arXiv:2303.03768v1 [math.NT] 7 Mar 2023

带乘性系数的 Weyl 和与联合均匀分布

MATTEO BORDIGNON、CYNTHIA BORTOLOTTO 和 BRYCE KERR

Abstract. 本文将 Montgomery和Vaughan 关于带乘法系数的指数和的一项结果推广到 Weyl 和的情形。作为应用，我们建立了多项式同余方程的根与多项式值的联合均匀分布结果，并获得了关于混合特征和的一些新结果。

Contents

1. 引言 2 2. 主要结果 4 3. 应用 5 3.1. 联合均匀分布 5 3.2. 混合特征和 5 3.3. 致谢 7 3.4. 资助 7 4. 预备结果 7 4.1. 化归为双线性型 7 5. 双线性型求和 13 5.1. Vinogradov 均值定理 13 5.2. 双线性型的界 15 6. 定理1的证明 21 7. 推论1的证明 23 8. 短混合特征和 25 9. 关于多项式同余的根与多项式值之间的相关性 26 9.1. 首先的化归 28 9.2. 分解 $D_r(s,\chi)$ 31 9.3. $s=1$ 35 附近阿廷 L 函数的界 9.4. 完成证明 36 10. 定理1的尖锐性 38 参考文献 39

1. Introduction

设 $A \geqslant 1$ 和 f 是满足以下条件的乘法函数：对于任意素数 p，有 $|f(p)| \leqslant A$；对于所有自然数 N，有 $\sum_{n \leq N} |f(n)|^2 \leqslant A^2 N$。令 $\alpha \in \mathbb{R}$，置

$$S(\alpha) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f(n) e(\alpha n),$$

其中 $e(x) = \exp(2\pi i x)$。

Daboussi 最早研究了这些和[11]，，他证明，若 $|\alpha - a/q| \leqslant 1/q^2$、$(a,q) = 1$ 且 $3 \leqslant q \leqslant (N/\log N)^{1/2}$，则

$$S(\alpha) \ll \frac{N}{(\log\log q)^{\frac{1}{2}}},$$

且隐含常数仅依赖于 A。

Montgomery和Vaughan [32, 推论 1] 改进了这一结果，他们证明，假设 $|\alpha - a/q| \leqslant 1/q^2$、$(a,q) = 1$ 且$2 \leqslant R \leqslant q \leqslant N/R$，则有

$$S(\alpha) \ll \frac{N}{\log N} + \frac{N(\log R)^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}}. \tag{1}$$

请参阅 [32, 第 7] 节，以证明项$N/\log N$是最优的。

关于 R 在（1）中的最优依赖关系，这是一个开放问题，已经有许多相关研究，参见例如 [1, 4]，，预计估计式（1）可以改进为

$$S(\alpha) \ll \frac{N}{\log N} + \frac{N}{R^{\frac{1}{2}}}. \tag{2}$$

最近，Bret´eche 和 Granville [5] 详细研究了小弧上的和$S(\alpha)$。他们的估计表明了如下猜想（见 [5, 公式 1.4]）

$$S(\alpha) \ll \frac{N}{\log N} + \frac{N}{q^{\frac{1}{2}}(1 + |\beta| x)}, \quad \alpha = \frac{a}{q} + \beta, \quad (a,q) = 1.$$

我们还注意到，[5] 包含一些关于圆法类问题的精彩应用。

估计式（1）在狄利克雷 L 函数研究中有重要应用。例如，Montgomery和Vaughan [32] 展示了如何将其与广义黎曼猜想（GRH）结合，从而在点 $s = 1$ 处得到狄利克雷 L 函数的尖锐上界。此外，还可以将（1）与 Burgess 界方面的进展结合起来

从而得到 Montgomery和Vaughan 结果的无条件变体；关于这方面的进展，请参阅 [14, 18, 19] 。

自Montgomery和Vaughan的工作以来，带有乘法系数的指数和已出现在许多不同的背景中，并且人们发展出了各种技术，以便将其化归为双线性型上的指数和。一些例子包括Karatsuba关于短Kloosterman和的工作[24], ，该工作已由Korolev加以改进，参见例如 [26]。Bourgain、Sarnak和Ziegler[2] 建立了Vinogradov双线性和不等式的一个有限版本。Gong和Jia [15]研究了带有乘法系数的平移特征和，而Korolev和Shparlinski [27] 则处理了带有乘法系数的迹函数求和。

在本文中，我们重新审视Montgomery和Vaughan的方法，并将其推广到如下形式的和：

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)e(g(n)), \tag{3}$$

其中， g 是一个实系数多项式，而 f 是满足以下条件的乘法函数：

$$f(p) = O(1), \quad \sum_{n\leqslant N} |f(n)| = O(N), \quad \sum_{n\leqslant N} |f(n)|^2 = O(N(\log N)^A),$$

对任意 $A \geq 0$。

Jiang、L¨u 和 Wang [23], 此前研究过这类问题，并证明可以将对 ℓ_2 范数的假设

$$\sum_{n\leqslant N} |f(n)|^2 \ll N,$$

替换为如下形式的假设

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p \text{ prime}}} |f(p)||f(p+h)| \ll \frac{h}{\phi(h)}\frac{N}{(\log N)^2}.$$

在缺乏 Ramanujan 猜想方面进展的情况下，这种放宽对于 GL_m L-函数而言意义重大。

Matthiesen [29] 研究了如下形式的和（3），其涉及多项式nil序列，对 f 的条件略弱于Montgomery和Vaughan的条件。后来，这些结果被应用于乘法函数的线性相关性[30]。我们还提及近期的工作 [28]，该工作研究了短区间上取平均的nil序列上的乘法函数指数和。

2. Main results

我们的第一个结果如下。

定理1. 设 $A > 0$ 和 $c > 0$ 是实数，且 f 是满足以下条件的乘法函数

$$|f(p)| \leqslant C \quad \textit{for each prime } p, \tag{4}$$

$$\sum_{n \leqslant N} |f(n)| = O(N), \tag{5}$$

$$\sum_{n \leqslant N} |f(n)|^2 = O(N(\log N)^A). \tag{6}$$

设 F 是一个次数为 $d \geqslant 1$ 、具有实系数的多项式，其表达式为

$$F(x) = \alpha_d x^d + \cdots + \alpha_1 x.$$

设 $R \geqslant 1$，并假设存在整数 l、a、q，满足 $1 \leqslant q \leqslant R$ 和 $1 \leqslant \ell \leqslant d$、$(a$、$q) = 1$，且

$$\left|\alpha_\ell - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{Rq},$$

记 $C = \frac{A}{2r}$。那么对于任意 $r > d$（$d + 1$），有

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f(n)e(F(n)) \ll N\left(\frac{1}{(\log N)^{1-C}} + (\log N)^C\left(\frac{q}{N^\ell} + \frac{1}{q}\right)^{1/4r^2}\right) + (NR^{1/\ell})^{1/2},$$

其中隐含常数依赖于 A 和 r。特别地，如果我们假设

$$(\log N)^{4r^2} \leqslant q \leqslant \frac{N^\ell}{(\log N)^{4r^2}},$$

then

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f(n)e(F(n)) \ll \frac{N}{(\log N)^{1-C}}. \tag{7}$$

为展示上述估计的精确性，在第 10节中，我们证明：对于任意多项式 F 以及任意 N，都存在 $f = f_{F,\ N}$使得

$$\left|\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f(n)e(F(n))\right| \geqslant \frac{1}{10}\frac{N}{\log N}.$$

定理 1 的证明遵循 Montgomery和Vaughan[32] 的思路，首先基于 Möbius 反演对乘性函数进行组合分解¨，并将问题化为估计多项式上的双线性型，其求和范围限制在双曲线下方的点上。随后，我们采用 Montgomery和Vaughan 将抛物线划分为不相交矩形的方法，并对这些矩形应用与 Vinogradov 均值定理相关的技术。我们需要建立 Vinogradov 均值定理的一个版本，使其适用于大平移区间中的素数；这就是引理5。需要指出的是，我们引入一般条件（6），目的是在定理 1 的证明中使用定理 2。

3. Applications

3.1. 联合均匀分布。 作为定理 1的一个应用，我们证明一个联合分布结果。在本节中，我们始终设 $p \in \mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 $e \geqslant 2$，并考虑比值v/n，其中 v 是多项式 p 模 n

$$p(v) \equiv 0 \bmod n.$$

考虑这些比值组成的序列 $(g_k)_{k\geqslant 1}$，使相应的分母按升序排列。Hooley 在 [22, 定理2],中证明，该序列在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$中均匀分布。

现在令 $F(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_d x^d \in \mathbb{R}[x]$，其中 $d \geqslant 1$ 且具有一个无理系数，并定义

$$A(F,p)_k = (g_k, F(k'))_{k\geqslant 1},$$

其中 g_k 如上所述，对于 $g_k = v/n$, $p(v) \equiv 0 \bmod n$，我们取 $k' = n$。我们证明以下结果

定理 2. 序列 $(A(F,p)_k)_{k\geqslant 1}$ 在 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$中均匀分布。

这表明序列 $(F(n))_{n\in\geqslant 1}$ 在某种程度上与序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$不相关

3.2. 混合特征和。 接下来我们说明定理 1与 Enflo [12], Chang [7] 以及 Heath-Brown 和 Pierce [17]所研究的和有关 1意味着，大的指数和必定对应于拟特征积性函数。

推论1. 在定理1的记号和条件下，设 $r \geqslant d(d+1)$ 并假设

$$\left| \sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(n)e(F(n)) \right| \gg \frac{N}{(\log N)^{1-A/2r}}.$$

存在一个整数

$$k \leqslant (\log N)^{d(4r^2+4rA)},$$

以及一个乘法特征 $\psi \bmod k$，使得

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(n)e(F(n)) \ll (\log N)^{4r^2+4rA} \max_{u\leqslant N}\left|\sum_{n\leqslant u}\psi(n)f(n)\right|.$$

推论1 意味着，可通过化归到纯特征和来界定由多项式混合的特征和；更精确的结果请参见第 8 节。

推论 2. 设 $F(n)$ 是一个次数为 d、具有实系数的多项式，且 χ 是模 q 的本原特征。假设 δ、ε 满足

$$\max_{\substack{k\ll(\log q)^{100d^3}\\ \psi \bmod k\\ u\leqslant N}}\left|\sum_{n\leqslant u}\psi(n)\chi(n)\right| \leqslant Nq^{-\varepsilon} \quad \textit{provided} \quad N \geqslant q^{\delta}.$$

那么我们有

$$\sum_{n\leqslant N}\chi(n)e(F(n)) \ll \frac{N}{(\log N)^{1-1/d(d+1)}}. \tag{8}$$

特别地，估计式（8）在以下条件下成立：

- 对于任意小的 δ，假设广义黎曼猜想

•对于 $\delta = 1/3$ 及任意整数 q，此结论可由 Burgess 界推出，例见 [16]。

设 $\varepsilon > 0$ 足够小。Enflo [12] 此前已证明

$$\sum_{n\leqslant N}\chi(n)e(F(n)) \ll N^{1-\delta}, \quad \text{provided} \quad N \geqslant q^{1/4+\varepsilon},$$

关于 Enflo 结果的定量改进，请读者参阅 [7, 17] 。Chang [8] 已证明

$$\sum_{n\leqslant N}\chi(n)e(F(n)) \ll N^{1-\delta}, \quad \text{provided} \quad N \geqslant q^{\varepsilon},$$

前提是 q 足够光滑/强大。

推论 2 给出了一些可以对混合特征和进行非平凡估计的新例子。有关更多细节，请参阅第 8 节。

3.3. 致谢。我们感谢 Emmanuel Kowal- ski 提出的宝贵意见和建议。我们还要感谢 Alberto Perelli 的一次有益交谈及其宝贵意见。

