arXiv:2303.03783v1 [math.FA] 7 Mar 2023

巴拿赫代数中的 Delta-Sincov 映射

Włodzimierz Fechner 和 ALEKSANDRA ŚWIĄTCZAK

摘要。我们研究乘法型辛科夫方程的解与近似解

$$T(f,h) = T(f,g)T(g,h)$$

其中映射 T 取值于交换巴拿赫代数。

1. 动机：作为近似乘法型辛科夫方程的格吕斯型不等式

设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 为非退化区间， f和 $g \in L([a,b])$ 为勒贝格可积函数。假设存在常数 m_f、 m_g、 M_f、 $M_g \in \mathbb{R}$ 使得

$$m_f \leq f \leq M_f \quad \text{and} \quad m_g \leq g \leq M_g \qquad \text{a.e. on } [a,b]. \tag{1}$$

我们将函数 f 的积分平均值记为 $I(f)$:

$$I(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \quad f \in L([a,b]).$$

著名的格吕斯不等式最早可追溯至1935年，其表述为

$$|I(fg) - I(f)I(g)| \leq \frac{1}{4}(M_f - m_f)(M_g - m_g). \tag{2}$$

如今，人们已经得到了许多推广和改进结果。关于这一主题的全面研究以及参考文献列表，读者可参阅 S.S. Dragomir 的专著 [3] 以及 Z. Otachel 的论文 [14–16]。

Grüss型不等式是指为下列表达式提供上界的不等式

$$|\langle f,h\rangle - \langle f,g\rangle \langle g,h\rangle|,$$

有时还需附加假设 $\|g\| = 1$，或者

$$\left|\langle f,h\rangle - \frac{1}{\|g\|^2}\langle f,g\rangle \langle g,h\rangle\right|,$$

其中 f、 g、 h属于内积空间（参见 $[3, \text{定理 } 15, 16, 17]$）。人们也研究了以内积替换为其他泛函的情形，其中包括原始不等式的离散版本。

在论文 [4] 中，我们研究了满足

$$|S(f,h) - S(f,g)S(g,h)| \leq c \quad \text{for all } f,g,h \tag{3}$$

2020 数学主题分类。 主要：39B42；次要：26D15, 39B82, 46C05, 46J05, 46K05, 46L05, 47H99, 47J05。关键词和短语。 辛科夫方程、交换巴拿赫代数、半单巴拿赫代数、 C^*-代数、Grüss 型不等式。

其中常数为 $c \geq 0$。对 [4] 的研究受到 Richard不等式的启发，它是 Grüss型不等式的一个例子。该不等式指出，方程 (3) 的特定解是如下形式的泛函

$$S(f,g) = \frac{\langle f,g\rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}.$$

在 [4] 的主要结果中，我们证明了方程 (3) 的每个无界实值或复值解都是辛科夫方程的解

$$S(f,h) = S(f,g)S(g,h) \quad \text{for all } f,g,h. \tag{4}$$

因此， S 可表示为

$$S(f,g) = \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} \quad \text{for all } f,g \tag{5}$$

其中 φ 是某个处处非零的实值或复值映射（参见 D. Gronau [8,定理]）。由 [4] 的主要结果可知，不可能将 Richard不等式推广到泛函 S 被无界函数替代的情形。

乘法辛科夫方程在函数方程理论中十分重要，并有多种应用。最近，G. Kiss 和 J. Schwaiger [9] 研究了它的条件形式，并将其结果应用于负利率情况下利息复利计算规则的求解问题。此外，M. Baczyński 等人 [1,2] 研究了满足某种辛科夫方程形式的模糊蕴涵。D. Gronau [8]对该方程进行了全面研究，并列出了相关参考文献。

我们将以如下观察作为本节引言的结尾：辛科夫方程涵盖了指数映射方程。因此，我们后续的所有结果都推广了关于指数映射的早期研究。

命题1。 假设$(X, \cdot)$ 是一个群， $\mathcal{A}$ 是一个交换环，给定 $F\colon X \to \mathcal{A}$和 $S\colon X \times X \to \mathcal{A}$，其定义为

$$S(f,g) = F\left(fg^{-1}\right), \quad f,g \in X.$$

则 F 满足

$$F(f \cdot g) = F(f)F(g), \quad f,g \in X$$

当且仅当 S 满足(4)。

类似地，辛科夫方程的近似解可推广为近似指数映射。细节从略。

2. 复值泛函的 Delta-Sincov 映射

设 X 是一个非空集， S 和 F 分别是定义在乘积 $X \times X$ 上的复值映射和非负映射。本节将研究以下函数不等式：

$$|S(f,h) - S(f,g)S(g,h)| \leq F(f,g)F(g,h) - F(f,h), \quad f,g,h \in X. \tag{6}$$

