arXiv:2303.03741v1 [math.CO] 7 Mar 2023

覆盖类函数的完全对数凹性

Dorna Abdolazimi*和 Shayan Oveis Gharan†

华盛顿大学

2023年3月8日

摘要

我们引入了一个富有表现力的非负近似次模集合函数子类，称为强 2-覆盖函数，其中包括覆盖函数和（拟阵秩函数的）和；并证明，任意此类函数的生成多项式的齐次化都是完全对数凹的，从而朝着刻画（齐次）完全对数凹多项式的系数迈进一步。作为推论，我们得到任意此类函数的“水平集”构成一个超对数凹序列。

1 引言

若多项式 $p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$ 在 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 上非负，且 $\log p$ 在 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 上是凹函数，则称 $p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$ 在 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 上对数凹。注意，恒等于零的多项式是对数凹的。若对于任意 $k \geq 0$ 以及任意一组向量 $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，$D_{a_1}\ldots D_{a_k}p$ 在 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 上非负且对数凹，则称多项式 $p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$ 是完全对数凹/Lorentzian，其中对于向量 $a \in \mathbb{R}^n$，$D_a = \sum_i a_i \partial_{z_i}$ 是方向导数算子。完全对数凹多项式由 [AOV18] 引入，并在 [Ana+18a; BH20] 中得到拓展。若 p 的每个单项式都是平方自由的，即 $\mathrm{supp}(p) \subseteq \{0,1\}^n$，则称多项式 $p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$ 是多仿射的。若对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，多项式 $p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$ 满足 $p(\alpha z) = \alpha^d p(z)$，则称 p 是 d-齐次的。给定非负函数 $f: 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，若 f 的生成多项式，即

$$p_f(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{S\subseteq[n]} f(S)\cdot\prod_{i\in S} z_i$$

是完全对数凹的。注意，p_f是一个多仿射多项式。我们将 $\deg(f)$ 定义为多项式 p_f的次数。

完全对数凹多项式具有良好的性质，使其成为设计算法、分析算法以及研究拟阵等数学对象的有用工具。其中一项

*研究部分得到了美国国家科学基金会（NFS）资助项目 CCF-1813135 的支持。

†shayan@cs.washington.edu。研究得到了美国空军科学研究办公室资助项目 FA9550-20-1-0212、美国国家科学基金会（NSF）资助项目 CCF-1552097 和 CCF-1907845、美国海军研究办公室（ONR）YIP 项目 N00014-17-1-2429 以及斯隆奖学金的支持。

性质是，正如 [Gur10]，首次证明的那样，如果多项式 $\sum_{i=0}^{n} c_i y^{n-i} x^i$ 完全对数凹，那么 $c_0, \ldots, c_n$ 是一个超对数凹序列。这一性质被 [Ana+18b] 用于证明拟阵独立集的 Mason 的超对数凹猜想。另一项有用性质是，正如 [Ana+18a] 首先证明、随后由 [CGM19; Ana+21a]，改进的那样，给定一个 d-齐次对数凹集合函数，可以使用一种自然的随机游走，以较快地按照与 f (S) 成比例的概率对底集的子集 S 进行采样。注意，任何齐次对数凹集合函数，或等价地，任何多仿射齐次多项式，都是完全对数凹的 [Ana+18b]。

齐次完全对数凹多项式的一个有趣之处在于，可以很好地刻画哪些集合能够作为这些多项式的支撑集。给定多项式 $p = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha z^\alpha$，$p$ 的牛顿多面体定义为

$$\operatorname{supp}(p) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : c_\alpha \neq 0\}, \quad \operatorname{Newt}(p) = \operatorname{conv}(\operatorname{supp}(p)).$$

下面的定理给出了齐次完全对数凹多项式支撑集的一个很好的刻画。

定理 1.1 ([Ana+18b; BH20])。 给定齐次完全对数凹多项式 $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}[z_1, \ldots, z_n]$，$p$ 的牛顿多面体是一个广义置换多面体，即它是一个所有边都平行于 $\mathbf{1}_i - \mathbf{1}_j$（其中 $1 \leq i < j \leq j$）的多面体，并且该多面体中的每个整数点也属于支撑集(p)。反之，对于任意广义置换多面体，都存在一个齐次完全对数凹多项式，其支撑集恰好等于该多面体中的所有整数点。

上述定理的一个直接推论是，如果 p 是齐次多仿射且对数凹的，那么 $\operatorname{Newt}(p)$ 就是拟阵 M 的基多面体，其底集包含$[n]$（见 [Gel+87]）。既然上述定理刻画了齐次对数凹多项式的支撑集，一个自然的问题是：能否更精确地刻画齐次对数凹多项式的可能系数集合。虽然目前尚不知道这样的刻画，但已有许多结果给出了对数凹多项式系数的有趣必要条件。其中一个条件由以下引理推出。

引理 1.2 ([Ana+18b])。 具有非负系数的多项式 $h(y,z) = a + by + cz + dyz \in \mathbb{R}[y,z]$ 是对数凹的，当且仅当 $2bc \geq ad$。

推论 1.3 ([BH20])。 如果 p_f 对于非负集合函数 f 而言是对数凹的 $\in 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，那么 f 是近似对数次模的，即对于任意 $S \subset [n]$ 和 $i,j \in [n] \setminus S$，

$$2f(S \cup \{i\})f(S \cup \{i\}) \geq f(S)f(S \cup \{i,j\}).$$

证明。 为说明这一点，请注意，多重仿射对数凹多项式的集合在求导和特化下是封闭的（参见 命题2.4）。特别地，下列多项式是对数凹的：

$$\begin{aligned} q(z_i, z_j) &= \left((\prod_{k \in S} \partial_{z_k}) p_f(z_1, \ldots, z_n) \right)_{|\{z_\ell = 0\}_{\ell \in [n] \setminus (S \cup \{i,j\})}} \\ &= f(S) + f(S \cup \{i\}) z_i + f(S \cup \{j\}) z_j + f(S \cup \{i,j\}) z_i z_j. \end{aligned}$$

因此，根据引理 1.2，f 是近似次模的。 □

给定一个多项式 $p \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_n]$，我们将 p 的齐次化定义为 $\mathrm{Hom}(p, y) := \sum_{i=0}^{n} y^{n+1-i} p_i$，其中 p_i 是 p 的 i 次齐次部分，即 $p = p_0 + \cdots + p_d$，且 p_i 是一个 i 次齐次多项式。于是，推论 1.3 表明：给定一个非负集合函数 $f \in 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，若 $\mathrm{Hom}(p^f, y)$ 是完全对数凹的，则 f 是近似对数次模的。因此，为朝着对齐次完全对数凹多项式的系数进行分类迈出一步，一个自然的问题是：能否找到非负近似对数次模函数的一个大型子类，使得对于该子类中的每个 f，$\mathrm{Hom}(p^f, y)$ 都是完全对数凹的。注意，若 $\mathrm{Hom}(p^f, y)$ 是完全对数凹的，则 p^f 的所有齐次部分也都是对数凹的。具有众多应用的一类重要的非负对数次模函数，是非负单调次模函数类（见事实 2.9）。然而请注意，即使在这一子类中，也能找到并非对数凹的函数，因此它们的齐次化也并非对数凹（示例见推论 7.2）。

