是 r 阶初等对称多项式（对于 $1\le r\le n$ 并在 $\boldsymbol{\lambda}$ 中取值）。从几何角度表述，这意味着 Hitchin 纤维化可因子化为

$$h_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\cong\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C})\xrightarrow{\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)}\mathrm{Sym}^r\mathbb{C}\cong\mathbb{C}^r$$

其中右侧的同构由 σ_i 给出。

2.1. **Hitchin 态射的一个因子化**。从现在起，设 X 是一个维数为 ^ 的复阿贝尔簇，并记其对偶为 X。可以定义一个 Hitchin 态射

$$h_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{r}H^0\big(X,S^i\Omega^1_X\big)\cong\bigoplus_{i=1}^{r}S^i\mathbb{C}^g\cong\mathbb{C}^N$$

与曲线情形（5）完全相同，其中 $N=\sum_{i=1}^{r}\binom{g+i-1}{i}$。然而，这个 Hitchin 态射并非满射，因而不能成为拉格朗日纤维化。

例 2.1 中的椭圆曲线情形启发了如下内容。

命题 2.2。设 X 是一个维数为 $g\ge1$ 的复阿贝尔簇。那么 *Hitchin* 态射自然地分解为

$$M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\xrightarrow{\mathrm{sd}_X}\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g)\hookrightarrow\mathbb{C}^N\ ,$$

其中第二个箭头是由求值给出的闭浸入

$$\big[\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_r\big]\longmapsto\big[\sigma_i(\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_r)\big]_{i=1}^{r}\in\bigoplus_{i=1}^{r}S^i\mathbb{C}^g$$

一组 r 无序向量 $\boldsymbol{\lambda}_1,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{\lambda}_n\in\mathbb{C}^g$ 中的 r 个初等对称多项式 σ_i。

Defi定义 2.3. 态射 $\mathrm{sd}_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X) \to \mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g)$ 称为谱数据态射 m.

这个名称源于这样一个事实：命题 2.2 中的因子化可以看作 [CN20，命题 5 中所构造的因子化的特例。1]尽管如此，我们仍给出这一事实的一个独立且初等的证明。

^命题 2.2 的证明。由命题 1.6 可知，我们可以将 $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 与 $\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C}^g)$等同。借助这一等同，我们可以将 sd_X 定义为如下复合：

$$\mathrm{sd}_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\cong \mathrm{Sym}^r\left(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g\right)\xrightarrow{\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)}\mathrm{Sym}^r\,\mathbb{C}^g\ .$$

对于 $[\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_r]\in\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g)$，特征多项式 $\chi(x)=(x-\boldsymbol{\lambda}_1)\cdots(x-\boldsymbol{\lambda}_r)$ 的系数恰好是 $\sigma_i(\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_r)\in S^i\mathbb{C}^g$，因此这就定义了 Hitchin 态射的一个因子化。□

谱数据态射具有以下几何性质。

命题 ^**2.4 节。**设 X 是一个维数为 g的复阿贝尔簇，且 X 是对偶阿贝尔簇 .

(i) 谱数据态射是适当的。^*(ii)* 谱数据态射的每个纤维都同构于$\mathrm{Sym}^r X$。^*(iii) Dolbeault* 模空间 $M^r_{Dol}(X)\cong\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C}^g)$ 自然地是一个辛轨形，且谱数据态射是一个轨形拉格朗日纤维化。

证明。 根据定义，谱数据态射 $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g)$ 嵌入如下交换图

$$\begin{array}{ccc}(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g)^r & \xrightarrow{q_1} & \mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g)\\ \downarrow{\scriptstyle(\mathrm{pr}_2)^r} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)}\\ \mathbb{C}^{gr} & \xrightarrow{q_2} & \mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g),\end{array}$$

其中， q_i 表示关于 S_r运算的商映射。在第 (i) 部分，$\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)$ 的适当性由 $(\mathrm{pr}_2)^r$ 的适当性推出。由于 q_1 和 q_2 都是满射，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)^{-1}([\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_r]) &= q_1\left(\mathrm{pr}_2^{-1}\left(q_2^{-1}([\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_r])\right)\right)\\ &= q_1([\widehat{X}\times\{\boldsymbol{\lambda}_1\},\ldots,\widehat{X}\times\{\boldsymbol{\lambda}_r\}])\\ &\cong \widehat{X}^r/S_r=\mathrm{Sym}^r(\widehat{X})\end{aligned}$$

对 $\boldsymbol{\lambda}_i\in\mathbb{C}^g$（以及 $i=1,\ldots r$）成立，由此可得第 (ii) 部分。对于第（iii）部分，只需注意到 $T^*X\cong X\times\mathbb{C}^g$自然地具有辛流形的结构，且 pr_2 是一个拉格朗日纤维化。沿着 q_1 和 q_2 取商后，$\mathrm{Sym}^r(X\times\mathbb{C}^g)$成为一个辛轨形，而 $\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)$成为一个轨形拉格朗日纤维化。□

2.2. **谱数据态射的紧化。** 在 [Hau98], [Sim97，第 11], 和 [dC21，定理 3.1。1], 作者提出了 Dolbeault 模空间及其底空间的一种紧化，该紧化允许 Hitchin 纤维化的扩张。这种紧化的显著特点是，它与某种 $\mathbb{G}_m$-运算自然相容。

在我们的情形中，可以用初等方法构造这样一种紧化：

^**命题 2.5。** 设 X 是一个维数为 $g\geq 1$的复阿贝尔簇，并以 X 表示其对偶。存在一个紧化 $\overline{M}^r{}_{Dol}(X)$，使 $M^r{}_{Dol}(X)$具有如下扩张

$$\overline{\mathrm{sd}}_X\colon \overline{M}^r_{Dol}(X)\longrightarrow\mathrm{Sym}^r(\mathbb{P}^g)$$

该谱数据态射的扩张适合以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} M^r_{Dol}(X) & \longrightarrow & \overline{M}^r_{Dol}(X) \\ {\scriptstyle \mathrm{sd}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{sd}}_X} \\ \mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g) & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^r(\mathbb{P}^g) \end{array} ,$$

并满足以下性质：

(i) 代数簇 $\overline{M}^r{}_{Dol}(X)$ 在 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}$ 上是真态射，且至多具有轨形奇点；*(ii)* 水平箭头是开稠浸入；*(iii)* 扩张 sd_X 是一个真态射，它定义了一个轨形拉格朗日纤维化，其一般纤维同构于 $\mathrm{Sym}^r X$；并且

(iv) 通过对 *Higgs* 场重新缩放所给出的 $\mathbb{G}_m$-运算在 $M^r_{Dol}(X)$ 上延拓为整个 $\overline{M}^r{}_{Dol}(X)$ 上的运算，并使谱数据态射具有 $\mathbb{G}_m$-等变性，其中 $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g)$ 和 $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{P}^g)$均赋予由 $\mathbb{C}^g \subseteq \mathbb{P}^g$ 上的对角运算诱导的 $\mathbb{G}_m$-作用。

证明。 定义 $M^r\mathrm{Dol}(X)$ 的紧化 $\overline{M}^r{}_{\mathrm{Dol}}(X)$ 如下：

$$\overline{M}^r_{\mathrm{Dol}}(X) = \mathrm{Sym}^r(\widehat{X} \times \mathbb{P}^g)$$

其中， $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 可通过由 $\mathbb{C}^g \subseteq \mathbb{P}^g$ 诱导的包含映射视为 $\overline{M}^r{}_{\mathrm{Dol}}(X)$ 的一个开子集。我们再次将紧化后的谱数据态射定义为以下复合：

$$\overline{\mathrm{sd}}_X : \overline{M}^r_{\mathrm{Dol}}(X) = \mathrm{Sym}^r(\widehat{X} \times \mathbb{P}^g) \xrightarrow{\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)} \mathrm{Sym}^r(\mathbb{P}^g) .$$

