arXiv:2303.03778v2 [math.LO] 5 Dec 2023

阿贝尔群与幂零群刚性条件的反分类结果

GIANLUCA PAOLINI 和 SAHARON SHELAH

Abstract. 借助我们近期论文 [13], 中的技术与思路，我们证明了可数阿贝尔群和幂零群中若干刚性条件的反分类结果。我们证明了三个主要定理：（1）刚性阿贝尔群在可数无挠阿贝尔群空间（TFAB_ω）中是完全余解析的；（2）霍普夫群在 TFAB_ω 中是完全余解析的；（3）余霍普夫群在可数 2-幂零群空间中是完全余解析的。结合我们在 [13, S5],中的结果——该结果表明，自同态刚性阿贝尔群在 TFAB_ω 中是完全余解析的——这说明群论（阿贝尔群论）中四个重要的刚性概念，作为余解析问题，其复杂度已达到最高。此外，上述第二和第三个定理解决了 Thomas 在 [18], 中提出的两个开放问题；他当时针对所有可数群构成的空间提出了这些问题。我们尚未解决余霍普夫混合阿贝尔群在可数阿贝尔群空间中是否完全余解析的问题，但将该问题归结为一个关于有限生成群的具体问题：我们证明，若 G 是一个可数的余霍普夫约化阿贝尔群，那么对于每个素数 p， G 的挠子群 $\mathrm{Tor}_p(G)$ 都是有限的，并且 G 嵌入有限生成群 $\prod_{p\in\mathbb{P}}\mathrm{Tor}_p(G)$。

1. Introduction

所有定义域为 ω 的群的集合（ω 只是 $\mathbb{N}$ 的另一种记法）自然构成一个 Borel空间 Gp_ω。这使我们能够利用 Borel空间 Gp_ω 中子集的通常复杂性概念（例如解析集、余解析集等），将可数群论中的分类问题形式化为复杂性问题。这不仅适用于群，实际上也适用于任意一阶[1]理论 T，并且正是所谓可数结构的不变描述集合论[2]的前提。在这一背景下，我们最近在 [13][3] 中证明，可数无挠阿贝尔群的博雷尔空间（TFAB_ω）就按同构分类而言具有尽可能高的复杂性，从而解决了 Friedman 和 Stanley 于 '89 年提出的一个重要猜想（参见 [7]）。结合 Thomas [19, 20] 关于有限秩 TFAB_ω 的基本结果，这就完全解决了 TFAB_ω的同构问题。当然，这绝不是故事的终点

Date：2023年12月6日。Shelah 出版物列表中的第 1237 项。第一作者的研究部分得到 PRIN 2017 项目"数理逻辑：模型、集合、可计算性"（项目编号 2017NWTM8R）和 PRIN 2022 项目"模型、集合与分类"（项目编号 2022TECZJA）的资助。第二作者的研究部分得到"独立理论"NSF-BSF 资助（BSF 3013005232）以及以色列科学基金会（ISF）第 1838/19 号和第 2320/23 号资助。[1]事实上，对于逻辑中的任意理论 T $\mathfrak{L}_{\omega_1,\,\omega}$，不过在此假设 T 是一阶的就足够了。[2]关于这一研究领域的详细介绍，请参阅经典参考文献 [9], ；若想快速了解本文所用的概念，请参阅我们论文 [13]的引言。[3]截至 04.12.2023, [13] 已被《数学年刊》（2）接受发表，链接见此处。

关于可数结构的描述集合论与可数阿贝尔群论中的分类问题之间的相互作用。一方面，我们可以考虑在其他具有研究价值的等价关系下的分类问题（例如，参见 Calderoni 和 Thomas [4] 关于在双嵌入等价下对可数阿贝尔群进行分类的工作）；另一方面，我们可以考虑关于（阿贝尔）群代数性质的分类问题（其中，我们将这些性质视为 Gp_ω 的子集）。在这方面，我们在 [13, S5] 中证明，TFAB_ω 中的自同态刚性群（见下文）构成 TFAB_ω的一个完全余解析子集，因此，对这些群的分类作为一个余解析问题具有尽可能高的复杂性。在本文中，我们继续开展这些研究，依托于我们在论文 [13], 中发展出的精细工具；该论文专注于刚性的其他概念，而这些概念对于（阿贝尔）群论至关重要。为此，我们现在回顾以下定义：

定义 1.1。设 G 是一个群。
(1) 若 G 的每个满射自同态都是单射，我们称 G 是 Hopfian。(2) 若 G 的每个单射自同态都是满射，我们称 G 是余霍普夫。(3) 若 G 是阿贝尔群，当 $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_G, -\mathrm{id}_G\}$时，我们称 G 是刚性的。(4) 若 G 是阿贝尔群，当 $f \in \mathrm{End}(G)$ 时，我们称 G 是自同态刚性的；这意味着存在$m \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $a \in G$， $f(a) = ma$ （即， f 是乘以一个整数的映射）。

上述四个概念虽然源自不同的背景，但本质上无疑十分相似，也就是说，它们都是刚性条件。代数学家和集合论学家往往认为这类条件极为重要（下文将介绍一些历史背景）。正如已经提到的，在 [13, S5] 中，我们证明了自同态刚性的阿贝尔群是完全余解析的。本文旨在证明，1.1 节中的另外三种刚性概念也都是完全余解析的。此外，这也解决了 Thomas 在 [18]中提出的以下两个问题：

问题 1.2（Thomas）。(1) 霍普夫群在 Gp_ω 中是完全余解析的吗？(2) 余 Hopf 群在 Gp_ω 中是完全余解析的吗？

我们对 Thomas 所提问题的解答采用了一种非常强的形式：也就是说，我们证明了，在定义域为 ω 的无挠阿贝尔群空间中，霍普夫群已经是完全余解析的；而在定义域为 ω 的 2-幂零群空间中，余霍普夫群已经是完全余解析的。显然，要证明这些概念在阿贝尔或 2-幂零语境中是完全余解析的，比证明它们对所有可数群都成立要困难得多，因为用于展示完全性的构造可施展的空间要小得多。

引言剩余部分将介绍我们所研究问题的背景和相关情况。我们从（余）Hopfian 性质谈起。Hopfian 群和余 Hopfian 群的概念早已在不同名称下得到研究。在阿贝尔群论中，Baer 最先于 [2], 研究了这些概念，并将它们称为 Q-群和 S-群。现代术语源自德国数学家 H. Hopf 的研究；他证明，某些二维流形具有这一特征性质。近年来，由于发现了 Hopfian 阿贝尔群和余 Hopfian 阿贝尔群与代数熵及其对偶的研究之间存在联系（见 [6, 10]），相关研究重新活跃起来。例如，零代数熵群必定是余 Hopfian 群（关于这两个主题之间联系的更多内容，见 [11]）。一个简单的观察表明，无挠阿贝尔群是余 Hopfian 群，当且仅当它是有限秩可除群。因此，这类群的分类问题自然归结为挠情形和混合情形。

这一研究方向的一项重大进展由 Beaumont 和 Pierce 于 [3] 取得：作者证明了若干重要的一般性结果，尤其证明了若 G 是余 Hopfian 群，则 Tor(G) 的基数至多为连续统；此外， G 不可能是基数为 $\aleph_0$ 的 p-群。自那以后，据我们所知，在阿贝尔群或幂零语境中再无太多新发现，关于余 Hopfian 阿贝尔群的主要问题也转向了不可数情形（关于这一主题，见我们的论文 [14] ）。转而讨论 Hopfian 群，情况则大不相同，因为在这种情形下，无挠阿贝尔群成为 Hopfian 群并没有明显的障碍。此外，每个端刚性阿贝尔群都是 Hopfian 群，而且已有若干构造这类群的经典技巧，例如见 [17]。除此之外，我们认为，人们对无挠 Hopfian 阿贝尔群的一般分类问题所知甚少（事后看来，这或许事出有因，见定理 1.4）。最后，我们想指出，关于（余）Hopfian 阿贝尔群仍有若干问题悬而未决（例如见 [11, 12] 及其中的参考文献）。

我们继续回顾与这些问题相关的背景，并转而讨论自同态环刚性和刚性条件（即 1.1 中的（3）和（4）），因此自然假设 G 是阿贝尔群。举例来说，这些现象最典型的例子无疑是群 $\mathbb{Z}$，众所周知，它既是自同态环刚性的，也是刚性的。这两个概念在 20 世纪 70 年代和 80 年代得到了广泛研究，尤其是 Fuchs、Shelah、G¨obel、Eklof 等人。在这一背景下，研究兴趣主要集中于不可数情形，多年来人们构造出了许多这类群。刚性这一概念也在截然不同的背景下受到关注；事实上，在 Adams 和 Kechris [1] 的开创性工作中，“超刚性方法”最引人入胜的应用之一，就是证明秩为 n 的刚性阿贝尔群的同构问题的复杂度随 n 严格递增（如上所述，后来 Thomas 将这一结果推广到了所有有限秩为 [19, 20] 的可数无挠阿贝尔群）。同样，在这两种情形下，正如预期的那样，目前尚无一般性的分类结果（这自有其原因）。

现在我们引入一些记号，然后陈述定理作为总结。

记号 1.3。(1) AB$^\omega$ 表示定义域为 ω的阿贝尔群的 Borel空间。(2) TFAB$^\omega$ 表示定义域为 ω 的无挠阿贝尔群的 Borel空间。(3) NiGp(n)$^\omega$ 表示定义域为 ω的 n 级幂零群的 Borel空间。

定理 1.4。刚性的 $G \in$ TFAB$^\omega$ 在 TFAB$^\omega$中是完全余解析的。

定理 1.5。霍普夫群在 TFAB$^\omega$中是完全余解析的。

定理 1.6。余霍普夫群在 NiGp(2)$^\omega$中是完全余解析的。

遗憾的是，我们无法确定能否将定理 1.6 推广到阿贝尔情形（由于上文所述，这种情形必然是混合型的）。不过，在这方面，我们确实获得了一些重要的补充信息：

定理 1.7. 如果 $G \in$阿贝尔群$^\omega$ 是余霍普夫且约化的，那么对于每个素数 p，我们有 Tor$_p$(G) 是有限的，并且 G 嵌入有限生成群 $\prod_{p\in\mathbb{P}}$Tor$_p$(G)。

请注意，由于 [14, 断言 2.15]，1.7 中的假设“G 是约化的”并不失一般性。正如前面提到的，我们留下以下开放问题：

问题 1.8. 阿贝尔群中的余 Hopf 群是否是完全余解析的？$^\omega$

本文完成后，我们发现，问题 1.2(1) 已在近期预印本 [15]，中得到解答；该构造使用了广义缠绕积，因此不属于阿贝尔群的研究范畴。最后，我们想提及，文献 [16] 证明了无挠阿贝尔群中的不可分解阿贝尔群是完全余解析的ω，这一结果无疑与我们的研究密切相关。

2. Notations and preliminaries

为了照顾具有不同背景的读者，我们尽量使本文内容自足。

2.1. 一般记号

定义 2.1. (1) 给定一个集合 X，我们用 $Y \subseteq_\omega X$ 表示 $Y \subseteq X$ 和 $|Y| < \aleph_0$。(2) 给定一个集合 X 和 $\bar{x}$，$\bar{y} \in X^{<\omega}$，我们用 $\bar{y} \lhd \bar{x}$ 表示 $\mathrm{lg}(\bar{y}) < \mathrm{lg}(\bar{x})$ 且 $\bar{x} \restriction \mathrm{lg}(\bar{y}) = \bar{y}$，其中 $\bar{x}$ 自然地视为一个函数 $\mathrm{lg}(\bar{x}) \to X$。(3) 给定一个部分函数 $f: M \to M$，我们分别用 $\mathrm{dom}(f)$ 和 $\mathrm{ran}(f)$ 表示 f 的定义域和值域。(4) 对于 $\bar{x} \in A^n$，我们用 $\bar{x} \subseteq A$ 表示 $\mathrm{ran}(\bar{x}) \subseteq A$，其中，如常规一样，将 $\bar{x}$ 视为一个函数 $\{0, ..., n-1\} \to A$。(5) 给定一个集合 X 和 $0 < n < \omega$，我们用 $\mathrm{seq}_n(X)$ 表示由 X 中长度为 n 的元素组成的单射序列（即无重复）所构成的集合。

定义 2.2. 设 $(X, <)$ 是一个偏序，且 $(x_n : n < \omega) \in X^\omega$。
(1) 若满足以下条件，我们称 $(x_n : n < \omega)$ 严格递增：

$$n < m < \omega \Rightarrow x_n < x_m.$$

(2) 若满足以下条件，我们称 $(x_n : n < \omega)$ 非递减：

$$n \leqslant m < \omega \Rightarrow x_n \leqslant x_m.$$

2.2. 树

定义 2.3. 设 $(T, <_T)$ 是一个严格偏序。
(1) 若对所有 $t \in T$, $\{s \in T, \ s <_T t\}$ 在关系 $<_T$ 下良序，则称 $(T, <_T)$ 为树。请注意，按照我们的定义，树 $(T, <_T)$ 可能有多个根，即多个 $<_T$-最小的元素。若树 $(T, <_T)$ 只有一个 $<_T$-最小的元素（即其根），则称其为有根树。(2) 树 $(T, <_T)$ 的一个分支是偏序 $(T, <_T)$ 的一条极大链。(3) 若树 $(T, <_T)$ 只有有限分支，则称其为良基树。(4) 给定一棵树 $(T, <_T)$ 和 $t \in T$，我们将 t 在 $(T, <_T)$ 中的层记为 $\mathrm{lev}(t)$，其定义为 $\{s \in T : s <_T t\}$ 的序型（回忆条目 (1)）。

关于定义 2.3(4)，我们只考虑这样的树 $(T, <_T)$：对于每个$t \in T$, $\{s \in T : \ s <_T t\}$ 都是有限的，因此对我们而言，$\mathrm{lev}(t)$总是一个自然数。

记号 2.4. 我们用 $\mathbb{P}$ 表示素数集。

2.3. 群

记号 2.5. 设 G 和 H 是群。
(1) $H \leqslant G$ 表示 H 是 G的子群。(2) 我们令 $G^+ = G \setminus \{e_G\}$，其中 e_G 是 G 的中性元。(3) 如果 G 是阿贝尔群，我们可能将中性元 e_G 简单记作 $0_G = 0$。

定义 2.6. 设 $H \leqslant G$ 为群，若 H 在 G中是纯的，记作$H \leqslant_* G$，则当 $k \in H$、$n < \omega$ 且（采用加法记号） $G \models ng = k$时，存在 $h \in H$ 使得 $H \models nh = g$。

观察 2.7。若 $H \leqslant_* G \in$ 为无挠阿贝尔群， $k \in H$ 且 $0 < n < \omega$，则：

$$G \models ng = k \Rightarrow g \in H.$$

观察 2.8。设 $G \in$为无挠阿贝尔群，且：

$$G_{(1,p)} = \{a \in G_1 : a \textit{ is divisible by } p^m, \textit{ for every } 0 < m < \omega\},$$

则 $G_{(1,p)}$ 是 G_1的纯子群。

证明。这是众所周知的。 ■

定义 2.9。设 $G \in$ 阿贝尔群，我们称 $X \subseteq G$ 是 G 的一个基，当 X 是 G 的极大独立子集时（按照 [8,第 16]节的含义）。

定义 2.10。设 $A \in$ 阿贝尔群且 $\pi \in$Aut(A)。如果存在一个基（参见定义 2.9） X 使得 π 在 X上诱导一个置换，则称 π 是自由的。

事实 2.11（[5, 引理 1.13]）。设 G 是二类幂零的。对于每个 g、$h \in G$和 m、$n \in \mathbb{Z}$，以下方程成立：

$$[g^n, h^m] = [g, h]^{nm}.$$

3. The rigidity problem for countable阿贝尔群

假设 3.1。本节始终采用以下假设：
(1) $T = (T, <_T)$ 是一棵有 ω 层的可数根树；(2) $T = \bigcup_{n<\omega} T_n$、$T_n \subsetneq T_{n+1}$, 和 $t \in T_n$ 蕴含 lev(t) $\leqslant n$；(3) $T_0 = \{t_0\}$，其中 t_0 是 T 的根，并且对于 $n < \omega$， T_n 是有限的；(4) $T_{<n} = \bigcup_{\ell<n} T_\ell$ （因此 $T_{<(n+1)} = T_n$ 和 $T_{<0} = \emptyset$）；(5) 若 $s <_T t \in T_n$，则 $s \in T_{<n}$；(6) 对于 $t \in T$，令 n(t) 为满足 $t \in T_n \setminus \bigcup_{\ell<n} T_\ell$ 的唯一 $0 \leqslant n < \omega$。

定义 3.2。令 K$^{\rm ri}$(T) 为满足以下条件的对象类：

$$\mathfrak{m}(T) = \mathfrak{m} = (X_n^T, \bar{f}^T : n < \omega) = (X_n, \bar{f} : n < \omega)$$

满足以下要求：
(a) $X_0 \neq \emptyset$， $X_n \subseteq \omega$ 是有限的，且关于 n 严格递增，并且 $X_{<n} = \bigcup_{\ell<n} X_\ell$；(b) 令 $X = \bigcup_{n<\omega} X_n$；(c) $f = (f_t : t \in T)$；(d) 若 $0 < n < \omega$ 且 $t \in T_n \setminus T_{<n}$，则 f_t 是一个单射，使得$X_{n-1} =$ dom(f_t) $\cap$ ran(f_t) 且 dom(f_t) $\cup$ran(f_t) $\subseteq X_n$；(e) 对于 $i \in \{1, -1\}$ 和 $t \in T$，令 $f_t^i = f_t$，若 $i = 1$，以及 $f_t^i = f_t^{-1}$，若 $i = -1$；(f) 若 $s <_T t \in T_n$，则 $f_s \subseteq f_t$；(g) (α) 若 t 是 T 的根，则 f_t 是空函数；(β) 若 $t \in T$ 不是 T 的根， $s <_T t$ 是 $<_T$-极大且位于 t 之下，$t \in T_n \setminus T_{<n}$， $f_t(x) = y$ 且 $x \notin$ dom(f_s)，则以下两种情况之一成立：