我们的贡献。 本文提出一个表达能力强的非负单调函数子类，称为强 2-覆盖函数，并证明 $\mathrm{Hom}(p^f, y)$ 是完全对数凹的。我们证明，强 2-覆盖函数包含若干重要的非负单调次模函数类，包括拟阵秩函数、覆盖函数，以及更一般的拟阵秩和函数；后者是秩函数的正线性组合，并包含机制设计文献中研究过的大量次模函数 [Cal+07; DRY11; Dug11; DV11]。由此，我们证明以下定理。

定理 1.4。 若 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是覆盖函数或拟阵秩函数之和，则序列 $f_0, f_1, \ldots, f_n$ 是超对数凹的，其中 $f_i = \sum_{S:|S|=i} f(S)$。

此外，我们引入了一类严格更大的非负次模函数，称为 2-覆盖函数；例如，它还包括任意拟阵的独立集的示性函数。我们证明，若 p^f 是 2-覆盖函数，则 p^f 的所有齐次部分都是对数凹的。因此，给定一个 2-覆盖函数，可以利用 [Ana+18a; Ana+21b; CGM19] 的结果，以与 $f(S)$ 成比例的概率快速采样 $[n]$ 的一个子集 S。

2 预备知识

在全文中，我们假设对于所处理的任意集合函数 $f^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，都有 $f(\emptyset) = 0$。我们用 $[n]$ 表示 $\{1, \ldots, n\}$。对于函数 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 以及整数 $0 \leq d \leq n$，定义 f 的 d 次齐次限制 $f^{(d)}\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f^{(d)}(S) = \begin{cases} f(S) & \text{if } |S| = d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

事实 2.1. 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, $-2xy \leq cx^2 + \frac{1}{c} y^2$.

2.1 线性代数

我们用 J_n 表示 $n \times n$ 全1矩阵。对于任意整数 $n > 0$ 及指标 i、j，定义 $E_{n,ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 $E_{n,ij}(i, j) = 1$，并令其他所有元素均为零。当维数可由上下文明确得知时，我们省略下标 n。

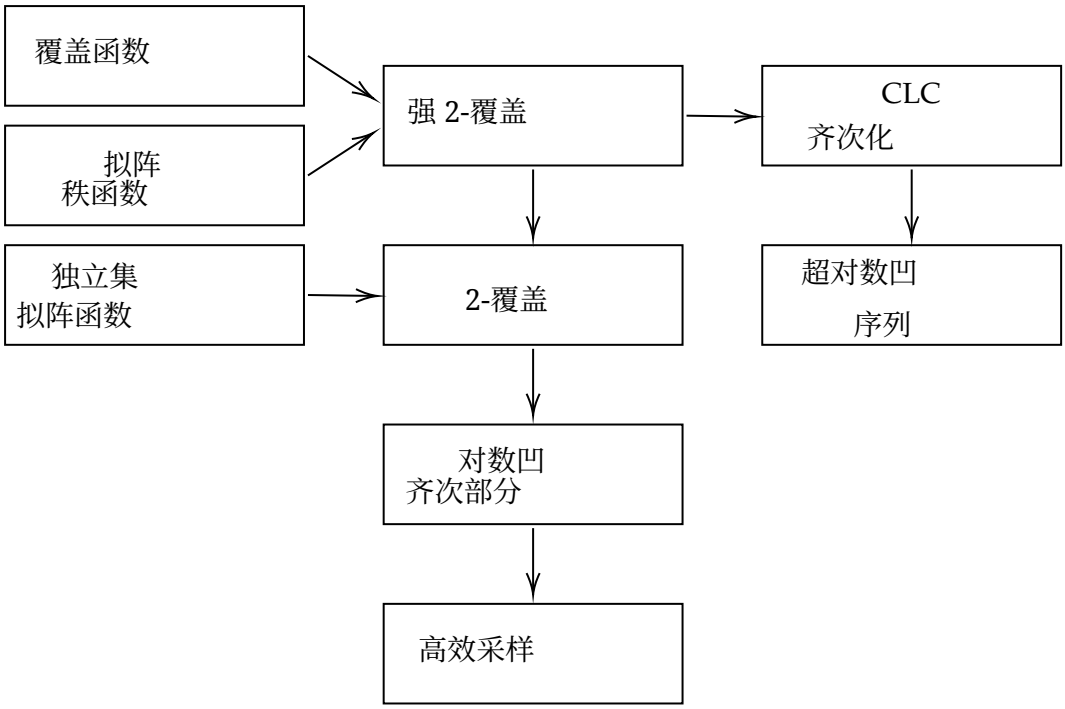


图1：结果总结

引理 2.2. 对于任意对角矩阵 $D \succeq 0$，$JD + DJ$ 至多有一个正特征值。

证明。 我们可以写成

$$JD + DJ = (D + I)J(D + I) - DJD - J.$$

现在，该结论可由以下事实得出：$(D + I)J(D + I)$、J 和 DJD 均为秩一半正定矩阵。 □

引理 2.3 ([Ana+19]). 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个对称矩阵。对于任意 $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$，若 A 至多有一个正特征值，则 $PAP^\top$ 至多有一个正特征值。

2.2 对数凹多项式

命题 2.4 ([BH20]; [Ana+18b]). 给定一个多项式 $p \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_n]$

i 如果 p 是（完全）对数凹的，那么对于任意 $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $and 1 \leq i \leq n$，$p_{|z_i=a}$ 也是（完全）对数凹的。

ii 如果 p 是（完全）对数凹的，则任意 $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $cp(\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n)$ 也（完全）对数凹。

iii 如果 p 是完全对数凹的，那么对于任意 $1 \leq i \leq n$，$\partial_{z_i} p$ 也是完全对数凹的。此外，如果 p 是多仿射且对数凹的，那么对于任意 $1 \leq i \leq n$，$\partial_{z_i} p$ 也是对数凹的。

证明。 条目 i 和 条目 ii 由定义可得。条目 iii 的第一部分也由对数凹的定义可得。不失一般性，我们证明第二部分，其中$\partial_{z_1} p$。令

$q_t(z_1,\ldots,z_n) = t^{-1}(tz_1,\ldots,z_n)$。根据条目 ii，对于任意 $t \geq 0$，q_t 都是对数凹的。注意，由于 p 是多仿射的，我们可以写成 $p = z_1 g + h$，其中 $g, h \in \mathbb{R}[z_2,\ldots,z_n]$，因此 $\partial_{z_1} p = g$。假设 g 不是对数凹的。因此，对某些 $0 \leq \lambda \leq 1$ 以及 $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，有 $g(\lambda a + (1-\lambda)b) > g(a)^{\lambda} + g(b)^{1-\lambda}$。注意，$q_t = z_1 g + t^{-1} h$。因此，当 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 足够大时，$q_t(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda q_t(a) + (1-\lambda) q_t(b)$，这与 q_t 是对数凹的事实矛盾。□

对于d-齐次多项式，以下引理给出了一个与对数凹等价的条件，在许多情况下更容易验证。

引理 2.5 ([AOV18])。设 $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}[x_1,\ldots,x_n]$ 是某个整数 $d \geq 0$对应的 d-齐次多项式。对于满足 $p(a) \neq 0$的 $\in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，$p$ 在 a 处对数凹，当且仅当 $\nabla^2 p(a)$ 至多有一个正特征值。