这个定义立即推出第 (i) 和 (ii) 部分，以及该图表是交换的且为笛卡尔图表。第（iii）部分由以下事实得出：sd_X 是投影 $\widehat{\mathrm{pr}_2}\colon \mathrm{Sym}^r(X \times \mathbb{P}^r) \to \mathrm{Sym}^r(\mathbb{P}^g)$ 是一个有限群商空间，正如命题 2.4 的证明中所述。

对于第 (iv) 部分： $M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 上的 $\mathbb{G}_m$-运算由 $\mathbb{C}^g$ 上的对角运算在同构 $M^r_{\mathrm{Dol}}(X) \cong \mathrm{Sym}^r(X \times \mathbb{C}^g)$ 下诱导而来。 $\mathbb{G}_m$ 的对角运算可分解为稠密环面 $T = \mathbb{G}_m^{n+1}/\mathbb{G}_m$ 在 $\mathbb{C}^g$ 上的运算，因此自然延拓为 $\mathbb{P}^g$ 上的运算。因此， $\mathbb{G}_m$-运算延拓为 $\overline{M}^r{}_{\mathrm{Dol}}(X) = \mathrm{Sym}^r(\widehat{X} \times \mathbb{P}^g)$ 上的运算，并使 $\overline{\mathrm{sd}}_X$ 成为一个 $\mathbb{G}_m$-等变态射。□

3. 非阿贝尔霍奇对应

设 X 是一个维数为 g 的复阿贝尔簇。那么我们可以将 X 写作 $\mathbb{C}^g/L$ ，其中 L 是秩为 $2g$ 的满秩格。 X 的基本群自然同构于 L。非阿贝尔霍奇对应是对 [Cor88、Don87、Hit87、Sim92] 的概括，它告诉我们，半单表示 $\rho\colon L \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 与 X 上秩为 r 的拓扑平凡的多稳定 Higgs 丛 (E, ϕ) 之间存在自然的一一对应。

用 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 表示 L 的特征簇，也称为 *Betti* 模空间。它定义为以下几何不变量理论商空间

$$\mathrm{Hom}\left(L, \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\right) /\!\!/_{\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})}$$

其中 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 通过共轭作用。非阿贝尔霍奇对应给出了一个实解析同构

$$\eta^r_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X) \xrightarrow{\sim} M^r_{\mathrm{Betti}}(X) \tag{6}$$

将半单表示映射到相应多稳定 Higgs 丛的等价类（参见 [Sim94b、定理 7.18 和命题 7.8]）。利用 X 作为阿贝尔簇的结构，我们现在将明确给出η^r_X 。

3.1. **秩一情形下的非阿贝尔霍奇对应**。当 $r=1$ 时，表示 $\rho\colon L\to\mathbb{C}^*$ 与秩一拓扑平凡 Higgs 丛之间存在一一对应。为了描述诱导的同构态射

$$\eta_X^1\colon M^1_{\mathrm{Betti}}(X)\xrightarrow{\sim}M^1_{\mathrm{Dol}}(X)$$

注意到 $M^1{}_{\text{贝蒂}}(X)=\mathrm{Hom}(L,\mathbb{C}^*)$ 和 $M^1_{\mathrm{Dol}}(X)=\widehat{X}\times H^{1,0}(X)$，并考虑以下分解：

$$\underbrace{\mathrm{Hom}(L,\mathbb{C}^*)}_{M^1_{\mathrm{Betti}}(X)}\cong\mathrm{Hom}(L,S^1)\times\mathrm{Hom}(L,\mathbb{R})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}_0(X)\times H^1(X,\mathbb{R})\cong\underbrace{\widehat{X}\times H^{1,0}(X)}_{M^1_{\mathrm{Dol}}(X)}\ .$$

第一个同构由（实解析的）极分解 $\mathbb{C}^*\cong S^1\times\mathbb{R}$ 给出$z\mapsto\left(\frac{z}{|z|},-\log|z|\right)$诱导。在第一个因子中，第二个同构通过将表示 $\phi\colon L\to U(1)$ 对应到线丛 $L(\phi)=(V\times\mathbb{C})/L$（定义在 X 上）给出，其中 $l\in L$ 通过以下方式作用于 $V\times\mathbb{C}$

$$(x,v)\longmapsto\big(x+l,\phi(l)v\big)\ .$$

在第二个因子中，第三个同构通过将 $H^1(X,\mathbb{R})$ 中的 1-形式 ϕ 写成 $\phi=\varphi+\overline{\varphi}$ 来给出，其中 $\varphi\in H^1$ 是唯一的全纯 1-形式，$^{0}(X)$，因此也是一个 Higgs 场。这将 $H^1(X,\mathbb{R})$ 与$H^{1,\ ^{0}}(X)$ 等同起来。

3.2. **阿贝尔簇上的非阿贝尔霍奇对应——明确表述**。选定格 L 的一组基后，$\mathrm{Hom}\left(L,\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\right)$ 中的一个点不过就是由 $2g$ 个可逆且两两可交换的矩阵组成的元组。$\mathrm{Hom}\left(L,\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\right)$ 中的 GIT 稳定轨迹由那些同时对角化的可逆矩阵元组构成。因此我们得到

$$M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\cong\mathrm{Sym}^r\left((\mathbb{C}^*)^{2g}\right)\ .$$

从模空间的角度看，第2 节中的非阿贝尔霍奇对应和谱数据态射可以明确表述如下。

命题 3.1。非阿贝尔霍奇对应诱导出一个实解析同构

$$\eta_X^r\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\xrightarrow{\sim}M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$$

使图表

(7)
$$\begin{array}{ccc}
M^r_{\mathrm{Dol}}(X) & \xrightarrow[\eta_X^r]{\sim} & M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\sim}\\
\mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g) & \xrightarrow[\mathrm{Sym}^r(\eta_X^1)]{\sim} & \mathrm{Sym}^r\left((\mathbb{C}^*)^{2g}\right)\\
{\scriptstyle\mathrm{sd}_X}\searrow\ \Big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Sym}^r\left(-\log|.|\right)}\\
\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Sym}^r\left(\mathbb{R}^{2g}\right)
\end{array}$$

可交换。

证明。表示 $\pi_1(X)\to\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 是半单的，当且仅当它是不可约表示的直和。由于 $L=\pi_1(X)$ 是阿贝尔的，舒尔引理蕴含 L 的每个不可约表示都是一维的。

另一方面，上的拓扑平凡多稳定 Higgs 丛 X 是上的拓扑平凡稳定 Higgs 丛的直和 X。我们在上面的命题1.5 中已经看到，上的齐性丛分类 X 意味着上的拓扑平凡稳定 Higgs 丛 X 的秩为一。

由于非阿贝尔霍奇对应与直和分解相容，这表明上方的方块是交换的。由于 η_X^1 是实解析同构，η_X^r 也是如此。

右下方的竖直箭头是一个对称积 $\mathrm{Sym}^r(.)$，其对象为

$$-\log|.|\colon (\mathbb{C}^*)^{2g} \longrightarrow \mathbb{R}^{2g}$$
$$\big[z_i\big]_{i=1}^{2g} \longmapsto \big[-\log|z_i|\big]_{i=1}^{2g}.$$

下方方块的交换性源于这样一个事实：在秩一情形下，η_X^1 由 $z \mapsto \big(\frac{z}{|z|}, -\log|z|\big)$给出的极分解 $\mathbb{C}^* \cong S^1 \times \mathbb{R}$ 诱导而来。

左侧的三角形按定义交换。 □

4. A geometric $P = W$ phenomenon

本节回顾代数[dFKX17], 所引入的代数簇除子对数终端紧化的对偶复形这一概念，并运用这一语言证明引言中的定理C 。

4.1. dlt 紧化的对偶复形。设 (Z, D) 是由一个光滑代数簇Z和一个具有简单正规交叉（SNC）的除子 $D = D_1 + \ldots + D_n$ 组成的对。则