（$x \in X_{n-1} \setminus$ dom(f_s) $\wedge\, y \in X_n \setminus X_{n-1}$）或（$y \in X_{n-1} \setminus$ ran(f_s) $\wedge\, x \in X_n \setminus X_{n-1}$）；(h) (ran($f_t^i$)$\setminus X_{n-1}$: $t \in T_n \setminus T_{<n}, i \in \{1, -1\}$) 是一列两两不相交的集合；(i) $X_{n+1} \supsetneq X_n \cup \{$ran($f_t^i$) : $t \in T_{n+1} \setminus T_n, i \in \{1, -1\}\}$;

(j) 我们将图 $(\mathrm{seq}_k(X),\ R_k)$ 定义如下：

$$\bar{x} R_k \bar{y} \text{ iff } \exists t \in T, \exists i \in \{1,-1\} \text{ such that } f_t^i(\bar{x}) = \bar{y};$$

注意，$\bar{x} R_k \bar{y}$ 蕴含 $\bar{y} R_k \bar{x}$，且 $\neg(\bar{x} R_k \bar{x})$根据 (g)($\beta$) 成立。

(k) 给定 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{seq}_k(X)$，当 $\bar{x}, \bar{y}$ 属于同一个连通分支时，我们令 $\bar{x} E_k \bar{y}$ - 图 $(\mathrm{seq}_k(X),\ R_k)$ 中的连通分支；

(l) 图 $(\mathrm{seq}_k(X),\ R_k)$ 不含环。

约定 3.3. $\mathfrak{m} = (X_n, \bar{f}_n :\ n < \omega) \in \mathrm{K}^{\mathrm{ri}}(T)$（参见定义 3.2）。

记号 3.4. 设 $\mathfrak{m} \in \mathrm{K}^{\mathrm{ri}}(T)$。

(1) 对于 $x \in X$，令 $\mathrm{n}(x)$ 为满足 $x \in X_n \setminus X_{<n}$ 的唯一 $n < \omega$。(2) 对于 $k \geqslant 1$ 和 $\bar{x} = (x_0, ..., x_{k-1}) \in$序列$_k(X)$，令 $\mathrm{n}(\bar{x}) = \max\{\mathrm{n}(x_\ell) :\ \ell < k\}$。(3) 对于 $\bar{x} \in$序列$_k(X)$，令：

$$\mathrm{suc}(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \text{序列}_k(X) :\ \mathrm{n}(\bar{x}) < \mathrm{n}(\bar{y}) \text{ 且 } \exists t \in T, \exists i \in \{1,-1\} \text{ 使得 } f_t^i(\bar{x}) = \bar{y}\}.$$

(4) $<^k_{\mathfrak{m}}$ 是关系 $\bar{y} \in \mathrm{suc}(\bar{x})$ 在 $\mathrm{seq}_k(X)$ 上的传递闭包。

(5) 当以下情况成立时，我们称 $\bar{x} \in \mathrm{seq}_k(X)$ 是合理的：

$$n_1 < n_2,\ x_{i(1)} \in X_{n(1)} \setminus X_{<n(1)},\ x_{i(2)} \in X_{n(2)} \setminus X_{<n(2)} \Rightarrow i(1) \leqslant i(2).$$

(6) 若 $k = 1$，我们可以简单地用 $<_{\mathfrak{m}}$ 代替 $<^1_{\mathfrak{m}}$。此外，我们可以简单地用 $x <_{\mathfrak{m}} y$ 代替 $(x) <_{\mathfrak{m}} (y)$。

(7) 假设 $n < \omega$、$\bar{t} \in T^n$ 和 $\eta \in \{1,-1\}^n$，那么我们定义：

$$f_{(\bar{t},\eta)} = (\cdots \circ f_{t_\ell}^{\eta(\ell)} \circ \cdots)_{\ell < n}.$$

(8) 有序对 $(\bar{t}, \eta)$，其中 $\eta \in \{1,-1\}^n$ 且 $\bar{t} \in T^n$：

(a) 当 $\ell < n-1$ 且 $t_\ell = t_{\ell+1}$ 蕴含 $\eta(\ell) = \eta(\ell+1)$ 时，称其为约化的；(b) 当序列 $(f_{(\bar{t}\restriction\ell,\eta\restriction\ell)}(x) :\ \ell \leqslant n)$ 定义良好且无重复时，称其相对于 $x \in X$ 是约化的（因此 $(\bar{t}, \eta)$ 是约化的，但反过来未必成立，例如可能有 $t_1 < t_2$, $x \in \mathrm{dom}(f_{t_1})$ 且 $f_{t_2}^{-1} \circ f_{t_1}(x) = x$）；(c) 当其相对于 x 是约化的，且令 $\ell \leqslant n$、$x_\ell = f_{(\bar{t}\restriction\ell,\eta\restriction\ell)}(x)$ 时，对于所有 $s <_T t_\ell$，都有 $x_\ell \notin \mathrm{dom}(f_s^{\eta(\ell)})$，则称其相对于 x 是强约化的。

观察 3.5。在定义 3.2 的背景下，我们有：设 $i \in \{1,-1\}$ and$t \in T$，则对每个 $x \in$do m(f_t)，都有 $x \neq f_t^i(x)$；此外，存在唯一的 $0 < n < \omega$，使得 $x \in X_{n-1} \setminus X_{<n-1}$and $f_t^i(x) \in X_n \setminus X_{n-1}$ 或 $f_t^i(x) \in X_{<n-1}$。

证明。显然。 ■

命题 3.6。对于假设 3.1 中的 T，$\mathrm{K}^{\mathrm{ri}}(T) \neq \emptyset$（参见定义 3.2）。

证明。显然。 ■

断言 3.7。设 $k \geqslant 1$ and $\bar{x}$, $\bar{y} \in$序列$_k(X)$。

(A) 若 $f_t^i(\bar{x}) = \bar{y}$，则：$(\cdot_1)$ $\mathrm{n}(\bar{x}) \in \{0, ..., \mathrm{n}(\bar{y}) - 1\} \cup \{\mathrm{n}(\bar{y}) + 1\}$；$(\cdot_2)$ $\mathrm{n}(\bar{x}) = \mathrm{n}(\bar{y}) - 1 \Leftrightarrow \bar{x} <^k_{\mathfrak{m}} \bar{y}$。

（B）若 $f_t^i(\bar{x}) = \bar{y}$且 $\mathrm{n}(\bar{x}) < \mathrm{n}(\bar{y})$，则：

$$\bar{x}' <^k_{\mathfrak{m}} \bar{y} \wedge \mathbf{n}(\bar{x}') = \mathbf{n}(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x}' = \bar{x}.$$

(C) 若 $\bar{x} E_k \bar{y}$，则存在 $n \geqslant 0$, $\bar{x}_0$, ..., $\bar{x}_n$, $\bar{t} = (t_\ell :\ \ell < n)$, $\eta \in \{1,-1\}^n$ 使得：

(a) $\bar{x} = \bar{x}_0$ 且 $\bar{y} = \bar{x}_n$；

(b) 若 $\ell < n$，则 $f_{t_\ell}^{\eta(\ell)}(x_\ell) = x_{\ell+1}$；(c) 若 $\bar{x} \leqslant_{\mathfrak{m}}^{k} \bar{y}$ 且 $\ell < n$，则 $\mathrm{n}(x_\ell) < \mathrm{n}(x_{\ell+1})$（参见记号 3.4(1)）；(d) 不存在满足 $x_\ell \in \mathrm{dom}(f_s^{\eta(\ell)})$ 的 $s < t_\ell$。

（D）在子句（C）中，若为 $\bar{x} \leqslant_{\mathfrak{m}}^{k} \bar{y}$，则 $\bar{t}$、η 和（$\bar{x}_\ell$：$\ell \leqslant n$）是唯一的，$\mathrm{n}(t_\ell) < \mathrm{n}(t_{\ell+1})$ 且 $x_{\ell+1} \in \mathrm{suc}(x_\ell)$，对于 $\ell < n$。

（E）若 $x \in X$、$\bar{t} \in T^m$、$\eta \in \{1,-1\}^m$ 和 $x_0 = x$ 以及 $x_\ell = f_{(\bar{s}\restriction\ell,\eta\restriction\ell)}(x)$，对于 $0 < \ell \leqslant m$，则对于某个 $k \geqslant 1$、$\bar{i} =$（i_0、...、i_k）和 $\bar{s}$，我们有：

（$\cdot_1$）$0 = i_0 < \cdots < i_k \leqslant m$；（$\cdot_2$）$x_{i_\ell} = x_{i_{\ell+1}-1}$，对于 $\ell < k$；（$\cdot_3$）$x_{i_k} = x_m$；（$\cdot_4$）对于某个 $k_1 \leqslant k$，我们有：（i）对于所有 $\ell < [k_1, k)$，$x_{i_{\ell+1}} \in \mathrm{suc}(x_{i_\ell})$；（ii）对于所有 $\ell < k_1$，$x_{i_\ell} \in \mathrm{suc}(x_{i_\ell+1})$；（iii）$\bar{s} =$（$s_\ell$：$\ell \leqslant k$），$s_\ell \leqslant_T t_\ell$、$f_{s_\ell}^{\eta_{i_\ell}}(x_{i_\ell}) = x_{i_{\ell+1}}$，对于 $\ell < k$，且（$\bar{s}$，（$\eta(i_\ell)$：$\ell < k$））对于 $x = x_0$ 是强约化的。

(F) 注意到在 (E) 中，我们有：

(·1) 区间 (x_{i_ℓ}, ..., $x_{i_{\ell+1}-1}$) 被约消为 x_{i_ℓ}；

(·2) $\bar{i}$和 $\bar{s}$ 由 (x, $\bar{t}$, η) 唯一确定。

(G) (·1) 若 $(\bar{t},\eta) \in T^n \times \{1,-1\}^n$, $x \in$ 支配 $f_{(\bar{t},\eta)}$，且 x/E_1 与 X_m不相交，则 $X_m \subseteq$支配 $f_{(\bar{t},\eta)}$；(·2) 若 $x, y \in X$ 是 E_1-等价的，则存在唯一有序对 $(\bar{t},\eta)$，使得 $f_{(\bar{t},\eta)}(x) = y$，且 $(\bar{t},\eta)$ 对 x是强约化的；(·3) 若 $f_{(\bar{t},\eta)}(x) = y$，且 $(\bar{t},\eta)$ 对 x是强约化的，则 $(\bar{t},\eta)$ 是唯一的；(·4) 若 $\bar{t}_1 = (t_{(1,\ell)} : \ell < n)$，$(\bar{t}_1,\eta_1)$ 对 x 和 $x/E_1 \cap X_m = \emptyset$是强约化的，则对每个 $\ell < n$, $t_{(1,\ell)} \notin T_m$。

(H) 若 $\iota = 1, 2$, $(\bar{t}_\iota,\eta_\iota) \in T^{n(\iota)} \times \{1,-1\}^{n(\iota)}$, $(\bar{t}_1,\eta_1)$ 对 x,$x \in \mathrm{dom}(\{\mathrm{v9}\}) \cap \mathrm{dom}(\{\mathrm{v13}\})$ 和 $x/E_1 \cap X_m = \emptyset$ 是强约化的，则：(·1) {v18} {v21} $\restriction X_m$; (·2) 对每个 $\ell < n$(1)，都存在 $j < n$(2)，使得我们有如下结果：$t_{(1,\ell)} \leqslant_T t_{(2,j)}$, $\eta_1(\ell) = \eta_2(j)$ $t_{(1,\ell)} \notin T_m$，其中令 $\bar{t}_1 = (t_{(1,\ell)} : \ell < n(1))$ 和 $\bar{t}_2 = (t_{(2,j)} : j < n(2))$。

证明。子句（A）、（B）、（C）由定义立即得到。子句（E）和（F）可对 $\lg(\bar{t})$ 进行归纳法证明。子句（G）可利用（E）和（F）证明。最后，我们给出关于子句（H）的一些细节。为此，我们应用子句（E），其中此处的 $(x,\bar{t}_2,\eta_2)$ 对应于彼处的 $(x,\bar{t},\nu)$，从而得到 $\bar{s}, k, k_1, \bar{i}$。因此，特别地，令 $\eta_2' = (\eta_{(2,i_\ell)} : \ell \leqslant k)$，我们有如下结果：

(·1) $(\bar{s},\eta_2')$ 对于 x 是强约化的；(·2) $f_{(\bar{s},\eta_2')}(x) = f_{(\bar{t}_2,\eta_2)}(x) = f_{(\bar{t}_1,\eta_1)}(x)$。

现在回忆一下：

(·3) $(\bar{t}_1,\eta_1)$ 对于 x 是强约化的。

因此，由 (·1)-(·3) 可应用条款（G）(·2)，从而得到：

(·4) $(\bar{s},\eta_2') = (\bar{t}_1,\eta_1)$，因此 $\lg(\bar{t}_2) = \lg(\bar{s}) = k$。

所以，如果 $\ell \leqslant k$，那么 $s_\ell = t_{(1,\ell)} \leqslant_T t_{(2,i_\ell)}$，于是证明完毕。最后，事实是对于 $\ell < n$(1)，我们有 $t_{(1,\ell)} \notin T_m$，这是由当前断言的条款（G）(·4) 得出的。 ■

观察 3.8. (1)（回顾 3.4(6)）$(X, <_{\mathfrak{m}})$ 是一棵具有 ω 层的树。

(2) 每个 $z \in X_0$ 都是树 $(X, <_{\mathfrak{m}})$ 的一个根。（

3) 若 $y \in X_{n+1} \setminus X_n$，那么至多存在一个 $x \in X_n$，使得 $y \in \mathrm{suc}(x)$。
(4) 若 $\bar{x} \in \mathrm{seq}_k(X)$，那么 $\bar{x}$ 的某个置换是合理的。
(5) 对每个 $k \geqslant 1$，$(\mathrm{seq}_k(X) <^k_{\mathfrak{m}})$ 都是一棵树，且可能有多个根。
(6) 对每个 $\bar{x}$、$\bar{y} \in \mathrm{seq}_k(X)$，若 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 存在公共下界，我们将其最大公共下界记为 $\bar{x} \wedge \bar{y}$（回忆一下，$(\mathrm{seq}_k(X) <^k_{\mathfrak{m}})$ 是一棵树）。(7) 若 $\bar{x}$ 是合理的且 $\bar{x} \leqslant^k_{\mathfrak{m}} \bar{y}$，那么 $\bar{y}$ 是合理的。(8) 若 $\bar{x} \in \mathrm{seq}_k(X)$ 是合理的，$\bar{x} \leqslant^k_{\mathfrak{m}} \bar{y}^1 = (y^1_0, ..., y^1_{k-1})$、$\bar{x} \leqslant^k_{\mathfrak{m}} \bar{y}^2 = (y^2_0, ..., y^2_{k-1})$ 且 $y^1_{k-1} = y^2_{k-1}$，那么 $\bar{y}^1 = \bar{y}^2$。(9) 若 $\bar{x} \in \mathrm{seq}_k(X)$，$\bar{y}$ 是 $(\bar{x}/E_k, <^k_{\mathfrak{m}})$ 的一个根，且 $\bar{y}$ 是合理的，那么 $\bar{x}$ 也是如此。

证明。这只是逐条展开定义。例如，条目 (3) 由 3.2(g)-(h) 得出。 ■

定义 3.9。设 $\mathfrak{m} \in \mathrm{K}^{\mathrm{ri}}(T)$（即采用约定 3.3 中的记法）。
(1) 设 $G_2 = G_2[\mathfrak{m}]$ 为 $\bigoplus\{\mathbb{Q}x : x \in X\}$。(2) 设 $G_0 = G_0[\mathfrak{m}]$ 为由 X生成的 G_2 的子群，即 $\bigoplus\{\mathbb{Z}x : x \in X\}$。(3) 对于 $t \in T$ 和 $i \in \{1, -1\}$，设：(a) $H^i_{(2,t)} = \bigoplus\{\mathbb{Q}x : x \in \mathrm{dom}(f^i_t)\}$；(b) $I^i_{(2,t)} = \bigoplus\{\mathbb{Q}x : x \in \mathrm{ran}(f^i_t)\}$；(c) $\hat{} f^{(i,2)}_t$ 是从 $H^i_{(2,t)}$ 到 $I^i_{(2,t)}$ 的（唯一）同构，使得若 $x \in \mathrm{dom}(f^i_t)$，则 $\hat{} f_{(i,2)t}(x) = f^i_t(x)$（参见定义 3.2(d)）。

(4) 对于 $i \in \{1, -1\}$ 和 $t \in T$，我们定义 $H^i_{(0,t)} := H^i_{(2,t)} \cap G_0$ 以及 $I^i_{(0,t)} := I^i_{(2,t)} \cap G_0$。(5) 对于上述的 $\hat{} f^{(i,2)}_t$，我们有 $\hat{} f_{(i,2)t}[H^i_{(0,t)}] = I^i_{(0,t)}$。我们定义：

$$\hat{f}^{(i,0)}_t = \hat{f}^{(i,2)}_t \restriction H^i_{(0,t)}.$$

(6) 对于 $a \in G^+_2$，令 $\mathbf{n}(a)$ 为满足 $a \in \langle X_n \rangle^*_{G_2}$ 的最小的 $n < \omega$。
(7) 我们通过规定以下关系来定义 G^+_0 上的偏序 $<_*$：当且仅当 $a \neq b \in G^+_0$ 且对于某些 $0 < n < \omega$、a_0、.....、$a_n \in G_0$、$a_0 = a$、$a_n = b$ 以及：$a <_* b$。

$$\ell < n \Rightarrow \exists i \in \{1, -1\}\, \exists t \in T(\hat{f}^{(i,0)}_t(a_\ell) = a_{\ell+1})\ and\ \mathbf{n}(a_\ell) < \mathbf{n}(a_{\ell+1}).$$

(8) 对于 $a = \sum_{\ell<m} q_\ell x_\ell$，若 $(x_\ell : \ell < m) \in$ 序列$_m(X)$ 且 $q_\ell \in \mathbb{Q}^+$，我们令：

$$\mathrm{supp}(a) = \{x_\ell : \ell < m\}.$$

(9) $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}$ 是G^+_2 上的等价关系，它是偏序 $\leqslant_*$的等价关系闭包。

(10) 假设 $n < \omega$、$\bar{t} \in T^n$、$\eta \in \{1, -1\}^n$、$\iota \in \{0, 2\}$，那么我们定义：

$$\hat{f}^{\iota}_{(\bar{t},\eta)} = (\cdots \circ \hat{f}^{(\eta(\ell),\iota)}_{t_\ell} \circ \cdots)_{\ell<n}.$$