如果一个多项式 $p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$ 可以写成两个非零多项式f 和g 之和，且f 和g 的支撑集分别位于互不相交的变量集合上，则称其为可分解 。否则，称p为不可分解 。对于一个向量 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$和一个多项式$p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$，定义$\partial^\alpha p \in \mathbb{R}[\{z_i\}_{i\notin\tau}]$ 为

$$\partial^\alpha p := (\prod_{i=1}^{n} \partial_{z_i}^{\alpha_i}) p.$$

当 $p \in \mathbb{R}[z_1,\ldots,z_n]$ 是一个多仿射多项式时，我们可以用子集 $\tau \subseteq [n]$,即 $\partial^\tau p := (\prod_{i\in\tau} \partial_{z_i}) p$来表示偏导数。在这种情况下，我们有时写作 p_τ来表示 $\partial^\tau p$。以下由 [Ana+18b], 提出的定理，为证明一个 d-齐次多项式是完全对数凹的提供了非常有用的工具。

定理 2.6 ([Ana+18b])。设 $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}[x_1,\ldots,x_n]$ 是一个 d-齐次多项式。则，当且仅当以下条件成立时，p 是完全对数凹的：

i) 对于任意大小为 $\|\alpha\|_1 \leq d-2$ 的 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，$\partial^\alpha p$ 是不可分解的。

ii) 对于任意大小为 $\|\alpha\|_1 = d-2$ 的 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，二次多项式 $\partial^\alpha p$ 是对数凹的。

下述命题是对 Gurvits 提出的一条结论的略微修改 [Gur10]。为完整起见，我们为这个略作修改的版本给出一个简短证明。

命题 2.7。若 $p = \sum_{k=0}^{n} c_k y^{n-k+1} z^k \in \mathbb{R}[y, z]$ 是完全对数凹的，则序列 $c_0,, c_n$满足以下条件：对于任意 $1 < k < n$,

$$\left(\frac{c_k}{\binom{n+1}{k}}\right)^2 \geq \left(\frac{c_{k-1}}{\binom{n+1}{k-1}}\right)\left(\frac{c_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}\right).$$

我们称这样的序列为超对数凹序列。

证明。固定 $1 < k < n$。定义 $q(y,z) := \partial_y^{n-k}\partial_z^{k-1} p$。利用如下事实：对于任意 $0 \leq m \leq n+1$, $\partial_y^{n+1-m}\partial_z^m p = (n+1-m)!m!c_m = (n+1)!\, c_m \binom{n+1}{m}$，我们计算 $\nabla^2 q$ 如下

$$\nabla^2 q = \begin{bmatrix} \partial_y^2 q & \partial_y\partial_z q \\ \partial_y\partial_z q & \partial_z^2 q \end{bmatrix} = (n+1)! \begin{bmatrix} \frac{c_{k-1}}{\binom{n+1}{k-1}} & \frac{c_k}{\binom{n+1}{k}} \\ \frac{c_k}{\binom{n+1}{k-1}} & \frac{c_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \end{bmatrix}.$$

由于 p 是完全对数凹的，根据 命题 2.4， q 是对数凹的。根据 引理 2.5， 2×2矩阵 $\nabla^2 q$ 至多有一个正特征值。由于 $\nabla^2 q$ 的所有元素均为正，该矩阵恰好有一个正特征值（以及一个负特征值），因此其行列式非正。因此，我们有

$$\left(\frac{c_k}{\binom{n+1}{k}}\right)^2 - \left(\frac{c_{k-1}}{\binom{n+1}{k-1}}\right)\left(\frac{c_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}\right) \leq 0,$$

如所需。 □

注意，我们对超对数凹性的定义与更常见的定义略有不同。后者称，序列 $c_0, \ldots, c_n$ 满足以下条件时是超对数凹的： $\left(c_k \binom{n}{k}\right)^2 \geq \left(\frac{c_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\right)\left(\frac{c_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right)$.

对于任意集合函数$f: 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 以及 $\tau \subseteq [n]$, , 定义f_τ 为生成多项式为$(pf)_\tau$的（非负）函数，其中p_f是f的生成多项式。若f是d次齐次的（分别地，不可分解的），则称其为p^f 是d次齐次的（分别地，不可分解的）。

2.3 随机游走与完全对数凹集合函数

马尔可夫链的混合刻画了其收敛至平稳分布的速率μ。给定状态空间 Ω上随机游走的转移概率矩阵P ，我们将混合时间定义如下。对于初始状态$S_0 \in \Omega$ 和误差参数 $\epsilon > 0$，定义

$$t_{\text{mix}}(P, S_0, \epsilon) := \min\{t \geq 0 : \|P^t(S_0, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \leq \epsilon\},$$

其中， $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2}\sum_{S \in \Omega} |\mu(\text{S}) - \nu(\text{S})|$ 表示两个分布 μ、ν 在 Ω上的全变差距离。现在，我们定义测度 μ 的支撑集上的下上游走： $2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$如下。该游走的状态空间为所有满足 $|\text{S}| = \text{d}$ 且 $\mu(\text{S}) \neq 0$的 $\text{S} \subseteq [\text{n}]$ 。在每一步中，均匀随机地移除一个元素 $\text{i} \in \text{S}$，然后以概率 $\frac{\mu(\text{S}\setminus\{\text{i}\}\cup\{\text{j}\})}{\sum_{k \notin S\setminus\{i\}} \mu(\text{S}\setminus\{\text{i}\}\cup\{\text{k}\})}$转移到 $\text{j} \notin \text{S} \setminus \{\text{i}\}$ 。注意，该马尔可夫链是可逆的，其平稳分布为 μ，即 $\mu(\text{S})\text{P}(\text{S}, \text{T}) = \mu(\text{T})\text{P}(\text{T}, \text{S})$，其中 P 是下上游走的转移概率矩阵。 [Ana+18a] 最早证明，若 $\mu: 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是对数凹的，则下上游走的混合速度很快。之后， [CGM19; Ana+21a]给出了更紧的混合时间结果。

定理 2.8. *[Ana+21a]* 设 $\mu: 2^{[n]} \to \mathbb{R} \geqslant 0$是一个对数凹的 d-齐次集合函数。那么，从任意状态 S_0, 开始，该多项式支撑集上的下上游走的混合时间为

$$t_{\text{mix}}(P, S_0, \epsilon) \leq O(d \log(d/\epsilon)).$$

2.4 次模函数

A 函数 $2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 是次模的 , 当且仅当它具有边际收益递减性质，即。 e.

$$\forall S \subseteq T \subseteq [n], i \in [n] : f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) - f(T).$$

若对于所有$A \subseteq B$，均有$f(A) \leq f(B)$，则该函数是单调的。

事实 2.9。 任意非负单调次模函数 f: $2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 都是对数次模的，即$\log f$ 是次模函数。

证明。 固定集合 $S \subseteq T \subseteq [n]$。只需证明

$$\log \frac{f(S \cup \{i\})}{f(S)} = \log f(S \cup \{i\}) - \log f(S) \geq \log f(T \cup \{i\}) - \log f(T) = \log \frac{f(T \cup \{i\})}{f(T)}.$$

但容易验证，边际收益递减性质结合 f 非负且单调这一事实，可推出 $\frac{f(S\cup\{i\})}{f(S)} \geq \frac{f(T\cup\{i\})}{f(T)}$。由于 log 是递增函数，证明至此完成。 ——— ———