3.4. 资助。Matteo Bordignon 的部分研究工作得到了 OP RDE 项目 No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_053/0016976查理大学研究、技术和行政人员国际流动项目的资助，部分得到了澳大利亚数学会 Lift-off Fello wship 的资助，另有部分工作是在作者就读于新南威尔士大学堪培拉分校攻读博士期间完成的。

第三位作者谨此感谢马克斯·普朗克数学研究所和澳大利亚研究理事会（DE220100859）的支持。

4. Preliminary results

4.1. 化为双线性型。 我们采用与 [32, 第 2], 节类似的方法，将定理 1 的证明归结为对双曲线下的双线性型进行估计。

引理 1. 设 f 是满足定理 *1*条件的积性函数， g 是任意实值函数，并设 $\epsilon > 0$。那么，对任意整数 N，有

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(n)e(g(n))\right| \ll \frac{N}{\log N^{1-\epsilon}} + \frac{1}{\log N}\left|\sum_{1\leqslant np\leqslant N} f(n)f(p)(\log p)e(g(np))\right|. \tag{9}$$

证明。我们沿用[32, 第 2] 节中的论证，并作一些修改以处理条件

$$\sum_{n\leqslant N} |f(n)|^2 \ll N(\log N)^A.$$

考虑

$$S = \sum_{n\leqslant N} f(n)e(g(n))\log N/n.$$

由于

$$S = \log N \sum_{n\leqslant N} f(n)e(g(n)) - \sum_{n\leqslant N} f(n)(\log n)e(g(n)),$$

只需证明

$$S \ll_\epsilon N(\log N)^\epsilon, \tag{10}$$

and

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)(\log n)e(g(n)) \ll_\epsilon \left|\sum_{1\leqslant np\leqslant N} f(n)f(p)(\log p)e(g(np))\right| + N(\log N)^\epsilon. \tag{11}$$

设 r 为一个较大的实数，并应用 H¨older 不等式、(5) 和 (6)，得到

$$\begin{aligned}|S|^{2r} &\ll \left(\sum_{n\leqslant N}(\log N/n)^{2r}\right)\left(\sum_{n\leqslant N}|f(n)|^2\right)\left(\sum_{n\leqslant N}|f(n)|\right)^{2r-2}\\ &\ll \left(\sum_{n\leqslant N}(\log N/n)^{2r}\right)N^{2r-1}(\log N)^A.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant N}(\log N/n)^{2r} &\ll \sum_{\substack{j\\ 1\leqslant 2^j\leqslant N}} j^{2r}\sum_{N/2^{j+1}\leqslant n\leqslant N/2^{j-1}} 1\\ &\ll N\sum_{j\geqslant 1}\frac{j^{2r}}{2^j}\ll N,\end{aligned}$$

取10后，我们得到 (r 充分大。由于

$$\log n = \sum_{d|n}\Lambda(d),$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant N} f(n)(\log n)e(g(n)) &= \sum_{nm\leqslant N}\Lambda(m)f(nm)e(g(nm))\\ &= \sum_{mn\leqslant N}\Lambda(m)f(n)f(m)e(g(nm))\\ &\quad + O\left(\sum_{mn\leqslant N}\Lambda(m)|f(nm)-f(n)f(m)|\right).\end{aligned}$$

利用（4）和（5）

$$\begin{aligned}\sum_{mn\leqslant N}\Lambda(m)f(n)f(m)e(g(nm)) &= \sum_{pn\leqslant N}(\log p)f(p)f(n)e(g(nm))\\ &\quad + O\left(N\sum_{k\geqslant 2}\sum_{p^k\leqslant N}\frac{|f(p^k)|}{p^k}.\right)\\ &= \sum_{pn\leqslant N}(\log p)f(p)f(n)e(g(nm))\\ &\quad + O(N),\end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式，(6)

$$\sum_{k\geqslant 2}\sum_{p^k\leqslant N}\frac{|f(p^k)|}{p^k}\ll\left(\sum_{k\geqslant 2}\sum_{p}\frac{1}{p^{0.8k}}\right)\left(\sum_{n}\frac{|f(n)|^2}{n^{1.2}}\right)=O(1).$$

因此，只需证明

$$\sum_{mn\leqslant N}\Lambda(m)|f(nm)-f(n)f(m)|=O(N(\log N)^{\epsilon}). \tag{12}$$

来自（5）

$$\begin{aligned}&\sum_{mn\leqslant N}\Lambda(m)|f(nm)-f(n)f(m)|\\ &\ll\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p^k\leqslant N}\sum_{\substack{n\leqslant N/p^k\\ p|n}}|f(p^k)||f(n)|+|f(p^kn)|\\ &\ll\sum_{k,j\geqslant 1}\sum_{p^{k+j}\leqslant N}\sum_{\substack{n\leqslant N/p^{k+j}\\ (n,p)=1}}(|f(p^{k+j})|+|f(p^k)||f(p^j)|)|f(n)|\\ &\ll N\sum_{k,j\geqslant 1}\sum_{p}\frac{|f(p^k)||f(p^j)|+|f(p^{k+j})|}{p^{k+j}}.\end{aligned}$$

对 p、k、j 上的求和应用柯西-施瓦茨不等式、(6) 和分部求和，如上所述，可得 (12)，从而完成证明。□

我们需要将 [32, 第 3]节的结果推广到满足 (6) 的积性函数 f。

引理 2. 设记号和条件与定理 *1*中的相同。假设s 是一个参数，并且对于每个 $0\leqslant i\leqslant\log_2 N$ 记

$$J_i=\min\left(i+1,\lfloor\log_2 N\rfloor-i+1,\lfloor\log_2(64N/s)/2\rfloor\right). \tag{13}$$

定义矩形

$$\mathcal{R}_i = (0, 2^i] \times \left(\frac{N}{2^{i+1}}, \frac{N}{2^i} \right], \quad 0 \leqslant i \leqslant \log_2 N, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{i,j,k} = \left(\frac{2^{i+j}}{k}, \frac{2^{i+j+1}}{2k-1} \right] \times \left(\frac{(k-1)N}{2^{i+j}}, \frac{(2k-1)N}{2^{i+j+1}} \right], \\ 0 \leqslant i \leqslant \log_2 N, \quad 1 \leqslant j \leqslant J_i, \quad 2^{j-1} \leqslant k \leqslant 2^j. \end{aligned} \tag{15}$$

那么，每个 $\mathcal{R}_{i、\ j、\ k}$都是形如 $(P, P'] \times (N, N']$的矩形，其中 P、 P'、 N、 N' 满足

$$P' - P \geqslant \frac{1}{4}, \quad N' - N \geqslant \frac{1}{4}, \quad (P' - P)(N' - N) \gg s.$$

令 $\mathcal{E}$ 表示满足 $(p$、 $n)$ 且不位于以下任一矩形 (14) 或 (15)中的点集。则对于任意固定的 $\epsilon > 0$，有

$$\begin{aligned} \sum_{(p,n)\in\mathcal{E}} f(p)(\log p) f(n) e(g(pn)) \ll \\ \ll (\log N)^{\epsilon} (N + (Ns)^{1/2} \log(2N/s) \log s). \end{aligned}$$

证明。我们的证明与 [32, 第 3]节的证明类似，但作了一些小的修改。我们首先划分

$$\begin{aligned} \sum_{(p,n)\in\mathcal{E}} f(p)(\log p) f(n) e(g(pn)) \ll \sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1} |f(p)||f(n)|(\log p) \\ + \sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2} |f(p)||f(n)|(\log p) + \sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_3} |f(p)||f(n)|(\log p), \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{E}_1 = \{(p,n) \in \mathcal{E} : \ pn \leqslant N, \ \frac{N}{2^{i+1}} < n \leqslant \frac{N}{2^i}, \ J_i > i+1\},$$

$$\mathcal{E}_2 = \{(p,n) \in \mathcal{E} : \ pn \leqslant N, \ \frac{N}{2^{i+1}} < n \leqslant \frac{N}{2^i}, \ J_i = \lfloor \log_2 N \rfloor - i + 1\},$$

$$\mathcal{E}_3 = \{(p,n) \in \mathcal{E} : \ pn \leqslant N, \ \frac{N}{2^{i+1}} < n \leqslant \frac{N}{2^i}, \ J_i = \lfloor \log_2 (64N/s)/2 \rfloor\}.$$

首先考虑 $\mathcal{E}_1$。由霍尔德不等式及（4）

$$\left(\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}|f(p)||f(n)|(\log p)\right)^{2r}\ll$$
$$\left(\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}|f(n)|\right)^{2r-2}\left(\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}|f(n)|^2\right)\left(\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}(\log p)^{2r}\right).$$

对于每个素数 p,

$$\#\{n\ :\ (p,n)\in\mathcal{E}_1\}\ll\frac{N}{p^2},$$

从而

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}(\log p)^{2r}\ll N\sum_p\frac{(\log p)^{2r}}{p^2}\ll N,$$

并且对于每个 n

$$\#\{p\ :\ (p,n)\in\mathcal{E}_1\}\ll 1.$$

因此由（5）和（6）

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}|f(n)|\ll\sum_{n\leqslant N}|f(n)|\ll N,$$
$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}|f(n)|^2\ll\sum_{n\leqslant N}|f(n)|^2\ll N(\log N)^A.$$

取 r 足够大，上述估计结合起来得到

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_1}|f(p)||f(n)|(\log p)\ll_\epsilon N(\log N)^\epsilon.$$

接下来考虑 $\mathcal{E}_2$。根据柯西-施瓦茨不等式

$$\left(\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2}|f(p)||f(n)|(\log p)\right)^2\ll\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2}|f(n)|^2\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2}(\log p)^2.$$

若 $(p,n)\in\mathcal{E}_2$ 则 $n\ll N^{1/2}$，且对于固定的 n，存在某个 H 使得

$$\{p\ ;\ (p,n)\in\mathcal{E}_2\}\subseteq[H,H+N/n^2].$$

因此，根据Brun-Titchmarsh定理

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2}|f(p)||f(n)|(\log p)\ll N\sum_{n\leqslant N^{1/2}}\frac{|f(n)|^2}{n^2\log(4N/n^2)},$$

结合式（6）和分部求和

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2}|f(n)|^2 \ll \frac{N}{\log N}.$$

对于每个 p

$$\#\{n\ :(p,n)\in\mathcal{E}_2\}\ll 1,$$

使得

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2}(\log p)^2 \ll \sum_{p\ll N}(\log p)^2 \ll N\log N.$$

结合以上估计可得

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_2}|f(p)||f(n)|(\log p)\ll N.$$

最后考虑 $\mathcal{E}_3$。由 H¨older 不等式

$$\left(\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_3}|f(p)||f(n)|(\log p)\right)^{2r}\ll$$
$$\left(\sum_{(N/q)^{1/2}\leqslant n\leqslant(Nq)^{1/2}}|f(n)|^{2r/(2r+1)}(\log p)\right)^{2r-1}$$
$$\times\left(\sum_{(N/q)^{1/2}\leqslant p\leqslant(Nq)^{1/2}}\frac{\log p}{p}\right).$$

若 $(p,n)\in\mathcal{E}_3$ 则

$$\left(\frac{N}{s}\right)^{1/2}\leqslant p\leqslant(Ns)^{1/2},$$

并且对于每个 p，都存在某个 H 使得

$$\#\{n\ :\ (p,n)\in\mathcal{E}_3\}\subseteq[H,H+O((Ns)^{1/2}/p)],$$

并且对于每个 n，都存在某个 H，使得

$$\#\{p\ :\ (p,n)\in\mathcal{E}_3\}\subseteq[H,H+O((Ns)^{1/2}/n)].$$

利用布伦-蒂奇马什不等式，我们看到

$$\begin{aligned}\left(\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_3}|f(p)||f(n)|(\log p)\right)^{2r} &\ll (Ns)^{1/2}\\ &\times\left(\sum_{(N/s)^{1/2}\leqslant n\leqslant(Ns)^{1/2}}|f(n)|^{2r/(2r+1)}\frac{\log 2N/n}{n\log 2Ns/n^2}\right)^{2r-1}\\ &\times\left(\sum_{(N/s)^{1/2}\leqslant p\leqslant(Ns)^{1/2}}\frac{\log p}{p}\right).\end{aligned}$$