引理 3.10。(1) $<_* \restriction X = <^1_{\mathfrak{m}} = <_{\mathfrak{m}}$（参见 3.4(4)(6)）。
(2) $(G_0, <_*)$是一棵具有 ω 层的树（回想假设 3.1(1)）。
(3) 若 $s \leqslant_T t$，则对于 $\ell \in \{0, 2\}$、$i \in \{1, -1\}$，有$\hat{} f^{(i,\ell)}_s \subseteq \hat{} f^{(i,\ell)}_t$。
(4) 若 $t \in T^{(i,2)}_{\mathrm{rt}}$，$a = \hat{} f^{(i,2)}_t(a)$，则 $\mathbf{n}(a) \neq \mathbf{n}(b)$。(5) 若 $a <_* b$（因此 $a, b \in G^+_0$），则由 3.9(7) 得到的序列 $(a_\ell : \ell \leqslant n)$ 是唯一的。(6) 若 $a_1 <_* a_2$，且对于 $\ell \in \{1, 2\}$，$a_\ell = \sum_{i<k} q_i x^\ell_i$，$q_i \in \mathbb{Q}^+$，$\bar{x}^\ell = (x^\ell_i : i < k) \in$序列$_k(X)$，则在可能将 $\bar{x}^1$ 替换为其某个置换后，$\bar{x}^1 \leqslant^k_{\mathfrak{m}} \bar{x}^2$。

证明。将定义逐一展开，例如对于条目 (3) 使用定义 3.2(f)，我们只详细说明条目 (4)。为此，令 a, b 如彼处所述。不妨设 $a <_* b$，因为可根据 $\hat{}f_t^{(i,2)}$ 中 i 的值，用 a 替换 b。由于 $a \neq 0$（回忆 $a \in G_0^+$），令 $a = \sum_{j\leqslant n} q_j x_j$，其中 $(x_j : j \leqslant n)$ 无重复且 $q_j \in \mathbb{Q}^+$。不妨设 $\mathrm{n}(x_j) \leqslant \mathrm{n}(x_{j+1})$，其中 $j < n$（参见观察 3.8(4)）。显然 $a \in \langle X_{\mathbf{n}(x_n)}\rangle^*_{G_2}$ 但 $a \notin \langle X_{<\mathbf{n}(x_n)}\rangle^*_{G_2}$。由于 $\hat{}f_{(i,2)_t}(a)$ 良定义，显然 $\{x_j : j \leqslant n\} \subseteq \mathrm{dom}(f_{(i,2)_t})$ 且 $b = \hat{}f_{(i,2)_t}(a) = \sum_{j\leqslant n} q_j f_{(i,2)_t}(x_j)$，并且，由于 $f_{(i,2)_t}$ 是单射，序列 $(f_{(i,\ell)_t}(x_j) : j \leqslant n)$ 无重复。将观察 3.5 应用于彼处的 n 作为此处的 $\mathrm{n}(x_n)$，得到 $f_t(x_n) \notin \langle X_{\mathbf{n}(x_n)}\rangle^*_{G_2}$，因此 $\mathrm{n}(b) \neq \mathrm{n}(a)$，故 (4) 成立。 ■

断言 3.11。若 (A) 成立，则 (B) 成立，其中：

(A) (a) $a, b_\ell \in G_0^+$，对于 $\ell < \ell_*$ 和 $\ell_* \geqslant 2$；(b) $a \mathcal{E}_{\mathfrak{m}} b_\ell$ 且这些 b_ℓ 无重复；(c) $a = \sum\{q_i x_i : i < j\}$ 和 $j > 1$；(d) $\bar{x} = (x_i : i < j) \in X^j$ 是单射的且合理的；(e) $q_i \in \mathbb{Z}^+$；(f) $\bar{x}$ 是 $<^j_{\mathfrak{m}}$-最小的；

(B) 对每个 $\ell < \ell_*$，存在 $\bar{y}^\ell = (y_{(\ell,i)} : i < j)$，使得：(a) $y_{(\ell,i)} = y^\ell_i \in X$ 和 $\bar{x} \leqslant^j_{\mathfrak{m}} \bar{y}^\ell$；(b) $b_\ell = \sum\{q_i y_{(\ell,i)} : i < j\}$，因此这些 $\bar{y}^\ell$ 两两不同；(c) $(y_{(\ell,i)} : i < j)$ 是单射的且合理的；(d) 存在 $\ell_1 \neq \ell_1 < \ell_*$ 以及 $i_1, i_2 < j$，使得：(i) 若 $\ell < \ell_*, i < j$ 且 $y_{(\ell,i)} = y_{(\ell_1,i_1)}$，则 $(\ell, i) = (\ell_1, i_1)$；(ii) 若 $\ell < \ell_*, i < j$ 且 $y_{(\ell,i)} = y_{(\ell_2,i_2)}$，则 $(\ell, i) = (\ell_2, i_2)$。(e) $(y_{(\ell,j-1)} : \ell < \ell_*)$ 无重复。

证明。根据 $\leqslant_*$ 的定义，存在满足 (B) 的子句 (a)-(c) 的 $(y_{(\ell,i)} : i < j, \ell < \ell_*)$，例如，根据 3.8(7) 和子句 (A)(f)，$\bar{y}^\ell$ 是合理的。此外，回想一下 $\bar{y}^\ell$ 两两不同，由 3.8(8) 可知子句 (e) 成立。现在回想一下，$(\{\bar{y} \in \mathrm{seq}_j(X) : \bar{x} \leqslant^j_X \bar{y}\}, \leqslant^j_{\mathfrak{m}})$ 是一棵树。分两种情形。

<u>情形 1</u>。$\{\bar{y}^\ell : \ell < \ell_*\}$ 并非由 $\leqslant^j_{\mathfrak{m}}$ 线性有序。
那么，存在 $\ell(1) \neq \ell(2) < \ell_*$，使得 $\bar{y}^{\ell(1)}$、$\bar{y}^{\ell(2)}$ 在局部是 $\leqslant^j_{\mathfrak{m}}$-极大的（即相对于 $\{\bar{y}^\ell : \ell < \ell_*\}$）。利用序列是合理的这一假设，我们可以选取 $i_1 = j - 1 = i_2$，于是由 3.8(8) 即得结论。
<u>情形 2</u>. 非情形 1 .
因此不妨设，对于每个 $\ell < \ell_* - 1$、$\bar{y}^\ell <^j_{\mathfrak{m}} \bar{y}^{\ell+1}$。设：$(\cdot_1)$ $i(1) < j$ 满足 $i < j$ 蕴含 $\mathrm{n}(y^0_i) \geqslant \mathrm{n}(y^0_{i(1)})$；$(\cdot_2)$ $i(2) < j$ 满足 $i < j$ 蕴含 $\mathrm{n}(y^{\ell_*-1}_{i\,2\,()}) \geqslant \mathrm{n}(y^{\ell_*-1}_i)$。
那么 $(0, i(1))$、$(\ell_* - 1, i(2))$ 即为所需结果。由于对于 $\ell < \ell_*$，$\bar{y}^\ell$ 被假设为合理的，我们实际上可以选择 $i(1)$ $i(2)$，使得 $i(1) = 0$ 且 $i(2) = j - 1$。 ■

定义 3.12. 设 $(p_a : a \in G_0^+)$ 是一个两两不同的素数序列，使得：

$$a = \sum_{\ell<k} q_\ell x_\ell,\ q_\ell \in \mathbb{Z}^+,\ (x_\ell : \ell < k) \in \mathrm{seq}_k(X) \Rightarrow p_a \nmid q_\ell.$$

(1) 对于 $a \in G_0^+$，令（回顾定义 3.9(9) 中对 $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}$ 的定义）：

$$\mathbb{P}_a = \{p_b : b \in G_0^+, b \in a/\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}\}.$$

(2) 令 $G_1 = G_1[\mathfrak{m}] = G_1[\mathfrak{m}(T)] = G_1[T]$ 为由以下元素生成的 G_2 的子群：$\{m^{-1}a : a \in G_0^+, \ m \in \omega \setminus \{0\}$ 取自 $\mathbb{P}_a$ 的素数乘积，可重复出现$\}$.(3) 对于素数 p，令 $G_{(1,p)} = \{a \in G_1 : \ a$ 对每个 $0 < m < \omega\}$ 都可被 p^m 整除（注意，根据观察 2.8，$G_{(1,p)}$ 始终是 G_1 的纯子群）。

引理 3.13。(1) 若 $p = p_a$, $a \in G_1^+$，则：

$$G_{(1,p)} = \langle b \in G_0^+ : a \mathcal{E}_{\mathfrak{m}} b \rangle^*_{G_1}.$$

(2) 对于 $t \in T$ 和 $i \in \{1, -1\}$，令 $H^i_{(1,t)} := H^i_{(2,t)} \cap G_1$ 和 $I^i_{(1,t)} := I^i_{(2,t)} \cap G_1$。(3) 对于定义 3.9(3c) 中的 $\hat{} f^{(i,2)}_t$，$\hat{} f_{(i,\ 2)_t}$ $[H^i_{(1,t)}] = I^i_{(1,t)^\circ}$ 令 $\hat{} f_{(i,\ 1)t}$ $= \hat{} f_{(i,\ 2)_t} \restriction H^i_{(1,t)^\circ}$ (4) 对于 $\ell \in \{0,1,2\}$，若 $s <_T t$，则 $H^i_{(\ell,s)} \leqslant_* H^i_{(\ell,t)}$（回顾 2.6）；(5) 对于 $\ell \in \{0,1,2\}$，若对于每个 $n < \omega$，$t_n <_T t_{n+1}$，则有：

$$\bigcup_{n<\omega} H^i_{(\ell,t_n)} = \bigcup_{n<\omega} I^i_{(\ell,t_n)} = G_\ell.$$

(6) $f^{(i,1)}_t$ 将 $H^i_{(1,t)}$ 映满到 $I^i_{(1,t)^\circ}$

证明。(1) 的证明与 [13, 5.17(1)] 类似。其余部分很容易，只需回想一下，在 3.2(d) 中我们要求 $X_{n-1} = \mathrm{dom}(f_t) \cap \mathrm{ran}(f_t)$。 ■

记号 3.14。当我们省略依赖于 i 的对象中的 i，例如 $H^i_{(2,t)}$ 等时，我们的意思是 $i = 1$。因此，例如，$\hat{} f^2_t$ 表示 $\hat{} f^{(1,2)}_t$。请谨记这一点。

定理 3.15。设 $\mathfrak{m}(T) \in \mathrm{K}^{\mathrm{ri}}(T)$。
(1) 我们可以修改构造，使得 $G_1[\mathfrak{m}(T)] = G_1[T]$ 的定义域为 ω，且函数 $T \mapsto G_1[T]$ 是 Borel 的（对于定义域为 ω 的有根树 T）。(2) 若 T 不是良基的，则 $G_1[T]$ 有非平凡的自由自同构。（参见 2.10。）(3) 若 T 是良基的，则 $G_1[T]$ 只有平凡的满射自同态。

证明。条目 (1) 很容易。对于条目 (2)，设 $(t_n : n < \omega)$ 是 T 和 $t_n <_T t_{n+1}$ 的一个无限分支，因此 $t_{n+1} \notin T_{n^\circ}$ 由引理 3.10(3)，$(\hat{} f^2_{t_n} : n < \omega)$ 是递增的；由定义 3.9(3c)，$\hat{} f^2_{t_n}$ 是 $H_{(2,t_n)}$ 到 $I_{(2,t_n)}$ 的一个同构，因此 $\hat{} f^2 = \bigcup_{n<\omega} \hat{} f^2_{t_n}$ 是 G_2 到 G_2 的一个同构，因为 $(H_{(2,t_n)} : n < \omega)$ 和 $(I_{(2,t_n)} : n < \omega)$ 是 G_2 的纯子群链，其极限为 G_2；由定义 3.2(d)，我们有：

$$H_{(2,t_n)} \supseteq \mathrm{dom}(f_{t_n}) \subseteq \mathrm{dom}(f_{t_{n+1}}) \subseteq H_{(2,t_{n+1})},$$
$$I_{(2,t_n)} \supseteq \mathrm{ran}(f_{t_n}) \subseteq \mathrm{ran}(f_{t_{n+1}}) \subseteq I_{(2,t_n)^\circ}$$

并且由 3.13(5) 可知 $\bigcup_{n<\omega} H_{(2,t_n)} = G_2 = \bigcup_{n<\omega} I_{(2,t_n)^\circ}$ 因此，由 3.13(6)：

$$\hat{f}^1 := \hat{f}^2 \restriction G_1 = \bigcup_{n<\omega} \hat{f}^1_{t_n} = \bigcup_{n<\omega} \hat{f}^2_{t_n} \restriction H_{(1,t_n)}$$
$$\hat{f}^{-1} = \bigcup_{n<\omega} \hat{f}^{(-1,1)}_{t_n} = \bigcup_{n<\omega} \hat{f}^{(-1,2)}_{t_n} \restriction H_{(1,t_n)}$$

因此，$\hat{} f^1$ 是从 G_1 到 G_1 的一个同构。显然，$\hat{} f^1$ 是 G_1 的一个非平凡自由自同构（参见 2.10），因此定理的条目 (2) 得证。
我们现在证明条目（3）。设 $(T, <_T)$ 是良基的，并设 $\pi \in$ 自同态环 (G_1) 是满射，令 $G_1 = G_1[T]$。我们将证明 $\pi \in \{\mathrm{id}_{G_1}, -\mathrm{id}_{G_1}\}$。假设 $k \geqslant 1$、$\bar{x} \in$ 序列$_k(X)$ 且 $q_\ell \in \mathbb{Q}^+$，对于 $\ell < k$ 和 $a = \sum_{\ell<k} q_\ell x_{\ell^\circ}$ 则：

（$*_1$）（a）存在 $j<\omega$，并且对每个 $i<j$，存在 $\bar{x}^i\in\bar{x}/E_k$ 和 $q^i\in\mathbb{Q}^+$，使得这些 $\bar{x}^i$两两不同，并且有：

$$\pi(\sum_{\ell<k}q_\ell x_\ell)=\sum_{i<j}q^i\sum_{\ell<k}q_\ell x^i_\ell;$$

(b) 令 $\bar{x}'\in\bar{x}/E_k$ 为 $<^k_{\mathfrak{m}}$-最小的，则对每个 $i<j$，$\bar{x}'\leqslant^k_{\mathfrak{m}}\bar{x}^i$；

(c) 对每个 $i<j$，存在 n_i、$\bar{t}_i$、η_i，使得 $\bar{t}_i\in T^{n_i}$、$\eta_i\in\{1,-1\}^{n_i}$，并且：

$$\pi(\sum_{\ell<k}q_\ell x_\ell)=\sum\{q^iq_\ell f_{(\bar{t}_i,\eta_i)}(x'_\ell):\ell<k,i<j\},$$

其中，如同 3.4(7) 中一样，$f_{(\bar{t}_i,\eta_i)}=(\cdots\circ f^{\eta_i(r)}t_{(i,r)}\circ\cdots)_{r<n(i)}$，并且如果 $r+1<n(i)$ 和 $\eta_i(r)=-\eta_i(r+1)$，则 $t_{(i,r)}\neq t_{(i,r+1)}$，且 $\mathrm{n}(t_{(i,r)})$ 是最小的。

[为什么？子句 (a) 根据对 G_1 和 $\mathbb{P}_a$ 的选择即可得到，因为 $a\in G^+_0$。子句 (b)、(c) 随之成立。](*2) 如果 $a\in G_1$、$x\in X$ 和 $\pi(a)\in\mathbb{Q}^+x$，那么 $\mathrm{supp}(a)$ 是单元素集。

为什么（$*_2$）？令 $a\in G^+_1$，$k\geqslant 1$，$\bar{x}\in \mathrm{seq}_k(X)$，且 $q_\ell\in\mathbb{Q}^+$，对于 $\ell<k$ 和 $a=\sum_{\ell<k}q_\ell x_\ell$。令 $p=p_a$，于是 $a\in G_{(1,p)}$，从而 $\pi(a)\in G_{(1,p)}$。注意到 $a\neq 0$。现在将（$*_1$）应用于 a，则存在 $j<\omega$，并且对于 $i<j$，有 $\bar{x}^i$, q^i 使得：

$$\pi(a)=\sum_{i<j}q^i\sum_{\ell<k}q_\ell x^i_\ell.$$

因此，根据我们的假设，存在某个 $q\neq 0$，$\pi(a)=qx$，于是：

$$qx=\sum_{i<j}q^i\sum_{\ell<k}q_\ell x^i_\ell.$$

现在，方程左边的支撑是一个单元素集；但是，如果 $k\geqslant 2$，根据 3.11，方程右边的支撑至少有两个元素，因此 $k\leqslant 1$；又因为 $a\neq 0$，必然有 $k=1$，正如所述。

(*3) 不存在这样的 $x\in X$ 和 $y_1\neq y_2\in X$，使得 $\bigwedge_{\ell=1,\ 2}\pi(y_\ell)\in\mathbb{Q}^+x$。

[为什么？因为这样一来，对某个 $m\in\{1,2\}$，$\pi(y_1+my_2)\in\mathbb{Q}^+x$，这与 (*2) 矛盾。]

(*4) 令 $Y=\{x\in X:\ \exists a\in G_1$ 满足 $\pi(a)\in\mathbb{Q}^+x\}$，则存在单射$h:\ Y\to X$ 满足 $y\in Y\Rightarrow\pi(h(y))\in\mathbb{Q}^+y$。

[为什么？由 (*2) 和 (*3) 可知。]

(*5) $Y=X$。

[为什么？根据 (*2)，π 是满射。]

(*6) If $y\in X\setminus\mathrm{ran}(h)$, then $\pi(y)=0$.