- 每个 D_i 都是光滑的，并且
- 对于 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$， $\bigcap_{i\in I} D_i$ 的各分支都是不可约的，且在 X中的余维为 $|I|$ 。

我们可以为 D 一个 Δ-复形 $\Delta(X, D)$关联一个称为对偶复形的对象（例如见[dFKX17、Pay13、Ste06、Thu07]）。对于 k的每个分量，它由一个-单形构成，其中 $\bigcap_{i\in I} D_i$ 满足 $|I| = k$；若对应的分量彼此包含，则一个单形是另一个单形的面。回顾 [Ste06、Thu07、Pay13], 的结果，对偶复形的（简单）同伦类型仅取决于开轨迹 $Z - D$。

在 [dFKX17] 中，作者指出，也可以通过只考虑其系数为 $\Delta(Z, E)$ 的分量所构成的除子 $D = E^{=1}$，并仿照上述构造，为一个 dlt 对(Z, E)关联对偶复形 E 。令 $= 1$为 Z^{SNC} 具有简单正规交叉的开子轨迹。于是有 $E|_{Z^{\mathrm{SNC}}}$ $\Delta(Z, E) = \Delta\big(Z^{\mathrm{SNC}}, E|_{Z^{\mathrm{SNC}}}\big)$。

现在假设给定两个 dlt 对 (Z_i, E_i) (对于 $i = 1, 2$)，它们是保正则双有理的，也就是说，存在适当双有理映射 $Z \to Z_i$，使得 E_1 和 E_2 的拉回相等。于是[dFKX17，命题 11] 告诉我们， $\Delta(Z_1, E_1)$ 与 $\Delta(Z_2, E_2)$ 甚至分段线性同胚。

假设给定一个代数簇 U及其紧化 Z，其中 U满足：(Z, E) 连同 $E = Z - U$构成一个 dlt 对，同时也是对数卡拉比-丘，这意味着 $K_X + E \sim_{\mathbb{Q}} 0$。那么，所有与 (Z, E) 保正则双有理的 dlt 对和对数卡拉比-丘紧化，其对偶复形都分段线性同胚。因此，稍微滥用一下记号，将这些对偶复形的分段线性同胚类记为 $\Delta(U)$ 是合理的。我们将 $\Delta(U)$ 简称为 U的对偶复形。

4.2. 一个几何 $P = W$ 现象——定理C的证明。 设 X 是一个复阿贝尔簇，维数为 $g \geq 1$。记 X 为其对偶，并且

$$\mathrm{sd}_X\colon M^r_{\mathrm{Dol}}(X) \cong \mathrm{Sym}^r(\widehat{X} \times \mathbb{C}^g) \xrightarrow{\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2)} \mathrm{Sym}^r \mathbb{C}^g$$

表示第 2.2 节意义下的谱数据态射。

考虑 $\mathbb{B}^* := \mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g) - \{0\}$。这个所谓的 $\{0\}$ 的半代数去心邻域，沿着经过零点的射线存在自然的形变收缩，收缩到球面$S^{2gr-1} \subseteq \mathbb{C}^{gr}$的商空间 S^{2gr-1}/S_r 。 $\mathbb{B}^*$ 在 $M^r\mathrm{Dol}(X)$ 中的原像 $N^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 构成紧化 $\overline{M}^r\,\mathrm{Dol}(X)$ 的一个半代数开邻域；该紧化对应于命题 2.5 中引入的 $M^r\mathrm{Dol}(X)$。将谱数据态射与沿着经过原点的射线的收缩映射复合，可得到一个连续映射

$$\widetilde{\mathrm{sd}}_X\colon N^r_{\mathrm{Dol}}(X) \xrightarrow{\mathrm{sd}_X} \mathbb{B}^* \longrightarrow S^{2gr-1}/S_r\,.$$

我们希望将球面商 S^{2gr-1}/S_r 与某个 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 的 dlt 紧化的对偶复形 $\Delta\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\big)$ 识别。记 $T = \mathbb{C}^{2g}$，并考虑任意一个光滑环面紧化 Z

T，例如 $Z = \left(\mathbb{P}^1\right)^{2g}$，它由向量空间 $\mathbb{R}^{2g}$ 中的有理多面扇 Σ_Z 给出；该向量空间由 T 的余特征格生成，且其支集为整个 $\mathbb{R}^{2g}$。我们可以将环面簇 Z^r 相对于环面边界 $Z^r - T^r$ 的对偶复形识别为 $\mathbb{R}^{2gr}$ 中 $\Sigma_{Z^r} = \Sigma_Z^r$ 的链环，由此赋予 S^{2gr-1} 分片线性结构。

根据 [KM98，命题 5.20]，对称积 $\mathrm{Sym}^r(Z^g)$ 给出了 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X) = \mathrm{Sym}^r T$ 的一个对数典范对数卡拉比-丘紧化。现在我们可以应用 [MMS22，引理 4.3.1]，从而发现 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 具有一个与$\left(\mathrm{Sym}^r(Z),\ D^{(r)}\right)$ 保正则双有理的 dlt 对数卡拉比-丘紧化，并且根据 [dFKX17，命题 11]，二者具有相同的对偶复形。

在 S_r 上的 Z^r 作用在余维一处是自由的。因此，我们可以应用 [MMS22，定理 3.0。7]并发现，相对于环面边界紧化的商空间，$\mathrm{Sym}^r(Z)$ 的对偶复形与 S^{2gr-1}/S_r分片线性同胚。

为完整描述这一图景，我们定义 $N^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 为 $\mathbb{B} \subseteq \mathrm{Sym}^r\left(\mathbb{R}^{2g}\right)$ 在 $-\log|.|$ 下的原像，并且

$$\rho\colon N^r_{\mathrm{Betti}}(X) \longrightarrow \Delta\left(M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\right) \cong S^{2gr-1}/S_r$$

是 $\mathrm{Sym}^r(-\log|.|)$ 与沿着经过零点的射线的自然收缩S_r的复合。最后，命题 3.1 中的交换图（7）推出，η^r_X 在 $N^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 与 $N^r{}_{\mathrm{Betti}}(X)$ 之间诱导一个同胚，并且

$$\begin{array}{ccc} N^*_{\mathrm{Dol}}(X) & \xrightarrow[\eta^r_X]{\sim} & N^*_{\mathrm{Betti}}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{sd}}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ S^{2gr-1}/S_r & \xrightarrow{\sim} & \Delta\left(M^r_{\mathrm{Betti}}(X)\right) \end{array}$$

也交换。

注 4.1。球面商 S^{2gr-1}/S_r 具有球面的有理同调，因为 S_r 的作用行列式为一。已知 S^{2gr-1}/S_r 当 $r = 1$或 $g = 1$ 时与球面分段线性同胚（见 [MMS22，定理 1.5。3] 后者的证明）。但是，只要 $g \geq 2$ 且 $r \geq 2$，商空间 S^{2gr-1}/S_r 本身甚至不是拓扑流形，因而也不与球面分段线性同胚。

这可以如下看出：设 $p \in S^{2gr-1}$ 是 S_r-运算的稳定子为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的一个点（这样的点存在，因为 $r \geq 2$）。记 B^i 为维数为 i 的开单位球，并令 $N = 2gr - 1$ 以及 $k = N - 2g$。那么在 p附近，商空间可描述为 $B^k \times B^{N-k}$关于对合 $\mathrm{id}_{B^k} \times(-\mathrm{id}_{B^{N-k}})$的商空间。因此，在 p附近，商空间 S^{2gr-1}/S_r同胚于$Z := B^k \times C\left(\mathbb{RP}^{N-k-1}\right)$，其中 p 对应于锥 $C\left(\mathbb{RP}^{N-k-1}\right)$（以 $\mathbb{RP}^{N-k-1}$为底）的顶点 q。回忆一下，我们有

$$H_s\left(B^k, B^k - \{0\}\right) \cong \widetilde{H}_{s-1}\left(S^{k-1}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } s = k \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