方程 (6) 的每个解都称为具有控制函数F的 δ-Sincov 映射。显然，如果 $c \geq 0$ 是一个固定常数，并取等于 $1/2(1+\sqrt{1+4c})$ 的常值映射作为 F，那么 (6) 就化为 (3)。因此，本节的结果拓展了 [4]的研究成果。

本研究旨在延续由 L. Veselý、L. Zajíček [17] 提出的 δ-凸性概念所开启的研究，并进一步承接多位作者的相关工作。论文 [17] 主要致力于研究不等式

$$\left\| F\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{F(x)+F(y)}{2} \right\| \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

满足此不等式的连续解 F 称为 δ-凸。 [17] 的定理之一表明，每个实值 δ-凸函数都可以表示为两个凸泛函之差。这一结果促使人们研究若干相关问题。特别是，R. Ger [8] 研究了不等式

$$\|F(x+y) - F(x)F(y)\| \leq f(x)f(y) - f(x+y),$$

并对 F使用了 δ-指数映射这一术语。最近，A. Olbryś 研究了 δ (s,t)-凸映射、[10], delta Schur凸映射 [11], [13] 以及 δ-次可加映射和 delta超可加映射 [12]。

我们通过观察不等式 (6) 的行为与其他由 δ-凸性概念所启发的不等式相似，开始研究 (6)。下面的命题 2 是 [8, 命题 1]的一个类似结果。

命题 2。 设 X 是一个非空集，且 $S\colon\ X\times X\to[0,+\infty)$ 和$F\colon\ X\times X\to[0,+\infty)$ 满足不等式 (6)。若记 $H=S+F$，则

$$H(f,h)\leq H(f,g)H(g,h),\quad f,g,h\in X. \tag{7}$$

证明。 固定 f、g、$h\in X$；由（6）可得

$$\begin{aligned}H(f,h)&=S(f,h)+F(f,h)\leq S(f,g)S(g,h)+F(f,g)F(g,h)\\&=[H(f,g)-F(f,g)][H(g,h)-F(g,h)]+F(f,g)F(g,h)\\&=H(f,g)H(g,h)-H(f,g)F(g,h)-F(f,g)H(g,h)+2F(f,g)F(g,h)\\&=H(f,g)H(g,h)-S(f,g)F(g,h)-F(f,g)S(g,h)\leq H(f,g)H(g,h).\end{aligned}$$

□

我们将应用 [5] 中的一个观察来排除 F 取零的情形。事实上，根据 [5, 命题 2],，如果 F有一个零点，那么 $F=0$ 在 $X\times X$ 上成立，因此，S 满足辛科夫方程（4）。因此，从现在起，我们将限于 F 为正的情形。

在下一个结果中，我们描述满足附加假设的（6）的解。我们先给出一个引理。

引理 1。 假设 X 是一个非空集，并且 $S\colon\ X\times X\to\mathbb{C}$ 和 $F\colon\ X\times X\to(0,+\infty)$ 满足不等式 （6）。如果存在某些 $f,g\in X$ 使得映射

$$X\ni k\to\frac{S(g,k)}{F(f,k)} \tag{8}$$

无界，则对于所有 $f,g\in X$，映射 （8）都是无界的。

证明。 我们将把证明分为几个步骤。固定 f、$g\in X$，使得映射（8）无界，并任意固定 h、$m\in X$。

步骤 1. 映射

$$X\ni k\to\frac{S(g,k)}{F(h,k)}$$

是无界的。

S 和 F 满足（6），因此

$$|S(h,k)-S(h,f)S(f,k)|\leq F(h,f)F(f,k)-F(h,k),\quad k\in X.$$

立即可得以下不等式

$$F(h,k)\leq F(h,f)F(f,k),\quad k\in X. \tag{9}$$

由（9）可得

$$\frac{|S(g,k)|}{F(f,k)}\leq\frac{|S(g,k)|}{F(h,k)}F(h,f),\quad k\in X.$$

显然，由于根据假设左端无界，因此分式 o n 右端无界。

步骤 2。映射

$$X\ni k\to\frac{S(h,k)}{F(h,k)}$$

无界。

由 (6) 可得

$$|S(g,k)-S(g,h)S(h,k)|\leq F(g,h)F(h,k)-F(g,k)\leq F(g,h)F(h,k),\quad k\in X;$$

therefore

$$\left|\frac{S(g,k)}{F(h,k)}-S(g,h)\frac{S(h,k)}{F(h,k)}\right|\leq F(g,h)\quad k\in X.$$

