arXiv:2303.03788v1 [math.LO] 7 Mar 2023

典范普适局部有限群 SH1175

萨哈隆·谢拉

Abstract. 我们证明，对于 $\lambda = \beth_\omega$ 或仅仅 λ 余终性为 $\aleph_0$的强极限奇异基数，如果基数为 λ的局部有限群类 $\mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_\lambda$ 中存在一个泛成员，那么就存在一个典范成员（与初等类中的特殊模型平行；后者是在基数为 $\lambda = \lambda^{<\lambda}$时对泛齐性对象和饱和对象的替代）。

为此，我们依赖于足够多此类不可分解群的存在性，这一点已在《不可分解局部有限群的稠密性》中得到证明。更一般地，我们还讨论了对于此类基数，一般类中泛成员的存在性。

版本 2023-02-24。有关可能的更新，请见 https://shelah.logic.at/papers/1175/ 。*Date*: 2023年1月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：20A10、20F50；次要分类号：03C60、20A15。*Key words and phrases.* 模型论、模型论应用、群、局部有限群、典范群、不可分解群。作者感谢 Alice Leonhardt 为早期版本（截至2019年）进行精美的打字工作；对于后期版本，作者谨向这位打字员的工作表示感谢，并感谢一位希望匿名的人士慷慨捐资支持打字服务。作者感谢以色列科学基金会（ISF）（2019—2023年）通过资助项目1838/19部分支持本研究。首次打字于2016年2月18日，作为 [She]的一部分。在参考文献 [中，She17a、0.22=Lz19] 表示 [She17a、0.22] 在那里标记为 z19，L 表示标签；因此，如果 [She17a]发生变化，这将会有所帮助。此外， [She20，定理3.5=定理1.5=Lb24] 分别指已出版版本中的定理3.5、arXive版本中的定理1.5，以及 LaTeX 文件中的标签 b24。读者应注意，我个人网站上的版本通常比数学档案中的版本更新。

§ 0. Introduction

§0(A). 背景与目标。O

我们的动机是研究局部有限群的类 K_{lf} （即每个有限生成子群都是有限群的群），因此读者可以只考虑这一情形，而忽略一般情形；或者考虑普遍类（见定义 0.6）。我们沿着 [She17a], 继续探讨（可在该文中查阅相关历史），更多内容见 [She], ；更早的历史则可参见著作 [KW73]。

我们想知道：

问题 0.1. 1）是否存在一个泛的 $G \in \mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\lambda}$ （= K 中成员组成的类$_{\mathrm{lf}}$，其基数为 λ），见 0.5(1)；例如对于 $\lambda = \beth_{\omega}$? 或者仅仅是共尾数为 $\aleph_0$ 的 λ 强极限（其上方不存在紧基数）？

2）当 $\lambda < \lambda^{\aleph_0}$ 时，是否可能存在一个泛的 $G \in \mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\lambda}$，例如对于 $\lambda = \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$，也就是说，在某个一致性假设下?

关于基数为 λ 的某个类是否存在普适模型这一问题，一般可参阅经典文献 Jonsson [J´on56], [J´on60], Morley-Vaught [MV62]，以及近期综述 [Dˇza05] 和后来的文献 [She21]。

回到局部有限群，对于 0.1(1)，回顾 Grossberg-Shelah [GS83], ：如果 $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$，则 $\mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\lambda}$ 中不存在泛成员。但如果 λ 是一个共尾数为 $\aleph_0$、且大于某个紧基数~~κ~~的强极限基数，那么就存在一个泛的$G \in \mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\lambda}$。因此，问题 0.1 涉及主要的未解决~~情形~~。

更完整地说，根据 [She16, 2.17 = L s56], 我们有：

结论 0.2. 1) 如果 $\mu = \mathrm{cf}(\mu)$ $\mu^+ < \lambda = \mathrm{cf}(\lambda) < 2^{\mu}$，则不存在基数为 λ、对局部有限群类而言是泛的群。

2) 例如，如果 $\aleph_2 \le \lambda = \mathrm{cf}(\lambda) < 2^{\aleph_0}$，则此处适用。

因此，剩下的其他情形只有：

(A) $\mathrm{cf}(\lambda) < \lambda < 2^{\aleph_0}$，(B) $\beth_{\delta} < \lambda < 2^{\beth_{\delta}}$，$\mathrm{cf}(\delta) = \aleph_0$，且 λ 为奇异的。

问题：在 $\{^{\theta}G$ 上是否存在部分长序： $G \in \mathrm{K}_{\mathrm{lf}}\}$?