我们有

$$\sum_{(N/s)^{1/2}\leqslant p\leqslant(Ns)^{1/2}}\frac{\log p}{p}\ll\log s,$$

以及 H¨older 不等式与（5）和（6）结合可得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{(N/s)^{1/2}\leqslant n\leqslant(Ns)^{1/2}}|f(n)|^{2r/(2r+1)}\frac{\log 2N/n}{n\log 2Ns/n^2}\right)^{2r-1}\\ &\ll(\log(2N/s))^{2r-1}\left(\sum_{(N/s)^{1/2}\leqslant n\leqslant(Ns)^{1/2}}\frac{|f(n)|}{n}\right)^{2r-2}\\ &\times\left(\sum_{(N/s)^{1/2}\leqslant n\leqslant(Ns)^{1/2}}\frac{|f(n)|^2}{n}\right)\\ &\ll(\log(2N/s))^{2r-1}(\log N)^A(\log s)^{2r-1}.\end{aligned}$$

当 r 充分大时，得到

$$\sum_{(p,n)\in\mathcal{E}_3}|f(p)||f(n)|(\log p)\ll(Ns)^{1/2}(\log N)^{\varepsilon}(\log s)\log(2N/s).$$

由此即可得出结论。 □

5. Sums over bilinear forms

5.1. Vinogradov 均值定理。给定整数 r、d、V，我们令 $J_{r,d}(V)$ 表示方程组的解的个数

$$v_1^j+\cdots-v_{2r}^j=0,\quad 1\leqslant j\leqslant d,$$

其中变量满足

$$1 \leqslant v_1, \dots, v_{2r} \leqslant V.$$

我们将使用 Bourgain、Demeter 和 Guth 关于 Vinogradov 均值定理工作的一个推论，参见 [3,第 5]节。

引理 3。假设 $d \geqslant 2$ 且 $r > d(d+1)$。则有

$$J_{r,d}(V) \ll_k V^{2r-d(d+1)/2}.$$

结合引理 3 以及 Vinogradov 系统具有平移不变性这一事实，我们得到以下结果。

推论 3。设 $d \geqslant 2$、$r > d(d+1)$ 为整数，且 $\mathcal{M}(k)$ $1 \leqslant k \leqslant K$ 为满足以下条件的不相交区间

$$\mathcal{M}(k) = (M'(k), M''(k)], \quad M''(k) - M'(k) \leqslant Y.$$

则方程组的解的数量

$$n_1^j + \dots - n_{2r}^j = 0, \quad n_i \in \mathcal{M}(k), \quad 1 \leqslant k \leqslant K, \tag{16}$$

受.....所界定

$$O(KY^{2r-d(d+1)/2}).$$

我们还需要对平移区间中的素数变量满足 Vinogradov 系统的解的数量给出估计。在这里，区间不能“过短”这一点至关重要。为得到这样的结果，我们需要以下中间引理，它可直接由 [21, 定理 10], 推出。此处显然可以看出，我们所用区间的长度相对于其起点必须足够大，这一点为何重要。我们使用 $L = \log P$。

引理 4. 设 $0 < Q \leqslant c_1(k)L^{\sigma_1}$, $X \gg 1$ 且

$$S(X,P) = \sum_{\substack{X < p \leqslant X+P \\ p \equiv t \pmod{Q}}} e(f(p))$$

其中

$$P \gg \frac{X}{(\log X)^M},$$

对任意 $M \gg 1$ 且

$$f(x) = \frac{h}{q}x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_k, \quad (h,q) = 1,$$

其中数 α 为实数。设 $L^\sigma < q \leqslant P^k L^{-\sigma}$。对于任意 $\sigma_0 > 0$，当 $\sigma \leqslant 2^{6k}(\sigma_0 + \sigma_1 + 1)$ 时，我们总有

$$|S(X,P)| \leqslant c_2(k)\frac{P}{QL^{\sigma_0 - M}}.$$

利用这一引理，我们可以证明以下估计：在较大的平移区间内，含有素数变量的 Vinogradov 系统的解的数量。

引理5。设 $d \geqslant 2$ 为整数，且 X、$Y \gg 1$。若 $r > d(d+1)$，则方程的解的个数

$$p_1^j + \cdots - p_{2r}^j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant d, \quad Y \leqslant p_i \leqslant Y + X,$$
$$X \gg \frac{Y}{(\log Y)^M}, \quad p_i \quad prime,$$

对任意 $M \gg 1$，均有界于

$$O\left(\frac{X^{2r-d(d+1)/2}}{(\log X)^{2r}}\right).$$

证明。该结果可直接由 [21, 定理 16]对第 1 部分作部分重新定义

$$S(\alpha_k, \cdots, \alpha_1) = \sum_{Y \leqslant p \leqslant Y+X} e(f(p)), \quad f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x,$$

并引入以下两项变化得出，这些变化考虑了素数集合的平移，并优化了 Hua的结果 中 r 的范围。在证明的第 3 部分中，我们使用引理 4 代替 [21,定理 10], ，这是可行的，因为 s_1 在 [21, 引理 10.8] 中可以任意大。而在证明的第 5 部分中，我们需要用 [3, 定理 1] 替换 [21, 定理 15] 。为此，我们需要谨慎地在 [21, 第 144] 页中分离出 $|S(\alpha_k, \cdots, \alpha_1)|^{d(d+1)-\epsilon}$，而不是 $|S(\alpha_k, \cdots, \alpha_1)|^{s_0-1}$；并在 [21, 第 145] 页中分离出 $|S(\alpha_k, \cdots, \alpha_1)|^{s-\epsilon}$，而不是 $|S(\alpha_k, \cdots, \alpha_1)|^{s-1}$。这里 $\epsilon > 0$ 满足 $s = d(d+1) + 2\epsilon$。□

5.2. 双线性型的界。 众所周知，可以利用引理 3 估计矩形上的 Weyl 和双线性型。接下来我们将说明，如何通过对一族不相交矩形上的双线性型取平均来获得更精确的结果。

引理 6. 设 $F \in \mathbb{R}[X]$ 是一个次数为 $d \geqslant 2$ 的如下形式的多项式

$$F(x) = \alpha_d x^d + \cdots + \alpha_1 x.$$

设 M、N 为整数， $\alpha(n)$ $\beta(m)$ 为两个复数序列，满足

$$|\beta(m)| \leqslant 1,$$

and

$$\sum_{n \leqslant N} |\alpha(n)| \ll N, \quad \sum_{n \leqslant N} |\alpha(n)|^2 \ll N(\log N)^A, \tag{17}$$

对于 $A \geqslant 0$。对于 $1 \leqslant k \leqslant K$，令

$$\mathcal{R}(k) = \mathcal{L}(k) \times \mathcal{M}(k), \tag{18}$$

为如下形式的一个矩形

$$\mathcal{L}(k) = (Q'(k), Q''(k)], \quad \mathcal{M}(k) = (M'(k) \times M''(k)],$$

使得 $\mathcal{L}(k) \subseteq (0, Q)$，其中 $Q \gg 1$，彼此不交且满足

$$Q''(k) - Q'(k) \leqslant X, \tag{19}$$

or

$$Q''(k) - Q'(k) = X \gg \frac{Q'(k)}{(\log Q'(k))^M} \tag{20}$$

且 $\mathcal{M}(k) \subseteq (0, M]$ 彼此不交且满足

$$M''(k) - M'(k) \leqslant Y, \quad M''(k) \leqslant 2M'(k),$$

且 $K \ll M$。令 I 表示该和

$$I = \sum_{k=1}^{K} \sum_{(p,n) \in \mathcal{R}(k)} \alpha(n)\beta(p)e(F(np)). \tag{21}$$

令 $R \geqslant 1$，并假设存在 $q \leqslant R$ 和 $1 \leqslant \ell \leqslant d$ 使得

$$\left| \alpha_\ell - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{qR}, \tag{22}$$

对于某个 $(a, q) = 1$。对于 $r > d(d+1)$，我们有

$$I^{4r^2} \ll m(X)(\log M)^{2rA} M^{4r^2} \left(\frac{X}{\log X}\right)^{4r^2} \left(\frac{M}{Y}\right)^{d(d-1)/2} \left(\frac{Q}{X}\right)^{d(d-1)/2} \left(\frac{q}{XQ^{\ell-1}YM^{\ell-1}} + \frac{1}{XQ^{\ell-1}} + \frac{1}{YM^{\ell-1}} + \frac{1}{q}\right),$$

其中

$$m(x) = \begin{cases} (\log x)^{4r} & \textit{when (19) holds,} \\ 1 & \textit{when (20) holds.} \end{cases}$$

证明。回顾

$$F(x) = \alpha_d x^d + \cdots + \alpha_1 x,$$

并定义

$$S_k = \sum_{(p,n) \in \mathcal{R}(k)} \alpha(n)\beta(p)e(F(np)), \tag{23}$$

使得

$$I = \sum_{k=1}^{K} S_k. \tag{24}$$

取定一些 $1 \leqslant k \leqslant K$ 并考虑 (23)。回忆 (18)，由 H¨older 不等式，对于任意整数 $r \geqslant 1$

$$S_k \leqslant \left(\sum_{n \in \mathcal{M}(k)} |\alpha(n)|^{2r/(2r-1)} \right)^{1-1/2r} \left(\sum_{n \in \mathcal{M}(k)} \left| \sum_{p \in \mathcal{L}(k)} \beta(p) e(F(np)) \right|^{2r} \right)^{1/2r}.$$

再次应用 H¨older 不等式

$$I^{2r} \leqslant \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \sum_{n \in \mathcal{M}(k)} |\alpha(n)|^{2r/(2r-1)} \right)^{2r-1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \sum_{n \in \mathcal{M}(k)} \left| \sum_{p \in \mathcal{L}(k)} \beta(p) e(F(np)) \right|^{2r}.$$

因此，由关于 $\mathcal{M}(k)$ 的假设

$$I^{2r} \ll \left(\sum_{n \leqslant M} |\alpha(n)|^{2r/(2r-1)} \right)^{2r-1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \sum_{n \in \mathcal{M}(k)} \left| \sum_{p \in \mathcal{L}(k)} \beta(p) e(F(np)) \right|^{2r},$$

结合 (17) 可得

$$I^{2r} \ll M^{2r-1} (\log M)^A \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \sum_{n \in \mathcal{M}(k)} \left| \sum_{p \in \mathcal{L}(k)} \beta(p) e(F(np)) \right|^{2r}.$$

记 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$，并令 $J_k(\lambda)$ 表示方程的解的个数

$$p_1^j + \cdots - p_{2r}^j = \lambda_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant d, \quad p_i \in \mathcal{L}(k), \quad p_i \text{ prime}.$$

注意，根据关于 $\mathcal{L}(k)$ 的假设，若 $p_1, \dots, p_{2r} \in \mathcal{L}(k)$ 满足

$$p_1^j + \cdots - p_{2r}^j = \lambda_j,$$

then

$$\lambda_j \ll X Q^{j-1}.$$

展开 $2r$ 次幂并交换求和次序，得到

$$I^{2r} \ll M^{2r-1}(\log M)^A \times \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda_j \ll XQ^{j-1}}} J_k(\lambda) \left| \sum_{n\in\mathcal{M}(k)} e(\alpha_d\lambda_d n^d + \cdots + \alpha_1\lambda_1 n) \right|.$$