根据步骤 1，第一个分式无界，因此第二个分式也无界。**步骤 3**。

映射

$$X\ni k\to\frac{S(h,k)}{F(m,k)}$$

无界。

仿照步骤 1 使用 (6)，可得

$$\frac{|S(h,k)|}{F(h,k)}\leq\frac{|S(h,k)|}{F(m,k)}F(m,h),\quad k\in X.$$

根据步骤 2，左侧无界。因此，右侧的分式无界，证明到此结束。□

下面的推论显而易见，并将在后续定理证明的最后用到。

推论 1. 在引理 *1* 的假设下，若存在某个 $g\in X$，使得对每个 $k\in X$，都有 $S(g,k)=0$，则 $S=0$ 在 $X\times X$上。

现在，我们可以证明本节的主要结果了。

定理 1. 假设 X 是一个非空集，且 $S\colon X\times X\to\mathbb{C}$ 和 $F\colon X\times X\to(0,+\infty)$ 满足不等式 (6)。若存在某些 $f,g\in X$，使映射(8) 无界，则对所有 $f,g,h\in X$，S 都满足辛科夫方程 (4)。

证明。定义一个辅助泛函 $\Gamma\colon X\times X\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\Gamma(f,g):=F(f,g)F(g,f)-1,\quad f,g\in X.$$

利用不等式 (9)，我们得到

$$F(g,h)\leq F(g,f)F(f,h),f,g,h\in X.$$

so,

$$F(f,g)F(g,h)-F(f,h)\leq\Gamma(f,g)F(f,h),\quad f,g,h\in X. \tag{10}$$

现在，任取 f、g、h、$k \in X$。由 (6) 和 (10) 可得

$$|S(f,k) - S(f,h)S(h,k)| \le F(f,h)F(h,k) - F(f,k) \le \Gamma(f,h)F(f,k)$$

and

$$|S(f,k) - S(f,g)S(g,k)| \le F(f,g)F(g,k) - F(f,k) \le \Gamma(f,g)F(f,k),$$

因此

$$|S(f,h)S(h,k) - S(f,g)S(g,k)| \le [\Gamma(f,g) + \Gamma(f,h)]F(f,k). \tag{11}$$

利用 (11)、(6)，然后利用 (10)，可得

$$\begin{aligned} |S(h,k)| \cdot |S(f,h) - S(f,g)S(g,h)| &= |S(f,h)S(h,k) - S(f,g)S(g,h)S(h,k)| \\ &\le [\Gamma(f,g) + \Gamma(f,h)]F(f,k) + |S(f,g)S(g,k) - S(f,g)S(g,h)S(h,k)| \\ &\le [\Gamma(f,g) + \Gamma(f,h)]F(f,k) + |S(f,g)|[F(g,h)F(h,k) - F(g,k)] \\ &\le [\Gamma(f,g) + \Gamma(f,h)]F(f,k) + |S(f,g)|\Gamma(g,h)F(g,k). \end{aligned}$$

因此，若 $S(h,k) \neq 0$，则

$$|S(f,h) - S(f,g)S(g,h)| \le [\Gamma(f,g) + \Gamma(f,h)]\frac{F(f,k)}{|S(h,k)|} + |S(f,g)|\Gamma(g,h)\frac{F(g,k)}{|S(h,k)|}.$$

如果不存在满足以下条件的 $h \in X$：对所有 $k \in X$，$S(h,k) \neq 0$，那么根据推论 1 可得 $S = 0$ 在 $X \times X$ 上成立，这与假设矛盾。最后，引理 1 表明，在保持 f, $g, h \in X$ 不变的情况下，右侧的两个分数可以任意小。因此，左侧等于零。□