为什么（$*_6$）？为导出矛盾，假设 $y\in X\setminus\mathrm{ran}(h)$ 且 $\pi(y)\neq 0$。令$\pi(y)=\sum_{\ell<k}q_\ell x_\ell$, $k\geqslant 1$, $q_\ell\in\mathbb{Q}^+$, $(x_\ell:\ell<k)\in$ 序列$_k(X)$。此外，对 $\ell<k$,$z_\ell=h(x_\ell)$。显然 $(y)^\frown(z_\ell:\ell<k)$ 没有重复项，因为 $y\notin\mathrm{ran}(h)$, $(x_\ell:\ell<k)\in$ 序列$_k(X)$，且 h 是单射。另请注意，根据（$*_4$），$\pi(z_\ell)=r_\ell x_\ell$，其中某个$r_\ell\in\mathbb{Q}^+$。现在令 $q'_\ell=q_\ell/r_\ell$，若 $\ell\in\{1,\dots,k-1\}$，且 $q'_0\in\mathbb{Q}\setminus(\{q_0/r_0\}\cup\{0\})$。再令 $m>1$ 满足 $mq,mq_\ell,mq'_\ell\in\mathbb{Z}$，并考虑：

$$(*_{6.1})\qquad a=my+\sum_{\ell<k}mq'_\ell z_\ell\in G^+_0.$$

于是 $a \in G_0 \subseteq G_1$，我们有：

$$\begin{array}{rcl} \pi(a) & = & \pi(my + \sum_{\ell<k} mq'_\ell z_\ell) \\ & = & m\pi(y) + \sum_{\ell<k} mq'_\ell r_\ell x_\ell \\ & = & m\sum_{\ell<k} q_\ell x_\ell + \sum_{\ell<k} mq'_\ell r_\ell x_\ell \\ & = & m\sum_{\ell<k}(q_\ell - q'_\ell r_\ell)x_\ell \\ & = & m(q_0 - q'_0 r_0)x_0. \end{array}$$

由于 $q'_0 \neq q_0 r_0$，$\pi(a)$ 的支撑是单元素集，但 a 的支撑不是单元素集，因为 y、$z_0 \in a$ 的支撑，回顾 $q'_0 \neq 0$ 和 $z \neq y$。但这与（$*_2$）矛盾。

（$*_7$） $X = \mathrm{ran}(h)$。

为什么是（$*_7$）？如果不是，令 $x \in X \setminus \mathrm{ran}(h)$，则 $\pi(x) = 0$。现在令 $y = h(x)$，然后令：

（$*_{7.1}$） $\pi(y) = \pi(h(x)) = rx$，其中 $r \in \mathbb{Q}^+$，并令 $p = p_{x+y}$。

那么 $\pi(x+y) \in \mathbb{Q}^+ x$，因为 $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y) = 0 + rx = rx$，回顾（$*_{7.1}$）。但这与（$*_2$）矛盾。至此，（$*_7$）的证明完成。

($*_8$) 若 $x \in X$，则 $\pi(x) = q_x h^{-1}(x)$，其中 $q_x \in \mathbb{Q}^+$。

[为什么？给定 $x \in X$，由 ($*_7$) 可选取 $y \in X$，使得 $h(y) = x$。因此，根据 h 的选取，存在 q_* 使得 $\pi(h(y)) = q_x y$，这意味着 $\pi(y) = q_x y = q_x h^{-1}(x)$。]

($*_9$) (a) $g = h^{-1}$ 是 X 的置换；(b) 对某个 $q_* \in \mathbb{Q}$，$x \in X \Rightarrow \pi(x) = q_* g(x)$；(c) $q_* \in \mathbb{Z}^+$；(d) 若 $y = g(x)$，则 $y \in x/E_1$。

为什么 ($*_9$)？子句 (a) 成立，因为 $h : Y \to X$ 根据 ($*_4$) 是单射，$Y = X$ 根据 ($*_5$)，而 h 根据 ($*_7$) 是到 Y 的满射。若子句 (b) 不成立，则由 ($*_8$)，对某个 $x_1 \neq x_2 \in X$，有 $\pi(x_\ell) = q_\ell g(x_\ell)$，其中 $\ell = 1$、2 和 $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{Q}$。令 $p = p_{x_1 - x_2}$，于是 $x_1 - x_2 \in G_{(1,p)}$，因此：

$$\pi(x_1 - x_2) = q_1 g(x_1) - q_2 g(x_2) \in G_{(1,p)}.$$

但是 $q_1 - q_2 \neq 0$，这与下面的（$*_{10}$）相矛盾。关于条件（c），设 $q_* \notin \mathbb{Z}$，则必然存在某个素数 p，以及 $m \geqslant 1$，使得 $\frac{1}{p} = mq_*$。由于（$p_a : a \in G_0^+$）无重复项，存在 $x \in X$ 使得 $p_x \neq p$，因此 $\frac{1}{p} x \in G_2 \setminus G_1$（回顾 3.9 和 3.12），从而 $mq_* x \notin G_1$；但 $mq_* x = \pi(mx)$ 且 $mx \in G_1$，矛盾。最后，我们证明条件（d）。我们有 $\pi(x) \in \mathbb{Q}^+ g(x)$，因此由 3.13(1) 可知，存在 $j_* < \omega$，并且对于 $j < j_*$，存在 $y_j \in X$ 和 $q_j \in \mathbb{Q}^+$，使得 $y_j \in x_i/\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}$ 且 $\pi(x) = \sum_{j<j_*} q_j y_j$。显然，$j_* > 0$，因为 π 是一个自同构，事实上 $j_* = 1$，所以 $g(x) = y_0$，因为 $y_0 \in x/E_1$。于是 $g(x) \in x/E_1$。这就证明了（$*_9$）。

($*_{10}$) 如果 $x_1 \neq x_2 \in X$、$p = p_{x_1 - x_2}$ 和 $\sum_{\ell<k} q_\ell y_\ell \in G_{(1,p)}$，则 $\sum_{\ell<k} q_\ell = 0$。

为什么是 ($*_{10}$)？根据 3.13(1) 以及对 p 的选择，对于某些 $m \in \mathbb{Z}^+$、$j < \omega$、$q_i^* \in \mathbb{Q}^+$ 和 $(y_{(i,1)}, y_{(i,2)}) \in (x_1, x_2)/E_2$，我们有：

($*_{10.1}$) $m(\sum_{\ell<k} q_\ell^* y_\ell) = \sum_{i<j} q_i(y_{(i,1)} - y_{(i,2)})$.

因此，令 $Y = \{y_{(i,1)}, y_{(i,2)} : i < j\}$，我们有：

($*_{10.2}$) $m(\sum_{\ell<k} q_\ell y_\ell) = \sum\{r_y y : y \in Y\}$，其中我们令：

$$r_y = \sum\{q_i : i < j, y_{(i,1)} = y\} - \sum\{q_i : i < j, y_{(i,2)} = y\}.$$

因此，我们有：

(∗10.3)

$$\begin{aligned}\sum_{\ell<k} mq_\ell &= \sum\{r_y : y \in Y\} \\ &= \sum_{y\in Y}(\sum\{q_i : i<j, y_{(i,1)} = y\} - \sum\{q_i : i<j, y_{(i,2)} = y\}) \\ &= \sum\{q_i : i<j\} - \sum\{q_i : i<j\} = 0.\end{aligned}$$

并且，如 $m \neq 0$，证毕。这就完成了对（$*_{10}$）的证明。

现在我们仿照 [13, 定理 5.16], 的证明继续，具体来说，我们断言：($*_{11}$) g 是 X上的恒等函数。

情形 1。集合 $Y = \{x/E_1 :$ 对于某个 $y \in x/E_1$, $g(y) \neq y\}$ 是无限的。

($\star_1$) 选取 x_i, n_i, 对于 $i < \omega$, 使得：

(a) n_i 随 i递增；(b) $x_i \in Y \cap X_{n_{i+1}} \setminus X_{n_i}$；(c) $g(x_i) \neq x_i$, $g(x_i) \in X_{n_{i+1}}$, $g(x_i) \notin X_{n_i}$, $(x_i/E_1) \cap X_{n_i} = \emptyset$；(d) $(x_i/E_1 : i < \omega)$ 两两不同（实际上这可以推出）；(e) 存在 $\bar{t} \subseteq T_{n_{i+1}}$ 和 η，使得 $f_{(\bar{t},\eta)}(x_i) = g(x_i)$。

[为什么可以这样做？由情形假设和 ($*_8$)，特别是 ($*_8$)(d) 可知。]现在注意，对于 $i < \omega$，我们有：

($\star_2$) $g(x_i) \in x_i/E_1$。[为什么成立 ($\star_2$)？由 ($*_9$)(d) 可知。]($\star_3$) 序列 $(x_i, g(x_i) : i < \omega)$ 无重复。为什么成立 ($\star_3$)？根据 x_i 的选取，$x_i, g(x_i) \in X$, $g(x_i) \neq x_i$。

此外，如果 $i < j$，那么：($\cdot_1$) $x_i/E_1 \neq x_j/E_1$ （由 ($\star_1$)(d)）；($\cdot_2$) $g(x_i) \in x_i/E_1$ （由 ($\star_2$)）；($\cdot_3$) $g(x_j) \in x_j/E_1$ （由 ($\star_2$)）。

至此，我们完成了对（$\star_3$）的证明。

（$\star_4$）对于每个 $2 \leqslant r < \omega$，令：

$$x_r^+ = \sum_{\ell\leqslant r} x_\ell, \qquad p_r = p^+_{x_r}, \qquad \bar{x}_r = (x_\ell : \ell \leqslant r) \in \mathrm{seq}_{r+1}(X).$$

由于 $\pi \in \mathrm{End}(G_1)$，显然 $\pi(x_r^+) \in G_{(1,p_r)}$，因此由 3.13(1)，将此处的 x_r, p_r 分别视为彼处的 a, p_a，可找到 $j_r, m_r > 0$，并且对于 $j < j_r$, $\bar{y}^{(r,j)} \in \mathrm{seq}_{r+1}(X)$, 有 $q_j^r \in \mathbb{Q}^+$, $b_j^r \in G_1^+$ 使得下式成立：

($\star_5$) (a) for $j < j_r$, $\bar{y}^{(r,j)} \in \bar{x}_r/E_{r+1}$;

(b) $(b_j^r = \sum_{\ell\leqslant r} y_\ell^{(r,j)} : j < j_r)$ is linearly independent;

(c) $\pi(x_r^+) = \sum\{q_j^r b_j^r : j < j_r\}$;

(d) for $j < j_r$, $m_r x_r^+ \mathcal{E}_{\mathfrak{m}} b_j^r$ (and $m_r x_r^\star \in G_0$, $m_r b_j^r \in G_0$).

但由（$*_8$）可得：

($\star_6$) $\pi(x_r^+) = \pi(\sum_{\ell\leqslant r} x_\ell) = \sum_{\ell\leqslant r} \pi(x_\ell) = \sum_{\ell\leqslant r} q^* g(x_\ell)$.

因此，由（$\star_5$），注意到（$x_\ell/E_1 : \ell \leqslant r$）中无重复项，且 $y_\ell^{(r,j)} \in x_\ell/E_1$，可得：

（$\star_7$） $j_r = 1$。

（$\star_8$）设（$\bar{t}_r$, η_r）$\in T^{n_r} \times \{1,-1\}^{n_r}$ 满足：

$$f_{(\bar{t}_r,\eta_r)}(\bar{x}_r) = \bar{y}^{(r,0)} \text{ and w.l.o.g. } n_r \text{ is minimal.}$$

因此，我们有：

($\star_9$) 若 $\ell \leqslant r$，则 $f_{(\bar{t}_r,\eta_r)}(x_\ell) = g(x_\ell)$。

现在，对（$\bar{t}$、η_r、x_r）应用 3.7(E)，我们得到：

（$\star_{10}$）存在（$\bar{t}'_r$、η'_r），使得它们满足：

(a) $f_{(\bar{t}'_r,\eta'_r)}(x_r) = g(x_r)$；(b) $(\bar{t}'_r, \eta'_r)$ 对于 x_r 是强约化的。

回顾（$*_{11}$）(c)，$(X_r/E_1) \cap X_{n_r} = \emptyset$，因此由 3.7(G) 和（$*_{10}$）(a)，$X_{n_r} \subseteq \mathrm{dom}(f_{(\bar{t}'_r,\eta'_r)})$，并且由 3.7(H)，$f_{(\bar{t}'_r,\eta'_r)} \restriction X_{n_r} = f_{(\bar{t}_r,\eta_r)} \restriction X_{n_r}$，所以 $\{x_i : i \leqslant r\} \subseteq \mathrm{dom}(f_{(\bar{t}'_r,\eta'_r)})$，从而我们得到：

($\star_{11}$) $f_{(\bar{t}'_r,\eta'_r)}$ 与 $f_{(\bar{t}_r,\eta_r)}$ 在 $\{x_\ell$ 上一致：$\ell \leqslant r\}$。

现在回忆一下，n_r 被选为最小的（参见 ($\star_8$)），因此由 ($\star_{11}$) 可知 $n_r = \lg(\bar{t}'_r)$。于是，由 3.7(H)，我们得到如下结论：

($\star_{12}$) $(\bar{t}'_r, \eta'_r) = (\bar{t}_r, \eta_r)$，因此 $(\bar{t}_r, \eta_r)$ 对于 x_r 是强约化的。

此外，我们有：

($\star_{14}$) 若 $r < s < \omega$，则对所有 $\ell < n_r$，存在 $j < n_s$ 使得：

$$t_{(r,\ell)} \leqslant_T t_{(s,j)} \text{ and } t_{(s,\ell)} \notin X_{n_r},$$

where we let $\bar{t}_r = (t_{(r,\ell)} : \ell < n_r)$ and $\bar{t}_s = (t_{(r,\ell)} : \ell < n_s)$.

[为什么？由 3.7(H)：由于 $(\bar{t}_r, \eta_r)$ 对于 x_r 是强约化的，$f_{(\bar{t}_r,\eta_r)} = g(x_r) = f_{(\bar{t}_s,\eta_s)}$ 且 $x_r/E_1 \cap X_{n_r} = \emptyset$。]

（$\star_{15}$）对于 $r < \omega$，我们可以选择 $\ell_r < n_r$，使得：

$$t_{(r,\ell_r)} \leqslant_T t_{(r+1,\ell_{r+1})} \text{ and } t_{(r,\ell_r)} \notin X_{n_r}.$$

[为什么？利用归纳法，基于 r 并使用（$\star_{14}$）来选择 ℓ_r。]

这意味着 T 有一条无限分支，从而完成情形 1 的证明。

<u>情形 2</u>。集合 $Y = \{x/E_1$：对于某个 $y \in x/E_1$，$g(y) \neq y\}$ 是有限的，且 $\neq \emptyset$。注意，由（$*_8$）可知，$\pi(x) \notin \mathbb{Q}^+ x$ 当且仅当 $g(x) \neq x$。现在，选择 $x_0 \in X$，使得 $\pi(x_0) \notin \mathbb{Q}x_0$。令 $n < \omega$ 满足 $x_0 \in X_n$，并选择 x_1，使得：

($\oplus_1$) (a) $x_1 \in X \setminus \bigcup\{y/E_1 : y \in X_n\}$;

(b) $\pi(x_1) \in \mathbb{Q}x_1$.

[为什么这是可能的？根据情形 2 的假设以及 3.2(i)。]

现在注意：

($\oplus_2$) 对于 $\ell = 0$，1，我们有 $\mathrm{supp}(\pi(x_\ell)) \subseteq x_\ell/E_1$。($\oplus_3$) 由 3.13，存在 $(\bar{t}_j, \eta_j, q_j : j < j_*)$ 使得：(a) $j_* < \omega$ $\bar{t}_j$ $j < j_*$ $j < j_*$ $q_j \in \mathbb{Q}^+$ $\eta_j \in$ $\{1,-1\}^{\lg(\bar{t}_j}$，(:) 是单射的，并且，对于，以及）；(b) $\pi(x_0 + x_1) = \sum\{q_j f_{(\bar{t}_j,\eta_j)}(x_0 + x_1) : j < j_*\}$。

($\oplus_4$) 如情形 1 中的 ($\star_5$)，我们有：

(a) $\pi(x_0) = \sum\{q_j f_{(\bar{t}_j,\eta_j)}(x_0) : j < j_*\}$;

(b) $\pi(x_1) = \sum\{q_j f_{(\bar{t}_j,\eta_j)}(x_1) : j < j_*\}$.