□

非负单调次模函数中的一个基本类别是覆盖函数。

定义 2.10 (覆盖函数)。 给定有限全集 U、集合 $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$，以及 U 上的测度 w，我们定义 f: $2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为

$$\forall T \subseteq [n] : f(T) = w\left(\bigcup_{i \in T} A_i\right).$$

线性集合函数是覆盖函数的一个子类。

定义 2.11 (线性集合函数)。 若 f: $2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是线性函数，则

$$\forall T \subseteq [n] : f(T) = \sum_{i \in T} f(\{i\}).$$

我们将使用以下命题来刻画覆盖集合函数。

命题 2.12。 *[CH12]* 函数 f: $2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是覆盖函数，当且仅当存在一个非负实数 x_T，对于任意 $T \subseteq [n]$,，使得对于任意 $S \subseteq [n]$，我们可以将 $f(S) = \sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} x_T$表示为。

许多有趣的非负单调次模函数类都是覆盖函数的特例。例如，给定一组随机变量 $\Omega = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$，其联合熵函数定义了 $2^{[n]}$ 上的一个覆盖函数。

命题 2.13。 给定随机变量 $\Omega = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$，令 H: $2^{\Omega} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为这些变量的联合熵函数。定义 f: $2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对于任意 $S \subseteq [n]$,，$f(S) = H(Y_S)$，其中 $Y_S := \{Y_i | i \in S\}$。那么，f 是一个覆盖函数。

该命题的证明见附录 A

覆盖函数本身是拟阵秩函数的特例，因为任意覆盖函数都可以表示为秩为 1 的拟阵的加权和，其中每个拟阵都对应于对单个元素的覆盖。

事实 2.14. 任何覆盖函数都可以写成拟阵秩函数的正系数和。

3 主要贡献

我们定义以下几类集合函数。

定义 3.1 (2-覆盖集合函数)。 集合函数 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 关于整数 $2 \leq d \leq \deg(f)$ 满足以下条件时，称其为 2-覆盖。

(i) 对任意 $\tau \subseteq [n]$ 满足 $|\tau| \leq d-2$，$(f^{(d)})_\tau$ 均不可分解。

(ii) 对所有 $\tau \subseteq [n]$ 满足 $|\tau| = d-2$，存在 $S \subseteq [n] \setminus \tau$[1]，一个覆盖函数 $g\colon 2^S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及一个线性集合函数 $\ell\colon 2^S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *(它们可能依赖于 τ)*，使得

- $\ell(\{i\}) \leq g(\{i\})$ 对所有 $i \in S$
- 对于任意 $T \subseteq [n] \setminus \tau$ 且其大小为 $|T| = 2$,

$$f_\tau(T) = \begin{cases} 0 & \text{if } T \not\subset S, \\ g(T) - \frac{1}{2}\ell(T), & \text{otherwise} \end{cases}$$

我们称 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是 *2*-覆盖的，如果它相对于任意 $2 \leq d \leq$ 次 (f) 都是 *2*-覆盖的。

定义 3.2 （强2-覆盖集合函数）。 若集合函数 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足以下条件，则称其为强 2-覆盖函数。对于所有满足 $\tau \subseteq [n]$ 且 $0 \leq |\tau| \leq n-2$ 的情形，都存在一个覆盖函数 $g\colon 2^{[n]\setminus\tau} \to \mathbb{R}$，使得 $(f_\tau)^{(1)} = g^{(1)} + f(\tau)$，且 $(f_\tau)^{(2)} = g^{(2)} + f(\tau)$。

以下命题概括了这些集合函数类的基本性质。这些引理的证明见第 4 节。

命题 3.3。 设 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是强 *2*-覆盖的，则 f 是单调且次模的。

命题 3.4。 任意强 *2*-覆盖函数 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 都是2-覆盖函数。

命题 3.5。 $[n]$ 上的强 *2*-覆盖函数构成一个凸锥，也就是说，如果 $f_1, f_2\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 是强 *2*-覆盖集合函数，那么对于任意 $\alpha \geq 0$, αf_1 和 $f_1 + f_2$，它们都是强 *2*-覆盖函数。

下面的命题给出了强 2-覆盖函数和 2-覆盖函数的一些例子。该命题的证明见第 4 节。

命题 3.6。 *(i)* 对任意拟阵 $M = ([n], \mathcal{I})$，其秩函数 $\mathrm{rk}_M\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 是一个强 *2*-覆盖集合函数。

(ii) 对任意拟阵 $M = ([n], \mathcal{I})$，其独立集的示性函数是2-覆盖函数。结合*定理 3.7*，这为拟阵的基生成多项式具有完全对数凹性提供了另一种证明，该性质已在*[AOV18]*中得到证明。

命题 3.6 和 命题 3.5 的一个推论是，拟阵秩和函数是强 2-覆盖。因此，根据 事实 2.14 和 命题 2.13，联合熵函数和覆盖函数都是强 2-覆盖。

我们的主要结果之一是以下定理。该定理的证明见第 5 节。

[1]直观地说，S 对应于f的“收缩”版本中的非环元素。

定理 3.7。 如果 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 关于某个 $2 \leq d \leq$ 度(f)是 2-覆盖，则 $f(d)$ 是完全对数凹的。

定理 3.7 的一个推论是，对于任意满足某个 $\mathrm{d} \leq$ 阶(f)条件的 2-覆盖函数$f\ 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，都可以在多项式时间内采样得到一个$S \subseteq [n]$ 集合，其大小为d，且采样概率与$f(S)$ 成正比。

推论 3.8。**给定集合函数 f**： $2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，它相对于某个 $2 \leq d \leq$阶(f)是 2-覆盖，令 μ_d为由 $f(d)$诱导的分布，即 $\mu_d(S) = f(S)\Sigma_{S\subset[n],\ |S|=d} f(S)$，其中 S 为任意~~大小为 d 的~~集合。对于任意 $\epsilon > 0$，从任意集合 S_0,出发，在大小为 d 的集合上进行上-下行走 P，即可生成一个来自$\hat{}\mu_d$ 的样本，使得 $\|\hat{}\mu_d - \mu_d\|_{\mathrm{TV}} \leq \epsilon$，所需时间为 $O(d\log(d/\epsilon))$，也就是说，

$$t_{mix}(P, S_0, \epsilon) \leq O(d\log(d/\epsilon)).$$

下面的定理是我们的另一项主要结果。该定理在第 6 节中证明。

定理 3.9。 设 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq}$ 是一个强 2-覆盖函数集合函数。那么，多项式 $q^f(y, x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=0}^{n} y^{n+1-i} \sum_{S\subseteq[n],|S|=i} f(S)x^S$ 是完全对数凹的。

下面的推论直接由命题 2.7得出。

推论 3.10。 设 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq}$ 是一个强 2-覆盖函数集合函数。设 c_k 是 $p^f(y, x) = \sum_{i=0}^{n}(\sum_{S\subseteq[n],|S|=i} f(S))y^{n+1-i}x^i$的第 k 个系数。那么，对于 $1 < k < n$，我们得到

$$\left(\frac{c_k}{\binom{n+1}{k}}\right)^2 \geq \left(\frac{c_{k-1}}{\binom{n+1}{k-1}}\right)\left(\frac{c_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}\right)$$