再次应用 H¨older 不等式后，我们得到

$$I^{4r^2} \ll M^{4r^2-2r}(\log M)^{2rA} \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda} J_k(\lambda) \right)^{2r-2} \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda} J_k(\lambda)^2 \right) \times \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda_j \ll XQ^{j-1}} \left| \sum_{n\in\mathcal{M}(k)} e(\alpha_d\lambda_d n^d + \cdots + \alpha_1\lambda_1 n) \right|^{2r}.$$

我们有

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda} J_k(\lambda) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant K} |\{p_1, \ldots, p_{2r} \in \mathcal{L}(k)\}|.$$

由于对于每个 $1 \leqslant k \leqslant K$， $\mathcal{L}(k)$ 都是长度至多为 X 的区间，Brun-Titshmarsh 定理表明

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda} J_k(\lambda) \ll \frac{KX^{2r}}{(\log X)^{2r}}.$$

该项

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda} J_k(\lambda)^2,$$

统计方程组的解的数量

(25)

$$p_1^j + \cdots - p_{4r}^j = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant d, \qquad p_i \in \mathcal{L}\ (k) \qquad p_i \text{ 素数}$$

$1 \leqslant k \leqslant K$.忽略 p_i 为素数这一条件，根据推论 3 和引理 5，

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda} J_k(\lambda)^2 \ll Km_1(X),$$

其中

$$m_1(x) = \begin{cases} X^{4r-d(d+1)/2} & when\ (19)\ holds, \\ \frac{X^{4r-d(d+1)/2}}{(\log X)^{4r}} & when\ (20)\ holds. \end{cases}$$

由于 $r > d(d+1)$。结合上述观察，这意味着

$$I^{4r^2} \ll m(X)M^{4r^2-2r}(\log M)^{2rA}K^{2r-1} \left(\frac{X}{\log X} \right)^{4r^2} \frac{I_0}{X^{d(d+1)/2}}, \tag{26}$$

其中

$$I_0 = \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\lambda_j \ll XQ^{j-1}} \left| \sum_{n\in\mathcal{M}(k)} e(\alpha_d\lambda_d n^d + \cdots + \alpha_1\lambda_1 n)\right|^{2r}.$$

Let

$$S(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2,$$

因此

$$\widehat{S}(x) = \max\{0, 1 - |x|\}, \tag{27}$$

and

$$S(x) \gg 1 \quad \text{if} \quad |x| \leqslant \frac{1}{4}.$$

存在一个常数 c_0，使得

$$I_0 \ll$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \sum_{\substack{\lambda_j \ll XQ^{j-1}\\ j\neq\ell}} \sum_{\lambda_\ell\in\mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0\lambda_\ell}{XQ^{\ell-1}}\right) \left| \sum_{n\in\mathcal{M}(k)} e(\alpha_d\lambda_d n^d + \cdots + \alpha_1\lambda_1 n)\right|^{2r}.$$

展开 $2r$ 次幂并交换求和顺序

$$I_0 \ll$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant K\\ \mu_j \ll YN^{j-1}}} L_k(\mu) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{d} \left| \sum_{\lambda\ll XQ^{j-1}} e(\alpha_j\lambda\mu_j)\right| \left| \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0\lambda_\ell}{XQ^{\ell-1}}\right) e(\alpha_\ell\lambda\mu_\ell)\right|,$$

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ 和 $L_k(\mu)$ 统计了下列方程的解的个数

$$n_1^j + \cdots - n_{2r}^j = \mu_j, \quad n_i \in \mathcal{M}(k), \quad 1 \leqslant k \leqslant K.$$

利用

$$L_k(\mu) \leqslant L_k(0),$$

并应用推论3，我们得到

$$I_0 \ll KY^{2r-d(d+1)/2}$$

$$\sum_{\substack{\mu\\ \mu_j \ll YM^{j-1}}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{d} \left| \sum_{\lambda\ll XQ^{j-1}} e(\alpha_j\lambda\mu_j)\right| \left| \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0\lambda}{Xq^{\ell-1}}\right) e(\alpha_\ell\lambda\mu_\ell)\right|.$$

将上述不等式与（26）结合，我们得到

$$I^{4r^2} \ll m(X)(\log M)^{2rA} M^{4r^2} \left(\frac{X}{\log X}\right)^{4r^2} \frac{I_1}{(XY)^{d(d+1)/2}}, \tag{28}$$

其中

$$I_1 = \sum_{\mu_j \ll Y M^{j-1}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{d} \left| \sum_{\lambda \ll X Q^{j-1}} e(\alpha_j \lambda \mu_j) \right| \left| \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0 \lambda}{X q^{\ell-1}}\right) e(\alpha_\ell \lambda \mu_\ell) \right|$$

在 I_1 中，除指标为 ℓ 的项外，我们对每一项都作平凡估计，从而得到

$$I_1 \ll \left(\frac{Y}{M}\right)^d \left(\frac{X}{Q}\right)^d (QM)^{d(d+1)/2} \frac{1}{XQ^{\ell-1}} \frac{1}{YM^{\ell-1}} \tag{29}$$

$$\sum_{\mu \ll Y M^{\ell-1}} \left| \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0 \lambda}{X q^{\ell-1}}\right) e(\alpha_\ell \lambda \mu_\ell) \right|. \tag{30}$$

由泊松求和公式

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0 \lambda_\ell}{X Q^{\ell-1}}\right) e(\alpha_\ell \mu \lambda) = \frac{X Q^{\ell-1}}{c_0} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \widehat{S}\left(\frac{X Q^{\ell-1}(\lambda - \alpha_\ell \mu)}{c_0}\right),$$

因此由（27）

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu \ll Y M^{\ell-1}} \left| \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0 \lambda_\ell}{X Q^{\ell-1}}\right) e(\alpha_\ell \mu \lambda) \right| \\
&\qquad \ll X Q^{\ell-1} \sum_{\mu \ll Y M^{\ell-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \max\left\{0, 1 - \left| \frac{X Q^{\ell-1}(\lambda - \alpha_\ell \mu)}{c_0} \right| \right\} \\
&\qquad \ll X Q^{\ell-1} \left| \left\{ \mu \ll Y M^{\ell-1} \ : \ \|\alpha_\ell \mu\| \leqslant \frac{100 c_0}{X Q^{\ell-1}} \right\} \right|.
\end{aligned}$$

存在某个实数 β，使得

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ \mu \ll Y M^{\ell-1} \ : \ \|\alpha_\ell \mu\| \leqslant \frac{100 c_0}{X Q^{\ell-1}} \right\} \right| \\
&\qquad \ll \left(1 + \frac{Y M^{\ell-1}}{q}\right) \left| \left\{ 0 \leqslant \mu \leqslant q \ : \ \|\alpha_\ell \mu + \beta\| \leqslant \frac{100 c_0}{X Q^{\ell-1}} \right\} \right|.
\end{aligned}$$

回顾（22）

$$\left|\left\{\mu \ll YM^{\ell-1} \ : \ \|\alpha_\ell \mu\| \leqslant \frac{100c_0}{XQ^{\ell-1}}\right\}\right| \ll \left(1+\frac{YM^{\ell-1}}{q}\right)\left|\left\{0 \leqslant \mu \leqslant q \ : \ \|\frac{a\mu}{q}+\beta\| \leqslant \frac{100c_0}{XQ^{\ell-1}}+\frac{1}{R}\right\}\right|,$$

这意味着

$$\left|\left\{\mu \ll YM^{\ell-1} \ : \ \|\alpha_\ell \mu\| \leqslant \frac{100c_0}{XQ^{\ell-1}}\right\}\right| \ll \left(1+\frac{YM^{\ell-1}}{q}\right)\left(1+\frac{q}{XQ^{\ell-1}}\right),$$

因此

$$\sum_{\mu \ll YM^{\ell-1}}\left|\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} S\left(\frac{c_0\lambda}{Xq^{\ell-1}}\right)e(\alpha_\ell\lambda\mu_\ell)\right| \ll XQ^{\ell-1}YM^{\ell-1}\left(\frac{1}{YM^{\ell-1}}+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{q}{XQ^{\ell-1}}\right).$$

结合（28）和（29）可得

$$I^{4r^2} \ll m(X)(\log M)^{2rA}M^{4r^2}\left(\frac{X}{\log X}\right)^{4r^2}\left(\frac{M}{Y}\right)^{d(d-1)/2}\left(\frac{Q}{X}\right)^{d(d-1)/2} \left(\frac{q}{XQ^{\ell-1}YM^{\ell-1}}+\frac{1}{XQ^{\ell-1}}+\frac{1}{YM^{\ell-1}}+\frac{1}{q}\right),$$

由此完成证明。 □

6. Proof of Theorem 1

我们应用引理 1和引理 2 ，其中

$$s=\frac{q^{1/\ell}}{(\log N)^4},$$

以获得

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(n)e(F(n)) \ll \frac{N}{\log N^{1+o(1)}}+(Nq^{1/\ell})^{1/2}+\sum_{0\leqslant i\leqslant \log_2 N}\frac{i}{\log N}S_i + \sum_{0\leqslant i\leqslant \log_2 N}\frac{i}{\log N}\sum_{1\leqslant j\leqslant J_i} S_{i,j},$$

其中

$$S_i = \sum_{(p,n)\in\mathcal{R}_i} \frac{\log p}{i} f(p)f(n)e(F(pn)),$$

and

$$S_{i,j} = \sum_{2^{j-1}\leqslant k\leqslant 2^j} \sum_{(p,n)\in\mathcal{R}_{i,j,k}} \frac{\log p}{i} f(p)f(n)e(F(pn)).$$

注意，如果 $(p,n) \in \mathcal{R}_i$ 或 $(p,n)\in\mathcal{R}_{i,\ j,\ k}$ 那么

$$\frac{\log p}{i} \ll 1.$$

由引理 6，注意到在此情况下条件（20）成立，

$$S_i \ll (\log N)^{A/2r} \frac{N}{i} \left(\frac{q}{N^\ell} + \frac{1}{2^{\ell i}} + \frac{2^{\ell i}}{N} + \frac{1}{q}\right)^{1/4r^2},$$

这意味着

(31)

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant \log_2 N} \frac{i}{\log N} S_i \ll \frac{N}{(\log N)^{1-A/2r}} \left(1 + \log N \left(\frac{q}{N^\ell} + \frac{1}{q}\right)^{1/4r^2}\right).$$

接下来考虑以下各和 $S_{i,\ j}$。我们应用引理 6，参数为

$$K = 2^{j-1}, \quad M = \frac{N}{2^i}, \quad Q = 2^{i+1}, \quad X = 2^{i-j+1}, \quad Y = 32N2^{-i-j}.$$

我们首先关注 $j \geqslant \log i^c$ 的情形，其中 $c \gg 1$。在这种情况下，我们使用引理 6 及条件（19），即可容易地得到

$$S_{i,j} \ll \frac{N}{i^{c_1} 2^{j/8}} \left(\frac{q}{N^\ell} + \frac{1}{2^{\ell i}} + \left(\frac{2^i}{N}\right)^\ell + \frac{1}{q}\right)^{1/4r^2},$$

对于 $c_1 \gg 1$。对于固定的 $i \leqslant$ 对数$_2 N$，回想一下， J_i 由（13）给出，因此我们有

$$\sum_{\log i^c\leqslant j\leqslant J_i} S_{i,j} \ll \frac{N}{i^{c_1}} \left(\frac{q}{N^\ell} + \frac{1}{2^{\ell i}} + \left(\frac{2^i}{N}\right)^\ell + \frac{1}{q}\right)^{1/4r^2},$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant i\leqslant \log_2 N}\frac{i}{\log N}\sum_{\log i^c\leqslant j\leqslant J_i}S_{i,j}\\&\ll \frac{N}{\log N}\sum_{i\leqslant \log_2 N}\frac{1}{i^{c_1-1}}\left(\frac{q}{N^\ell}+\frac{1}{2^{\ell i}}+\left(\frac{2^i}{N}\right)^\ell+\frac{1}{q}\right)^{1/4r^2}\\&\ll N\left(\frac{1}{\log N}+\frac{q}{N^\ell}+\frac{1}{q}\right).\end{aligned}$$