($\oplus_5$) $\pi(x_0 + x_1) = \pi(x_0) + \pi(x_1) = q_* g(x_0) + q_* g(x_1) = q_* g(x_0) + q_* x_1$

根据（$\oplus_4$）+（$\oplus_5$），回顾 $x_1 \notin x_0/E_1$，显然 $j_* = 1$，但根据（$\oplus_4$）(b)+（$\oplus_5$），我们有 $f_{(\bar{t}_0,\eta_0)}(x_1) = x_1$，因此 $\bar{t}_0 = ()$，从而 $f_{(\bar{t}_0,\eta_0)}(x_0) = x_0$，导致矛盾。

<u>情形 3</u>。集合 $Y = \{x/E_1$：对于某些 $y \in x/E_1, \pi(y), \notin \mathbb{Q}y\}$ 为空。由于情形 1 和情形 2 均不可能，因此只剩下情形 3，所以 ($*_{11}$) 成立。($*_{12}$) $q_* \in \{1,-1\}$。

为什么 $(*_{12})$? 如果不是，回想一下，根据 $(*_8)(c)$， $q_* \in \mathbb{Z}^+$ ，令 p 为一个整除 q_* 的素数。$(*_{12.1})$ 存在 $x \in X$ 使得 $G_1 \models p \nmid x$。

[为什么? 如果 $p \notin \{p_a : a \in G_0^+\}$，那么根据 3.12(2)，任意 $x \in X$ 都可以。于是设$p = a$ ，并令 $Y = \{y/E_1 : y \in \mathrm{supp}(a)\}$。由于 $\mathrm{supp}(a)$ 是有限的，显然 $Y \neq X$ ，因此只需任选一个 $x \in X \setminus Y$，然后回想 3.12(2)。]

由于 $\pi \in \mathrm{End}(G_1)$ 是满射，存在 $b \in G_1$ 使得 $\pi(b) = x$。根据 $(*_{11})$，必有$b \in \mathbb{Q}^+x$，因此令 $b = q_0x \in G_1$。于是我们有:

$$\pi(b) = \pi(q_0x) = q_*q_0x = x,$$

所以 $q_0q_* = 1$。但是，根据 $(*_9)$(c)， $q_* \in \mathbb{Z}^+$ 且 p 整除 q_*，因此必有:

$$q_0 \notin \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \geqslant 1, p \nmid n\}.$$

但在 G_1 中，我们有 x 不能被 p 整除，这就产生了矛盾。

$(*_{13})$ $\pi \in \{\mathrm{id}_{G_1}, -\mathrm{id}_{G_1}\}$。

[为什么? 由 $(*_9)$、$(*_{11})$ 和 $(*_{12})$ 可知。] ■

定理 1.4 的证明。由 3.15 可知。 ■

4. The Hopfian problem for countable TFAB

假设 4.1。本节中始终采用以下假设:

(1) $T = (T, <_T)$ 是一棵有 ω 层的有根树；(2) 我们用 $\mathrm{lev}(t)$ 表示 t 的层；(3) $T = \bigcup_{n<\omega} T_n$, $T_n \subseteq T_{n+1}$, $|T_{n+1} \setminus T_n| \geqslant 2$ 和 $t \in T_n$ 蕴含 $\mathrm{lev}(t) \leqslant n$；(4) $T_0 = \{t_0\}$，其中 t_0 是 T 的根，并且对于 $n < \omega$， T_n 是有限的；(5) $T_{<n} = \bigcup_{\ell<n} T_\ell$ （因此 $T_{<(n+1)} = T_n$）；(6) 若 $s <_T t \in T_n$，则 $s \in T_{<n}$；(7) 对于 $t \in T$，令 $\mathrm{n}(t)$ 为满足 $t \in T_n \setminus \bigcup_{\ell<n} T_\ell$ 的唯一 $0 \leqslant n < \omega$。

定义 4.2。令 $\mathrm{K}^{\mathrm{ho}}(T)$ 为满足以下条件的对象类:

$$\mathfrak{m}(T) = \mathfrak{m} = (X_n^T, \bar{f}_n^T : n < \omega) = (X_n, \bar{f}_n : n < \omega)$$

满足以下要求:

(a) $X_0 \neq \emptyset$, $|X_n| < \aleph_0$, $X_n \subsetneq X_{n+1}$, $X_{<n} = \bigcup_{\ell<n} X_\ell$ 和 $X = \bigcup_{n<\omega} X_n$；(b) $\bar{f} = (f_t : t \in T)$ 和 $\bar{g} = (g_t : t \in T)$；(c) 若 $n > 0$ 且 $t \in T_n \setminus T_{<n}$，则 f_t 是从 X_n 到 X_{n-1}的部分函数，且 f_t 将 $\mathrm{dom}(f_t) \setminus X_{n-1}$ 满射到 X_{n-1}；(d) 若 $s <_T t \in T_n$，则 $f_s \subseteq f_t$；(e) 若 $s <_T t$ 且 $s \in T_{n+1} \setminus T_n$，则 $\mathrm{dom}(f_t) \cap X_{n+1} = \mathrm{dom}(f_s)$；(f) 若 $t \in T_n \setminus T_{<n}$，则 $\mathrm{dom}(f_t) \cap X_{n-1} = \bigcup\{\mathrm{dom}(f_s) : s <_T t\}$；(g) 若 $s, t \in T_n$ 且 $x \in \mathrm{dom}(f_s) \cap \mathrm{dom}(f_t)$，则存在某个 $r \in T_n$ 使得 $r \leqslant_T s, t$，从而有 $x \in \mathrm{dom}(f_r)$，等价地，对$r = s \wedge t$，$\mathrm{dom}(f_s) \cap \mathrm{dom}(f_t) = \mathrm{dom}(f_r)$，其中 $\wedge$ 是树上的自然半格运算。(h) $X_{n+1} \supsetneq X_n \cup \bigcup\{\mathrm{dom}(f_t) : t \in T_{n+1} \setminus T_n\}$；(i) 对每个 x 和 y， $\{t \in T : f_t(x) = y\}$ 是 T的一个锥；(j) 对每个 $s, t \in T$, $\{x \in X, f_s(x) = f_t(x)\}$ 是 $\mathrm{dom}(f_{s \wedge t})$；(k) 对于 $n < \omega$ 和 $t \in T_n \setminus T_{<n}$，令 $Z_n = \bigcup_{k \leqslant |X_{<n}|} \mathrm{seq}_k(X_{<n})$（因此是一个有限集合），我们可以找到 $(\bar{z}_{(n,t,\bar{x})} : \bar{x} \in \mathrm{seq}(Z_n))$，使得满足以下条件：$(\cdot_1)$ $\bar{z}_{(n,t,\bar{x})} \in \mathrm{seq}^{\lg(\bar{x})}(\mathrm{dom}(f_t) \setminus X_{<n})$；

$(\cdot_2)$ $(\mathrm{ran}(\bar z_{(n,t,\bar x)}):\bar x\in \mathrm{seq}(Z_n), t\in T_n\backslash T_{n-1})$ *is a seq. of pairwise disjoint sets;*
$(\cdot_3)$ $f_t(\bar z_{(n,t,\bar x)})=\bar x$.

注 4.3。注意，4.2(k) 要求 $X_n\setminus X_{n-1}$ 足够大。

断言 4.4. 对于假设 4.1 中的 T，$\mathrm{K}^{\mathrm{ho}}(T)\neq\emptyset$（参见定义 4.2）。

约定 4.5. $\mathfrak{m}=(X_n,\bar f_n:\ n<\omega)\in \mathrm{K}^{\mathrm{ho}}(T)$。

定义 4.6. 在 X（参见约定 4.5）上，我们定义：
(1) 对于 $\bar x\in$序列$_k(X)$，我们令：

$$\mathrm{suc}(\bar x)=\{\bar y\in \mathrm{seq}_k(X): f_t(\bar y)=\bar x,\ \textit{for some } t\in T \textit{ s.t. } \bar x\subseteq \mathrm{dom}(f_t)\},$$

(2) 若 $\bar x\leqslant^k_{\mathfrak{m}}\bar y$，$\bar x$，序列$_k(X)$，且存在一个序列 $(\bar x_\ell:\ \ell\leqslant n)$ 使得$\bar x_0=\bar x$，$\bar x_n=\bar y$，并且对每个 $\ell<n$，$\bar x_{\ell+1}\in$ 后继$(\bar x_\ell)$，则令 $\bar x\leqslant^k_{\mathfrak{m}}\bar y$；(3) 若 $k=1$，我们可以简单地用 $\leqslant_{\mathfrak{m}}$ 代替 $\leqslant^1_{\mathfrak{m}}$。

断言 4.7。(1) $(X,<_{\mathfrak{m}})$ 是一棵具有 ω 层的树；
(2) 若 $z\in X_0$，则 z 是树 $(X,<_{\mathfrak{m}})$ 的根；(3) 若 $x\in X_{n+1}\setminus X_n$，则 x 的层为 $\leqslant n+1$，且至多存在一个 $y\in X_n$ 使得 $x\in$suc(y)；(4) 若 $f_{t_1}(x)$ 和 $f_{t_2}(x)$ 有定义，则它们相等；(5) $(\mathrm{seq}_k(X)<^k_{\mathfrak{m}})$ 是一棵具有 ω 层的树；(6) 若 $\bar x\leqslant^k_{\mathfrak{m}}\bar y$，则恰有一对 $(\mathrm{x}\ \bar t)$，使得存在唯一的 n 满足：(a) $\mathrm{x}=(\bar x_\ell:\ \ell\leqslant n)$，$\bar x_\ell\in \mathrm{seq}_k(X)$，且 $(\bar x_0,\bar x_n)=(\bar x,\bar y)$；(b) $\bar t=(t_\ell:\ \ell<n)$，$t_\ell\in T$；(c) $f_{t_\ell}(\bar x_{\ell+1})=\bar x_\ell$，对于 $\ell<n$；(d) 若 $t<t_\ell$，则 $f_t(\bar x_{\ell+1})$ 没有定义。

(7) 对每个 n，都存在一个 $x\in X_{n+1}\setminus X_n$，它是 $<_{\mathfrak{m}}$-最小的。

证明。我们只证明 (3)。假设 $x\in \mathrm{suc}(y_1)\cap\mathrm{suc}(y_2)$。因此，对于 $\ell\in\{1,2\}$，存在 $t_\ell\in T$ 使得 $f_{t_\ell}(x)=y_\ell$，且不失一般性，$s<_T t_\ell$ 意味着 $x\notin \mathrm{dom}(f_s)$。现在，根据假设 $x\in X_{n+1}\setminus X_n$，于是 $t_1,t_2\in T_n\setminus T_{<n}$（根据定义 4.2(f)）。现在，根据定义 4.2(g)，我们有：

$$t_1\neq t_2\Rightarrow \mathrm{dom}(f_{t_1})\cap\mathrm{dom}(f_{t_2})\subseteq X_{<n},$$

因此 $t_1=t_2$，这意味着 $y_1=f_{t_1}(x)=f_{t_2}(x)=y_2$，如所述。 ■

定义 4.8。设 $\mathfrak{m}\in \mathrm{K}^{\mathrm{ho}}(T)$（即约定 3.3 中的情形）。
(1) 设 $G_2=G_2[\mathfrak{m}]$ 为 $\bigoplus\{\mathbb{Q}x:\ x\in X\}$。(2) 设 $G_0=G_0[\mathfrak{m}]$ 为由 X 生成的 G_2 的子群，即 $\bigoplus\{\mathbb{Z}x:\ x\in X\}$。(3) 对于 $t\in T_n\setminus T_{<n}$，设：(a) $H_{(2,t)}=\bigoplus\{\mathbb{Q}x:\ x\in X_n\}$；(b) $I_{(2,t)}=\bigoplus\{\mathbb{Q}x:\ x\in X_{n-1}\}$；ˆ(c) f_t 是从 $H_{(2,t)}$ 到 $I_{(2,t)}$ 的（唯一）满射同态，使得 $x\in\hat{}\,\hat{}\,X_n\setminus\mathrm{dom}(f_t)\Rightarrow f_t(x)=0$ 且 $x\in\mathrm{dom}(f_t)\Rightarrow f_t(x)=f_t(x)$（参见 4.2(c)）。

(4) 对于 $t\in T$，我们定义 $H_{(0,t)}:=H_{(0,t)}\cap G_0$ 和 $I_{(0,t)}:=I_{(2,t)}\cap G_0$。
(5) 对于 $f_t[H_{(0,t)}]$ 如上所述的 f_t，我们有时，当我们谈论作为 G_0 上的映射的 f_t ˆ ˆ 时，实际上指的是 $f_t\restriction H_{(0,t)}$。
(6) 我们通过规定 $a<_* b$ 当且仅当 $a\neq b\in G_0^+$，并且对某个 $n<\omega$，a_0，...，$a_n\in G_0$，$a_0=a$，$a_n=b$ 成立，来定义 $<_*$ 在 G_0^+ 上的偏序：

$$\ell<n\Rightarrow\exists t\in T(\hat f_t(a_{\ell+1})=a_\ell).$$

断言 4.9。(1) $(G_0,<_*)$ 是一棵有 ω 层的树（回顾假设 4.1(1)）。
(2) 若 $s<_T t\in T$，则 $\hat{f}_s\subseteq\hat{f}_t$，此外，若 $s\in X_m\setminus X_{<m}$，则 $f_s = f_t\restriction X_m$。(3) 若 $a\in G_0^+$，则：(a) a 有唯一表示 $\sum_{\ell<n}q_\ell x_\ell$，其中某些 $n\geqslant 1$, $q_\ell\in\mathbb{Q}^+$ 满足 $(x_\ell:\ell<n)\in$ 序列$_n(X)$；(b) 序列 $((q_\ell,x_\ell):\ell<n)$ 在置换意义下唯一；(c) $a\in\mathrm{dom}(f_t)$ 当且仅当 $\ell<n\Rightarrow x_\ell\in X_{\mathbf{n}(t)}$；(d) 若 $b=f_t(a)$，则存在某个 $u\subseteq n$，使得 $b=\sum\{q_\ell f_t(x_\ell):\ell\in u\}$,$u=\{\ell<n:x_\ell\in\mathrm{dom}(f_t)\}$。

(4) 若 a、$b\in G_0^+$和 $a\leqslant_* b$，则存在唯一有序对 $(\bar{a},\bar{t})$，使得对于某个唯一的 $n<\omega$，我们有：

(a) $\bar{a}=(a_\ell:\ell\leqslant n)$; (b) $\bar{t}=(t_\ell:\ell<n)$, $t_\ell\in T$; (c) $f_{t_\ell}(a_{\ell+1})=a_\ell$; (d) 若 $t<t_\ell$，则 $a_{\ell+1}\notin\mathrm{dom}(f_t)$。(e) $a_n=b$ 和 $a_0=a$。

证明。显然。 ■

断言 4.10。(1) 设 $Y=\bigcup_{t\in T}\{\mathrm{dom}(f_t)\}$。存在 $\mathrm{h}:Y\to T$，使得对于 $x\in Y$：

(a) 存在 $\mathrm{n}(x)>0$，使得 $x\in X_{\mathbf{n}(x)}\setminus X_{<\mathbf{n}(x)}$，且 $\mathrm{n}(\mathrm{h}(x))=\mathrm{n}(x)$;
(b) $x\in\mathrm{dom}(f_{\mathbf{h}(x)})$；(c) 对于 $t\in T$, $x\in\mathrm{dom}(f_t)\Leftrightarrow\mathrm{h}(x)\leqslant_T t$；(d) 若 $f_t(x)$ 定义良好，则 $f_t(x)=f_{\mathbf{h}(x)}(x)\in X_{<\mathbf{n}(x)}$。

(2) $(X,<_{\mathfrak{m}})$ 不是良基的。

定义 4.11. 设 $(p_a:a\in G_0^+)$ 是一个由两两不同的素数组成的序列，使得：

$$a=\sum_{\ell<k}q_\ell x_\ell,\ q_\ell\in\mathbb{Z}^+,\ (x_\ell:\ell<k)\in\mathrm{seq}_k(X)\Rightarrow p_a\not|\, q_\ell.$$

(1) F 或 $a\in G_0^+$, *let* $\mathbb{P}_a=\bigcup_{n<\omega}\mathbb{P}_{(a,n)}$ 一个 d $G_1=G_1[\mathfrak{m}]=G_1[\mathfrak{m}(T)]=G_1[T]=\bigcup_{n<\omega}G_{(1,n)}$，其中，我们按 $n<\omega$ 归纳法定义 $G_{(1,n)}$、$\mathbb{P}_{(a,n)}$ 如下：
(a) $G_{(1,n)}$ 是 G_2 的一个子群，且扩张了 G_0；(b) $G_{(1,n)}$ 随着 $n<\omega$ 增大；
(c) (i) 对于 $a\in G_0^+$ 和 $n<\omega$，我们将定义一个随 n 增大的素数幂集合 $\mathbb{P}_{(a,n)}$；(ii) $G_{(1,n)}$ 是由以下集合生成的 G_2 的子群：

$$G_0\cup\{p^{-m}a:a\in G_0^+\ and\ p^m\in\mathbb{P}_{(a,n)}\};$$

(iii) 对于 $n=0$, $\mathbb{P}_{(a,n)}$ 是满足存在一个元素 $b\in G_0^+$ 使得 $p=p_b$、$a\leqslant_* b$ 和 $m<\omega$ 的 p^m 集合；
(d) 若 $n=j+1$，则 $\mathbb{P}_{(a,n)}$ 是 $\mathbb{P}_{(a,j)}$ 与满足以下条件的 p^m 的并集：对于某些 t、k、$\bar{x}$、$\bar{q}$、$\bar{y}$，有：(i) $t\in T_n\setminus T_{<n}$；(ii) $0<k\leqslant|X_j|=|X_{<n}|$；(iii) $\bar{q}=(q_\ell:\ell<k)$, $q_\ell\in\mathbb{Q}^+$；(iv) $\bar{x}=(x_\ell:\ell<k)\in$ 序列$_k(X_j)$；(v) $(\cdot)_1$ $\bar{y}=(y_\ell:\ell<k)\in$ 序列$_k(X)$ $(\cdot)_2$ $\bar{y}\subseteq X_n\cap\mathrm{dom}(f_t)\setminus X_{<n}$；$(\cdot)_3$ $\bar{y}=\bar{z}_{(n,t,\bar{x})}$（回顾 4.2(k)）；

$(\cdot_4)$ $a = \sum\{q_\ell y_\ell : \ell < k\}$;
(vi) $q_\ell \in \{\frac{m}{n!}, -\frac{m}{n!} : m \in \{1, ..., (n!)^2\}\}$;
(vii) $p^m | n!$;
(viii) *in* $G_{(1,j)}$, p^m *divides* $\sum\{q_\ell f_t(y_\ell) : \ell < k\}$, *i.e., we have that:*

$$\frac{1}{p^m}\sum\{q_\ell f_t(y_\ell) : \ell < k\} \in G_{(1,j)};$$

(ix) $p \leqslant n$.

引理 4.12. (1) 若 $p = p_a$、 $a \in G_0^+$，则：

$$G_{(1,p)} = \langle b \in G_0^+ : b \leqslant_* a\rangle^*_{G_1},$$

其中我们回顾一下， $\{b \in G_0^+ :\ b \leqslant_* a\}$ 是一个有限集合（根据断言 4.7(1)）。
（2）对于 $t \in T$、 $H_{(1,t)} := H_{(2,t)} \cap G_1$ 和 $I_{(1,t)} := I_{(2,t)} \cap G_1$ 在 G_1中是纯的。
ˆˆ（3）对于定义 4.8(3c)中的 f_t ，我们有 $f_t[H_{(1,t)}] \subseteq I_{(1,t)}$，因此ˆˆ当我们谈论作为 G_1 上的映射的 f_t 时，实际上指的是 $f_t \restriction H_{(1,t)}$。ˆ（4） $f_t[H_{(1,t)}] \neq I_{(1,t)}$。
（5）如果 $a \in G_0^+$且 p 是一个素数，则：

$$G_1 \models p^\infty | a \ \Leftrightarrow\ G_{(1,0)} \models p^\infty | a.$$

证明。（1）的证明类似于 [13, 5.17(1)]。其余部分很简单，只需展开 4.11。 ■

定理 4.13. 设 $\mathfrak{m}(T) \in \mathrm{K}^{\mathrm{ho}}_1(T)$.
(1) 我们可以修改构造，使得 $G_1[\mathfrak{m}(T)] = G_1[T]$ 的定义域为 ω，且函数 $T \mapsto G_1[T]$ 是 Borel 的（对于定义域为 ω的树 T）。(2) T 存在无限分支，当且仅当 $G_1[T]$ 不是 Hopfian。

证明. 条目 (1) 很简单。关于条目 (2) 中“从左到右”的方向，设 $\bar{t} = (t_n : n < \omega)$ 是 T的一条无限分支。那么ˆ $f = \bigcup_{n<\omega} \hat{} f_{t_n}$ 是一个从 G_2 到 G_2的自同态，因为 $G_2 = \bigcup_{n<\omega} H_{(2,t_n)}$，其中 $(H_{(2,t_n)} : n < \omega)$ 是 G_2 的一列纯ˆ子群，其极限为 G_2（参见定义 4.8(3c)）。此外，根据定义 4.8(3c)， f 满射到 G_2。现在我们断言：

ˆˆ $(*_1)$ (a) $f \restriction G_1 = \bigcup_{n<\omega} f_{t_n} \restriction H_{(1,t_n)}$ 是 G_1的自同态；ˆ
(b) $f \restriction G_1$ 是满射；ˆ(c) $f \restriction G_1$ 不是单射。

ˆˆ我们证明条目（$*_1$）（a）。我们需要证明 f 将 G_1 映射到 G_1中。显然，f 将X 映射到 $X \cup \{0\}$中，因此它将 G_0 映射到 G_0中。因此，我们需要证明：

$(*_{1.1})$ If $a \in G_0^+$, $n < \omega$ and $p^m \in \mathbb{P}_{(a,n)}$, then $\frac{\hat{f}(a)}{p^m} \in G_1$.