以及

$$H_t\left(C(\mathbb{RP}^{N-k-1}), C(\mathbb{RP}^{N-k-1}) - \{q\}\right) \cong \widetilde{H}_{t-1}\left(\mathbb{RP}^{N-k-1}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } t = N-k \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{if } 1 < t < N-k \text{ even} \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

因此，在 一方面，我们可以对偶使用 Künneth公式（并利用所有 Tor 的消失）来完成 d:

$$
\begin{aligned}
H_i\big(S^N/S_k, S^N/S_k - \{p\}\big) &\cong H_i\big(Z, Z - \{p\}\big) \\
&\cong \bigoplus_{s+t=i} H_s\big(B^k, B^k - \{0\}\big) \otimes H_t\big(C(\mathbb{RP}^{N-k-1}), C(\mathbb{RP}^{N-k-1}) - \{q\}\big) \\
&= \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } i = N \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{if } k+1 < i < N \text{ odd} \\ 0, & \text{else.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}
$$

另一方面，对于 M 上的一个 N 维拓扑流形中的点 p，我们有：

$$
H_i\big(M, M - \{p\}\big) \cong H_i\big(B^N, B^N - \{0\}\big) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{N-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } i = N \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{9}
$$

一旦 $g \geq 2$，我们便有 $N - (k+1) = 2g - 1 > 2$，因此存在一个奇数指标 i，使得 $k+1 < i < N$。在这种情况下，若 S^N/S_r 是一个流形，则公式（8）和（9）将构成矛盾。

5. perverse 滤过

本节致力于计算 X 为复阿贝尔簇时与 Hitchin 纤维化相关联的 perverse 滤过。有关背景知识，读者可参阅[GM83], [GM99], 和 [DC09]。

设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、维数为 n 的非奇异代数簇。我们在有界导出范畴 $\mathcal{D}(X) := \mathcal{D}^b_c(X)$ 中工作，该范畴由 X 上的可构造复形构成。记 $\omega_X := c^!\mathbb{Q}_X$ 为对偶化复形，其中 $c\colon X \to \{pt\}$ 是常值映射。由此得到一个函子

$$
\mathbb{D} : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X), \qquad E \longmapsto \mathbf{R}\operatorname{Hom}(E, \omega_X)\ .
$$

对象 $\mathbb{D}E$ 是 *Grothendieck-Verdier*对偶 E（例如参见 [GM99，第5节。16]其中可找到进一步的背景介绍和更多细节）。

5.1. **perverse t-结构。** 正如例如 [GM99，7.1.2和7.1节中所解释的，7], 三角范畴 $\mathcal{D}$（X）上存在一个特殊的t-结构，即 *perverse* t-结构 （${}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\leq 0}$，${}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\geq 0}$），其定义如下：

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\leq 0} &= \{E \in \mathcal{D}^b_c(X) \mid \dim \operatorname{Supp}(\mathcal{H}^i(E)) \leq i \text{ for all } i \in \mathbb{Z}\} \\
{}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\geq 0} &= \{E \in \mathcal{D}^b_c(X) \mid \dim \operatorname{Supp}(\mathcal{H}^i(\mathbb{D}E)) \leq i \text{ for all } i \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned} \tag{10}
$$

相应的截断函子为

$${}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq 0} :\ {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\leq 0} \longrightarrow \mathcal{D}(X) \qquad \text{and} \qquad {}^{\mathfrak{p}}\tau_{\geq 0} :\ {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\geq 0} \longrightarrow \mathcal{D}(X)\ .$$

通常，我们记作 ${}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq k}(E) := \big({}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq 0}(E[k])\big)[-k]$ 以及分别记作 ${}^{\mathfrak{p}}\tau_{\geq k}(E) := \big({}^{\mathfrak{p}}\tau_{\geq 0}(E[k])\big)[-k]$。我们回顾一下，截断函子与移位运算交换，即有

$${}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq k} \circ [i] = [i] \circ {}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq k+i} \tag{11}$$

对于每个 $i \in \mathbb{Z}$（例如参见 [dCM05，第4节。1]）。

通常将 perverse t-结构的心记为

$$\operatorname{Perv}(X) := {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{D}^{\geq 0}\ ,$$

并将其对象称为反常层。具体而言，反常层是满足（支撑和余支撑条件）中所述条件的可构造层复形（10）。

5.2. **分解定理**。设 $f\colon X \to Y$ 是一个代数簇之间的真态射，其奇点至多为有限商奇点，且其纤维的奇点也至多为有限商奇点。令$n = \dim X$，并记

$$d = \dim X \times_Y X - \dim X$$

对于 f 的所谓 半小缺陷 。

在这种情况下，Bernstein–Beilinson–Deligne 的分解定理[BBD82] （例如参见 [Max19，第 9]节）告诉我们如下结论。

（i）存在一个直和分解

$$\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X = \bigoplus_{j=0}^{2d} R^j f_*\mathbb{Q}_X[-j]$$

在 $\mathcal{D}(Y)$ 中。

（ii）我们有

$${}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^j\big(\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n]\big) = R^{d+j}f_*\big(\mathbb{Q}_X[\dim Y]\big)$$

对所有 $j \in \mathbb{Z}$。

(iii) Grothendieck-Verdier对偶给出

$$\mathbb{D}\big({}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^j(\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n])\big) = {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^{-j}\big(\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n]\big).$$

(iv) 此外，若 f 是射影的，且 $L \in H^2(X)$是相对丰沛的，则 L的 k次作用诱导一个同构

$$L^j : {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^j\big(\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n]\big) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^{-j}\big(\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n]\big). \tag{12}$$

注意，分裂 $\mathrm{R}f_*\mathbb{Q}_X[n] = \bigoplus_{j=-d}^{d} {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^j\big(\mathrm{R}f_*\mathbb{Q}_X[n]\big)$ 关于 $0 \in \mathbb{Z}$是对称的。反常上同调复形 ${}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^j\big(\mathrm{R}f_*\mathbb{Q}_X[n]\big)$ 在区间 $[-d, d]$之外消失。

例 5.1. 对于常值态射 $f\colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$，我们有 $\mathrm{R}f_*\mathbb{Q}_X = H^*(X, \mathbb{Q})$，因此

$${}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^j\big(\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n]\big) = R^{n+j}f_*(\mathbb{Q}) = \begin{cases} H^{n+j}(X, \mathbb{Q}) & \text{if } -n \le j \le n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

e

注 5.2. 上述分解定理的这一表述通常仅在 X和 Y光滑时才这样给出。一般而言，当 X 或 Y奇异时，将 $\mathbb{Q}[n]$ 和 $\mathbb{Q}[\dim Y]$ 分别替换为 X 和 Y上的交叉复形后，分解定理仍然成立。

如果 X 至多具有有限商奇点，那么就没有必要使用交叉上同调。事实上， [Bri99，命题 A1，iii）] 告诉我们，如果 X 具有有限商奇点，那么它就是有理光滑的。因此，[THT07，命题 8.2。21], 将复系数替换为有理系数后，可得交叉复形 IC_X 确实同构于 $\mathbb{Q}_X[\dim X]$，与光滑情形一样。因此，即使 X 不光滑但至多具有有限商奇点，我们在此回顾的分解定理版本仍然成立。