4 二重覆盖函数与强 2-覆盖函数的基本性质

命题 3.3 的证明。固定 $\mathrm{A} \subseteq [\mathrm{n}]$。我们证明，对于任意 $\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}$，都有 $\mathrm{f(A)} \leq \mathrm{f(B)}$，且对所有 $\mathrm{i} \in [\mathrm{n}]$,，都有 $\mathrm{f(A \cup \{i\}) - f(A) \geq f(B \cup \{i\}) - f(B)}$。我们对 $|\mathrm{B \setminus A}|$ 使用归纳法证明。当 $|\mathrm{B \setminus A}| = 0$ 时，这些结论显然成立。现在，设 $|\mathrm{B \setminus A}| = \ell$，其中某个 $1 \leq \ell \leq \mathrm{n} - |\mathrm{A}|$。取某个 $\mathrm{j} \in \mathrm{B \setminus A}$，并令 $\mathrm{C} := \mathrm{B \setminus \{j\}}$。根据归纳假设，$\mathrm{f(A) \leq f(C)}$。此外，根据定义，存在一个覆盖函数 $\mathrm{g}\colon 2^{[n]\setminus \mathrm{C}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $\mathrm{f(B) = f_C(\{j\}) = g(\{j\}) + f(C)}$。因此，$\mathrm{f(A) \leq f(C) \leq f(B)}$。为证明次模性条件，注意到根据归纳假设，对于所有 $\mathrm{i} \in [\mathrm{n}]$，我们有 $\mathrm{f(A \cup \{i\}) - f(A) \geq f(C \cup \{i\}) - f(C)}$。此外，根据 g 的次模性，我们有

$$f(C\cup\{i\}) - f(C) = g(\{i\}) \geq g(\{j,i\}) - g(\{j\}) = f(C\cup\{i,j\}) - f(C\cup\{j\}) = f(B\cup\{i\}) - f(B).$$

因此，$f(A \cup \{i\}) - f(A) \geq f(B \cup \{i\}) - f(B)$ 如所需。 □

命题 3.4 的证明。只需证明，对于任意 $2 \leq \mathrm{d} \leq \deg(\mathrm{f})$，以及任意满足 $|\tau| \leq \mathrm{d} - 2$ 的 $\tau \subseteq [\mathrm{n}]$，$(\mathrm{f(d)})_\tau$ 是不可分解的。若 $(\mathrm{f(d)})_\tau = 0$，则该结论显然成立。假设 $(\mathrm{f(d)})_\tau \neq 0$，并令 $\mathrm{p} := \mathrm{p\ f}^{(d)}$ 为 $\mathrm{f(d)}$ 的生成多项式。为导出矛盾，假设 $\mathrm{p}_\tau = \mathrm{h} + \mathrm{g}$，其中 h 和 g 均非零。令 h 和 g 分别支撑在

互不相交的变量集 S_h 和 S_g。根据 命题 3.3，我们知道 f 是单调的。因此，对于任意 $x_i \in S_h$，$x_j \in S_g$，必有

$$f(\tau \cup \{i\}) \le f(\tau \cup \{i,j\}) = f_\tau(\{i,j\}) = 0.$$

这意味着 $f_\tau(\{i\}) = f(\tau \cup \{i\}) = 0$。类似地，$f_\tau(\{j\}) = 0$。因此，$f_\tau$ 在所有大小为 1 的集合上均为 0。由 f 的单调性，我们得到 $f_\tau = 0$，这与我们的假设矛盾。 □

命题 3.5 的证明。固定一个满足 $\tau \in [n]$ 使得 $0 \le |\tau| \le n-2$ 的对象。设 $g_1, g_2 : 2^{[n]\setminus\tau} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 为覆盖函数，且满足 $((f_1)_\tau)^{(2)} = (g_1)^{(2)}$ 以及 $((f_2)_\tau)^{(2)} = (g_2)^{(2)}$。该结论由以下事实推出：若 g_1, g_2 是覆盖函数，则 αg 和 $g_1 + g_2$ 也都是覆盖函数。 □

命题 3.6 的证明。我们证明第（i）项。设 $f := \mathrm{rk}_M$。对于任意满足 $\tau \subseteq [n]$ 且 $|\tau| \le n-2$ 的对象，对所有大小为 1 或 2 的集合 $S \subseteq [n] \setminus \tau$，都有 $f_\tau(S) = \mathrm{rk}_M(\tau) + \mathrm{rk}_{M/\tau}(S)$。注意，$f(\tau) = \mathrm{rk}_M(\tau)$。为满足定义 3.2 的条件，只需证明存在一个覆盖函数 g，使其在大小为 1 和 2 的集合上与 $\mathrm{rk}_{M/\tau}(S)$ 取相同的值。利用拟阵分割性质，M/τ 可以被划分为集合 $S_0, S_1, \ldots, S_k$，使得以下性质成立。

$$\mathrm{rk}_{M/\tau}(\{x,y\}) = \begin{cases} 0 & \text{if } x,y \in S_0 \\ 1 & \text{if } x \in S_0, y \in S_i \quad \text{for some } 1 \le i \le k \\ 1 & \text{if } x,y \in S_i \quad \text{for some } 1 \le i \le k \\ 2 & \text{if } x \in S_i, y \in S_j \quad \text{for some } 1 \le i < j \le k \end{cases}$$

如下定义g。对于任意$i \in \{1,\ldots,k\}$以及$x \in S$ i x ∅ $\in [\ ] \setminus \tau$ $= |\cup_{x\in T}\ x|$ $\tau^{(1)} = {}^{0,}{}^{(1)} + {}^{x=}\tau$，令$A := \{i\}$；对于任意$x \in S$，令$A$。对于任意$T\,n$，定义$g(T) : A$。容易验证$(f)gf()$，且$(f_\tau)^{(2)} = g^{(2)} + f(\tau)$。

现在证明第（ii）项。设$M = ([n], I)$是一个秩为r的拟阵，并设$f : 2^{[n]} \to \mathbb{R}$是独立集的示性函数，即$f(S) = \mathbf{1}_I(S)$。我们要证明$f$是2-覆盖函数。由于拟阵具有交换性质，因此不可分解性成立。下面验证第二个条件。固定 $2 \le d \le r$ 和 $\tau \subseteq [n]$，其中 $|\tau| = d-2$。令S为M/τ中的非环元素集合。根据拟阵分割性质，S 可以分割为集合$S_1, \ldots, S_k$，使得

$$(f_\tau)^{(2)}(\{x,y\}) = \begin{cases} 0 & x,y \in S_i \quad \text{for some } 1 \le i \le k \\ 1 & x \in S_i, y \in S_j \quad \text{for some } 1 \le i < j \le k \end{cases}$$

对于任意 $1 \le i \le k$ 和 $x \in S_i$，令 $A_x := \{i\}$。定义覆盖函数 $g : 2^S \to [n]$ 为 $g(T) = |\cup_{x\in T} A_x|$，对每个 $T \subseteq S$ 均如此。此外，考虑线性集合函数 $\ell : 2^S \to [n]$，定义为 $\ell(\{i\}) = 1$，对所有 $i \in S$ 均成立。容易验证，对于任意大小为 2 的 $T \subseteq S$，都有 $f_\tau(T) = g(T) - \frac{\ell}{2}(T)$。 □

5 齐次部分的完全对数凹性

在本节中，我们证明：如果集合函数f相对于某个 $2 \le d \le \deg(f)$是 2-覆盖，那么$f^{(d)}$是对数凹的。

引理 5.1。 设 $g\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个覆盖函数，D 是一个对角矩阵，且对所有 $i \in [n]$，$D(i,i) = g(\{i\})$。那么，$R := (DJ + JD) - \nabla^2 p_{g^{(2)}} \succeq D$，其中 $p_{g^{(2)}}$ 是 $g^{(2)}$的生成多项式。