我们对 $n < \omega$使用归纳法证明这一点。只需考虑以下两种情形。情形 1。 $n = 0$ 和 $p^m \in \mathbb{P}_{(a,0)}$。
根据 4.11(1)(c)(ii)， $p = p_b$ 对于某个 b，使得 $a \leqslant_* b$，因此，对于充分大的 $k < \omega$，我们有 $f(a) = f_{t_k}(a) \leqslant_* a \leqslant_* b$，并且根据 4.11(1)(c)(ii)， $\leqslant_*$是一个偏序，故得证。

情形 2。 $n = j + 1$ 和 $\frac{a}{p^m} \in \mathbb{P}_{(a,n)} \setminus \mathbb{P}_{(a,j)}$。
那么，$(n, t, (q_\ell, x_\ell, y_\ell : \ell < k))$ 与 4.11(1)(d) 中所述相同，并回想一下， $\bar{t} = (t_n : n < \omega)$

是在证明开始时固定的。此外，必有 $t_{n+1} \notin T_n$。情形 2A。 $t \leqslant_T t_n$。根据 4.11(1)(d)，回想 $a = \sum\{q_\ell y_\ell : \ell < k\}$，我们有：

$$\hat{f}_{t_n}(\frac{1}{p^m}a) = p^{-m}\sum q_\ell f_{t_n}(y_\ell) = p^{-m}\sum q_\ell f_t(y_\ell) \in G_{(1,j)}.$$

情形 2B. $t \not\leqslant_T t_n$. 由于 $\bar{y} \subseteq \mathrm{dom}(f_t) \cap X_n \setminus X_{<n}$，根据 4.11(1)(d) 的条款 (v)($\cdot_3$)，我们有 $(y_\ell : \ell < k) = \bar{z}_{(n,t,\bar{x})}$，其中 $\bar{x} = (x_\ell : \ell < k)$。因此，根据 4.2(k)，我们有 $\bar{z}_{(n,t,\bar{x})} \in$ 序列$_{\lg(\bar{x})}(\mathrm{dom}(f_t) \setminus X_{<n})$。于是， $\bar{z}_{(n,t,\bar{x})} \in \mathrm{dom}(f_t) \setminus X_{<n}$，但我们有：

$$\bigcup_{i<\omega} f_{t_i} \restriction X_n = f_{t_n} \restriction X_n.$$

令 $r = t \wedge t_n$，则 $\mathrm{dom}(f_t) \cap \mathrm{dom}(f_{t_n}) = \mathrm{dom}(f_r)$。由于 $t \not\leqslant_T t_n$，必然有 $r \neq t$，因此 $\mathrm{n}(r) < n$，所以 $\bar{z}_{(n,t,\bar{x})} \subseteq \mathrm{dom}(f_t) \setminus \mathrm{dom}(f_r)$，故 $\bar{z}_{(n,t,\bar{x})}$ 与 $\mathrm{dom}(f_{t_n})$ 不相交，^^但 $X_n \subseteq \mathrm{dom}(f_{t_n})$，因此 $f_{t_n}(\bar{z}_{(n,t,\bar{x})}) = (0, ..., 0)$，所以 $f(\bar{z}_{(n,t,\bar{x})}) = (0, ..., 0)$。于是我们得到如下结论：

$$\hat{f}(a) = \hat{f}(\sum_{\ell<k} q_\ell y_\ell) = \sum_{\ell<k} q_\ell \hat{f}_{t_{n+1}}(\bar{z}_{(n,t,\bar{x})}) = 0.$$

这证明了 $(*_1)$(a)，因此我们转而证明 $(*_1)$(b)。为此，根据代数，只需证明：若 $b \in G_1^+$，$p^{-m}b \in G_1$，则存在某个 $c \in G_1$，使得对无穷多个 $k < \omega$，$\hat{}f_{t_k}(c) = b$。为此，取满足 $(x_\ell : \ell < k) \in$序列$_k(X)$ 且满足 $q_\ell \in \mathbb{Q}^+$ 的 $b = \sum_{\ell<k} q_\ell x_\ell$，其中 $\ell < k$。再令 n_0 足够大，使得我们有：

$(*_{1.2})$ $(\cdot_1)$ if $\ell < k$, then $q_\ell \in \{\frac{i}{n_0!}, -\frac{i}{n_0!} : i \in \{1, ..., (n_0!)^2\}\}$ and $p^m \mid n_0$;
$(\cdot_2)$ $\{x_\ell : \ell < k\} \subseteq X_{n_0}$.

现在取满足 $\mathrm{n}(t_{n_1}) > n_0$ 的 $n_1 > n_0!$ 。由于 $\mathrm{n}(t_{n_1+1}) > \mathrm{n}(t_{n_0})$，存在某个 $n < \omega$ 使得 $t_{n_1+1} \in T_{n+1} \setminus T_n$。现在对 $t = t_{n_1+1}$ 应用 4.11(1)(d)，便得证。

最后，关于条款 $(*_1)$(c)，只需注意到，对于每个满足 $t_n \in T_{n+1} \setminus T_n$ 的 $n < \omega$，我们有 $X_{n+1} \supsetneq X_n \cup \bigcup\{\mathrm{dom}(f_t) : t \in T_{n+1} \setminus T_n\}$，这是由条件 4.2(h) 得出的；而 f_{t_n} 根据 4.8(3c) 将该集合中的任意元素映射为 0。

现在我们证明条目 (2) 的“从右到左”方向。为此，假设：

$(*_2)$ T 是良基的，并且 $G_1[T] = G_1$ 和 $\pi \in \mathrm{End}(G_1)$ 都是满射。

我们将证明 π 是单射。为导出矛盾，假设并非如此。现在：

$(*_3)$ 若 $x \in X$，则 $\mathrm{supp}(\pi(x)) \subseteq X_{\leqslant_* x} = \{y \in X : y \leqslant_* x\}$。

[为什么？令 $p = p_x$，于是 $x \in G_{(1,p)}$，因此 $\pi(x) \in G_{(1,p)}$，再应用 4.12(1)。]

$(*_4)$ 若 $x \neq y \in X$ 彼此 $\leqslant_*$-不可比较，且 $x \in$支撑$(\pi(x))$，则 $y \in$支撑$(\pi(y))$。

我们证明 $(*_4)$。令 $p = p_{x+y}$，于是 $x + y \in G_0^+$，甚至 $x + y \in G_{(1,p)}$，因此由 4.12(1)，$\pi(x + y)$ 具有如下形式： $\sum\{r_i f_{\bar{t}_i}(x + y) : i < i(*)\}$，其中 $r_i \in \mathbb{Q}^+$ 和$\bar{t}_i \in T^{n(i)}$，对某个 $n(i) \geqslant 0$，使得 $(\bar{t}_i : i < i(*))$ 无重复。因此：

$(*_{4.1})$ $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y) = \sum_{i<i(*)} r_i f_{\bar{t}_i}(x) + \sum_{i<i(*)} r_i f_{\bar{t}_i}(y)$.

现在，根据假设， $x \in$ 支撑$(\pi(x))$，而 $x \notin$ 支撑$(\pi(y))$，因为根据（$*_3$），支撑$(\pi(y)) \subseteq X_{\leqslant_* y}$ 且 $x \not\leqslant_* y$。因此， x 属于 $\sum_{i<i(*)}$ 的支撑 $r_i f_{\bar{t}_i}(x)$。于是，对于某个 $j < i(*)$， $f_{\bar{t}_j}(x) = x$，从而 $\bar{t}_j = ()$。由于（$\bar{t}_i : i < i(*)$）是无重复的，我们有 $i < i(*)$，并且 $j \neq i$ 意味着 $\lg(\bar{t}_j) > 0$，所以 $f_{\bar{t}_i}(y) = y$，但$f_{\bar{t}_j}(y) \neq y$，因此 y 在（$*_{4.1}$）右端的第二项中恰好出现一次；然而如前所述，它没有出现在左端的第一项中，所以 y 出现在左端的支撑中，即 $\pi(x) + \pi(y)$，但 $y \notin$ 支撑$(\pi(x))$。因此， $y \in$ 支撑$(\pi(y))$。

（$*_5$）对于某个 $x \in X$， $x \notin$支撑($\pi(x)$)。
为什么是 ($*_5$)? 否则，对每个 $a \in G_1^+$，令 $a = \sum\{q_\ell x_\ell : \ell < k\}$、 $k > 0$、 $q_\ell \in \mathbb{Q}^+$，且 $(x_\ell : \ell < k)$ 无重复。
($*_{5.1}$) 不失一般性地， $\ell < k-1$ 蕴含 $x_{k-1} \not\leqslant_* x_\ell$。
($*_{5.2}$) $x_{k-1} \in$支撑($\pi(x_{k-1})$)。
[为什么？根据我们针对 ($*_5$) 所作的反证假设。]
($*_{5.3}$) 若 $\ell < k-1$，则支撑($\pi(x_{k-1})$) $\subseteq \{y \in X : y \leqslant_* x_\ell\}$。
[为什么? 由（$*_3$）。]
（$*_{5.4}$）若 $\ell < k-1$，则 $x_{k-1} \notin$ 支撑（π（x_ℓ））。
[为什么? 由（$*_{5.1}$）和（$*_{5.3}$）。]
（$*_{5.5}$） $x_{k-1} \in$ 支撑（π（x_{k-1}））$\setminus \bigcup_{\ell<k-1}$ 支撑（π（x_ℓ））。
[为什么? 由（$*_{5.1}$）+（$*_{5.4}$）。]
($*_{5.6}$) $x_{k-1} \in$支撑($\pi(a)$).
[为什么? 由 ($*_{5.5}$) 可得 $a = \sum_{\ell<k} q_\ell x_\ell$, $q_\ell \in \mathbb{Q}^+$.]
由 ($*_{5.6}$)，支撑(a) $\neq \emptyset$，因此 $\pi(a) \neq 0$。由于 a 是 G_1^+ 的任意元素，这意味着 π 是单射，这与我们的假设矛盾。
($*_6$) 对每个 $x \in X$， $x \notin$ 支撑($\pi(x)$).
为什么 ($*_6$) 成立? 反设不然。固定 $x \in X$，我们可以找到 $y \in X$，使得 $y \notin$ 支撑($f(y)$)（否则 ($*_6$) 成立）。由 4.7(7)，取 $z \in X$，使得 z 与 x 和 y 均为 $\leqslant_*$-不可比较。将 ($*_4$) 应用于这对 (y, z)，可推得 $z \notin$ 支撑($\pi(z)$)；将 ($*_4$) 应用于这对 (x, z)，可推得 $x \notin$ 支撑($f(x)$)，正如所要求的。现在注意，由 ($*_3$)+($*_6$) 可知:
($*_7$) 对每个 $x \in X$， $\mathrm{supp}(\pi(x)) \subseteq X_{<_* x} = \{y \in X : y <_* x\}$。
($*_8$) 设 $Z_n = \{x \in X : n = |\{y \in X : y <_* x\}|\}$。对于 $x \in Z_n \neq \emptyset$，令 $n_x = n$ and$y_{(x,n-1)} <_* \cdots <_* y_{(x,0)} < x$ 列出集合 $\{y \in X : y < x\}$。
($*_9$) 存在有理数 $q_{(x,i)}$，对于 $(i < n_x)$，使得 $\pi(x) = \sum\{q_{(x,i)} y_{(x,i)} : i < n_x\}$。为什么是 ($*_9$)? 对于 $x \in X_n$，由 ($*_7$)、($*_8$)， $\pi(x) \in \langle\{y \in X : y <_* x\}\rangle^*_{G_1}$，因此 ($*_9$) 成立，即存在 $(q_{(x,i)} : i < n) \in \mathbb{Q}^n$，使得:

$$\pi(x) = \sum\{q_{(x,i)} y_{(x,i)} : i < n_x\}.$$

($*_{10}$) 存在有理数 $q_{(n,i)}$、$(i < n < \omega)$，使得 $q_{(x,i)} = q_{(n,i)}$ 当 $n = n_x$ 时成立。为什么是 ($*_{10}$)? 固定 n，选取 $x_1 \in Z_n$，并令 $q_{(n,i)} = q_{(x_1,i)}$。现在，如果 $x_2 \in Z_n$，我们可以找到 $x_3 \in Z_n$，使得 $\{y \in X : y \leqslant_* x_3\}$ 与 $\{y \in X$ 不相交: $y \leqslant x_1$，或 $y \leqslant_* x_2\}$。现在，由于上述内容，($*_{10}$) 可由以下内容推出:
($*_{11}$) 如果 $x(1)$ $x(2) \in Z_n$ 且 $\{y_{(x(1),i)} : i < n\} \cap \{y_{(x(2),i)} : i < n\} = \emptyset$，那么对于所有$i < n$，都有 $q_{(x(1),i)} = q_{(x(2),i)}$。
为什么? 令 $a = x(1) + x(2)$ 和 $p = p_a$，于是我们有:

$$\pi(a) = \sum\{q_{(x(1),i)} y_{(x(1),i)} + q_{(x(2),i)} y_{(x(1),i)} : i < n\},$$

并且 $\pi(a) \in G_{(1,p)}$，因此我们可以像之前的情形那样继续。
($*_{12}$) $q_{(n,i)} = 0$，当 $i < n < \omega$ 时。
[为什么? 我们可以找到 $x \in Z_n$，它是 $<_*$-最小的，因此 $\pi(x) = 0$，由（$*_5$）可得。]
($*_{13}$) 对每个 $x \in X$， $\pi(x) = 0$。
[为什么? 由 ($*_9$)、($*_{10}$) 和 ($*_{11}$) 可知。]

（$*_{14}$）ran（π）$=\{0\}$。

因此我们得到了矛盾，因为假设 π 是满射。 ■

定理 1.5 的证明。由 4.13 可得。 ■

5. The co-Hopfian problem for mixed countable 2-nilpotent groups

提示。要完整理解本节，需要熟悉 [13, Section 5] 的定义及其部分证明。我们认为这无法避免（除非将 [13, Section 5] 几乎全部纳入本文）。

约定 5.1。本节中，我们（自然地）用乘法记号表示 2-幂零群，用加法记号表示阿贝尔群。我们建议读者在适当情况下采用相应的观点（例如在 5.5(2c) 中）。

约定 5.2. (1) $\mathfrak{m}$, T, $X^{\mathfrak{m}}$, $G_\ell[\mathfrak{m}]$ 和 $(p_a : a \in G_0^+)$ 与 [13, 第 5] 节中的相同。( ) Wh
2 $en\ clear\ f$来自 t h上下文中，我们可以省略 $\mathfrak{m}$ in $X^{\mathfrak{m}}$, $f_t^{\mathfrak{m}}$, $G_\ell[\mathfrak{m}]$.
(3) $\leqslant_X^2 \subseteq X^2 \times X^2$ 是 X 上以下集合的偏序闭包：

$$\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) : x_1,y_1,x_2,y_2 \in X, \exists t \in T \ s.t.\ (f_t(x_1),f_t(y_1)) = (x_2,y_2)\}.$$

(4) $E_2 \subseteq X^2 \times X^2$ 是偏序 $\leqslant_X^2$ 的等价关系闭包。(5) $\leqslant_X^1 \subseteq X \times X$ 和 $E_1 \subseteq X \times X$ 的定义类似。

选择 5.3. (1) $\mathbb{P}$ 表示素数的集合。
(2) 我们选择 $((x_p, y_p) : p \in \mathbb{P})$，使得：(a) 对每个 $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$，都有 x_{p_1}, $y_{p_2} \in X$；(b) $(x_p : p \in \mathbb{P})^\frown (y_p : p \in \mathbb{P})$ 两两不 E_1-等价；(c) $x_p + y_p$ 在 $G_1 = G_1[\mathfrak{m}]$ 中不能被 p 整除；(d) 若 $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{P}$，则 (x_{p_2}, y_{p_2})、$(y_{p_2}, x_{p_2}) \notin (x_{p_1}, y_{p_1})/E_2 \cup (y_{p_1}, x_{p_1})/E_2$。
(3) 对于 $x, y \in X$ 和 $n < \omega$，我们定义 $K_{(x,y)} = K_{(y,x)}$ 和 $a_{(x,y,n)}$，使得：(a) 若 $x = y$，则 $K_{(x,y)}$ 是平凡群 $\{0\}$，且且 $a_{(x,y,n)} = 0$；(b) 若 $x \neq y$，则 (x, y) 不与 $\{(x_p, y_p)、(y_p, x_p) : p \in \mathbb{P}\}$ 中的任何一个成员 E_2-等价，那么 $K_{(x,y)}$ 是平凡群 $\{0\}$，且 $a_{(x,y,n)} = 0$；(c) 若 $(x, y) \in (x_p, y_p)/E_2$ 或 $(x, y) \in (y_p, x_p)/E_2$，则 $K_{(x,y)} = K_p$ 是 $\mathbb{Z}_p^\infty$，即秩为 1 的可除 p-群，并且对于 $n \geqslant 1$，$a_{(x,y,n)} \in K_p$ 满足：(i) 若 $n = 1$，则 $K_p \models pa_{(x,y,n)} = 0 \neq a_{(x,y,n)}$；(ii) 若 $n = m + 1$，则 $K_p \models pa_{(x,y,n)} = a_{(x,y,m)}$。