3. 巴拿赫代数中的 Delta-Sincov 算子

设 $\mathcal{A}$ 是一个（复）交换巴拿赫代数。我们约定，巴拿赫代数及其子集用大写花体字母表示，而大写哥特字体保留用于表示由巴拿赫代数上的线性乘法泛函组成的集合，小写哥特字母表示泛函。因此，$\mathcal{A}$ 上所有复同态（即 $\mathcal{A}$ 上非零、线性且具有乘法性的复映射）所成的空间记为 $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$。带有弱$-^*$ 拓扑的 $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ 是一个紧豪斯多夫空间。记 $\Phi\colon \mathcal{A} \to C_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}(A))$ 为盖尔范德变换，即

$$\Phi(x)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}(x), \quad \mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\, x \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ 上所有极大理想的交集称为 $\mathcal{A}$ 的（雅各布森）根，并记为 $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$。众所周知，根等于盖尔范德变换的核。若 $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$，即盖尔范德变换是一个同构，则代数 $\mathcal{A}$ 称为半单代数。此外，若代数 $\mathcal{A}$ 配备了一个对合 $^*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，使得

$$\|xx^*\| = \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{A},$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 C^*代数。著名的盖尔范德-奈马克定理指出，对于 C^*代数，盖尔范德变换是一个等距同构，且对于所有 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ 和 $x \in \mathcal{A}$，都有 $\mathfrak{m}(x^*) = \overline{\mathfrak{m}(x)}$；或者等价地，对于所有$x \in \mathcal{A}$，都有 $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$。

我们将从描述巴拿赫代数中的辛科夫方程的解开始。

命题 3. 假设 X 是一个非空集，且 $T\colon\ X\times X\to\mathcal{A}$ 满足

$$T(f,h)=T(f,g)T(g,h),\quad f,g,h\in X. \tag{12}$$

于是：

(a) 若对于某个 $f,g\in X$，有 $T(f,g)=0$，则 $T=0$ 在 $X\times X$ 上，(b) 若对于某个 $f,g\in X$，$T(f,g)$ 是零因子，则对于所有 $f,g\in X$，$T(f,g)$ 都是零因子。

证明。借助 $\mathcal{A}$ 的交换性，反复使用 (12) 即可轻易得出这两个断言。□

命题 4。假设 X 是一个非空集。若 $T\colon X\times X\to\mathcal{A}$ 满足方程 (12)，则存在一个（可能为空的）集合 $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ 以及一个映射$\varphi\colon \mathfrak{M}(\mathcal{A})\times X\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$，使得对于所有 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})\setminus\mathfrak{M}_1$，$\Phi(T(\cdot,\cdot))(\mathfrak{m})=0$，并且

$$\Phi(T(f,g))(\mathfrak{m})=\mathfrak{m}(T(f,g))=\frac{\varphi(\mathfrak{m},f)}{\varphi(\mathfrak{m},g)},\quad \mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_1,\ f,g\in X. \tag{13}$$

反之，若 $\mathcal{A}$ 是半单巴拿赫代数，$\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}(\mathcal{A})$，$\varphi\colon \mathfrak{M}(\mathcal{A})\times X\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 且 $T\colon X\times X\to\mathcal{A}$ 由(13) 定义，并且对所有$\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})\setminus\mathfrak{M}_1$都有 $\Phi(T(\cdot,\cdot))(\mathfrak{m})=0$，那么 T 满足(12)。

证明。为证明第一部分，注意到对每个 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})$，映射 $S:=\mathfrak{m}\circ T$都是 (4) 的解。记

$$\mathfrak{M}_1:=\{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A}):\mathfrak{m}\circ T\neq 0\}$$

并利用命题 3 (a) 以及第一节中回顾的标量值解的表示式 (5)，推导出 (13)。

为证明逆向推论，注意到由于 Φ 是等距映射，因此 T 由 (13) 良好定义。此外，对每个 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_1$ 以及每个 f、g、$h\in X$，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\circ(T(f,h)-T(f,g)T(g,h))&=\mathfrak{m}(T(f,h))-\mathfrak{m}(T(f,g))\mathfrak{m}(T(g,h))\\&=\frac{\varphi(\mathfrak{m},f)}{\varphi(\mathfrak{m},h)}-\frac{\varphi(\mathfrak{m},f)}{\varphi(\mathfrak{m},g)}\frac{\varphi(\mathfrak{m},g)}{\varphi(\mathfrak{m},h)}=0,\end{aligned}$$