证明。 根据 命题 2.12，存在非负的 $\{x_T\}_{T\subseteq[m]}$ 使得对于任意 $i \neq j \in [n]$

$$\begin{aligned} g(\{i,j\}) &= \sum_{T:T\cap\{i,j\}\neq\emptyset} x_T = \sum_{T:i\in T} x_T + \sum_{T:j\in T} x_T - \sum_{T:i,j\in T} x_T \\ &= g(\{i\}) + g(\{j\}) - \sum_{T:i,j\in T} x_T. \end{aligned}$$

注意，对于 所有 $i \neq j \in [n], (DJ + JD)(i,j) = g(\{i\}) + g(\{j\})$。因此，我们可以将 R a 写为 s

$$R(i,j) = \begin{cases} 2g(\{i\}) & \text{if } i = j \\ \sum_{T:i,j\in T} x_T & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，对于任意 $T \subseteq [m]$，定义矩阵 B_T 为 $B_T(i,j) = 1$，若 $\{i,j\} \subseteq T$ 则取该值，否则为 0。我们可以将 R 改写如下

$$R = \sum_{T\subseteq[m]} x_T B_T + D.$$

对于任意 T，$B_T \succeq 0$。因此，由于 $x_T \geq 0$，我们有 $\sum_{T\subseteq[m]} x_T B_T \succeq 0$。这意味着 $R \succeq D$，证毕。 □

定理 3.7 的证明。令 p :=p f $^{(d)}$为 f (d) 的生成多项式。我们使用定理 2.6 来证明该定理。注意，不可分解条件根据定义成立。现在，我们使用引理 2.5 来证明定理 2.6 的第二个条件成立。固定 $\tau = \{i_1, \ldots, i_{d-2}\}$. 我们要证明 p_τ 是对数凹的。若 p_τ 恒等于零，则该条件显然成立。因此，假设 $p_\tau \neq 0$。根据引理 2.5，只需证明 $\nabla^2(p_\tau)$ 至多有一个正特征值。根据定义，存在集合 S $\subseteq$ [n] $\setminus \tau$、覆盖函数 g : $2^{[S]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$以及线性集合函数 $\ell\colon 2^S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对于任意大小为 2 的 T $\subseteq$ [n] $\setminus \tau$，若 T $\subseteq$S，则 f_τ(T) = g(T) − $^{\ell}$(T) 2；否则 f_τ(T) = 0。因此，只需证明 Q = ∇^2p —— $_{g^{(2)}} - \nabla^2 p_{\ell(2)}$ 2 至多有一个正特征值，其中 Q 是将 $\nabla^2(p_\tau)$ 限制到由 S 索引的行和列后得到的主子式。我们可以写成 Q = $\nabla^2 p_{g^{(2)}}$ ¯ (JC+CJ 2 ¯ C)，其中 C 是一个对角矩阵，且 C(i, i) = $\ell(\{i\})$。此外，令 D 为~~一个~~对角矩阵，对所有 i ∈ S，D(i, i) = g({i})。注意，根据引理 5.1，我们可以写成 $p_{g^{(2)}}$ + D $\preceq$ DJ + JD。因此

$$\begin{aligned} \nabla^2(p_\tau) &= \nabla^2 p_{g^{(2)}} + C - \frac{JC+CJ}{2} \preceq \nabla^2 p_{g^{(2)}} + D - \frac{JC+CJ}{2} \\ &\preceq DJ + JD - \frac{JC+CJ}{2} = (D - \frac{C}{2})J + J(D - \frac{C}{2}). \end{aligned}$$

因此，根据引理 2.2， $\nabla^2(p_\tau)$ 至多有一个正特征值。 □

6 强 2-覆盖函数生成多项式的齐次化的完全对数凹性

定理 *3.9*的证明。 我们使用定理 2.6。首先，我们证明q^f 是不可分解的。我们要证明，对于任意 $0 \leq k \leq n-1, 0 \leq \ell \leq n-1-k$ 以及任意 $\tau = \{i_1 \ldots, i_\ell\}$, $\partial^\tau \partial_y^k q^f(y,x)$ 都是

不可分解的（假设其非零）。注意，对于某个多项式 g(y, x)，我们可以写成 $\partial^\tau \partial_y^k q\, f(y, x) = yg(y, x) + \partial^\tau p\, f^{(n-k+1)}(x)$，其中 $p\, f^{(n-k+1)}$ 是 $f(n-k+1)$ 的生成多项式。根据命题 3.4，$\partial^\tau p\, f^{(n-k+1)}$ 是不可分解的。此外，yg(y, x) 也是不可分解的，因为 y 出现在其所有单项式中。只需证明存在一个变量，同时出现在 yg(y, x) 和 $\partial^\tau p\, f^{(n-k+1)}$ 的单项式中即可。如果 $\partial^\tau p\, f^{(n-k+1)}$ 恒等于零，则结论成立。否则，由于根据命题 3.3，f_τ 是单调且次模的，因此存在 j 使得 $f_\tau(\{j\}) > 0$。所以，$x_i y^{n-\ell-k}$ 是 yg(y, x) 中的一个单项式。由 f_τ 的单调性，对于任意大小为 $n \subseteq [n] \setminus \tau$、满足 $j \in S$ 的集合 $S - k - \ell + 1$，x^S 是 $\partial^\tau p\, f^{(n-k+1)}$ 中的一个单项式。至此，不可分解性的证明完成。现在，我们证明定理 2.6 的第二个条件成立。只需证明，对于任意 $0 \le k \le n - 1$ 和 $\tau = \{i_1 \dots, i_k\}$, $\partial^\tau \partial_y^{n-1-k} q^f(y, x)$ 是对数凹的。令 $p = \partial^\tau \partial_y^{n-1-k} q^f(y,x)\,(n-1-k)!$。我们可以写成

$$p = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2} f(\tau) y^2 + (n-k) \sum_{i \in [n]\setminus\tau} f(\tau \cup \{i\}) y x_i + \sum_{\{i,j\} \subseteq [n]\setminus\tau} f(\tau \cup \{i,j\}) x_i x_j.$$

不失一般性，假设 p 的支撑集为变量 $\{x_1, \dots, x_m\} \cup \{y\}$，其中 $m := n - k$。我们计算海森矩阵。为了将海森矩阵写成以$\{0, \dots, m\}$为索引的矩阵，假设 y 对应于 0，且对于所有 $1 \le i \le m$，x_i 对应于整数 i。按照此索引方式，我们可以将海森矩阵写为

$$H = \begin{bmatrix} (m+1)mf(\tau) & mf_\tau(\{1\}) & \dots & mf_\tau(\{m\}) \\ mf_\tau(\{1\}) & 0 & \dots & f_\tau(\{1,m\}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ mf_\tau(\{m\}) & f_\tau(\{m,1\}) & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

根据 引理 2.5，只需证明 H 至多有一个正特征值。根据 引理 2.3，这等价于证明下列矩阵至多有一个正特征值。

$$G = \begin{bmatrix} \frac{m+1}{m} f(\tau) & g(\{1\}) + f(\tau) & \dots & g(\{m\}) + f(\tau) \\ g(\{1\}) + f(\tau) & 0 & \dots & g(\{1,m\}) + f(\tau) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g(\{m\}) + f(\tau) & g(\{m,1\}) + f(\tau) & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & g(\{1\}) & \dots & g(\{m\}) \\ g(\{1\}) & 0 & \dots & g(\{1,m\}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g(\{m\}) & g(\{m,1\}) & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{m+1}{m} f(\tau) & f(\tau) & \dots & f(\tau) \\ f(\tau) & 0 & \dots & f(\tau) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f(\tau) & f(\tau) & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