5.3. **perverse 滤过**。 现在我们简要回顾 perverse 滤过的构造。设 $f\colon X \to Y$ 是代数簇之间的平坦射影态射，且其自身至多具有有限商奇点，其纤维也至多具有有限商奇点。再次设 $n = \dim X$ 和$d = \dim X \times_Y X - \dim X$。给定一个复形 $K^\bullet \in \mathcal{D}^b_c(Y)$，存在一个自然态射

$${}^{\mathfrak{p}}\tau_{\le k}(K^\bullet) \longrightarrow K^\bullet ,$$

它在超上同调层面诱导出一个映射：

$$\mathbb{H}^i\big(Y, {}^{\mathfrak{p}}\tau_{\le k}(K^\bullet)\big) \longrightarrow \mathbb{H}^i(Y, K^\bullet) .$$

我们将复形 $K^\bullet$ 视为（平移后的）交叉上同调复形的推前，在我们的情形下即为 $\mathrm{R}f_*IC_X[-d] = \mathrm{R}f_*\mathbb{Q}_X[n-d]$，并得到一个映射

(13) $$\mathbb{H}^{i-(n-d)}\big(Y,{}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq k}(\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n-d])\big)\longrightarrow\mathbb{H}^{i-(n-d)}\big(Y,\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n-d]\big)\cong H^i(X,\mathbb{Q})$$

其中最后一个同构来自

$$\mathbb{H}^{i-(n-d)}\big(Y,\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X[n-d]\big)\cong\mathbb{H}^i(Y,\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}_X)\cong H^i(X,\mathbb{Q})\ .$$

定义 5.3（perverse 滤过）。（13）在上同调 H^i（X，$\mathbb{Q}$）中的像记为

$$P_k^f\big(H^i(X,\mathbb{Q})\big)\subseteq H^i(X,\mathbb{Q})\ ,$$

并在 $H^i(X,\mathbb{Q})$ 上定义了一个由 k 编指标的滤过，称为与 f 相关联的*perverse* 滤过。

关于 perverse 滤过的构造的更多细节，读者可参见例如 [dCMS19，第 1.2 节和第 1.3]）。由于根据分解定理，复形 $\mathbf{R}f_*\mathbb{Q}[n]$ 分解为其迷向上同调的直和，而这些迷向上同调在区间 $[-d,d]$之外消失，因此当 $P_p^f\big(H^i$（X，$\mathbb{Q}$）$\big)=0$时，我们有 $p\leq -1$；当 $P_p^f\big(H^i$（X，$\mathbb{Q}$）$\big)=H^i$（X，$\mathbb{Q}$）时，$p\geq 2d$。注意，该移位确保 perverse 滤过集中在次数 $[0,2d]$，而不是 $[-d,d]$。

5.4. **阿贝尔簇的 perverse 滤过**。设 X 是一个维数为$\sim g$ 的复阿贝尔簇，并记 X 为其对偶阿贝尔簇。本节计算第 2节中描述的谱数据态射所关联的 perverse 滤过。

命题 5.4。与谱数据态射相关联的 *perverse* 滤过

$$\mathrm{sd}_X=\mathrm{Sym}^r(\mathrm{pr}_2):M_{Dol}^r(X)=\mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g)\longrightarrow\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^g)$$

在第*2* 节中描述为

(14) $$P_k^{\mathrm{sd}}H^*\big(\mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g),\mathbb{Q}\big)=P_k^{\mathrm{sd}}H^*(\widehat{X}^r,\mathbb{Q})^{S_r}\ .$$

证明。根据 [Zha17，命题 2。14], 我们有

$$P_k^{\mathrm{sd}}H^*\big(M_{Dol}^r(X),\mathbb{Q}\big)=P_k^{\mathrm{sd}}H^*\big(\mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g),\mathbb{Q}\big)\cong P_k^{\mathrm{sd}}H^*\big((\widehat{X}\times\mathbb{C}^g)^r,\mathbb{Q}\big)^{S_r}\ .$$

而奇异上同调的同伦不变性给出

$$P_k^{\mathrm{sd}}H^*\big((\widehat{X}\times\mathbb{C}^g)^r,\mathbb{Q}\big)\cong P_k^{\mathrm{sd}}H^*\big(\widehat{X}^r\times\mathbb{C}^{gr},\mathbb{Q}\big)\cong P_k^{\mathrm{sd}}H^*(\widehat{X}^r,\mathbb{Q})$$

因为 $\mathbb{C}^{gr}$ 是可缩的。 □

根据 [Zha17，推论 2，2] 我们可以将（5.4）改写为

$$P_k^{\mathrm{sd}}H^*\big(\mathrm{Sym}^r(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g),\mathbb{Q}\big)=\big(\mathrm{Span}\{\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_r\ \text{s.t.}\ \mathfrak{p}(\alpha_1)+\ldots+\mathfrak{p}(\alpha_r)\leq k\}\big)^{S_r}$$

其中 $\alpha_i\in H^*(\widehat{X},\mathbb{Q})$，而 $\mathfrak{p}$ 表示 α_i 的迷向度（在此情形下是 α_i 在$\sim X$的上同调中的次数），其中 $i=1$，...，r。

命题 5.5。若 $r=1$，则 *perverse* 滤过是平凡的，也就是说，我们有

$$P_kH^i\big(M_{Dol}^1(X),\mathbb{Q}\big)=\begin{cases}0 & \text{if } k\leq i-1\\ H^i(\widehat{X},\mathbb{Q}) & \text{if } k\geq i\end{cases}$$

对所有指标 k，$i\in\mathbb{Z}$

证明。这由例 5.1 得出。事实上，若 $r=1$ 那么谱数据态射（以及Hitchin 态射）就是投影 $\mathrm{pr}_2\colon X\times\mathbb{C}^g\to\mathbb{C}^g$，因此半小性缺陷 $d=\dim X$ 达到最大值，且 perverse 滤过由

(15) $$\mathbb{H}^i\big(\mathbb{C}^g,{}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq k}(\mathbf{R}(\mathrm{pr}_2)_*\mathbb{Q})\big)\longrightarrow\mathbb{H}^i(\mathbb{C}^g,\mathbf{R}(\mathrm{pr}_2)_*\mathbb{Q})\ .$$

由于

$$\mathbb{H}^i\big(\mathbb{C}^g, {}^{\mathfrak{p}}\tau_{\leq k}(\mathbf{R}(\mathrm{pr}_2)_*\mathbb{Q})\big) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \leq i-1 \\ H^i(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g,\mathbb{Q}) & \text{if } k \geq i \end{cases}$$

and

$$\mathbb{H}^i(\mathbb{C}^g, \mathbf{R}(\mathrm{pr}_2)_*\mathbb{Q}) \cong H^i(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g,\mathbb{Q})$$

映射（15）在 $k \leq i-1$ 上为零，而在 $k \geq i$上为恒等映射。 □

6. 权重滤过与一个上同调 $P = W$ 现象

本节将运用 Deligne 权重滤过这一迄今已相当经典的理论及其与 Künneth 定理的相容性，明确计算代数环面的权重滤过；随后我们将解释权重滤过如何沿有限群商下降。定理 A 可通过与第 5 节中 perverse 滤过的相应陈述进行比较而得出。我们还将证明推论??。

6.1. **乘积上的混合霍奇结构。** 设 X 是一个拟射影簇。Deligne 的经典结果 [Del71、Del74]（另见 [Dur83、PS08]）告诉我们，每个上同调群 $H^i(X, \mathbb{Q})$ 都具有一个自然滤过

$$0 = W_{-1}H^i(X,\mathbb{Q}) \subseteq W_0H^i(X,\mathbb{Q}) \subseteq \cdots \subseteq W_{2i}H^i(X,\mathbb{Q}) = H^i(X,\mathbb{Q})$$

其由线性子空间构成，使得商空间

$$\mathrm{Gr}_k^W H^i(X,\mathbb{Q}) = W_kH^i(X,\mathbb{Q})/W_{k-1}H^i(X,\mathbb{Q})$$