或者等价地

$$T(f,h)-T(f,g)T(g,h)\in\ker\mathfrak{m}.$$

由于 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_1$ 是任意选取的，并且根据假设，对所有 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})\setminus\mathfrak{M}_1$均有 $\mathfrak{m}\circ T=(\Phi\circ T)(\mathfrak{m})=0$，因此

$$T(f,h)-T(f,g)T(g,h)\in\bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})}\ker\mathfrak{m}=\operatorname{rad}(\mathcal{A}).$$

最后，利用 $\mathcal{A}$ 是半单巴拿赫代数这一事实，我们得到

$$T(f,h)-T(f,g)T(g,h)=0.$$

□

下一个例子表明，$\mathcal{A}$ 是半单的这一假设不能省略。

例 1。 设 $X=(0,+\infty)$， $\mathcal{A}$ 是由形如 $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ 的 2×2 复矩阵组成的子代数，其中 x、 y、 $z\in\mathbb{C}$ 和 $T\colon\ X\times X\to\mathcal{A}$ 定义为

$$T(f,g):=\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad f,g\in X.$$

在 $\mathcal{A}$ 上恰有两个不同的线性乘法泛函，即

$$\mathfrak{m}_1\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}=x,\quad \mathfrak{m}_2\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}=z.$$

因此，

$$\operatorname{rad}(\mathcal{A})=\left\{\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad y\in\mathbb{C}\right\},$$

公式 (13) 对 $\varphi=1$ （对 $\mathfrak{m}_1$ 和 $\mathfrak{m}_2$ 均如此）成立，而 T 不满足方程 (12)。

在下一个定理的证明中，我们借鉴了 R. Ger 和 P. Šemrl 的文章 [7]中的一些思想。

设 X 是一个非空集， $T\colon\ X\times X\to\mathcal{A}$ 和 $F\colon\ X\times X\to(0,+\infty)$ 是任意映射。我们将研究以下函数不等式:

$$\|T(f,h)-T(f,g)T(g,h)\|\leq F(f,g)F(g,h)-F(f,h),\quad f,g,h\in X. \tag{14}$$

我们不对 T施加任何额外假设。因此，由于不失一般性，我们可以将 $\mathcal{A}$ 嵌入一个带单位元的代数中，故可假设 $\mathcal{A}$ 有单位元。

定理 2. 设 X 是一个非空集，且 $\mathcal{A}$ 是一个半单交换巴拿赫代数。假设 $T\colon\ X\times X\to\mathcal{A}$ 和 $F\colon\ X\times X\to(0,+\infty)$ 满足不等式 (14) 以及条件

$$\forall_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})}\exists_{f,g\in X}\ \sup_{k\in X}\left|\frac{\mathfrak{m}\left(T(g,k)\right)}{F(f,k)}\right|=\infty. \tag{15}$$

那么 T 满足辛科夫方程 (12)。

证明。 任取固定的 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})$。显然 $\|\mathfrak{m}\|=1$，因此对于每个f、 g、 $h\in X$，我们有

$$\begin{aligned}|\mathfrak{m}\circ T(f,h)-(\mathfrak{m}\circ T(f,g))(\mathfrak{m}\circ T(g,h))|&=|\mathfrak{m}\circ(T(f,h)-T(f,g)T(g,h))|\\&\leq\|\mathfrak{m}\|\,\|T(f,h)-T(f,g)T(g,h)\|\leq F(f,g)F(g,h)-F(f,h).\end{aligned}$$

定义 $S\colon\ X\times X\to\mathbb{C}$为 $S:=\mathfrak{m}\circ T$。注意， S满足不等式 (6)。因此，由定理 1 可推得 S 满足方程 (4)。于是，对于由 (5) 给出的 $\varphi(\mathfrak{m},\cdot)=\varphi$ 以及每个 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})$，等式 (13) 均成立。最后，应用命题 4 的第二部分即可完成证明。□

可以问，Ger 和 Šemrl 的第二个定理（即 [7, 定理 3.2]）是否存在类似结果。下面的例子表明，完全类似的结果并不成立。具体来说，我们将证明：若 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，则使 $(\Phi\circ T)(\cdot)(\mathfrak{m})$ 有界的所有 $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ 所构成的集合未必是闭集。因此，不可能将代数 $\mathcal{A}$ 分解为两个闭理想的直和，使得若Q 和 R 是相应的投影，则 $Q\circ T$满足辛科夫方程且 $R\circ T$范数有界。