其中，覆盖函数 g 满足 $f(S) = f(\tau) + g(S \setminus \tau)$，对满足 $|\tau| + 1 \le |S| \le |\tau| + 2$ 且 $\tau \subseteq S$ 的集合 S 均成立。在上面的式子中，令 H、K 分别表示第一个和第二个矩阵。令 $D \in R^{(m+1)\times(m+1)}$ 为一个对角矩阵，使得 $D(0, 0) = m^{2+1} m\, f(\tau)$，且对于$1 \le i \le m$，$D(i, i) = m^{2-1} m\, f(\tau)$。令 $D' \in R^{(m+1)\times(m+1)}$ 为一个对角矩阵，其中 $D'(0, 0) = 0$，且对于$1 \le i \le m$，$D'(i, i) = g(\{i\})$。注意，根据引理 2.2，$(D + D')J + J(D + D')$恰有一个正特征值。因此，要证明 $H + K$ 至多有一个正特征值，只需证明 $(D + D')J + J(D + D') - H - K \succeq 0$。注意，$D'J + JD' - H \succeq 0$。为此，首先注意到

$D'J + JD' - H$ 的第一行和第一列均为零。此外，可以验证，去掉 K 的第一行和第一列后，剩余矩阵等于 $g^{(2)}$ 的生成多项式的海森矩阵。因此，该结论由引理 5.1 得出。因此，只需证明 $DJ + JD - K \succeq 0$。同样容易验证，$DJ + JD - K$ 的第一行和第一列均为零。去掉 $DJ + JD - K$ 的第一行和第一列后，剩余矩阵等于 $f(\tau)(I_m - \frac{1}{m} J_m)$。现在注意到 $J_m \preceq mI_m$，因为 m 是 J_m 的最大特征值。因此，$DJ + JD - K \succeq 0$，证毕。

□

7 否定结果

我们证明，对于一类具有丰富表达能力的非负单调次模函数，其d阶齐次限制的生成多项式对于任意$d \geq 1$都是完全对数凹的。我们证明，这一结论并不适用于所有非负单调次模函数。

命题 7.1. 存在整数 $n \geq d \geq 1$ 以及一个非负单调次模函数 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $f^{(d)}$不是对数凹的。

证明。令 $[12]$ 为底集。此外，定义 $w_0 = \cdots = w_5 = 1$、$w_6 = \cdots = w_9 = 2$和 $w_{10} = w_{11} = 0$。现在，取如下集合函数 $f\colon 2^{[12]} \to \mathbb{R}$，令 $f(S) = \min\{\sum_{i \in S} w_i, 2\}$。注意，该函数是预算可加函数，且非负、单调并且次模。但可以验证，多项式 $p(x) = \sum_{\{i,j\} \subseteq [12]} f(\{i,j\}) x_i x^j$ 不是对数凹的，因为$\nabla^2 p(x)$有两个正特征值。

□

推论 7.2。 存在单调次模函数 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 f 不是对数凹的。

证明。 这是因为，如果函数 f 是对数凹的，那么它的所有齐次部分也都是对数凹的。

□

Gelfand、Goresky、MacPherson 和 Serganova 证明，任意齐次多仿射对数凹多项式的支撑集都对应于某个拟阵的基 [Gel+87]。但对于这些多项式的系数，人们所知甚少。一个自然的问题是：如果系数来自一个在非空集合上取非负值的单调次模函数，情况会如何？另一个值得考虑的自然问题是：这些多项式的系数是否来自 2-覆盖函数？下面的命题给出了这两种说法的反例。

命题 7.3。 存在整数 $n \geq d \geq 1$ 以及一个 d-齐次多仿射对数凹多项式 $p \in R_{\geq 0}[x_1, \ldots, x_n]$，使得对于任意 $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，若 $f^{(d)}$ 的生成多项式等于 p，则 f 既不是在非空集合上取非负值的单调次模函数，也不是 2-覆盖函数。

证明。令 $p(x_1, x_2, x_3) := 3x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$。我们有

$$\nabla^2 p = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

容易验证， $\nabla^2 p$ 恰有 1 个正特征值。因此，利用引理 2.5，p 是对数凹的。任取一个 $f\colon 2^{[3]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $f(2)$ 的生成多项式等于 p。为证明该命题的第一部分，我们假设 f 是一个在非空集合上非负的单调函数，并证明 f 不是次模的。由单调性，有 $f(\{1,2,3\}) \geq f(\{1,2\})$。因此

$$f(\{1,2,3\}) - f(\{1,3\}) \geq f(\{1,2\}) - f(\{1,3\}) = 2.$$

此外，$f(\{2,3\}) - f(\{3\}) \leq f(\{2,3\}) \leq 1$。因此，$f$ 不是次模的。

为证明命题的第二部分，反设 f 是一个2-覆盖函数。由于 f 在所有大小为2的集合上都非零，因此必有 $S = \{1,2,3\}$ (对于 $\tau = \emptyset$)。于是，存在一个覆盖函数 $g\colon 2^{[3]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和一个线性集合函数 $\ell\colon 2^{[3]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $f(2) = (g - \frac{\ell}{2})^{(2)}$，并且 $\ell(\{i\}) \leq g(\{i\})$ 对 $i \in \{1,2,3\}$ 成立。我们将证明 g 不是次模的，因此它不可能是覆盖函数。因此

$$g(\{1,2\}) - g(\{1,3\}) = f(\{1,2\}) - f(\{1,3\}) + \frac{\ell(\{2\}) - \ell(\{3\})}{2} = 2 + \frac{\ell(\{2\}) - \ell(\{3\})}{2}.$$

这意味着 $g(\{1,2,3\}) - g(\{1,3\}) \geq 2 + {}^{\ell(\{2\}) - \ell(\{3\})}2$。此外，

$$\begin{aligned} g(\{2,3\}) - g(\{3\}) &= f(\{2,3\}) + \frac{\ell(\{2\}) + \ell(\{3\})}{2} - g(\{3\}) \\ &= 1 - g(\{3\}) + \frac{\ell(\{2\}) + \ell(\{3\})}{2} \underset{\ell(\{3\}) \leq g(\{3\})}{\leq} 1 + \frac{\ell(\{2\}) - \ell(\{3\})}{2}. \end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到 $g(\{1,2,3\}) - g(\{1,3\}) \geq g(\{2,3\}) - g(\{3\})$，这与 g 的次模性矛盾。

□

参考文献

[Ana+18a] Nima Anari 等。“对数凹多项式 II：高维游走与用于计数拟阵基的全多项式随机近似方案”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1811.01816* (2018)。[Ana+18b] Nima Anari 等。“对数凹多项式 III：拟阵独立集的 Mason 超对数凹猜想”。1811.01600。2018。[Ana+19] Nima Anari 等。“对数凹多项式 II：高维游走与用于计数拟阵基的全多项式随机近似方案”。载于：计算理论研讨会。美国纽约州纽约：美国计算机协会，2019，第 1–12 页。ISBN：9781450367059。[Ana+21a] Nima Anari 等。“对数凹多项式 IV：近似交换、紧混合时间与近最优森林采样”。载于：第 *53* 届美国计算机协会计算理论特别兴趣小组年度研讨会论文集。美国纽约州纽约：美国计算机协会，2021，第 408–420 页。ISBN：9781450380539。[Ana+21b] Nima Anari 等。“对数凹多项式 IV：近似交换、紧混合时间与近最优森林采样”。载于：计算理论研讨会。编者：Samir Khuller 和 Virginia Vassilevska Williams。美国计算机协会，2021，第 408–420 页。