如上，如果 $\aleph_0 < \mu = \mathrm{cf}(\mu) < \lambda$，且 $2^{\mu} > \lambda$ 满足 $\mathrm{T}^{J^{\mathrm{bd}}_{\mu}}(\lambda) < 2^{\mu}$，那么 λ 中不存在泛对象，正如 [KS92], 所见，参见 [S^{+}]。

让我们来考察局部有限群的模型论。

回顾

定义 0.3. 1) G 是局部有限群（locally finite group），当且仅当 G 是一个群，且每个有限生成子群都是有限的。

2) G 是存在闭局部有限群（existentially closed lf group）（在 [KW73] 中称为 ulf，即泛局部~~有限群~~），当 G 是一个局部有限群，且对于任意有限群 $K \subseteq L$ 以及 K 到 G的嵌入，该嵌入都可以扩展为L 到 G的嵌入。

3) 令 K_{lf} 为局部有限群（locally finite groups）的类（按 $\subseteq$，即为子群，赋予偏序），并令 $\mathrm{K}_{\mathrm{exlf}}$ 为存在闭 $G \in \mathrm{K}_{\mathrm{lf}}$的类。

Wehrfritz 曾询问任意 $\lambda > \aleph_0$ 中存在闭局部有限群这一类的范畴性。Macintyre-Shelah [MS76] 对此作出了回答，证明每个 $\lambda > \aleph_0$ 中都有 2^{λ} 个 $\mathrm{K}^{\mathrm{exlf}}_{\lambda}$ 的非同构成员。从某种意义上说，这令人失望：在 $\aleph_0$ 中，这一类具有范畴性，因此提出这个问题或许是希望这一类中的一般结构也能在某种程度上得到理解。

存在一个泛对象可以被视为一种较弱的肯定回答。

关于一类结构，一个自然且常见的问题是刚性成员是否存在，也就是说，是否存在没有非平凡自同构的成员。现在，任意存在闭局部有限群 $G \in \mathrm{K}_{\mathrm{exlf}}$ 都有非平凡自同构——即内自同构（回想一下，它的中心是平凡的）。因此，自然的问题是完备成员是否存在；当且仅当一个群没有非内自同构时，我们称它为完备群。

关于基数为 λ 的完备局部有限群是否存在：Hickin [Hic78] 证明了在 $\aleph_1$ 中存在这样的群（此外还有更多结果，例如，他找到了一个由 $2^{\aleph_1}$ 个此类群组成的族，它们彼此相距甚远，即没有任何不可数群能嵌入其中两个群）。Thomas [Tho86] 假设广义连续统假设，并在每个后继基数上构造了一个这样的群（此外还有更多结果，例如，它没有与其基数相同的阿贝尔子群或可解子群）。相关研究包括 Giorgetta-Shelah [GS84], Shelah-Zigler [SZ79], ，他们研究了 K_{G_*}并得到了类似结果。

Dugas-G¨obel [DG93, Th.2] 证明，对于 $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ 和 $G_0 \in \mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\leq \lambda}$，存在一个扩张 G_0 的完备 $G \in \mathrm{K}^{\mathrm{exlf}}_{\lambda^+}$；此外，还有两两不同构的这类群。随后，Braun-G¨obel [BG03] 为完备局部有限 p-群取得了更好的结果。

现在， [She17a] 表明，尽管类 $\mathrm{K}_{\mathrm{exlf}}$ 非常“不稳定”，但仍存在足够大的可定义类型集合，使我们能够模仿稳定性理论，并利用无量词类型，在构造存在闭局部有限群时进行合理控制。这可以视为对上述非结构结果的一种“修正”。这一方法被用于构造一个与某局部有限群基数相同、且为存在闭的典范扩张（已知它存在于幂集中，见 [KW73]）。此外，还可以用一种更宽松的方式得到端自同态刚性的局部有限群。

回到当前工作，我们在这里讨论关于$\mu = \beth_\omega$ 或共尾数为 $\aleph_0$的强极限的普适性问题。我们证明，对于 K_{lf} 及类似的类，如果存在一个基数为 μ的普适模型，那么就存在某种基数为 μ的特殊模型，特别地，它是泛的，并且在同构意义下唯一。这依赖于 [She20], 的结果，该结果证明了 K_{lf} 中各种基数的所谓 θ-不可分解模型的存在性，甚至证明了它们的稠密度（即 θ 不是一个可能的共尾数），延续了 Carson-Shelah [CS20] 关于群这一类的研究。