承载权重为 k 的纯霍奇结构。该对应对于代数态射是函子性的，并且与杯积相容；因此写作

$$W_kH^*(X,\mathbb{Q}) = \bigoplus_i W_kH^i(X,\mathbb{Q})\ .$$

权重滤过也与 Künneth 公式相容，这意味着

$$W_kH^*(X\times Y) \cong \bigoplus_{s+t\leq k} W_sH^*(X)\otimes W_tH^*(X)$$

对于拟射影簇 X 和 Y（见 [PS08，定理 5。44]）。

现在回忆一下，对于代数环面 $T = (\mathbb{C}^*)^m$，我们有

$$H^*(T,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=0}^{m}\bigwedge^i \mathbb{Q}^m$$

由 Künneth 公式可知，它由次数 1 的元素生成。下面的命题 6.1 描述了 T 的上同调上的权重滤过。

命题 6.1。 设 $T = (\mathbb{C}^*)^m$。则权重滤过由下式给出

$$W_{2k}H^*(T,\mathbb{Q}) = W_{2k+1}H^*(T,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=0}^{k}\bigwedge^i \mathbb{Q}^m = \bigoplus_{i=0}^{k} H^i(T,\mathbb{Q})\ .$$

命题6.1 在该领域的专家中是众所周知的；由于缺乏合适的参考文献，我们给出一个证明。

证明。 首先注意，在 $m = 1$ 的情形下，我们有 $H^*(\mathbb{C}^*,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$，因为 $\mathbb{C}^*$ 形变收缩到 S^1。考虑包含映射 $i\colon\ \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{P}^1$。沿着 i 的拉回诱导出一个长正合列

$$\underbrace{H^1(\mathbb{P}^1,\mathbb{Q})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^1(\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})}_{=\mathbb{Q}} \longrightarrow \underbrace{H^2_{\{0,\infty\}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{Q})}_{=\mathbb{Q}^2} \longrightarrow \underbrace{H^2(\mathbb{P}^1,\mathbb{Q})}_{=\mathbb{Q}} \longrightarrow \underbrace{H^2(\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})}_{=0}\ .$$

因此， $H^*(\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})$ 上的权重滤过由下式给出

$$W_0H^*(\mathbb{C}^*,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \qquad W_1H^*(\mathbb{C}^*,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \qquad W_2H^*(\mathbb{C}^*,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$$

(详见 [EZT14，例 3.4。9] 因此，我们的结果对 $m=1$成立。对于一般的 $m\geq 1$，Künneth 公式与权重滤过相容，因此我们有

$$W_{2k}H^i\big((\mathbb{C}^*)^m,\mathbb{Q}\big)=W_{2k+1}H^i\big((\mathbb{C}^*)^m,\mathbb{Q}\big)=\bigoplus_{i=0}^{k}\bigwedge^i\mathbb{Q}^m=\bigoplus_{i=0}^{k}H^i(T,\mathbb{Q})\ .$$

□

6.2. **混合霍奇结构与有限群商空间。** 设 G 是作用在拟射影代数簇 X上的有限群。记

$$H^*_G(X,\mathbb{Q})=H^*(EG\times_G X,\mathbb{Q})$$

有理系数的等变上同调环。这里 EG 是分类空间 BG 上的万能主 G-丛 G，而 $EG\times_G X$ 是 $EG\times X$ 在 G的对角作用下的商空间。由 Vietoris–Begle 定理 [Spa95，第 344] 页，沿 $EG\times_G X\to X/G$ 的拉回诱导出自然同构

$$H^*(X/G,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^*_G(X,\mathbb{Q})\ .$$

此外，利用 Serre 谱序列，可以推导出 $H^*_G(X,\mathbb{Q})\cong H^*(X,\mathbb{Q})^G$，并且复合映射

$$H^*(X/G,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^*_G(X,\mathbb{Q})\cong H^*(X,\mathbb{Q})^G$$

由沿（代数）商映射 $\pi\colon\ X\to X/G$ 诱导（详见 [FS21，命题 4.3]）。由于 π 是代数的，拉回同态与权滤过相容，从而得到

$$W_kH^*(X/G,\mathbb{Q})\cong\big(W_kH^*(X,\mathbb{Q})\big)^G\ .$$

6.3. 定理 A 的证明。设 $X=\mathbb{C}^g/L$ 是一个维数为 g 的复阿贝尔簇，并记其对偶为 $\widehat{X}$。根据命题 3.1，$M^r_{\mathrm{Dol}}(X)$ 和 $M^r\mathrm{Betti}(X)$ 都是 r 重对称积。我们有 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)=\mathrm{Sym}^r\big(M^1\mathrm{Betti}(X)\big)$，而第 6.1 节和第 6.2 节表明，权重滤过与对称积相容；因此得到：

$$W_kH^*(M^r_{\mathrm{Betti}}(X))\cong\big(W_kH^*\big((M^1_{\mathrm{Betti}}(X))^r\big)\big)^{S_r}\ .$$

另一方面，我们有 $M^r_{Dol}(X)=\mathrm{Sym}^r\big(M^1_{Dol}(X)\big)$ 并且根据命题 5.4perverse 滤过与对称幂相容：

$$P_kH^*(M^r_{\mathrm{Dol}}(X),\mathbb{Q})\cong\big(P_kH^*\big((M^1_{\mathrm{Dol}})^r,\mathbb{Q}\big)\big)^{S_r}\ .$$

由于根据命题 3.1，非阿贝尔霍奇对应与两侧的对称积相容，因此只需在 $r=1$的情形下证明定理 A 。此时，非阿贝尔霍奇对应诱导出一个实解析同构

$$(\mathbb{C}^*)^{2g}=M^1_{\mathrm{Betti}}(X)\cong M^1_{\mathrm{Dol}}(X)=\widehat{X}\times\mathbb{C}^g$$

诱导出一个同构

$$H^*\big((\mathbb{C}^*)^{2g},\mathbb{Q}\big)=H^*\big(M^1_{\mathrm{Betti}}(X)\big)\cong H^*\big(M^1_{\mathrm{Dol}}(X)\big)=H^*\big(\widehat{X}\times\mathbb{C}^g\big)$$

的上同调代数。记 $T=(\mathbb{C}^*)^{2g}$。根据命题 6.1，左侧的权重滤过为

$$W_{2k}H^*(T,\mathbb{Q})=W_{2k+1}H^*(T,\mathbb{Q})=\bigoplus_{i=0}^{k}\bigwedge^i\mathbb{Q}^{2g}=\bigoplus_{i=0}^{k}H^i(T,\mathbb{Q})$$

并且，根据命题 5.5，右侧的 perverse 滤过为

$$P_kH^*(\widehat{X},\mathbb{Q})=\bigoplus_{i=0}^{k}H^i(\widehat{X},\mathbb{Q})=\bigoplus_{i=0}^{k}\bigwedge^i\mathbb{Q}^{2g}\ .$$

因此，由于 perverse 滤过和权重滤过中的不同子空间均可按次数区分，非阿贝尔霍奇对应诱导出一个恒等对应

$$P_k H^*\big(M^1_{\mathrm{Dol}}(X),\mathbb{Q}\big) = W_{2k} H^*\big(M^1_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\big) = W_{2k+1} H^*\big(M^1_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\big)$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}$。

6.4. 奇异 Poincaré 与奇异硬 Lefschetz。 设 X 是一个复拟射影代数簇。回顾一下，X 的混合霍奇数定义为

$$h^{p,q;j}(X) = h^{p,q}\big(\operatorname{Gr}^W_{p+q} H^j(X,\mathbb{Q})\big)\ ,$$