备注 5.4. 我们能够满足选择 5.3 这一点很容易验证；正如附带条件 5 所述，我们依赖于阅读的 [13,章节 5]，。

定义 5.5. 对于 $\mathfrak{m}$（如约定 5.2 中所述），我们定义群 $H_2[\mathfrak{m}] = H_2$ 如下：
(1) H_2 由以下元素生成：(a) $(\frac{1}{n}!\, x)$，其中 $x \in X$ 和 $0 < n < \omega$；(b) $z_{(x,y,d)}$，其中 x、$y \in X$ 和 $d \in K_{(x,y)}$；(2) 除以下方程外自由：(a) $z_{(x,y,0)} = e$ 和 $z_{(x,x,d)} = e$；(b) $[z_{(x_1,y_1,d_1)}\ z_{(x_2,y_2,d_2)}] = e$；(c) $z^{-1}{}_{(x,y,d_1)} = z_{(y,x,d_2)}$，当 $d_1 = -d_2 \in K_{(x,y)}$ 时；(d) $z_{(x,y,d_1)} z_{(x,y,d_2)} = z_{(x,y,d)}$，当 d_1、$d_2 \in K_{(x,y)}$ 和 $K_{(x,y)} \models d = d_1 + d_2$ 时；(e) $(\frac{1}{(n+1)}!\ x)^{n+1} = (\frac{1}{n}!\, x)$；(f) $[(\frac{1}{n}!\ x), (\frac{1}{n}!\ y)] = z_{(x,y,a_{(x,y,n)})}$（参见选择 5.3(3)）；

(g) $z_{(x,y,d)}t = tz_{(x,y,d)}$，其中 x、$y \in X$、$d \in K_{(x,y)}$和 t 属于：

$$\{(\frac{1}{n!}, x) : x \in X, 0 < n < \omega\}.$$

(3) 对于 $Y \subseteq X$，我们令 $H_2[Y]$ 为由以下集合生成的 H_2 的子群：

$$\{(\frac{1}{n!}, x) : n < \omega,\ x \in Y\}.$$

(4) 对于 $t \in T$，我们令 g_t^2 为满足以下条件的 H_2 的部分自同构：

$$n < \omega \text{ and } x \in X \Rightarrow g_t^2((\frac{1}{n!}, x)) = (\frac{1}{n!}, f_t(x)),$$

其中 f_t 是从 X 到 X 的部分映射，取自 [13，第 5] 节。

注记 5.6. 注意，根据我们在 5.3(3c) 中所作的选择，以及在 5.5(2) 中定义 H_2 时加入的方程，我们有 H_2 由 $\{(\frac{1}{n!}, x) : n < \omega, x \in X\}$ 生成（要看出这一点，请注意 $\{a_{(x,y,n)} : n < \omega\}$ 生成 $K_{(x,y)}$）；5.11(1) 中也提到了这一点。这使得 5.5(3) 中 $H_2[Y]$ 的定义与 H_2 的定义相一致，即我们自然有 $H_2 = H_2[X]$。

断言 5.7。（1）（a） $H_2[\mathfrak{m}]$是二类幂零群，其中心由以下元素生成：

$$Z = \{z_{(x,y,d)} : x, y \in X \text{ and } d \in K_{(x,y)}\};$$

（b） $K'_{(x,y)} = \{z_{(x,y,d)} : d \in K_{(x,y)}\}$ 是 H_2 的子群，并且典范同构于 5.3 中的 $K_{(x,y)}$，因此从现在起我们可以将它们视为同一对象；

(2) （a）在 $\langle Z\rangle_{H_2}$ 中，我们有 $z_{(x_1,y_1,d_1)} = z_{(x_2,y_2,d_2)}$ 当且仅当 $(x_1, y_1, d_1) = (x_2, y_2, d_2)$；

（b） $\langle Z\rangle_{H_2} = \bigoplus\{K_{(x,y)} : x、y \in X\}$ 是阿贝尔群，并且是可除群。

（3）固定 X 的任意线性序 $<_1$ 和 $X \times X$的任意线性序 $<_2$，H_2 的每个元素都可以写成如下形式的乘积（因此 k、$m < \omega$）：

$$(\frac{1}{n!}, x_0)^{q_0} \cdots (\frac{1}{n!}, x_{k-1})^{q_{k-1}} z_{(x_0,y_0,d_0)} \cdots z_{(x_{m-1},y_{m-1},d_{m-1})}$$

使得：

(a) $x_0 <_1 \cdots <_1 x_{k-1}$；(b) $((x_i, y_i) : i < m)$ 是 $<_2$-递增的，并且对于每个 $i < m$, $K_{(x_i,y_i)} \models d_i \neq 0$；(c) $q_\ell \in \mathbb{Z}^+$；(d) 如果 $n > 1$，那么对于某些 $\ell < k$, $\frac{q_\ell}{n} \notin \mathbb{Z}$；(e) 对于每个 $i < m$, $x_i <_1 y_i$。

(4) (3) 中 H_2 的元素表示是唯一的。注意，该表示依赖于 $<_1$ 和 $<_2$，只有在固定它们之后才是唯一的。(5) $H_2[Y]$ 是由 $\{(\frac{1}{n!}, x) : x \in Y, 0 < n < \omega\} \cup \{z_{(x,y,d)} : x, y \in Y$ 和 $d \in K_{(x,y)}\}$ 自由生成的群，但需满足将 5.5(2) 中的方程相对于 Y 限定后得到的方程。(6) 对于 $t \in T$, g_t^2（参见 5.5(4)），是从 $H_2[\mathrm{dom}(f_t)]$ 到 $H_2[\mathrm{ran}(f_t)]$ 的部分嵌入。

证明。例如，对于 (3)，令 $a \in H_1^+$，并将其写为 $w_0 \cdots w_{i(*)-1}$，其中 $i(*) \geqslant 1$；对于 $i < i(*)$，w_i 是某个生成元的整数幂 $\neq 0$。根据 5.5(2e)(2g)，不失一般性，我们可以假设存在 $j(*) < i(*)$，且 $0 < n < \omega$ 使得：

$$(\star)\quad a = (\frac{1}{n!}, x_1)^{q_1} \cdots (\frac{1}{n!}, x_{j(*)-1})^{q_{j(*)-1}} z_{(x_{j(*)},y_{j(*)},d_{j(*)})} \cdots z_{(x_{i(*)-1},y_{i(*)-1},d_{i(*)-1})}.$$

在如（$\star$）所示的 a 的表示中，我们选择一个使 $k = |\{(i, j)$ 最小的表示：$i <_1 j < j_*$ 但 $x_j \leqslant_1 x_i\}|$。若（x_i：$i < j_*$）是 $<_1$-递增的，那么基本上就完成了，因为根据 5.5(2b)，这些 $z_{(x,y,d)}$ 两两交换，且 $z_{(x,x,d)} = e$ 和 $z_{(x,y,d)} =$

$z_{(y,x,-d)}$。若（x_i： $i<j_*$）不是 $<_1$-递增的，那么，由于 $\leqslant_1$ 是 X 的线性序，对某个 $i<j_*$，我们有 $x_{i+1}\leqslant_1 x_i$，且必然有 $x_{i+1}<_1 x_i$；因为若 $x_{i+1}=x_i$，我们就可以将 $(\frac{1}{n!}\ x_i)^{\ q_i}$ $(\frac{1}{n!}\ x_{i+1})^{\ q_i+1}$替换为 $(\frac{1}{n!}\ x_i)^{\ q_i+q_{i+1}}$，并且 $q_i+q_{i+1}\in\mathbb{Z}$，从而 $k=|\{(i,j)：\ i<j<j_*$ 但 $x_j\leqslant_1 x_i\}|$ 减小了，这就产生了矛盾。现在，分别讨论 q_i、q_{i+1} 为正或为负的情形，我们可以利用 5.5(2f)，对 q_i+q_{i+1} 作归纳，证明可以交换 $(\frac{1}{n!}\ x_i)^{\ q_i}$ 和 $(\frac{1}{n!}\ x_{i+1})^{\ q_{i+1}}$ 的顺序，代价是引入一个形如 $z_{(x,y,d)}$ 的元素，该元素移至表达式（$\star$）的右侧（请回想 z 位于 H_2 的中心，见条目（1））。

关于条目 (6)，设 $Y_1=\mathrm{dom}(f_t)$ 且 $Y_2=\mathrm{ran}(f_t)$。那么，首先，f_t 将 Y_1映入 Y_2，且它是单射。要得出结论，只需观察以下内容：

$$(x,y)\in(x_p,y_p)/E_2\ \Leftrightarrow\ (f_t(x),f_t(y))\in(x_p,y_p)/E_2,$$

这里请读者回忆 5.2(4) 中 E_2 的定义。 ■

断言 5.8。存在一个满同态 $h_2\colon H_2\to G_2$，使得：

$$(\frac{1}{n!},x)\mapsto\frac{1}{n!}x\in G_2\ \textit{and}\ z_{(x,y,d)}\mapsto e.$$

定义 5.9。（1） $H_0[\mathfrak{m}]=H_0$ 是由以下元素生成的 H_2 的子群：

$$\{(1,x):x\in X\}.$$

（2） $H_1[\mathfrak{m}]=H_1[T]=H_1=\{a\in H_2[\mathfrak{m}]：\ h_2(a)\in G_1[\mathfrak{m}]\}$。

（3）对于 $Y\subseteq X$ 和 $\ell\in\{0,1\}$，令 $H_\ell[Y]=H_\ell\cap H_2[Y]$。

（4）对于 $t\in T$ 和 $\ell\in\{0,1,2\}$，令 $g_t^\ell=g_t^2\restriction H_\ell$。

断言 5.10。（1）对于 $\ell\in\{0,1\}$，定义 $h_\ell=h_2\restriction H_\ell$（见 5.9）。（2）对于 $\ell\in\{1,2\}$，同态 $h_\ell\colon H_\ell\to G_\ell$ 是满射。（3）对于 $\ell\in\{1,2\}$，$\ker(h_\ell)=\mathrm{Cent}(H_\ell)=\langle Z\rangle_{H_2}\cap H_\ell$，因此 $H_\ell/\mathrm{Cent}(H_\ell)\cong G_\ell$。（4）对于 $\ell\in\{1,2\}$，集合 $\{(1,x)/\mathrm{Cent}(H_\ell)：\ x\in X\}$ 构成 $H_\ell/\mathrm{Cent}(H_\ell)$ 的一组基。

断言 5.11. (1) H_2 由 $\{(\frac{1}{n!}x)：\ 0<n<\omega, x\in X\}$ 生成。

(2) $g_t^2\restriction H_1=:g_t^1=:g_t$ (参见 5.5(4)) 是 H_1 的部分自同构。(3) 若 $(t_n：\ n<\omega)$ 是 T 的一条无限分支，则 $\bigcup_{n<\omega}g_{t_n}^1$ 是从 H_1 到其自身的一个嵌入，但它不是满射，因此 H_1 不是余霍普夫群。(4) H_1 的交换子子群就是它的中心（因此 $H_1\in$ 属于 NiGp(2)），且该子群是 H_1 与 H_2 的中心的交，即 $\langle Z\rangle_{H_2}$。

证明. 条目 (1)–(3) 和 (5) 都很容易。我们证明 (4)。为简化记号，在证明余下部分中，对于 $\ell\in\{1,2\}$，我们记 $g_{t_n}^\ell=g_n^\ell$ 和 $\bigcup_{n<\omega}g_{t_n}^\ell=g^\ell$。类似地，我们记 $f_{t_n}^\ell=f_n^\ell$ 和 $\bigcup_{n<\omega}f_{t_n}^\ell=f^\ell$。因此，对于 $\ell\in\{1,2\}$ 和 $n<\omega$，有：

（$*_0$） $h_\ell\circ g_n^\ell=h_\ell\circ f_n^\ell$。

现在，我们有以下结论：

($*_1$) 每个 g_n^ℓ 都是 H_ℓ的部分自同构。[为什么?

根据本断言的条目（2）。]($*_2$) 如果 $n<m$，

那么 $g_n^\ell\subseteq g_m^\ell$。($*_3$) g^ℓ 是 H_ℓ的部分自同构。

($*_4$) 对每个 $n<\omega$， $g_n^1\subseteq g_n^2$。($*_5$) $g^1\subseteq g^2$。

($*_6$) $\mathrm{dom}(g^2)=H_2$。

[根据 [13, 第 5] 节以及本断言中 5.5(4) 给出的 g_t^2 的定义，每个 $(\frac{1}{n}!\ x) \in \mathrm{dom}(g^2)$；根据本断言的条目（1），这样的元素生成 H_2。](∗7) $\mathrm{dom}(g^1) = H_1$。

[为什么？根据（∗6）以及对每个 $n < \omega$，我们都有 $g_n^1 = g_n^2 \restriction H_1$。]
（∗8）存在 $x_* \in X$，使得 $x \notin \mathrm{ran}(f^1)$。
[为什么？令 $x_* \in X_0$，根据 [13, 5.4(d)],，对所有 $t \in T$， $x_* \notin \mathrm{ran}(f_t^2)$，因此 $x_* \notin \mathrm{ran}(f_t^1)$。]（∗9）$(1, x_*) \in H_1$，但 $(1, x_*) \notin \mathrm{ran}(f^1)$。
[为什么？根据（∗7），$(1, x_*) \in H_1$；根据（∗8）及定义，$(1, x_*) \notin \mathrm{ran}(f^1)$。]
(∗10) g^1 是 H_1 到自身的一个嵌入，但它不是满射。

■

命题 5.12. 若树 T 是良基的，则群 $H_1[T] = H_1$ 是余霍普夫的。

证明。假设树 T 是良基的。我们将自由使用命题 5.11。令 π为 H_1 到自身的一个嵌入。由于 π 将 H_1 的交换子集合映入自身，且该集合生成了 H_1 的中心，因此 π 将 H_1 的中心映入自身。此外，由于 π 是单射，它将 H_1的非中心元素映为 H_1的非中心元素。因此， π 诱导出一个从 $H_1/\mathrm{Cent}(H_1)$ 到自身的嵌入 $\hat{}\pi$。重新命名后，$\hat{}\pi$ 便是 $G_1 = G_1[\mathfrak{m}]$ 到自身的一个嵌入（参见 5.10(3)）。根据 [13, 第 5] 节，存在 $m \in \mathbb{Z}^+$，使得 $\hat{}\pi$ 满足以下条件：

$$(1, x)/\mathrm{Cent}(\mathrm{H}_1) \mapsto (1, x)^m/\mathrm{Cent}(\mathrm{H}_1) \text{ (cf. } 5.10(4)).$$

我们希望证明 $m = 1$ 或 $m = -1$（注意，在 [13, 第 5] 节中我们不一定有这一点，而只有 $m \in \mathbb{Z}$）。为导出矛盾，首先假设 $m > 1$，并令 p为整除 m 的一个素数。对于前一句中的固定素数 p（回顾 5.3(2)），令 $x, y \in X$为（x_p, y_p）。于是，对于$a = a_{(x,y,1)}$，我们有：

$$(1)\ \ [(1, x), (1, y)] = z_{(x,y,a)} \neq e_{H_1} \text{ and } z_{(x,y,a)}^p = e \text{ (so } z_{(x,y,a)}^{m^2} = e) \text{ (cf. } 5.3(3(\mathrm{c})\mathrm{i})).$$

现在，由于 $\hat{}\pi$：对于每个 $x \in X$，$(1, x)/\mathrm{Cent}(\mathrm{H}_1) \mapsto (1, x)^m/\mathrm{Cent}(\mathrm{H}_1)$，存在 $c_x \in \mathrm{Cent}(\mathrm{H}_1)$ 使得 $f((1, x)) = (1, x)^m c_x$。因此，由于 π 是单射，我们得到：

$$\begin{array}{rcl} e_{H_1} & \neq & \pi([(1, x), (1, y)]) \\ & = & [\pi((1, x)), f((1, y))] \\ & = & [(1, x)^m c_x, (1, y)^m c_y] \\ & = & [(1, x)^m, (1, y)^m] \\ & = & [(1, x), (1, y)]^{m^2} \quad [\text{by Fact 2.11}] \\ & = & z_{(x,y,a)}^{m^2}, \end{array}$$

其中 $a = a_{(x,y,1)}$，这与 $z^{m^2}{}_{(x,\ y,\ a)} = e_{H_1}$（参见方程 (1)）相矛盾。因此，$m > 1$是不可能的，同样， $m < -1$ 也不可能。因此， $m \in \{1, -1\}$。
现在我们证明 π 是满射，从而得出 H_1 是 co -Hopfian。首先注意：
(∗1) 若 $a, b \in H_1$，则存在某个 $a_1, b_1 \in \mathrm{ran}(f)$，使得 $[a, b] = [a_1, b_1]$。
我们证明 (∗1)。由于 $\hat{}\pi$ 是满射，我们可以找到 $a_1 \in \mathrm{ran}(\pi)$ 和 $c \in \mathrm{Cent}(H_1)$，使得 $a = a_1 c$。类似地，我们可以找到 $b_1 \in \mathrm{ran}(\pi)$ 和 $d \in \mathrm{Cent}(H_1)$，使得 $b = b_1 d$。

因此：

$$\begin{aligned}[a,b] &= [a_1c, b_1d] \\ &= (a_1c)^{-1}(b_1d)^{-1}(a_1c)(b_1d) \\ &= (a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1)(c^{-1}d^{-1}cd) \\ &= (a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1)e_{H_1} \\ &= [a_1,b_1].\end{aligned}$$

因此，我们有：

$(*_2)$ H_1 的交换子集合包含于 ran(π)。

由于 H_1 的交换子集合生成 Cent(H_1)，且 $\hat{}\pi$ 是满射，π 也是满射。 ■

定理 1.6 的证明。由断言 5.11(4)(5) 和 5.12 得出。 ■

6. The co-Hopfian problem for countable AB

我们需要用到 [14] 中的以下三个断言。

观察 6.1（[14, 观察 2.17]）。设 $G \in$AB。那么 G 是非余霍普夫的，当且仅当：（$\star$）存在 f 和 $z \in G$，使得：（a） $f \in$End(G)；（b）对于每个 $x \in G \setminus \{0\}$， $f(x) \neq x$；（c）对于每个 $x \in G$， $z \neq x - f(x)$。