例2。令

$$X := \{f \in C([0,1]) : \forall_{x\in[0,1]}[x < f(x) \le x^2 + 1]\},$$

给定 $\mathcal{A} := C_{\mathbb{C}}([0,1])$ 和 $T\colon X \times X \to \mathcal{A}$ 以及 $F\colon X \times X \to (0,+\infty)$，它们由 $F = (1+\sqrt{5})/2$ （一个常值映射）给出，并且

$$T(f,g) = \frac{f-1}{g}, \quad f,g \in X.$$

可以验证， T 和 F满足不等式（14）。此外，由于每个$\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$都具有 $\mathfrak{m}(f) = f(x)$ 的形式，其中某个 $x \in [0,1]$，那么对于固定的 f，若 $g \in X$满足 $g(x) \neq 1$ 对所有 $x \in [0,1]$ 成立，则有

$$\sup_{k\in X}\left|\frac{\mathfrak{m}\left(T(g,k)\right)}{F(f,k)}\right| = \sup_{k\in X}\frac{|2g(x)-2|}{(1+\sqrt{5})k(x)}.$$

我们看到，上确界有限当且仅当 $x \in (0,1]$。因此，所有使得 $(\Phi \circ T)(X)(\mathfrak{m})$ 有界的 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ 的集合并非闭集。

在下一个结果中，我们将证明可以得到一个相对较弱的陈述，它可视为 [7, Theorem3.2] 的类比。

命题5. 设 X 为非空集， $\mathcal{A}$ 为一个 C^*-代数。假设$T\colon X\times X \to \mathcal{A}$和 $F\colon X\times X \to (0,+\infty)$ 满足不等式 (14)。那么存在：一个巴拿赫 C^*-代数 $\mathcal{B}$、一个赋范 C^*-代数 $\mathcal{C}$ 以及 *-同态 $\Lambda_1\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$和 $\Lambda_2\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$，使得映射 $\Lambda_1 \circ T$ 对每个$f,g \in X$ 均满足辛科夫方程 (12)，集合

$$\left\{\Lambda_2\left(\frac{T(g,k)}{F(f,k)}\right) : k \in X\right\}$$

在 $\mathcal{C}$ 中范数有界，并且$(\Lambda_1,\Lambda_2)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}\oplus\mathcal{C}$是一个等距 *-同态。

证明。 定义 $S\colon \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \times X \times X \to \mathbb{C}$ 如下

$$S(\mathfrak{m})(f,g) := \Phi(T(f,g))(\mathfrak{m}) \quad \mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\ f,g \in X.$$

利用盖尔范德变换的基本性质，我们得到

$$\begin{aligned}|S(\mathfrak{m})(f,h) - S(\mathfrak{m})(f,g)S(\mathfrak{m})(g,h)| &= |\Phi\big(T(f,h) - T(f,g)T(g,h)\big)(\mathfrak{m})|\\ &\le \|T(f,h) - T(f,g)T(g,h)\|\\ &\le F(f,g)F(g,h) - F(f,h), \quad f \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\ f,g,h \in X.\end{aligned}$$

定义

$$\mathfrak{M}_s := \{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) : S = S(\mathfrak{m}) \text{ satisfies } (4)\}.$$

根据盖尔范德-奈马克定理，盖尔范德变换是等距映射。因此， $\mathfrak{M}_s$是 $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$的闭子集（因而是紧集）。

定义 $\mathcal{B} := C_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}_s)$ 以及 $\Lambda_1\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，如下

$$C_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) \ni \tau \to \Lambda_1(\tau) := \tau \restriction_{\mathfrak{M}_s} \in \mathcal{B}.$$

上文中，我们通过盖尔范德变换将代数 $\mathcal{A}$ 与其像等同起来。根据定义，映射 $\Lambda_1 \circ T\colon X \times X \to \mathcal{B}$ 满足 Sincov方程（12）。

进一步，令 $\mathcal{C} := L^\infty(\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \setminus \mathfrak{M}_s) \cap C_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \setminus \mathfrak{M}_s)$，并将 $\Lambda_2\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 定义为

$$C_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) \ni \tau \to \Lambda_2(\tau) := \tau \restriction_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})\setminus\mathfrak{M}_s} \in \mathcal{C}.$$