记 $C=\frac{A}{2r}$。接下来我们重点讨论 $j\leqslant \log i^c$ 的情形。在这种情况下，我们可以使用引理 6，并满足条件（20），从而容易得到

$$\begin{aligned}S_{i,j}\ll \frac{1}{(i-j+1)^{1-C}}\frac{N}{2^{j(1-d(d-1)/4r^2)}}\\\left(\frac{2^{2j}q}{N^\ell}+\frac{2^j}{2^{\ell i}}+2^j\left(\frac{2^i}{N}\right)^\ell+\frac{1}{q}\right)^{1/4r^2}.\end{aligned}$$

固定 $i\leqslant \log_2 N$，我们有

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant \log i^c}S_{i,j}\ll \frac{N}{i^{1-C}}\left(\frac{q}{N^\ell}+\frac{1}{2^{\ell i}}+\left(\frac{2^i}{N}\right)^\ell+\frac{1}{q}\right)^{1/4r^2},$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant i\leqslant \log_2 N}\frac{i}{\log N}\sum_{1\leqslant j\leqslant \log i^c}S_{i,j}\\&\ll \frac{N}{\log N}\sum_{i\leqslant \log_2 N}i^C\left(\frac{q}{N^\ell}+\frac{1}{2^{\ell i}}+\left(\frac{2^i}{N}\right)^\ell+\frac{1}{q}\right)^{1/4r^2}\\&\ll N\left(\frac{1}{(\log N)^{1-C}}+\frac{q(\log N)^C}{N^\ell}+\frac{(\log N)^C}{q}\right).\end{aligned}$$

结合上述估计，我们完成了证明。

7. Proof of Corollary 1

设

$$F(x)=\alpha_1 x+\cdots+\alpha_d x^d.$$

根据狄利克雷定理，对于每个 $1\leqslant \ell\leqslant d$，都存在整数 r_ℓ, s_ℓ，使得 $(r_\ell, s_\ell)=1$，并且

$$r_\ell\leqslant \frac{N^\ell}{(\log N)^{4r^2+4rA}},$$

使得

$$\left|\alpha_\ell - \frac{r_\ell}{s_\ell}\right| \leqslant \frac{(\log N)^{4r^2+4rA}}{q_\ell N^\ell}.$$

根据定理1，我们可以假设对每个 $1 \leqslant \ell \leqslant d$

$$s_\ell \leqslant (\log N)^{4r^2+4rA}.$$

由分部求和可得

$$\left|\sum_{n\leqslant N} f(n)e(F(n))\right| \ll (\log N)^{4r^2+4rA} \max_{u\leqslant N} T(u),$$

with

$$T(u) := \sum_{n\leqslant u} f(n)e(F_1(n)),$$

and

$$F_1(x) := \frac{r_d}{s_d}x^d + \cdots + \frac{r_1}{s_1}x.$$

定义 $k := lcm(s_d, \cdots, s_1)$，可得

$$T(u) = \sum_{a\leqslant k} e(F_1(a))S(a),$$

with

$$S(a) := \sum_{\substack{n\leqslant u \\ n\equiv a \bmod k}} f(n).$$

令 $d = (a, k)$，并记

$$a' = \frac{a}{d}, \quad k' = \frac{k}{d},$$

从而

$$S(a) = \sum_{\substack{n\leqslant u \\ n\equiv a' \bmod k' \\ n\equiv 0 \bmod d}} f(n) = \frac{1}{\phi(k')} \sum_{\psi \bmod k'} \overline{\psi}(a') \sum_{\substack{n\leqslant u \\ n\equiv 0 \bmod d}} \psi(n)f(n).$$

若 $(d, q) \neq 1$，则 $S(a) = 0$。若 $(d, q) = 1$，则

$$|S(a)| \leqslant \frac{1}{\phi(k')} \sum_{\psi \bmod k'} \left|\sum_{n\leqslant u/d} \psi(n)f(n)\right|.$$

因此，注意到

$$\operatorname{lcm}(s_d, \cdots, s_1) \leqslant \prod_{1\leqslant i\leqslant d} s_i \leqslant (\log N)^{d(4r^2+4rA)}$$

我们由此完成证明。

8. Short mixed character sums

接下来，我们利用推论 1说明如何在假设广义黎曼猜想成立的条件下估计短混合特征和。

推论4. 设 $F(n)$ 是一个次数为 d 、具有实系数的多项式，表示为

$$F(x) = \alpha_d x^d + \cdots + \alpha_1 x$$

并取 χ 个模 q 的本原特征。则假设广义黎曼猜想对所有本原特征一致成立，次数为 d 的多项式 F 以及

$$\log N \geqslant B \log\log q, \tag{32}$$

对于某个适当的固定常数 B，我们有

$$\left|\sum_{n\leqslant N} \chi(n) e(F(n))\right| \ll \frac{N}{(\log N)^{1-\varepsilon}},$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。

我们需要以下关于狄利克雷特征的卷积的引理，它由 [13]中的定理 2 和 [20], 中的推论1.3 得出；请记住，在那里他们有 $u = \log x/\log y$。

引理7. 设 χ 是模 q的非主特征。假设广义黎曼猜想，对于任意满足以下条件的 x

$$\frac{\log x}{\log\log q} \geqslant B,$$

对于充分大的常数 B，我们有

$$\left|\sum_{n\leqslant x} \chi(n)\right| \ll x(\log q)^{-(1+o(1))\frac{\log x \log\left(\frac{\log x}{2\log\log q}\right)}{2(\log\log q)^2}},$$

由此，我们可以用类似于4 的方式证明推论 [18, 引理 3]和 [25, 引理 7]。

推论4的证明。显然，我们可以假设

$$\left|\sum_{n\leqslant N} \chi(n) e(F(n))\right| \gg \frac{N}{(\log N)^{1-\varepsilon}}.$$

对于任意 ψ 模数小于或等于 $k := lcm(s_d, \cdots, s_1)$，由引理 7可得

$$\max_{u\leqslant N}\left|\sum_{n\leqslant u} \psi(n)\chi(n)\right| \ll N(\log q)^{-(1+o(1))\frac{\log N \log\left(\frac{\log N}{2\log\log q}\right)}{2(\log\log q)^2}}.$$

因此，由推论 1 和（32），可得

$$\left|\sum_{n\leqslant N}\chi(n)e(F(n))\right| \ll N(\log x)^{d^5}(\log q)^{-(1+o(1))\frac{\log N\log\left(\frac{\log N}{2\log\log q}\right)}{2(\log\log q)^2}}$$
$$\ll \frac{N}{(\log N)^{1-\varepsilon}},$$

至此，证明完成。 □

9. On the correlation between roots of polynomial congruences and polynomial values

现在我们证明定理2。设 $p\in\mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是不可约的，次数为 $e\geqslant 2$，并考虑比值 v/n，其中 v 是多项式 p模 n的根

$$p(v)\equiv 0 \bmod n.$$

将这些比值定义为序列 $(g_k)_{k\geqslant 1}$，使相应的分母按升序排列。

Hooley [22, 定理 1] 证明了 $(g_k)_{k\geqslant 1}$ 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$中均匀分布。更进一步，他证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\sum_{\substack{v\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ p(v)\equiv 0 \bmod n}} e\left(\frac{hv}{n}\right)\right| = 0, \tag{33}$$

对于每个 $h\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$。为了证明定理 2，根据 Weyl 等分布判别准则，只需证明对于任意的 $(h_1,h_2)\neq 0$，都有

$$\sum_{n\leqslant N} e\left(h_1F(n)\right)\sum_{\substack{v\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ p(v)\equiv 0 \bmod n}} e\left(\frac{h_2v}{n}\right) = o(N).$$

若 $h_2\neq 0$，则由等式 (33) 可知这一结论成立。因此，只需考虑以下情形：$h_2=0$ 和 $h_1\neq 0$。若令

$$\varrho(n) = |\{v\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; p(v)\equiv 0 \bmod n\}|, \tag{34}$$

那么问题就归结为证明

$$\sum_{n\leqslant N}\varrho(n)e\left(F(n)\right) = o(N).$$

我们首先证明 ϱ的一些性质。

引理 8。函数 ϱ 是积性函数，并满足：

(1) For all $\epsilon>0$, $\varrho(n)\leqslant_\epsilon n^\epsilon$, for $n\to\infty$.

(2) 存在一个常数 $\lambda > 0$，使得

$$\sum_{n=1}^{N} \varrho(n) \sim \lambda N.$$

(3) 存在一个常数 $A \geqslant 0$，使得

$$\sum_{n=1}^{N} \varrho(n)^2 \ll N(\log N)^A,$$

对 $N \geqslant 2$。

(4) 存在一个常数 $D \geqslant 1$，使得

$$\varrho(mn) \leqslant D^{\mathrm{disc}(f)} \varrho(m)\varrho(n),$$

对所有 $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$。

证明。中国剩余定理蕴含 ϱ 是一个积性函数。由维尔辛定理 [34, 定理 1] 我们得出第二项。第三项的证明是标准的（例如参见 [10,引理 2。7]）。

为得出第四项，我们注意到对于所有 p素数、$p \nmid$ 判别式f以及 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 和 $\varrho(p^\alpha) \leqslant D$，都有 $\varrho(p^\alpha) = \varrho(p)$；对于所有 p 素数和某个常数 $D > 0$，亦然（证明见例如[10, 引理 2.4]）。我们还注意到，如果 $p|$判别式f且 $\varrho(p^\alpha) \neq 0$，那么 $\varrho(p^\beta) \neq 0$对于所有 $\beta \leqslant \alpha$均成立，因此将 m 和 n 分解为素数后即可得出结论。注意，这也蕴含了第一项，因为如果 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$，那么

$$\varrho(n) \ll D^k \ll D^{\log n/\log\log n}.$$

□

从现在起，我们固定 $r^* = 2\max(d(d+1)\ A)$ 以及 $B = 4r^{*2} + 4rA + 1$和常数 λ、D 和 A，如引理 8中所述。

根据狄利克雷定理，我们可以找到 a_i 和 $1 \leqslant q_i \leqslant N^i/(\log N)^B$ 互素整数，使得

$$\left|\alpha_i - \frac{a_i}{q_i}\right| \leqslant \frac{(\log N)^B}{q_i N^i}, \tag{35}$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant d$。我们还令

$$q = \mathrm{lcm}(q_1, \dots, q_d).$$

命题 1. 如果存在一个 $l \in \{1, \dots, d\}$ 使得 q_l 满足$q_l \geqslant (\log N)^B$，那么

$$\sum_{n=1}^{N} \varrho(n) e(F(n)) \ll \frac{N}{(\log N)^{1/2}}.$$

证明。 这直接由定理 1 应用于 $f = \rho$、 $r = r^*$和 $R = N^\ell/(\log N)^B$得出。 □

接下来，我们着重证明以下结果。

命题 2。假设对所有 $1 \leqslant i \leqslant d$， $q_i < (\log N)^B$。则有

$$\sum_{n=1}^{N} \varrho(n)e(F(n)) \ll \frac{N}{q^{\frac{2}{d(d+1)}-\epsilon}}.$$