其中，$h^{p,\,q}$ 表示右侧纯霍奇结构中 $\operatorname{Gr}^W_{p+q} H^j(X,\mathbb{Q})$ 的 (p,q) 项的维数。混合 *Hodge* 多项式定义为

$$H(X;x,y,t) := \sum h^{p,q;j}(X) x^p y^q t^j\ .$$

如果 X 满足 *Hodge–Tate* 型，则称其为 $h^{p,\,q;j}(X) = 0$，除非 $p = q$。在此情况下，混合 Hodge 多项式 $H(X;\,x,y,t)$ 仅依赖于 xy 和 t，我们令

$$H(X;q,t) := H(X;\sqrt{q},\sqrt{q},t)$$

其中 q 为形式变量。

定理*B* 的证明。设 $X = \mathbb{C}^g/L$ 是一个维数为 $g \geq 1$的复阿贝尔簇。根据 [FS21，命题 5。11] 特征簇 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 具有 Hodge–Tate 型，且 $M^r_{\mathrm{Betti}}(X)$ 的混合 Hodge 多项式为

$$H\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X);q,t\big) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\big(\det(I_n - tqA_\sigma)\big)^{2g}\ ,$$

其中 A_σ 表示与 $\sigma \in S_n$ 相关联的置换矩阵。因此我们可以计算

$$\begin{aligned} H\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X);\frac{1}{qt^2},t\big) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\big(\det(I_n - \frac{1}{qt}A_\sigma)\big)^{2g} \\ &= \frac{1}{(qt)^{2gr}}\cdot\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\big(\det(qtI_n - A_\sigma)\big)^{2g} \\ &= \frac{1}{(qt)^{2gr}}\cdot\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\big(\det(I_n - qtA_\sigma)\big)^{2g} \\ &= \frac{1}{(qt)^{2gr}}\cdot H\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X);q,t\big)\ . \end{aligned}$$

这证明了第 (i) 部分。对于第（ii）部分，我们选择一个超平面类 $L \in H^2\big(M^r_{\mathrm{Dol}}(X)\ \mathbb{Q}\big)$，并注意到相对硬 Lefschetz 定理（参见第 5.2 节中的（12），该版本适用于我们的情形）告诉我们，k次应用 L 定义了一个同构

$$L^k\colon\ \operatorname{Gr}^P_{gr-k} H^*\big(M^r_{\mathrm{Dol}}(X),\mathbb{Q}\big) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^P_{gr+k} H^{*+2k}\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\big)\ .$$

在定理 A 中将 perverse 滤过与权重滤过认同后，这就变成了一个同构

$$L^k\colon\ \operatorname{Gr}^W_{2gr-2k} H^*\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\big) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^W_{2gr+2k} H^{*+2k}\big(M^r_{\mathrm{Betti}}(X),\mathbb{Q}\big)\ ,$$

这就是我们的论断。 □

6.5. **一个应用：Jacobian簇上的秩一 Higgs 丛。** 设 X 是亏格为 $g \geq 1$的紧黎曼曲面。定理 A 蕴含了秩一 Higgs 丛在 X上的 $P = W$ 现象的一个著名版本。事实上，对于 $r = 1$ 和 $d = 0$，我们可以典范地得到

$$M_{\mathrm{Dol}}^{1,0}(X) \cong \mathrm{Jac}(X) \times H^0(X, K_X) \cong \mathrm{Jac}(X) \times H^{1,0}\big(\mathrm{Jac}(X)\big) \cong M_{\mathrm{Dol}}^{1}\big(\mathrm{Jac}(X)\big)$$

根据 Jac(X) 的自对偶性以及 Betti 模空间的

$$M_{\mathrm{Betti}}^{1,0}(X) \cong \mathrm{Hom}\left(\pi_1(X), \mathbb{C}^*\right) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathrm{Jac}(X)), \mathbb{C}^*) = M_{\mathrm{Betti}}^{1}(\mathrm{Jac}(X)) \cong (\mathbb{C}^*)^{2g} \ ,$$

因为规范地有 $\pi_1(X)^{ab} \cong \pi_1\big(\mathrm{Jac}(X)\big)$。因此我们得到：

推论 6.2。 设 X 是一个亏格为 $g \geq 1$ 的紧黎曼曲面。那么，在识别 on

$$H^*\big(M_{Dol}^{1}(X), \mathbb{Q}\big) \cong H^*\big(M_{Betti}^{1}(X), \mathbb{Q}\big) \ ,$$

我们有

$$P_k H^*\big(M_{Dol}^{1,0}(X), \mathbb{Q}\big) = W_{2k} H^*\big(M_{Betti}^{1,0}(X), \mathbb{Q}\big) = W_{2k+1} H^*\big(M_{Betti}^{1,0}(X), \mathbb{Q}\big)$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}$。

推论6.2 的表述当然为专家所熟知；其证明的一种略有不同的方法见 [Zha17，定理 5。9]。关于秩一中的几何 $P = W$ 现象，请读者参阅 [MMS22，定理 B]。

参考文献

[BBD82] A. A. Be˘ılinson、J. Bernstein 和 P. Deligne，《反常层》，《奇异空间上的分析与拓扑》I（卢米尼，1981），《Astérisque》第100卷，法国数学会，巴黎，1982年，第5–171页。[Bri99] M. Brion，环面作用的有理光滑性与不动点，《变换群》4（1999），第2期，127–156页。[CN20] T. H. Chen 和 B. C. Ngô，高维簇上的 Hitchin 态射，《杜克数学杂志》169（2020），第10期，1971–2004页。[Cor88] Kevin Corlette，带有典范度量的平坦 G丛，《微分几何杂志》28（1988），第3期，361–382页。MR 965220[DC09] M. De Cataldo，反常层与分解定理讲义。[dC21] Mark Andrea A. de Cataldo，Dolbeault 模空间的射影紧化，《国际数学研究通知》（IMRN）（2021），第5期，3543–3570页。[dCHM12] Mark Andrea A. de Cataldo、Tamás Hausel 和 Luca Migliorini，Hitchin系统的拓扑与特征簇的 Hodge 理论：情形 A_1，《数学年刊》（第2辑）175（2012），第3期，1329–1407页。[dCHM13] ———，两个曲面上点的 Hilbert概形的 perverse 滤过与权重滤过之间的互换，《奇点杂志》7（2013），23–38页。[dCM05] Mark Andrea de Cataldo 和 Luca Migliorini，交叉形式、映射的拓扑以及三维簇映射的动机分解，arXiv：代数几何（2005）。[dCMS19] Mark Andrea de Cataldo、Davesh Maulik 和 Junliang Shen，Hitchin 纤维化、阿贝尔曲面与 p=w 猜想，arXiv：代数几何（2019）。[dCMS22] Mark Andrea de Cataldo、Davesh Maulik 和 Junliang Shen，关于 SL_n的 P = W 猜想，《精选数学》（新系列）28（2022），第5期，论文编号90，21页。[Del71] Pierre Deligne，《Hodge 理论》II，《法国高等科学研究所数学出版物》（1971），第40期，5–57页。[Del74] ———，《Hodge 理论》III，《法国高等科学研究所数学出版物》（1974），第44期，5–77页。[dFKX17] Tommaso de Fernex、János Kollár 和 Chenyang Xu，奇点的对偶复形，载于《高维代数几何——纪念河边雄二郎教授六十寿辰》，《纯数学进展研究》第74卷，日本数学会，东京，2017年，第103–129页。[Don87] S. K. Donaldson，扭曲调和映射与自对偶方程，《伦敦数学会会刊》（第3辑）55（1987），第1期，127–131页。[Dur83] Alan H. Durfee，混合 Hodge 理论入门指南，《奇点》第1部分（加利福尼亚州阿卡塔，1981），《纯数学专题讨论会论文集》第40卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1983年，第313–320页。[EZT14] Fouad El Zein 和 Lê D˜ung Tráng，混合霍奇结构，载于《Hodge 理论》，《数学笔记》第49卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2014年，第123–216页。