回到问题 0.1(1)，一种可能的途径是尝试证明：当 $\mu = \Sigma_{n<\omega}\mu_n$ 每个 μ_n 都是 $< \mu$ 可测基数时，在 μ 中存在泛成员；也就是说，或许对某些合理的类，这一结论成立。

感谢审稿人提出的有益意见，也感谢后来给予帮助的 Mark Po´or。

§0(B). 定义。

背景 0.4。K 将属于以下情况之一：

情况 1：$\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathrm{lf}}$，即局部有限群类，因此子模型关系就是子群关系，

情况 2：K 是一个普遍类，见下文定义 0.6(1)，子模型关系仅指子模型关系，

情况 3：K 是 $\mathfrak{k} = (K_{\mathfrak{k}}, \leq_{\mathfrak{k}})$ 一个具有 $\mathrm{LST}_{\mathfrak{k}} < \mu$ 的抽象初等类，见 [She09, §1]; 我们只会对此作一些评论。特别是在此背景下，在定义中， $M \subseteq N$ 应替换为 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$。

定义 0.5. 1) 若 K 在 K 中或在 K^μ 中（见 0.6）具有泛性，我们称其为泛的；也就是说，K^μ 中的每个成员都能嵌入其中。

2) 若 K 对 $\mathbf{K}_{<\mu}$ 具有泛性，我们称 K 为泛的；也就是说，每个 $M \in \mathbf{K}_{<\mu}$ 都能嵌入其中；见下文定义 0.6(4)。

3) 我们类似地定义“$M \in$K 对 $\mathbf{K}_{\mu}$ 是泛的”和“$M \in$ K 对 $\mathbf{K}_{\leq\mu}$ 是泛的”。

定义 0.6。1) 若对某个词汇表 $\tau = \tau_{\mathbf{K}}$:

(a) K 是由 τ-模型组成的类，并且在同构下封闭；(b) 一个 τ-模型属于 K，当且仅当它的每个有限生成子模型都属于 K。3) 令 $\mathbf{K}_{\mu}$ 为由基数为 μ 的 $M \in \mathbf{K}$ 组成的类。我们自然地定义 $\mathbf{K}_{<\mu}$、$\mathbf{K}_{\leq\mu}$。4) 对基数 $\lambda \leq \mu$，令 $\mathbf{K}_{\mu,\lambda}$ 为由满足以下条件的有序对 (N, M) 组成的类：$N \in \mathbf{K}_{\mu}, M \in \mathbf{K}_{\lambda}$ 且 $M \subseteq N$。5) 令 $(N_1, M_1) \leq_{\mu,\lambda} (N_2, M_2)$ 表示 $(N_\ell, M_\ell) \in \mathbf{K}_{\mu,\lambda}$ 对于 $\ell = 1$、2 和 $M_1 \subseteq M_2, N_1 \subseteq N_2$。6) 对于 $\lambda \leq \mu$，我们类似地定义 $\mathbf{K}_{\mu,<\lambda}$ 和 $\leq_{\mu,<\lambda}$。7) 一个普遍类 K 可视为抽象初等类 $\mathfrak{k} = (\mathbf{K}, \subseteq)$

记号 0.7. 1) 令 M、N 以及 G、H、L 表示 K 的成员。

2) 令 $|M|$ 为 $=$的论域，M的元素集合，且 $\|M\|$ 为其基数。

3) 令 a、b、c、d 表示此类 M的成员，$\bar{a}$、$\bar{b}\ldots$ 表示此类元素的序列。

定义 0.8. 1) 若满足以下条件，我们称对 (N, M) 是一个 (χ, μ, κ)-amalgamation 基（或 amalgamation 对；但当 $\chi = \mu$时，可以省略 χ；若上下文明确，也可以省略 μ、κ）：

(a) $(N, M) \in \mathbf{K}_{\mu,\ \kappa}$，(b) 若 $N_1 = N$ 且 $M \subseteq N_2 \in \mathbf{K}_{\chi}$，则 N_1、N_2 可以在 M上进行融合；这意味着存在某些N_3、f_1、f_2，使得 $M \subseteq N_3 \in \mathbf{K}$，且 f_ℓ 将 N_ℓ 嵌入到 N_3 中，并且在 M 上满足$\ell = 1,2$。

2) 当满足以下条件时，我们称对 (N, M) 是一个泛 (μ, λ)-融合基（可以省略 μ, λ）：

(a) $(N, M) \in \mathbf{K}_{\mu,\lambda}$，

(b) 若 $N \subseteq N' \in \mathbf{K}_{\mu}$，则 N' 可以在 M 上嵌入 N。

3) 在第 (1)、(2) 部分中，若 $(\mu, \lambda) = (\|N\|, \|M\|)$，我们可以省略 μ, κ。

4）我们称 $M \in \mathbf{K}_{<\mu}$ 是 $\mathbf{K}_{<\mu}$ 中的 amalgamation 基，当且仅当：若 $M \leq N_\ell \in \mathbf{K}_{<\mu}$，则 N_1、N_2 可以在 M 上粘合（见 0.8(1)(b)），但 $N_3 \in \mathbf{K}_{<\mu}$.