结合命题2 和命题 1 ，可以推出定理 2。事实上，由于至少有一个 α_i 是无理数，且 $N \to \infty$，整数 q_i 在 (35) 中必须满足 $q_i \to \infty$ ，由此可得

$$\sum_{n=1} \varrho(n)e(F(n)) = o(N).$$

为了证明命题 2 ，我们将采用代数方法。我们把任务分成四个小节：首先进行一些化简，并给出该命题的证明，但这需要对另一个和作进一步分析。我们将使用狄利克雷级数来分析这个新的和。在下一小节中，我们用理解得更透彻的 L 函数来表示要分析的狄利克雷级数；第三小节则陈述它的一些性质。最后，我们汇总所有结果并完成证明。

9.1. 初步化简。我们对所有 $1 \leqslant i \leqslant d$假设 $q_i < (\log N)^B$，并且对 $r|q$ 及 $Q \in \mathbb{Z}[x]$设定

$$S_r(N, Q) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=r}}^{N} \varrho(n)e(Q(n)),$$

当和遍及所有整数$1 \leqslant n \leqslant N$时，我们在记号中省略 r 。

我们可以将 $S(N, F)$ 拆分成以下两个和

(36)
$$S(N, F) = \sum_{r|q} S_r(N, F) = \sum_{\substack{r|q \\ r<q^{1/d(d+1)}}} S_r(N, F) + \sum_{\substack{r|q \\ r\geqslant q^{1/d(d+1)}}} S_r(N, F).$$

我们可以用平凡估计来界定等式（36）右侧的第二个和，使用引理 8。事实上，

$$\left|\sum_{\substack{r|q\\ r\geqslant q^{1/d(d+1)}}} S_r(N,F)\right| \leqslant \sum_{\substack{r|q\\ r\geqslant q^{1/d(d+1)}}} \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=r}}^{N} \varrho(n) = \sum_{\substack{r|q\\ r\geqslant q^{1/d(d+1)}}} \sum_{\substack{n=1\\(n,q/r)=1}}^{N/r} \varrho(rn)$$

$$\ll_\epsilon \frac{N}{q^{1/d(d+1)-\epsilon}}. \tag{37}$$

我们转而关注当 $r \leqslant 1/d(d+1)$ 时的 $S_r(N,F)$。令 $b_j = \frac{a_j \cdot q}{q_j}$，对于 $1 \leqslant j \leqslant d$, $\tilde{F}(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{b_j}{q_j} x^j$ 和 $Q(x) = F(x) - \tilde{F}(x)$。注意，分部积分可得

$$\begin{aligned} S_r(N,F) = & \; e\left(Q(N)\right) S_r(N,\tilde{F}) \\ & - 2\pi i \sum_{j=1}^{d} j\beta_j \int_1^N u^{j-1} e\left(Q(u)\right) S_r(u,\tilde{F}) du, \end{aligned} \tag{38}$$

其中 β_j 定义为

$$\alpha_j = \frac{a_j}{q_j} + \beta_j. \tag{39}$$

特别地，由（35）

$$|\beta_j| \leqslant \frac{(\log N)^B}{q_j N^j}. \tag{40}$$

上述问题归结为分析 $S_r(N,F)$，而非 $S_r(N,F)$。

注意，由于我们对 r 的倍数求和，可以将 $e(F(n))$ 重写为 $e(F_r(n))$，其中 $F_r(n) := F(rn)$，因此后者是模 q/r 的周期函数。令 $q/r = r'$，并按如下方式利用模 r' 的狄利克雷特征分解 $S_r(u,F_r)$:

$$\begin{aligned} S_r(N,\tilde{F}) &= \sum_{x \bmod r'} e(\tilde{F}_r(x)) \sum_{\substack{m\leqslant N/r\\(m,r')=1\\ m\equiv x \bmod r'}} \varrho(rm) \\ &= \frac{1}{\varphi(r')} \sum_{x \bmod r'} e(\tilde{F}_r(x)) \sum_{\chi \bmod r'} \overline{\chi(x)} \sum_{m\leqslant N/r} \chi(m)\varrho(rm). \end{aligned} \tag{41}$$

我们将证明:

命题 3. 设 χ 是模r'的狄利克雷特征。存在常数 $c>0$, $0\leqslant\delta(\chi)\leqslant\lambda r$，使得

$$\sum_{m\leqslant N/r}\chi(m)\varrho(rm)=\delta(\chi)\frac{N}{r}+O(Ne^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log N}}).$$

此外，若 $\delta(\chi)\neq 0$，则 χ 的导子为 $h|\mathrm{disc}(p)$。

接下来我们证明，命题 3 意味着我们可以得出命题 2的证明。事实上，我们得到

$$S_r(N,\tilde{F})=\frac{N}{r\varphi(r')}\sum_{x \bmod r'}e(\tilde{F}_r(x))\sum_{\chi \bmod r'}\overline{\chi(x)}\delta(\chi)+O(Ne^{-\frac{1}{c'}\sqrt{\log N}}),$$

将其代入（38），并利用（40），可得

$$\begin{aligned}S_r(N,F)=&\ e\left(Q(N)\right)S_r(N,\tilde{F})\\&-C\int_1^N u\left(2\pi i\sum_{j=1}^d j\beta_j u^{j-1}\right)e\left(Q(u)\right)du+O(Ne^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log N}}),\end{aligned}$$

with

$$C=\frac{1}{r\varphi(r')}\sum_{x \bmod r'}e(\tilde{F}_r(x))\sum_{\chi \bmod r'}\overline{\chi(x)}\delta(\chi).$$

注意，分部积分

$$\int_1^N u\left(2\pi i\sum_{j=1}^d j\beta_j u^{j-1}\right)e\left(Q(u)\right)du\ll N,$$

并且由于若 $\delta(\chi)\neq 0$，则 χ 的导子为 $h|\mathrm{disc}(p)$，由此可得

$$S_r(N,F)\ll\frac{N}{r}\frac{1}{\phi(r')}\sum_{x \bmod r'}\chi(x)e(\tilde{F}_r(x))+O(Ne^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log N}}),\tag{42}$$

对于某个导子为 $h|$判别式(p) 的 χ。

回顾一下，

$$\tilde{F}_r(x)=\tilde{F}(rx)=\sum_{j=1}^d\frac{b_j r^j}{q_j}x^j=\frac{\sum_{j=1}^d(qb_j r^j/q_j)x^j}{q}.$$

令 q' 表示 q 的最小因数，使得多项式

$$P(x)=\sum_{j=1}^d(qb_j r^j/q_j)x^j,$$

模 q/q'为常数。注意，对每个 $1 \leqslant j \leqslant d$

$$\frac{qb_j r^j}{q_j} \equiv 0 \mod q/q'.$$

由于 $(b_j, q_j) = 1$，这意味着

$$q' > \frac{q_j}{r^j} \geqslant \left(\prod_{j=1}^{d} \frac{q_j}{r^j}\right)^{1/d} \geqslant \frac{q^{1/d}}{r^{(d+1)/2}} \geqslant q^{1/2d},$$

假设 $r \leqslant q^{1/d(d+1)}$.

由 Cochrane 和 Zheng 的工作可知 [9] 以及中国剩余定理可得

$$\sum_{x \mod r'} \chi(x) e(\tilde{F}_r(x)) \ll \frac{r'}{q'}(q')^{1-1/d} \ll \frac{r'}{q^{1/2d(d+1)}}.$$

将上述结果与（42）结合，得到

$$S_r(N, F) \leqslant \frac{N}{q^{1/2d(d+1)}} \quad \text{provided} \quad r \leqslant q^{1/d(d+1)}.$$

对 $r < q^{1/d(d+1)}$ 求和，得到

$$\sum_{\substack{r|q \\ r<q^{1/d(d+1)}}} S_r(N, \tilde{F}) \leqslant \frac{N}{q^{1/2d(d+1)+o(1)}}.$$

结合（36）和（37），命题 2 的证明至此结束。现在我们将着重证明命题 3。为了理解这个和

$$\sum_{n \leqslant N/r} \varrho(rn)\chi(n), \tag{43}$$

我们研究 $\chi \mod r'$ 的狄利克雷级数

$$D_r(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(rn)\chi(n)n^{-s}.$$

9.2. 分解 $D_r(s, \chi)$。注意到 $D_r(s, \chi)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时绝对收敛。我们的下一个目标是将 $D_r(s, \chi)$ 拓展到 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 的左侧，以便我们可以利用围道积分估算和（43）。我们将通过用著名的阿廷 L 函数分解 D_r 来实现这一点。为此，我们固定一些记号。

记 K_f 为 $\mathbb{C}$ 中 f 的分裂域，记 G 为 K_f 在 $\mathbb{Q}$ 上的伽罗瓦群，并记 $\mathbb{Q}(e(1/r'))$ 为由 r' 次单位根生成的圆分域。注意，后者是 $\mathbb{Q}$ 的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群 $C_{r'}$ 同构于 $(\mathbb{Z}/r'\mathbb{Z})^{\times}$。

我们还考虑 K_f 与 $\mathbb{Q}(e(1/r'))$ 的复合域，并将其记为 $K_{f,\,r'}$，其在 $\mathbb{Q}$ 上的伽罗瓦群记为 $G_{r'}$。注意，存在一个自然的单射

$$G_{r'} \to G \times C_{r'} \simeq G \times (\mathbb{Z}/r'\mathbb{Z})^{\times}.$$

此外，注意到由域自同构的延拓定理可知，投影 $p_1:\ G_{r'} \to G$ 和 $p_2:\ G_{r'} \to (\mathbb{Z}/r'\mathbb{Z})^{\times}$ 是满射。

ˆ我们将 G 记为 G 的复 ˆ不可约表示的同构类所成的有限集合，并且对于 $\pi \in G$，记 χ_π 为 π 的特征。

注意，χ 可以视为 $(\mathbb{Z}/r'\mathbb{Z})^{\times}$ 的一个特征，因而也可视为一个特征 $\eta:\ C_{r'} \to \mathbb{C}^{\times}$。已知对于 $p \nmid r'$，以及 p 处的 Frobenius自同构 σ_p，有 $\eta(\sigma_p) = \chi(p)$。

因此，我们考虑 $G_{r'}$ 的表示 $p_1^*\pi = \pi \circ p_1$ 和 $p_2^*\eta = \eta \circ p_2$，并注意到它们的张量积满足

$$\operatorname{tr}(p_1^*\pi \otimes p_2^*\eta(\sigma_p)) = \chi_\pi(\sigma_p)\chi(p), \tag{44}$$

对于 $p \nmid$ 判别式(f) 和 $p \nmid r'$。

命题 4. $D_r(s,\chi)$ 有如下表达式

$$D_r(s,\chi) = F_r(s,\chi) \prod_{\pi \in \hat{G}} E_{r,\pi}(s,\chi)(L(s, K_{f,r'}/\mathbb{Q}, p_1^*\pi \otimes p_2^*\eta))^{m_\pi},$$

对于 $m_\pi \geqslant 0$ 一个整数，并且对于任意 $\epsilon > 0$, $F_r \ll_\epsilon q^\epsilon$ 和 $E_{r,\,\pi} \ll q^\epsilon$ 对于 $\operatorname{Re}(s) \geqslant 3/4$。

为了证明该命题，我们需要以下引理:

引理 9. 记 π_f 为 G 作用在 $\mathbb{C}$ 中 f 的根集上的置换表示，并设

$$\pi_f = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\pi \pi$$

为其不可约表示分解，其中 $m_\pi \geqslant 0$ 为整数。对于所有满足 $p \nmid$ 判别式(f) 的情形，均有

$$\varrho(p) = \sum_{\pi} m_\pi \cdot \chi_\pi(\sigma_p), \tag{45}$$

对于 $\sigma_p \in G$ 处的 Frobenius自同构 p。

证明。注意到 $\varrho(p)$ 是 Frobenius自同构 σ_p at p 的不动点数，也就是置换表示 σ_p 的特征值，即可得证。

□

命题 4的证明。 首先我们注意到 D_r 可以按以下方式分解

$$\begin{aligned} D_r(s,\chi) &= \sum_{e|r^\infty} \sum_{(k,r)=1} \chi(ek)\varrho(erk)(ek)^{-s} \\ &= \sum_{e|r^\infty} \varrho(er)\chi(e)e^{-s} \sum_{(k,r)=1} \chi(k)\varrho(k)k^{-s}, \end{aligned}$$