[Fel23] Camilla Felisetti，代数几何与枚举几何中的 $P=W$ 现象，2023年9月，arXiv:2309.15061 [math]。[FGPN14] Emilio Franco、Oscar Garcia-Prada 和 P. E. Newstead，椭圆曲线上的 Higgs 丛，《伊利诺伊数学杂志》58（2014），第1期，43–96页。[FM22] Camilla Felisetti 和 Mirko Mauri，具有辛解消的特征簇的 P = W 猜想，《巴黎综合理工学院数学杂志》9（2022），853–905页。[FS21] Carlos Florentino 和 Jaime Silva，自由阿贝尔群的特征簇的 Hodge-Deligne 多项式，《开放数学》19（2021），第1期，338–362页。[FT17] Emilio Franco 和 Pietro Tortella，阿贝尔簇上 Λ-模的模空间，《数学进展》318（2017），459–496页。[GKUW23] Andreas Gross、Inder Kaur、Martin Ulirsch 和 Annette Werner，阿贝尔簇上的半齐次向量丛：模空间及其热带化，2023年，arXiv:2312.12980。[GM83] Mark Goresky 和 R. MacPherson，交叉同调 II，《数学发明》72（1983），77–130页。[GM99] S. I. Gelfand 和 Yu. I. Manin，《同调代数》，Springer，柏林、纽约、海德堡，1999年（英文）。[Har17] Alicia Harper，栈与边界复形的因子化，2017年6月，arXiv:1706.07999 [math]。[Hau98] Tamás Hausel，Higgs 丛模空间的紧化，《纯粹与应用数学杂志》503（1998），169–192页。[Hit87] Nigel Hitchin，稳定丛与可积系统，《杜克数学杂志》54（1987），第1期，91–114页。[HLSY21] Andrew Harder、Zhiyuan Li、Junliang Shen 和 Qizheng Yin，拉格朗日纤维化的 $P = W$ 与超凯勒流形的退化，《数学论坛：西格玛》9（2021），论文编号e50，6页。[HMMS22] Tamas Hausel、Anton Mellit、Alexandre Minets 和 Olivier Schiffmann，通过 H_2的 $P = W$，arXiv:2209.05429[math]。[HRV08] Tamás Hausel 和 Fernando Rodriguez-Villegas，特征簇的混合 Hodge 多项式，《数学发明》174（2008），第3期，555–624页，附录由 Nicholas M. Katz 撰写。[KM98] János Kollár 和 Shigefumi Mori，《代数簇的双有理几何》，剑桥数学论丛第134卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年；C. H. Clemens 和 A. Corti 协助撰写，译自1998年日文原版。[KNPS15] Ludmil Katzarkov、Alexander Noll、Pranav Pandit 和 Carlos Simpson，映至建筑的调和映射与奇异摄动理论，《数学物理通讯》336（2015），第2期，853–903页。[KS06] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman，仿射结构与非阿基米德解析空间，载于《数学的统一性》，《数学进展丛书》第244卷，Birkhäuser Boston，波士顿，2006年，第321–385页。MR 2181810[KX16] János Kollár 和 Chenyang Xu，Calabi-Yau 对的对偶复形，《数学发明》205（2016），第3期，527–557页。[Lan04] Adrian Langer，正特征下的半稳定层，《数学年刊》（第2辑）159（2004），第1期，251–276页。[Mat59] Yozô Matsushima，复环面上的全纯丛，《名古屋数学杂志》14（1959），1–24页。[Max19] Laurenţiu G. Maxim，《交叉同调与反常层：及其在奇点中的应用》，数学研究生教材第281卷，沙姆：Springer，2019年。[Mig17] Luca Migliorini，曲线非阿贝尔 Hodge 理论的近期结果与猜想，《意大利数学联合会通报》10（2017），第3期，467–485页。[Miy73] Masayoshi Miyanishi，关于代数齐次向量丛的一些评述，载于《数论、代数几何与交换代数：纪念 Yasuo Akizuki》，纪伊国屋书店，东京，1973年，第71–93页。[MMS22] Mirko Mauri、Enrica Mazzon 和 Matthew Stevenson，关于几何 P = W 猜想，《精选数学》（新系列）28（2022），第3期，论文编号65，45页。[MN84] V. B. Mehta 和 M. V. Nori，齐性空间与阿贝尔簇上的半稳定层，《印度科学院数学科学学报》93（1984），第1期，1–12页。[MN15] Mircea Mustaţă 和 Johannes Nicaise，非阿基米德解析空间上的权函数与 Kontsevich-Soibelman 骨架，《代数几何》2（2015），第3期，365–404页。[Mor59] Akihiko Morimoto，关于具有全纯联络的复环面上全纯向量丛的分类，《名古屋数学杂志》15（1959），83–154页。[MS22] Davesh Maulik 和 Junliang Shen，GL_n的 $P = W$ 猜想，arXiv:2209.02568 [math]。[MSY23] Davesh Maulik、Junliang Shen 和 Qizheng Yin，perverse 滤过与傅里叶变换，2023年8月，arXiv:2308.13160 [math]。[Muk78] Shigeru Mukai，阿贝尔簇上的半齐次向量丛，《京都大学数学杂志》18（1978），第2期，239–272页。[NXY19] Johannes Nicaise、Chenyang Xu 和 Tony Yue Yu，非阿基米德 SYZ 纤维化，《组合数学》155（2019），第5期，953–972页。[Pay13] Sam Payne，边界复形与权重滤过，《密歇根数学杂志》62（2013），第2期，293–322页。

[PR01] A. Polishchuk 和 M. Rothstein, D-代数的傅里叶变换。I, 《杜克数学杂志》109（2001），第 1 期，123–146。[PS08] Chris A. M. Peters 和 Joseph H. M. Steenbrink, 《混合霍奇结构》, 《数学及其边界领域成果》第 3 辑, 《现代数学综述丛书》 [《数学及其边界领域成果》第 3 辑。《现代数学综述丛书》], 第 52 卷，施普林格出版社，柏林，2008。[Sim92] Carlos T. Simpson，Higgs 丛与局部系统, 《法国高等科学研究所数学出版物》（1992），第 75 期，5–95。[Sim94a] ———, 光滑射影簇基本群的表示模空间。I, 《法国高等科学研究所数学出版物》（1994），第 79 期，47–129。[Sim94b] ———, 光滑射影簇基本群的表示模空间 II, 《法国高等科学研究所数学出版物》80（1994），5–79（英文）。[Sim97] Carlos Simpson，非阿贝尔上同调上的 Hodge 滤子, 《代数几何——圣克鲁兹 1995》, 《纯数学专题讨论会论文集》, 第 62 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997，第 217–281 页。[Spa95] Edwin H. Spanier, 《代数拓扑》，施普林格出版社，纽约， [1995?], 1966 年原版的校正版重印本。[Ste06] D. A. Stepanov，关于奇点消解的对偶复形的一则注记, 《数学科学进展》61（2006），第 1 期（367），185–186。[THT07] K. Takeuchi、R. Hotta 和 T. Tanisaki, 《D-模、反常层与表示论》, 《数学进展》丛书，Birkhäuser Boston，2007。[Thu07] Amaury Thuillier，环面几何与非阿基米德解析几何：应用于某些形式概形的同伦类型, 《数学手稿》123（2007），第 4 期，381–451。[Zha17] Zili Zhang，纤维化曲面的 Hilbert概形的 perverse 滤过的可乘性, 《数学进展》312（2017），636–679。[Zha21] Zili Zhang，簇簇的 $P = W$ 恒等式, 《数学研究通讯》28（2021），第 3 期，925–944。

数学研究所，歌德大学法兰克福分校，60325 美因河畔法兰克福，德国电子邮箱：
bolognese@math.uni-frankfurt.de

数学研究所，歌德大学法兰克福分校，60325 美因河畔法兰克福，德国电子邮箱：
kuronya@math.uni-frankfurt.de

数学研究所，歌德大学法兰克福分校，60325 美因河畔法兰克福，德国电子邮箱：
ulirsch@math.uni-frankfurt.de