§1. Indecomposability

本节讨论不可分解性，即 CF(M)，例如参见 [ST97]；我们主要考虑 K^{lf}，但这一概念对其他类也有意义且值得关注。

我们为什么要研究不可分解成员 K? 当我们尝试理解 K^{μ} 的泛成员 M 时，将使用基数为 $<\mu$ 的 θ-不可分解 $N\subseteq M$。这会如何帮助我们? 关键在于，$N\in \mathrm{K}^{<\mu}$ 可能有太多嵌入到 M 中，但如果 $\theta=\mathrm{cf}(\theta)\neq\mathrm{cf}(\mu)$ $\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^{\|N\|}<\mu$，$N$ 是 θ-不可分解的，且 θ 是正则不可数的 $<\mu$，那么情况就不同了。

为了构造足够多的 θ-不可分解局部有限群（如 [She20] 中所做的那样），我们需要不可分解的 c：$[\lambda]\to\theta$。

定义 1.1. 1) 若 θ 是正则的，且对于任意 $\langle M_i:$ 如果 $i<\theta\rangle$ 是 $\subseteq$-递增的且其并为 M，那么对某个 i，有 $M=M_i$，则称 M 是 θ-不可分解的，或称其满足 $\theta\in\mathrm{CF}(M)$。

2) 当 M 对每个 $\theta\in\Theta$ 都是 θ-不可分解时，我们称 M 是 Θ-不可分解的。当 M 对每个正则 $\theta\notin\Theta$ 都是 θ-不可分解时，我们称 M 是 Θ^{orth}-不可分解的。

3) 当满足以下条件时，我们称 G 在 G^+ 内是 θ-不可分解的：

(a) $\theta=\mathrm{cf}(\theta)$；(b) $G\subseteq G^+$；(c) 若 $\langle G_i:\ i\leq\theta\rangle$ 是 $\subseteq$-递增连续的，且 $G_\theta=G^+$（因此 $G\subseteq G_\theta$），那么对于某个 $i<\theta$，有 $G\subseteq G_i$。

4) 对于满足 $\theta\notin\Theta_\lambda$ 的 $\theta=\mathrm{cf}(\theta)\leq\lambda\leq\mu$（见 1.2(1)），当对于每一对 $(N,M)\in\mathrm{K}^{\mu,\lambda}$ 都存在 $(N_1,M_1)\in\mathrm{K}^{\mu,\lambda}$ 使其 $\leq_{\mu,\lambda}$-高于该对，并且 M_1 是 θ-不可分解的（确实如此，而不仅仅是在 N_1 内）时，我们称 K 是 (μ,λ,θ)-不可分解的。对于 $\theta=\mathrm{cf}(\theta)<\lambda\leq\mu$，当满足以下条件时，我们称 K 是 $(\mu,<\lambda,\theta)$-不可分解的：

若 $\theta=\mathrm{cf}(\theta)\leq\lambda_1<\lambda$，$\theta\notin\Theta_{\lambda_1}$ 则对于某个 $\lambda_2\in[\lambda_1,\mu)$，K 是 (μ,λ_2,θ)-不可分解的。

5) 当满足以下条件时，我们称 c：$[\lambda]^2\to S$ 是 θ-不可分解的：若 $\langle u_i:\ i<\theta\rangle$ 是集合的 $\subseteq$-递增序列，其并为 λ，则对于某个 $i<\theta$，$S=\{\mathrm{c}\{\alpha,\beta\}:\ \alpha\neq\beta\in u_i\}$；

6) 我们可以将上述基数 θ 替换为正则基数的集合或类 Θ（如 1.1(2) 中所做）。

群 G 可以被视为群意义下或半群意义下的不可分解对象；默认采用半群意义；但请注意，对于局部有限群，这两种解释是等价的。

以下结果已由 [She20] 证明。

定理 1.2。1) 若 $\lambda\geq\aleph_1$，并令 $\Theta_\lambda=\{\mathrm{cf}(\lambda)\}$，但当 $(c)_{\lambda,\partial}$ 成立时，$\Theta_\lambda=\{\mathrm{cf}(\lambda)\ \partial\}=\{\lambda,\partial\}$，则条款 (a)、(b) 成立，其中：