其中，记号 $e|r^\infty$ 表示 e 遍历由所有整除 r的素数的幂所构成的所有可能乘积。

我们记

$$\begin{aligned} E_r(s,\chi) &= \sum_{e|r^\infty} \varrho(er)\chi(e)e^{-s} \\ \tilde{D}_r(s,\chi) &= \sum_{(k,r)=1} \chi(k)\varrho(k)k^{-s}, \end{aligned}$$

并利用引理 8 以及性质 $\varrho(p^n) \leqslant C$，对所有 $n \geqslant 1$ 和 p素数，我们观察到 $E_r(s,\chi) \ll r^\epsilon$ 在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 3/4$ 范围内一致成立，并且 $\tilde{D}_r(s,\chi)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > 1$时绝对收敛。

为了研究 ϱ的性质，我们将在 $D_r(s,\chi)$中整除 f 判别式的素数分解；又由于 $r|q$，我们还将整除 q的其余素数分解。由此得到

$$\tilde{D}_r(s,\chi) = E_{1,r}(s,\chi) \prod_{\substack{p\nmid \mathrm{disc}(f) \\ p\nmid q}} \sum_{k\geqslant 0} \varrho(p^k)\chi(p)^k p^{-ks},$$

其中$E_{1,r}(s,\chi)$是整函数，且当 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 3/4$ 时由 $C(\epsilon)q^\epsilon$有界。

我们以类似的方式进行，并将指数大于 2 的素数幂因子提出，得到

$$\tilde{D}_r(s,\chi) = E_{1,r}(s,\chi)E_2(s,\chi) \prod_{\substack{p\nmid \mathrm{disc}(f) \\ p\nmid q}} (1+\varrho(p)\chi(p)p^{-s}), \tag{46}$$

其中，$E_2(s,\chi)$ 在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 3/4$ 时全纯，且在垂直带内由 $C(\epsilon)q^\epsilon$ 有界。

现在我们可以使用引理9 并作进一步分解，写成

$$\tilde{D}_r(s,\chi) = E_{1,r}(s,\chi)E_2(s,\chi)E_{3,r}(s,\chi) \prod_{\pi\in\hat{G}} \prod_p (1+\chi_\pi(\sigma_p)\chi(p)p^{-s})^{m_\pi},$$

对于$E_{3,r}$ 在垂直带内全纯，并由$C(\epsilon,f)q^\epsilon$一致有界，其中 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 3/4$。令 $F_r = E_{1,r}E_2E_{3,r}$。最后，我们

使用等式（44），再进行一次与之前类似的分解，得到

$$\prod_p (1+\chi_\pi(\sigma_p)\chi(p)p^{-s}) = E_{r,\pi}(s,\chi)L(s,K_{f,q}/\mathbb{Q},p_1^*\pi\otimes p_2^*\eta).$$

□

注意，现在我们处理的是阿廷 L 函数，相较于原始的狄利克雷级数，它们的理解更为深入。由于 p_1 是满射且 π 不可约，因此 $p_1^*\pi$ 是一个不可约表示。此外，由于 $p_2^*\eta$ 的维数为 1，我们可以得出 $p_1^*\pi\otimes p_2^*\eta$ 也是一个不可约表示。阿廷猜想指出，除非该表示是平凡的，否则这个 L 函数是整函数——而当 $p_1^*\pi$ 是 $p_2^*\eta$的逆时，可能出现这种情况。

为避免假设阿廷猜想，我们将改用布劳尔诱导定理（例如见 [33, 定理 19]）。该定理指出，对于 G 的每个子群 H 以及一维特征 $\beta_H\colon H\to\mathbb{C}^\times$，存在整数 n_{π,β_H}，使得

$$\chi_\pi = \sum_H\sum_{\beta_H} n_{\pi,\beta_H}\cdot \mathrm{Ind}_H^G\beta_H.$$

注意，这意味着 $L(s,K_{f,q}/\mathbb{Q},p_1^*\pi)$ 可表示如下

$$\begin{aligned} L(s,K_{f,q}/\mathbb{Q},p_1^*\pi) = L(s,K_f/\mathbb{Q},\pi) &= \prod_H\prod_{\beta_H} L(s,K_f/\mathbb{Q},\mathrm{Ind}_H^G\beta_H)^{n_{\pi,\beta_H}} \\ &= \prod_H\prod_{\beta_H} L(s,K_f/K_H,\beta_H)^{n_{\pi,\beta_H}}, \end{aligned}$$

其中 $K_H\subset K_f$ 是由 H 固定的子域，这意味着 H 是 K_f 关于 K_H 的伽罗瓦群。

现在我们可以引入狄利克雷特征的扭曲。我们用 $H'=p_1^{-1}(H)$ 表示，并注意到可以写成

$$p_1^*\pi = \bigoplus_H n_{\pi,\beta_H}\,\mathrm{Ind}_{H'}^{G_{r'}}(p_1^*\beta_H),$$

因此

$$p_1^*\pi\otimes p_2^*\eta = \bigoplus_H\bigoplus_{\beta_H} n_{\pi,\beta_H}\,\mathrm{Ind}_{H'}^{G_{r'}}(p_1^*\beta_H\otimes \mathrm{Res}_{H'}^{G_{r'}}\,p_2^*\eta).$$

因此，记为 $\theta_{\beta_H}=p_1^*\beta_H\otimes\mathrm{Res}_{H'}^{G_{r'}}\,p_2^*\eta$，最终可写为

$$L(s,K_{f,q}/\mathbb{Q},p_1^*\chi\otimes p_2^*\eta) = \prod_H\prod_{\beta_H} L(s,K_{f,q}/K_H,\theta_{\beta_H})^{n_{\pi,\beta_H}},$$

因此， D_r 有如下表示

$$D_r(s,\chi) = F_r(s,\chi)\prod_{\pi\in\hat{G}} E_{r,\pi}(s,\chi)\prod_{H}\prod_{\beta_H} L(s,K_{f,q}/K_H,\theta_{\beta_H})^{n_{\pi,\beta_H}}. \tag{47}$$

现在， $L(s,K_{f,\ q}/K_H,\theta_{\beta_H})^{n_{\pi,\ \beta_H}}$是维数为一的阿廷 L 函数，我们知道，除了当 θ_{β_H} 是平凡的一维特征时在 $s=1$ 处有一个极点外，它们都是整函数。

9.3. 阿廷 L 函数在 $s=1$ 附近的界。 我们用 $q_{\pi,\ i}$表示 $L(s,\ K_{f,\ q}/K_H,\ \theta_{\beta_H})$ 的导子，并注意到可以对其作如下估计（例如参见 [6]），

$$q_{\pi,\beta_H} \leqslant \mathrm{cond}(p_1^*\beta_H)\cdot \mathrm{cond}(\mathrm{Res}_{H'}^{G_q} p_2^*\eta) \leqslant Mq,$$

其中 $M=\sup_{\pi,\ \beta_H}\mathrm{cond}(p_1^*\beta_H)$。众所周知， $L(s,K_{f,\ q}/K_H,\theta_{\beta_H})$ 在区域内至多有一个实零点 β

$$\sigma \geqslant 1-\frac{c}{\log(q_{\pi,\beta_H}(|t|+3))}, \tag{48}$$

对于 $s=\sigma+it\in\mathbb{C}$，且 c 为一个普适常数（例如参见 [16, 定理 5.35]）。注意，只有当 θ_i 是二次特征时，这个零点才可能存在。

为简化记号，下文中我们令 $g=\theta_{\beta_H}$，并省略域 $K_{f,\ q}/K_H$。记 β 为区域（48）中的可能例外，并令 $\boldsymbol{q}$ 为 g的导子。此外，若 $r_1=1$ 具有例外零点 g β，则令 $r_1=0$；否则令其为 $r_2=1$。类似地， g 是平凡特征，因此在 $s=1$处有极点；若非如此，则令 $r_2=0$。

命题 5. 令 $s=\sigma+it\in\mathbb{C}$ 满足以下条件：

$$\sigma \geqslant 1-\frac{c}{10\log(Mq(|t|+3))} \tag{49}$$

$$|s-\beta| \geqslant \frac{1}{20\log(3Mq)} \tag{50}$$

$$|s-1| \geqslant \frac{1}{20\log(3Mq)}. \tag{51}$$

则有

$$L(s,g) \ll \log(Mq(|t|+3))$$
$$\frac{1}{L(s,g)} \ll \log(Mq(|t|+3)),$$

其中隐含常数与这些参数无关。

如果 g 不是平凡的，则条件（51）可以省略。如果50）有 g 且不存在例外零点，则条件（

证明。令 $\gamma(s,\ g)\ =\ \pi^{-s/2}\gamma\left(\frac{s+\kappa_g}{2}\right)$，其中 $\kappa_g\ =\ 0$ 或为 1，并令 $\Lambda(s,\ g)\ =\ \boldsymbol{q}^{s/2}\gamma(s,\ g)\ L(s,\ g)$ 为扩展的 L 函数。已知 $\Lambda(s,\ g)$ 是阶至多为 1 的亚纯函数。因此，我们可以按照 [31, 定理 114] 中的方法继续，从而得到该定理的结论。

□

9.4. 完成证明。

命题 2的证明。为了估计和 $\sum_{n\leqslant N/r}\varrho(rn)\ \chi(n)$，我们首先对其进行平滑处理

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=r}}^{N/r}\varrho(n)\chi(n)=\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=r}}^{\infty}\varrho(n)\chi(n)\phi(n)+O(\tilde{N}),$$

其中，ϕ定义为

$$\phi(x)=\min\left(x,1,1+\frac{N/r-x}{\tilde{N}}\right)$$

当 $0\leqslant x\leqslant N/r+N$ 且 $\phi(x)\ =0$ 当 $x>N/r+N$时，其中 $N>0$ 稍后选定。注意，梅林反演意味着

(52)

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=r}}^{\infty}\varrho(n)\chi(n)\phi(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(3)}D_r(s,\chi)\hat{\phi}(s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(3)}F_r(s,\chi)\prod_{\pi\in\hat{G}}E_{r,\pi}(s,\chi)(L(s,K_{f,r'}/\mathbb{Q},p_1^*\pi\otimes p_2^*\eta))^{m_\pi}\hat{\phi}(s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(3)}F_r(s,\chi)\prod_{\pi\in\hat{G}}E_{r,\pi}(s,\chi)\prod_{H}\prod_{\beta_H}L(s,K_{f,q}/K'_H,\theta_{\beta_H})^{n_{\pi,\beta_H}}\hat{\phi}(s)ds.$$

我们的目标是移动积分路径，并利用关于 L 函数的信息 $L(s,\ K_{f,\ q}/K'_H,\ \theta_{\beta_H})$ 来获得 $\backsim S_r(s,\ F_r)$ 的良好界。注意，我们可以找到 $c/2\leqslant Q\leqslant c/10$，使得命题 5 的所有条件对其均成立

$$s\in\mathcal{Z}=\{s=\sigma+it,\sigma=1-\frac{Q}{\log\left(Mq(|t|+3)\right)}\}.$$