[AOV18] Nima Anari、Shayan Oveis Gharan 和 Cynthia Vinzant。“对数凹多项式 I：熵与用于计数拟阵基的确定性近似算法”。载于：*FOCS*。编者：Mikkel Thorup。IEEE计算机学会，2018，第 35–46 页。[BH20] Petter Brändén 和 June Huh。“洛伦兹多项式”。载于：《数学年刊》192.3 (2020)，第 821–891 页。[Cal+07] Gruia Calinescu 等。“拟阵约束下的次模集合函数最大化（扩展摘要）”。载于：整数规划与组合优化。编者：Matteo Fischetti 和 David P. Williamson。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，2007，第 182–196 页。ISBN：978-3-540-72792-7。[CGM19] Mary Cryan、Heng Guo 和 Giorgos Mousa。“强对数凹分布的修正对数 Sobolev 不等式”。载于：*2019*年*IEEE*第*60*届计算机科学基础年会（*FOCS*）。2019，第 1358–1370 页。[CH12] Deeparnab Chakrabarty 和 Zhiyi Huang。“测试覆盖函数”。载于：自动机、语言与编程。编者：Artur Czumaj 等。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，2012，第 170–181 页。[DRY11] Shaddin Dughmi、Tim Roughgarden 和 Qiqi Yan。“从凸优化到随机机制：迈向最优组合拍卖”。载于：第*43*届*ACM*计算理论年会论文集。STOC ’11。美国加利福尼亚州圣何塞：美国计算机协会，2011，第 149–158 页。ISBN：9781450306911。[Dug11] Shaddin Dughmi。“通过凸优化实现组合公共项目的真实随机机制”。载于：第*12*届*ACM*电子商务会议论文集。EC ’11。美国加利福尼亚州圣何塞：美国计算机协会，2011，第 263–272 页。ISBN：9781450302616。[DV11] Shaddin Dughmi 和 Jan Vondrák。“组合拍卖随机机制的局限性”。载于：*2011*年*IEEE*第*52*届计算机科学基础年会。2011，第 502–511 页。[Gel+87] I.M Gelfand 等。“组合几何、凸多面体与舒伯特胞腔”。载于：《数学进展》63.3 (1987)，第 301–316 页。ISSN：0001-8708。[Gur10] Leonid Gurvits。“关于多元牛顿型不等式”。载于：组合数学进展。编者：Ilias S. Kotsireas 和 Eugene V. Zima。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，2010，第 61–78 页。ISBN：978-3-642-03562-3。

作为覆盖函数的熵

命题 2.13 的证明。我们使用命题 2.12。对于任意 $T \subseteq [n],$，定义 $x_T := I(Y_T|Y_{\bar{T}})$，其中 $Y_{\bar{T}} = [n] \setminus T$，I 为多元互信息。我们用归纳法证明，对于任意随机变量集合 Z，$H(Y_S|Z) = \sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} I(Y_T|Y_{\bar{T}}, Z)$。由此可知，对于任意 $S \subseteq [n], f(S) = H(Y_S) = \sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} x_T$，从而完成证明。当 $n = 1$ 时，该结论显然成立。假设当 $n = k - 1$ 时该结论成立，我们来证明它对 $n = k$ 也成立。首先，令

$S = \{i\}$。我们有

$$\sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} I(Y_T \mid Y_{\bar{T}}, Z) = \sum_{T:i\in T} I(Y_T \mid Y_{\bar{T}}, Z) = (\sum_{T:i\in T, T\neq\{i\}} I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}}, Z) - I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}\cup\{i\}}), Z) + H(Y_i|Y_{\bar{i}}, Z),$$

其中我们用到了这样一个事实：对于任意一组随机变量 $X_1, \ldots, X_k, k \geq 2$，以及任意一组随机变量 Z,

$$I(X_1, \ldots, X_k|Z) := I(X_1, \ldots, X_{k-1}|Z) - I(X_1, \ldots, X_{k-1}|X_k, Z).$$

利用归纳假设

$$\begin{aligned}\sum_{T:i\in T, T\neq\{i\}} I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}}, Z) - I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}\cup\{i\}}, Z) &= \sum_{T\subseteq[n]\setminus\{i\}:T\cap([n]\setminus\{i\})\neq\emptyset} I(Y_T|Y_{[n]\setminus(T\cup\{i\})}, Z) - I(Y_T|Y_{[n]\setminus T}|Z) \\ &= H(Y_{[n]\setminus\{i\}}|Z) - H(Y_{[n]\setminus\{i\}}|Y_i, Z) \\ &= H(Y_{[n]\setminus\{i\}}|Z) - H(Y_{[n]}|Z) + H(Y_i|Z) \\ &= -H(Y_i|Y_{\bar{i}}, Z) + H(Y_i|Z)\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} I(Y_T \mid Y_{\bar{T}}, Z) = H(Y_i|Z).$$

现在，假设对于任意满足 $|S| < l$ 的 S ，该等式均成立。我们要证明该等式对 $|S| = l$ 也成立。选取$i \in S$。我们有

$$\sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} I(Y_T \mid Y_{\bar{T}}, Z) = \sum_{T:T\cap(S\setminus\{i\})\neq\emptyset} I(Y_T|Y_{\bar{T}}, Z) + \sum_{T\cap S=\{i\}} I(Y_T|Y_{\bar{T}}, Z).$$

注意，根据第二个归纳假设，$\sum_{T:T\cap(S\setminus\{i\})\neq\emptyset} I(Y_T|Y_{\bar{T}}, Z) = H(Y_{S\setminus\{i\}}|Z)$。此外,

$$\sum_{T\cap S=\{i\}} I(Y_T|Y_{\bar{T}}, Z) = (\sum_{T\cap S=\{i\}, T\neq\{i\}} I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}}, Z) - I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}\cup\{i\}}, Z)) + H(Y_i|Y_{\bar{i}}).$$

与之前的做法类似，利用第一个归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{T\cap S=\{i\}, T\neq\{i\}} I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}}, Z) - I(Y_{T\setminus\{i\}}|Y_{\bar{T}\cup\{i\}}, Z) &= H(Y_{[n]\setminus S} \mid Y_{S\setminus\{i\}}, Z) - H(Y_{[n]\setminus S}|Y_S, Z) \\ &= H(Y_{[n]\setminus S} \mid Y_{S\setminus\{i\}}, Z) \\ &\quad - H(Y_{([n]\setminus S)\cup\{i\}} \mid Y_{S\setminus\{i\}}, Z) + H(Y_i \mid Y_{S\setminus\{i\}}, Z) \\ &= -H(Y_i|Y_{\bar{i}}, Z) + H(Y_i \mid Y_{S\setminus\{i\}}, Z).\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{T\cap S=\{i\}} I(Y_T|Y_{\bar{T}}, Z) = H(Y_i \mid Y_{S\setminus\{i\}}, Z).$$

So

$$\sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} I(Y_T \mid Y_{\bar{T}}, Z) = H(Y_i \mid Y_{S\setminus\{i\}}, Z) + H(Y_{S\setminus\{i\}}, Z) = H(Y_S|Z),$$

正如所需。 □