断言 6.2（[14, 断言 3.2]）。设 $G \in$ AB 是可数且约化的。再设 $p \in \mathbb{P}$，并假定 Tor$_p(G)$ 是无限的。那么：

（1） G 不是余霍普夫的；¯（2）此外，若 Tor$_p(G)$ 无界，则我们可以找到 K 和 K，使得：¯（a） $K = (K_n : n < \omega)$ 且 $K = \bigoplus_{n<\omega} K_n \leqslant_* G$；（b） $K_n \leqslant G$ 是一个非平凡有限 p-群；（c）存在 $f \in$ End(G)，使得 ran(f) $\subseteq K$，并且对于每个 $n < \omega$，都有 $\{0\} \neq f(K_n) \subseteq K_n$；（d） f 如 6.1 中所述。

(3) 若除 (2) 外，Tor$_p(G)$ 的高度为 $\geqslant \omega$，则在 (2)(b) 中，对于某个递增的 $k(n)$，有 $p^n(p^{k(n)}K_n) \neq \{0\}$ 和 $x \in K_n \Rightarrow f(x) = p^{k(n)}(x)$。

命题 6.3（[14, 命题 3.6]）。设 $G \in$ 阿贝尔群且 $p \in \mathbb{P}$。若 Tor$_p(G)$ 有界，且G/Tor$_p(G)$ 不 p-可除，则 G 不是余霍普夫群。

定义 6.4。若约化阿贝尔群 G 的子群 H 是可除群，则称其在 $\mathbb{Z}$-进拓扑下稠密。

注记 6.5。定义 6.4 也可以用拓扑（甚至度量）概念来表述，但根据 [8, 第 6 节，例 10(b)]，这与上述定义等价。

命题 6.6。设 $G \in$阿贝尔群$_\omega$，并假设 G 是余霍普夫群，则：
G 可以表示为 $G_1 \oplus G_2$，其中
(a) G_1 是有限秩可除群（因此是余霍普夫）；(b) G_2 是约化且余霍普夫的；(c) 对于 Tor(G_2) $= K = \bigoplus\{K_{(2,p)} : p \in \mathbb{P}\} \leqslant G_2$，我们有：($\cdot_1$) $K_{(2,p)} =$ Tor$_p(G_2) = K_p$ 是有限的；($\cdot_2$) K 在 $\mathbb{Z}$-进拓扑下稠密于 G_2；($\cdot_3$) 任意 $\pi \in$End(G_2)都将 $K_{(2,p)}$ 映射到 $K_{(2,p)}$；($\cdot_4$) 任意 1-to-1 $\pi \in$End(G_2) 都将 K 满射到自身（因为 K 是余霍普夫的）；

(·5) 对任意 $a \in G_2$，我们都可以关联一个唯一的序列 $\{c_{(a,p)} : p \in \mathbb{P}\}$，使得：
(i) $c_{(a,p)} \in K_{(2,p)}$；(ii) 对于每个 $n < \omega$，$a - c_{(a,p)}$ 中的 G_2 可被 p^n 整除；(iii) $a \mapsto c_{(a,p)}$ 是从 G_2 到 $K_{(2,p)}$ 的投影，此外，对于 $q \neq p$，此映射在 K_p 上为恒等映射，在 K_q 上为 0；(iv) $a - \sum\{c_{(a,p)} : p \in \mathbb{P}, p < n\}$ 可被 $(n-1)!$ 整除；(v) $a \mapsto (c_{(a,p)} : p \in \mathbb{P})$ 将 G_2 嵌入 $\prod\{K_{(2,p)} : p \in \mathbb{P}\}$。(·6) 如果 $\pi \in \mathrm{End}(G_2)$ 且 $a \in G_2$，则对于 $p \in \mathbb{P}$，$\pi(c_{(a,p)}) = c_{(\pi(a),p)}$。

证明。设 $G_1 \leqslant G$ 是 G 的极大可除子群，已知存在约化 $G_2 \leqslant G$ 使得 $G = G_1 \oplus G_2$。现在，G_1 和 G_2 是共 Hopfian 的这一事实由 [3, 引理 3] 得出。G_1 如 (a) 中所述是众所周知的。关于 (c)，(·1) 由 6.2 得出，(·2) 由 6.3 得出，(·3) 显然成立，而 (·4) 再次由 [3, 引理 3] 得出。我们证明 (·5)。为此，固定 $a \in G_2$。对于每个素数 p 和 $n < \omega$，存在 $c = c_{(a,p^n)} \in K$ 使得 $G_2 \models p^n \mid (a - c)$（因为 G_2/K 是可除的，回顾 6.3）。此外，显然 $c = \sum\{c_q : q \text{ 个素数 } q < q_*\}$ 对某个 $q_* < \omega$ 和 $c_q \in K_{(2,q)}$ 成立。但 $q \neq p$ 蕴含 $p^n K_{(2,q)} = K_{(2,q)}$，因此 $p^n \mid c_q$。于是，不妨设 $p \neq q$ 蕴含 $c_q = 0$。因此，存在 $c = c_{(a,p^n)} \in K_{(2,p)}$ 如上。现在，由于 $K_{(2,p)}$ 是有限的，某个 $c \in K_{(2,p)}$ 对无穷多个 n 发生，因此不妨设 $c_{(a,p^n)} = c_{(a,p)}$。所以对于每个 $n < \omega$，都有 $G_2 \models p^n \mid (a - c_{(a,p)})$；因为如果 $a - c_{(a,p)}$ 被 p^n 整除，那么它就被所有 $1 \leqslant m \leqslant n$ 的 p^m 整除。此外，显然当 n 足够大时 $p^n K_{(2,p)} = 0$，因此 $c_{(a,p)}$ 是唯一的。我们详细说明 $c_{(a,p)}$ 的唯一性。设 c_1、$c_2 \in K_{(2,p)} = K_p$ 满足 $p^\infty \mid (a - c_\ell)$，其中 $\ell \in \{1,2\}$，并设 $n < \omega$ 满足 $p^n K_p = \{0\}$。显然，$p^n \mid (a - c_1)$、$(a - c_2)$，因此我们得到以下条件：

$$p^n \mid ((a - c_1) - (a - c_2)) = c_2 - c_1 := c_*.$$

因此，存在 $d \in G$ 使得 $p^n d = c_*$，但 $c_* \in K_p = \mathrm{Tor}_p(G)$，故 $d \in K_p$（因为 K_p 是纯的，且 G 是 K_p 有限的），这意味着 $p^n d = 0 = c_*$（因为选取 $n < \omega$ 时使得 $p^n K_p = \{0\}$）。因此，$c_1 = c_2$，正如所需，即 $c_{(a,p)}$ 是唯一的。
现在，（·5）（i）-（iii）由上文的观察显然成立，我们证明（·5）（iv）（v）。关于（·5）（iv），注意，对每个 $p \in \mathbb{P}$ 和 $m < \omega$，$a - c_{(a,p)}$ 可被 p^m 整除，因此令 $b_{(p,m)} \in G_2$ 满足 $p^m b_{(p,m)} = a - c_{(a,p)}$。现在取足够大的 $m < \omega$，使得对每个素数 $p < n$，都有以下结论：

$$(\star_1) \qquad p^m K_{(2,p)} = \{0\},$$

并令 $k = k_m = \prod_{p \in \mathbb{P}_{<n}} p^m$，其中 $\mathbb{P}_{<n} = \{p \in \mathbb{P} : p < n\}$。对于 $p \in \mathbb{P}_{<n}$，我们有：

$$(\star_2) \qquad k b_{(p,m)} = \frac{k}{p^m}(a - c_{(a,p)}).$$

令 $\mathcal{U}$ 为环 $\mathbb{Z}$ 中由 $\{\frac{k}{p^m}$ 生成的理想：$p \in \mathbb{P}_{<n}\}$，我们断言：

$(\star_{2.1})$ $1 \in \mathcal{U}$。

为什么有 $(\star_{2.1})$？令 $\mathcal{U} = \mathbb{Z}a$（众所周知，$\mathbb{Z}$ 的每个理想都有这种形式）。由于 $\frac{k}{p^m} \in \mathcal{U}$，必然有 $a \neq 0$，因此不妨设 $a > 0$ 且 $a | \frac{k}{p^m}$。于是，a 具有如下形式 $\prod\{p^{i(p)} : p \in \mathbb{P}_{<n}\}$。现在，对每个 $p \in \mathbb{P}_{<n}$，有 $a | \frac{k}{p^m}$，因此，对每个 $p \in \mathbb{P}_{<n}$，有 $i(p) = 0$，从而 $a = 1$，如所求。
因此，由（$\star_{2.1}$）可知，存在 ℓ_p，使得对于 $p \in \mathbb{P}_{<n}$，有 $\sum\{\ell_p \frac{k}{p^m} : p \in \mathbb{P}_{<n}\} = 1$。

（$\star_3$）我们有如下结论：

$$\begin{aligned} a-\textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} c_{(a,p)} &= 1(a-\textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} c_{(a,p)}) \\ &= (\textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} \ell_p \frac{k}{p^m})(a-\textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} c_{(a,p)}) \\ &= \textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} (\ell_p \frac{k}{p^m}(a-\textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} c_{(a,p)})) \\ &= \textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} (\ell_p (\frac{k}{p^m}a-\frac{k}{p^m}\textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} c_{(a,p)})) \\ &= \textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} (\ell_p (\frac{k}{p^m}a-\frac{k}{p^m}c_{(a,p)})) \\ &= \textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} (\ell_p (\frac{k}{p^m}(a-c_{(a,p)})) \\ &= \textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} (\ell_p k b_{(p,m)}) \\ &= k_m(\textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} \ell_p b_{(p,m)}), \end{aligned}$$

其中，为了从第五项推到第六项，我们使用了（$\star_1$）以及对 m 的选择；为了从第七项推到第八项，我们使用了（$\star_2$）。因此，$k=k_m|\, a-\sum_{p\in\mathbb{P}_{<n}} c_{(a,p)}$，于是（$\cdot_5$）（$iv$）成立，对足够大的 $m\, n-1!\,|\, k_m$。关于（$\cdot_5$）（v），我们将证明，若 $a\in G_2$ 且 $\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} c_{(p,a)}=0$，则 $a=0$，因为这表明 $a\mapsto (c_{(a,p)}:\ p\in\mathbb{P})$ 将 G_2 嵌入 $\prod\{K_{(2,p)}:\ p\in\mathbb{P}\}$。现在：

（$\star_4$）若 $a\in G_2$ 且 $\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} c_{(a,p)}=0$，则对每个素数 q，存在某个 $b\in G_2$，使得

使得 $qb=a$ 和 $\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} c_{(b,p)}=0$。

但在证明（$\star_4$）之前，我们先说明：

（$\star_5$）（$\star_4$）足以推出（$\cdot_5$）（v）。

[为什么? 假设 $a\in G_2$ 和 $\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} c_{(p,a)}=0$，利用（$\star_4$），我们可以选取（$b_n:\ n<\omega$），使得 $b_0=a$ 和 $p_n b_{n+1}=b_n$，其中 $p_n\in\mathbb{P}$，并且对所有 $p\in\mathbb{P}$，对于无穷多个 $n<\omega$，都有 $p_n=p$。因此，若 $a\neq 0$，则 $\bigcup_{n<\omega}\mathbb{Z}b_n$ 是 G_2的非平凡可除子群，但 G_2 是约化的，这就产生了矛盾。]

于是我们只需证明（$\star_4$）。 固定 $q\in\mathbb{P}$ 并令 $m=|K_q|$，则存在 $b_0\in G_2$ 使得 $q^m b_0=a$，因为 $G_2\models q^\infty|(a-c_{(a,q)})$，且根据假设 $c_{(a,q)}=0$。

($\star_{4.1}$) 令 $b'=b_0-c_{(b_0,q)}$。

于是我们有：

($\star_{4.2}$) ($\cdot_1$) $c_{(b',q)}=0$;
($\cdot_2$) $q^m b'=q^m b_0-q^m c_{(b_0,q)}=a-0=a$ (as $m=|K_q|$ and $c_{(b_0,q)}\in K_q$);
($\cdot_3$) if $q\neq p\in\mathbb{P}$, then $p^\infty|\, b'$.

[为什么是 ($\star_{4.2}$)? 这是因为 ($\cdot_1$): 对于每个 $n<\omega$, $q^n x=b_0-c_{(b_0,q)}=b'=b'-0$，序列 ($c_{(b',p)}$: $p\in\mathbb{P}$) 都是唯一的。($\cdot_2$) 显然。关于 ($\cdot_3$)，令 $0<\ell<\omega$，并假设 $a=p^\ell a_1$，我们可以找到 $i,j\in\mathbb{Z}$ 使得 $iq^m+jp^\ell=1$，因此：

$$\begin{aligned} b' &= (iq^m+jp^\ell)b' \\ &= iq^m b'+jp^\ell b' \\ &= ia+jp^\ell b' \\ &= ip^\ell a_1+jp^\ell b' \\ &= p^\ell(ia_1)+p^\ell(jb') \\ &= p^\ell(ia_1+jb'). \end{aligned}$$

因此，由于 $p^\infty|\, a$（回想 $\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} c_{(a,p)}=0$），我们有 $p^\infty|\, b'$，如所需。]现在，来自（$\star_{4.2}$）的 b' 对于（$\star_4$）而言几乎符合要求。要得出结论，只需令$b=q^{m-1}b'$，这很容易看出符合要求。至此，（$\star_4$）的证明完成。这足以证明（$\cdot_5$）。现在我们证明（$\cdot_6$）。对于每个素数 p 和 $0<n<\omega$，$p^n\mid (a-c_{(a,p)})$，但是，由于 $\pi\in$自同态环（G_2），我们有 $p^n\mid (\pi(a)-\pi(c_{(a,p)}))$，且 π将 $\mathrm{Tor}_p(G)$ 映入其自身，因此 $\pi(c_{(a,p)})\in \mathrm{Tor}_p(G)=G_{(2,p)}$。因此，序列

$(c_{\pi(a),p}:\ p\in\mathbb{P})$ 相对于 π（a）的表现与（$\cdot_5$）中相同，因此我们已经证明了（$\cdot_6$），因为（$\cdot_5$）中的序列是唯一的。至此，该断言的证明完成。 ■

推论 6.7. 在命题 6.6 的背景下，令 G_2 和 $K=\bigoplus\{K_{(2,p)}:p\in\mathbb{P}\}=\bigoplus\{K_p:p\in\mathbb{P}\}$ 为其中对象，则（相对于 $\mathbb{Z}$-进拓扑）：(a) K 的 $\mathbb{Z}$-进完备化是群 $\prod\{K_p:p\in\mathbb{P}\}$；(b) K 在 G_2 中稠密（即，G_2 中的每个元素都是一个柯西序列的极限），因此不失一般性，G_2 是包含 $K=\oplus_{p\in\mathbb{P}}K_p$的 $\prod_{p\in\mathbb{P}}K_p$ 的一个可数子群；(c) $(\sum\{c_{(a,p)}:\ p\in\mathbb{P},p<n\}:\ n<\omega)$（参见 6.6($c$)($\cdot_5$)）是柯西的，其极限为 a。

定理 1.7 的证明。由推论 6.7。

■

References

[1] S. Adams 和 A. Kechris. *Linear algebraic groups and countable Borel equivalence relations*.《美国数学会杂志》13 (2000), no. 04, 909-943. [2] R. Baer. *Groups without proper isomorphic quotient groups*.《美国数学会通报》50 (1944), 267-278. [3] R. A. Beaumont 和 R. S. Pierce. *Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules* **91** 1959 209 219 .《美国数学会汇刊》( ), - . [4] F. Calderoni 和 S. Thomas. *The bi-embeddability relation for countable abelian groups*.《美国数学会汇刊》371 (2019), no. 03, 2237-2254. [5] A. E. Clement, S. Majewicz 和 M. Zyman. *The theory of nilpotent groups*. Birkh¨auser/Springer, Cham, 2017. [6] D. Dikranian, B. Goldsmith, L. Salce 和 P. Zanardo. *Algebraic entropy for Abelian groups*.《美国数学会汇刊》361 (2009), 3401-3434. [7] H. Friedman 和 L. Stanley. *A Borel reducibility theory for classes of countable structures*.《符号逻辑杂志》54 (1989), no. 03, 894-914. [8] Laszlo Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I*. 纯粹与应用数学，第 36 卷，学术出版社，纽约—伦敦，1970 年。[9] S. Gao. *Invariant descriptive set theory*. Taylor & Francis Inc, 2008. [10] B. Goldsmith 和 K. Gong. *On adjoint entropy of Abelian groups*.《代数通讯》40 (2012), no. 03, 972-987. [11] B. Goldsmith 和 K. Gong. *Algebraic entropies Hopficity and co-Hopficity of direct sums of , Abelian groups* **03** 2015 75 85 .《拓扑、代数及其应用》( ), - . [12] R. Hirshon. *Misbehaved direct products*. Expo, Math. (2002), 365.374. [13] G. Paolini 和 S. Shelah. *Torsion-free abelian groups are Borel complete*.《数学年刊》(2)，已接受发表（04.12.2023），链接见此处。[14] G. Paolini 和 S. Shelah. *On the existence of uncountable Hopfian and co-Hopfian abelian groups*

.《以色列数学杂志》，已接受发表。[15] B. Pinsky. *Hopfian groups are complete co-analytic*. 可在 arXiv 上获取。[16] K. Riggs. *The decomposability problem for torsion-free abelian groups is analytic-complete*.《美国数学会会刊》143 (2015), no. 08, 3631-3640. [17] S. Shelah. *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*.《以色列数学杂志》18 (1974), 243-256. [18] S. Thomas. *Complete groups are complete co-analytic*.《数学逻辑档案》57 (2018), no. 05-06, 601-606. [19] S. Thomas. *On the complexity of the classification problem for torsion-free abelian groups of rank two* **189** 2002 02, 287 305 .《数学学报》( ), no. - . [20] S. Thomas. *The classification problem for torsion-free abelian groups of finite rank*.《美国数学会杂志》16 (2003), no. 01, 233-258.

Department of Mathematics "Giuseppe Peano", University of Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123, Italy.

Einstein Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Israel and Department of Mathematics, Rutgers University, U.S.A.