将方程 (52中的积分路径移至 $\mathcal{Z}$，我们得到

(53)
$$\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=r}}^{\infty} \varrho(n)\chi(n)\phi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{Z}} D_r(s,\chi)\widehat{\phi}(s)ds + \alpha\,\mathrm{Res}(D_r(s,\chi),1)\cdot\frac{N}{r}$$
$$+\,\tilde{\alpha}\,\mathrm{Res}(D_r(s,\chi),\beta)\cdot N^{\beta},$$

ˆ 其中，若存在 $\pi \in G$，使得 $p_1^*\pi \otimes p_2^*\eta$ 是 K_f 中的主特征，且 $m_\pi = 1$，则有 $\alpha = 1$；否则有 $_{r'}/\mathbb{Q}$。同样，若 $L(s, K_{f,q}/K'_H, \theta_{\beta_H})$ 有一个例外零点 β，且 n_π，则有 $\tilde{\alpha} = 1$；否则有 $_{\beta_H} = -1$。由命题 4 可知，至多有一个平凡特征 $p_1^*\pi \otimes p_2^*\eta$和一个二次特征 θ_{β_H}。此外，若 $p_1^*\pi \otimes p_2^*\eta$ 是平凡特征，则我们注意到 χ 的模导子 h 必须整除 $\mathrm{disc}(f)$。

我们分别估计等式（53）右端的每一项。为了估计第一项，我们注意到ϕ 的梅林变换满足

$$\widehat{\phi}(s) = \int_0^{N+\tilde{N}} \phi(z)z^{s-1}dz \ll \frac{N^\sigma}{|s|}\min\left(1, \frac{N}{|s|\tilde{N}}\right),$$

（见[16, 定理 5.12]）。因此，

$$\int_{\mathcal{Z}} D_r(s,\chi)\hat{\phi}(s)ds \ll \int_{\mathcal{Z}} |D_r(s,\chi)|\frac{N^\sigma}{|s|}\min\left(1, \frac{N}{|s|\tilde{N}}\right)|ds|.$$

˜令 $T = N/rN$并令 $\sigma(T) = 1 - Q/\log(Mq(T+3))$，并注意到上述观察、命题 4 和命题 5意味着

$$\int_{\mathcal{Z}} D_r(s,\chi)\hat{\phi}(s)ds \ll N^{\sigma(T)}q^{Y\epsilon},$$

其中常数 $Y > 0$ 只依赖于 f。

现在处理最后一项 $\tilde{\alpha}\,\mathrm{Res}(D_r(s,\chi)\ \beta)\cdot N^\beta$。西格尔证明了（例如，见 [16, 定理 5.28]），如果例外零点 β 存在，那么对每个 $\epsilon > 0$，都存在一个常数 $C(\epsilon) > 0$，使得

(54)
$$\beta \leqslant 1 - \frac{c(\epsilon)}{\mathrm{cond}(\theta_i)^\epsilon} \leqslant 1 - \frac{c(\epsilon)}{Mq^\epsilon}.$$

为了界定 β 处的留数，我们注意到，若 θ_π, $_{\beta_H}$ 非平凡，则可使用命题 5并得到

$$|L(s, K_{f,q}/K'_H, \theta_{\beta_H})|^{n_{\pi,i}} \ll |\log 3Mq|^{|n_{\pi,\beta_H}|}.$$

若 θ_{β_H} 是平凡的，则

$$|L(s, K_{f,q}/K'_H, \theta_{\beta_H})|^{n_{\pi,\beta_H}} \ll_\epsilon q^{\epsilon|n_{\pi,\beta_H}|},$$

对于由二次特征对应的 L函数给出的留数，我们有

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{L(s, K_{f,q}/K'_H, \theta_{\beta_H})}, \beta\right) = \frac{1}{L(s, K_{f,q}/K'_H, \theta_{\beta_H})}.$$

我们可以从 $L'(s,\ K_{f,\ q}/K'_H,\ \theta_{\beta_H}) \gg 1$ 的定理11.4最后一部分推得[31]。综合以上结果，我们得到

$$\operatorname{Res}(D_r(s,\chi),\beta) \cdot N^\beta \leqslant q^\epsilon N^{1-C(\epsilon)/q^\epsilon}.$$

取 $T = \exp\left(\frac{1}{3}\sqrt{\log N}\right)$。由于 $q \leqslant (\log N)^B$，上述讨论表明

$$S_r(N, \tilde{F}_r) = \alpha \operatorname{Res}(D_r(s,\chi),1) \cdot \frac{N}{r} + O(Ne^{-\frac{1}{c(\epsilon)}\sqrt{\log N}}), \tag{55}$$

对于某个常数 $c(\epsilon)$，且 $\epsilon > 0$ 充分小。由于

$$\sum_{n\leqslant N} \varrho(n) \leqslant \lambda N,$$

且方程（55）中的误差项为 $o(N)$，我们得出

$$\operatorname{Res}(D_r(s,\chi),1) \leqslant \lambda r$$

. □

10. Sharpness of Theorem 1

按照 [32], 的方法，我们将构造一个完全乘法函数 $f = f_{N,F}$，满足 $|f(n)| \leqslant 1$，使得

$$\left|\sum_{n\leqslant N} f(n)e\left(F(n)\right)\right| \geqslant \frac{1}{10}\frac{N}{\log N}. \tag{56}$$

我们首先注意到，函数 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 由下式给出

$$G(z) = \sum_{n\leqslant N} z^{\Omega(n)} e(F(n)) + \sum_{\frac{N}{2}<p\leqslant N} (1 - ze(F(p)))$$

是整函数，且其在零点处的值满足

$$G(0) = \sum_{\frac{N}{2}<p\leqslant N} 1 \geqslant \frac{1}{10}\frac{N}{\log N},$$

对于足够大的 N。因此，根据最大模原理，存在 $z_0 \in \mathbb{C}$、$|z_0| = 1$，使得 $|G(z_0)| \geqslant |G(0)|$。

定义完全乘性函数 f 为 $f(p) = z_0$，当$p \leqslant N/2$时，以及 $f(p) = e(-F(p))$，当 $p > N/2$时。为得出方程（56）成立，只需注意到

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)e\left(F(n)\right) = \sum_{n\leqslant N} z_0^{\Omega(n)} e(F(n)) + \sum_{\frac{N}{2}<p\leqslant N} (1 - z_0 e(F(p)))$$
$$= G(z_0) \gg \frac{N}{\log N}.$$

References

[1] G. Bachman, 《关于带乘法系数的指数和》II，Acta Arith，106(1):41–57，2003。2[2] J. Bourgain、P. Sarnak 和 T. Ziegler，《M ¨obius 与 horocycle flows 的不相交性》，载于《从傅里叶分析与数论到拉东变换与几何》，第67–83页，数学发展丛书第28卷，Springer，纽约，2013。3[3] J. Bourgain、C. Demeter 和 L. Guth，《证明三次以上次数的 Vinogradov 均值定理主猜想》，Ann. of Math.，184(2):633–682，2016。14，15[4] R. de la Bret´eche，《指数和与不含大素因子的整数》，Proc. London Math. Soc，77(1):39–78，1998。2[5] R. Bret´eche 和 A. Granville，《带乘法系数的指数和及其应用》，Trans. Amer. Math. Soc.，375(10):6875–6901，2022。2[6] Bushnell、Colin John 和 Guy Henniart，《一对对象导子的上界》，Journal of Number Theory 65.2 (1997): 183-196。35[7] M. C. Chang，《不完全混合特征和的估计》，载于《不规则的心智》，Bolyai Society Mathematical Studies，第21卷，Springer，柏林、海德堡，2010。5，6[8] M. C. Chang，《合数模数的短特征和》，J d' Analyse Math.，123:1–33，2014。6[9] T. Cochrane 和 Z. Zheng，《纯指数和与混合指数和》，Acta Arith.，91(3):249–278，1999。31[10] V. Cri¸san 和 Paul Pollack，《多项式同余方程的最小根》，Math. Res. Lett.，27(1):43–66，2020。27[11]H. Daboussi，《几乎周期的乘法函数 B》，波尔多算术日（会议，波尔多大学，波尔多，1974），第321—324页。Ast´erisque，第24–25卷，法国数学会，巴黎，1975。2[12] P. Enflo，《数论、调和分析与欧几里得空间几何交界处的一些问题》，Quaestiones Math.，18(1-3):309–323，1995。5，6[13] A. Granville 和 K. Soundararajan，《大特征和》，J. Amer. Math. Soc.，14(2):365–397，2001。25[14] A. Granville 和 K. Soundararajan，《大特征和：拟性特征与 P ´olya-Vinogradov 定理》，J. Amer. Math. Soc.，20(2):357–384，2007。3[15] K. Gong 和 C. Jia，《带乘法系数的平移特征和》，J. Number Theory，153:364–371，2015。3

[16] H. Iwaniec 和 E. Kowalski，《解析数论》，美国数学会讨论会出版物，第53卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004。xii+615页。6，35，37[17] D. R. Heath-Brown 和 L. B. Pierce，《短混合特征和的 Burgess 界》，J. Lond. Math. Soc. (2)，91(3):693–708，2015。5，6[18] A. Hildebrand，《P´olya-Vinogradov 不等式中的常数》，Canad. Math. Bull.，31(3):347–352，1988。3，25[19] A. Hildebrand，《特征和的大值》，J. Number Theory，29(3):271–296，1988。3[20] A. Hildebrand 和 G. Tenenbaum，《不含大素因子的整数》，J. Th´eor. Nombres Bordeaux，5(2):411–484，1993。25[21] L. K. Hua，《素数加法理论》，数学专著译丛，第13卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1965。xiii+190页。14，15[22] C. Hooley，《多项式同余方程的根的分布》，Mathematika，11:39–49，1964。5，26[23] Y. Jiang、G. L¨u 和 Z. Wang，《不依赖拉马努金猜想的带乘法系数指数和》，Math. Ann.，379(1-2):589–632，2021。3[24] A. A. Karatsuba，《短克洛斯特曼和的新估计》，Mat. Zametki，88(3):384–398，2010。3[25] B. Kerr，《P´olya-Vinogradov 不等式中的常数》，J. Number Theory，212:265–284，2020。25[26]M. A. Korolev，《带乘法系数的克洛斯特曼和》，Izv. RAN. Ser. Matem.，82(4):3–17，2018。3[27] M. A. Korolev 和 I. E. Shparlinski，《由算术函数扭曲的代数迹函数和》，Pacificic J. Math.，304(2):505–522，2020。3[28] K. Matom¨aki、M. Radziwill、T. Tao、J. Ter¨av¨ainen 和 T. Ziegler，《有界乘法函数在短区间上的高阶一致性（平均意义下）》，Ann. Math.，197 (2)，739–857，2023。3[29] L. Matthiesen，《乘法函数的广义傅里叶系数》，Algebra Number Theory，12(6):1311–1400，2018。3[30] L. Matthiesen，《乘法函数的线性相关》，Proc. London. Math. Soc. (3)，121(3):372–425，2020。3[31] H. L. Montgomery 和 R. C. Vaughan，《乘法数论 I：经典理论》，第97卷，剑桥大学出版社，2007。36，38[32] H. L. Montgomery 和 R. C. Vaughan，《带乘法系数的指数和》，Invent. Math.，43(1):69–82，1977。2，5，7，9，10，38[33] JP. Serre，《有限群的线性表示》，由 Leonard L. Scott 根据法文第二版翻译。数学研究生教材，第42卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1977。x+170页。34[34]E. Wirsing，《乘法函数和的渐近行为》，Math. Ann.，143:75–102，1961。27

KTH Royal Institute of Technology, Stockholm
and
Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Departmentof Algebra, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8, Czech Republic Depart-ment of Mathematics

电子邮箱：matteobordignon91@gmail.com

Department of Mathematics, ETH Zürich, Switzerland电子邮箱：cynthia.bortolotto@math.ethz.ch

UNSW Canberra, School of Science电子邮箱：bryce.kerr@unsw.edu.au