引理 1 表明集合 $\left\{\Lambda_2\begin{pmatrix}T\\F\end{pmatrix}(g,\ k)\ (f,\ k)\right)\colon\ k\in X\Big\}$ 对所有 f、$g\in X$ 在 $\mathcal{C}$ 中有界。最后，若直和 $\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}$ 配备范数

$$\|x\oplus y\|:=\max\{\|x\|,\|y\|\},\quad x\oplus y\in\mathcal{B}\oplus\mathcal{C},$$

那么显然，映射 $(\Lambda_1,\Lambda_2)\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}$ 是一个等距映射。 □

声明

致谢：本文完成时，作者之一 Aleksandra Świątczak 是波兰罗兹工业大学跨学科博士生院的博士生。

伦理审批。不适用。

利益冲突。作者声明，本文不存在任何利益冲突。

作者贡献。 两位作者对稿件的贡献相同，并同意其最终版本。

资助。 Aleksandra Świątczak 的工作得到了“FU²N——青年科学家技能提升基金”项目的资助，该项目旨在支持罗兹工业大学的科研卓越发展，资助编号为 5/2023。

数据和材料的可用性。 本文所用方法的所有数据均已包含在本文及其参考文献中，并且全部可在线获取。

参考文献

[1] M. Baczyński、W. Fechner、S. Massanet，源于基于幂的蕴涵表征的一个函数方程，载于：2019年IEEE国际模糊系统会议（FUZZ-IEEE），2019年，第1–6页。[2] M. Baczyński、W. Fechner和S. Massanet，关于模糊蕴涵函数的乘法型*Sincov*方程的一种推广，《模糊集与系统》**451**（2022），第196–205页。[3] S.S. Dragomir，内积空间中施瓦茨型、*Grüss*型和贝塞尔型不等式的进展，Nova Science Publishers, Inc.，纽约州Hauppauge，2005年。[4] W. Fechner，*Richard*不等式、柯西-施瓦茨不等式与*Sincov*方程的近似解，《美国数学会会刊》**147**（2019），第9期，第3955–3960页。[5] _____，拓扑空间上的*Sincov*不等式，《德布勒森数学刊》**962**, 63 2020 1 76 ( )，第-期，–页。[6] R. Ger，巴拿赫代数中的*Delta*指数映射，一般不等式，7（奥伯沃尔夫赫，1995），《国际数值数学丛书》，第123卷，Birkhäuser，巴塞尔，1997年，第285–296页。[7] R. Ger和P. Šemrl，指数方程的稳定性，《美国数学会会刊》**124**（1996），第3期，第779–787页。[8] D. Gronau，关于*Sincov*函数方程的一则注记，《南非数学学会通报》31，第1期，2000年4月，第1–8页。[9] G. Kiss、J. Schwaiger，*Sincov*方程及其他函数方程与负利率，《数学方程》（2023）。https://doi.org/10.1007/s00010-022-00936-9。[10] A. Olbryś，关于*delta* (*s*, *t*)-凸映射的一个支撑定理，《数学方程》**89**（2015），第3期，第937–948页。[11] _____，关于*delta Schur*凸映射，《德布勒森数学刊》**86**（2015），第3-4期，第313–323页。[12] _____，关于*delta*次可加映射和*delta*超可加映射的夹逼定理，《结果数学》**72**（2017），第1-2期，第385–399页。[13] _____，关于*delta*凸函数的一个分离定理，《西里西亚数学年刊》**341**, 133 2020 141 ( )，第-期，–页。[14] Z. Otachel，赋范空间中的*Grüss*型不等式，《数学分析及其应用杂志》**3931**, 14 2012 24 ( )，第-期，–页。

[15] ———, 内积空间中的反向施瓦茨不等式及其一些推论, 《数学分析及其应用杂志》**458**（2018）, 第2期, 第1409–1426页。[16] ———, 内积空间中的反向施瓦茨、贝塞尔、*Grüss*和*Hadamard*不等式, 《线性与多线性代数》**68**（2020）, 第4期, 第805–827页。[17] L. Veselý和L. Zajíček, 巴拿赫空间之间的*Δ*-凸映射及其应用, 《数学论文集（Rozprawy Mat.）》**289**（1989）, 52页。

数学研究所 , 罗兹工业大学 , 理工大道8号 , 93-590 罗兹 , 波兰
电子邮箱地址: wlodzimierz.fechner@p.lodz.pl

数学研究所, 罗兹工业大学, 理工大道8号, 93-590罗兹, 波兰电子邮箱地址: aleswi97@gmail.com