（a）某个 c：$[\lambda]^2\to\lambda$ 对每个 $\theta=\mathrm{cf}(\theta)\notin\Theta_\lambda$ 都是 θ-不可分解的；（b）对每个 $G_1\in\mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\leq\lambda}$，存在一个扩张 $G_2\in\mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\lambda}$，它是 $\Theta^{\mathrm{orth}}_\lambda$-不可分解的；（c）$\lambda,\partial$，对于某些 μ，$\lambda=\mu^+$，$\mu>\partial=\mathrm{cf}(\mu)$ 以及 $\mu=\sup\{\theta<\mu:\ \theta$ 是一个正则 Jonsson 基数$\}$。2）若 $\mu\geq\lambda\geq\theta=\mathrm{cf}(\theta)$，且 $\theta\notin\Theta_\lambda$，$\lambda\geq\aleph_1$，则 K^{lf} 是 (μ,λ,θ)-不可分解的。2A）事实上（关于第（2）部分），只需假设 $(\exists\lambda_1)(\lambda\leq\lambda_1\leq\mu\wedge\theta\notin\Theta_{\lambda_1})$。3）若 $\mu\geq\lambda$ 且 $(H_1,G_1)\in\mathrm{K}^{\mu,\lambda}_{\leq}$，则我们可以找到一对 $(H_2,G_2)\in K^{\mu,\lambda}_{}$，使得：

（a） G_2 是 $\Theta^{\rm orth}_\lambda$-不可分解的；（b）若 $\mu>\lambda$，则对于每个正则 θ，G_1 在 H_2 内是 θ-不可分解的；（c） H_2 是 $\Theta^{\rm orth}_\mu$-不可分解的。

证明。1）根据[1] [She20，定理 3.5]。

2）、2A）这个证明也适用于第（3）部分。设 $(N,M)\in \mathrm{K}_{\mu,\lambda}$ 已给定。我们选择一对基数 (χ,∂) 和 c，使得 $\lambda\le\chi\le\mu$ $\partial=\mathrm{cf}(\partial)\le\lambda,\partial\neq\theta$且 c: $[\chi]^2\to\chi$ 是 θ-不可分解的；（此处可以如此选择，因为 $\theta\notin\Theta_\lambda,\lambda\ge\aleph_1$ 即使对于$\chi=\lambda$也成立。）

通过对 $\alpha\le\partial$ 进行归纳，我们选择 H_α,L_α；但当 α 是后继序数时， L_α 与 $H_{\alpha+1}$ 一同选取，使得：

(a) $(H_\alpha,L_\alpha)\in \mathrm{K}_{\mu,\lambda}$ 是递增连续的，且 α；(b) $(H_0,L_0)=(N,M)$；(c) 若 $\alpha=\beta+1<\theta$，则并且 L_α 是 θ-不可分解的。

为何可以进行归纳法？对于 $\alpha=0$，这是显然的；对于 α极限序数，情况也类似。最后，根据第 (1) 部分的条款 (b)，对于 $\alpha=\beta+1\le\alpha_*$，回想一下 [She20, 3.4]，的证明。严格来说，由于不失一般性地， H_β、 L_β 是存在闭的，因此由二阶元素生成，令 $\langle a_\alpha:\alpha<\mu\rangle$列出 $\{a\in L_\beta:\ a$ 阶的。根据 [She20, 命题 3.4(2)], ，结合 $u_\alpha=\{\alpha\}$，我们可以找到 $H_{\alpha,1}\in \mathrm{K}^{\rm lf}_\mu$，它扩张 H_B，且其中的 $b_\alpha\in H_{\alpha,1}$ 两两交换、阶均为 2；对于 $\alpha<\mu$ （文中未提及阶为 2，但已证明），以及两两交换的 $d_\alpha\in H_{\alpha,1}$，其阶均为 2，对于 $\alpha<\mu$，使得 L_β 包含于由 $\{b_\alpha,d_\alpha$ 生成的 $H_{\alpha,1}$ 的子群 $L_{\alpha,1}$ 中： $\alpha<\lambda\}$.

现在对一个 θ-不可分解的 c 应用 [She20, 命题 3.4(1)]： $[\lambda]^2\to\lambda$.

3) 我们依次处理每个正则的 $\theta\le\mu$。固定 θ 后，我们可以使用第 (2) 部分的证明。□1.2

现在引出了核心定义，它的作用是什么？

我们想理清何时 K 中存在泛成员 μ，何时存在典范泛成员。基于上文所述的原因，我们专注于 μ 是共尾数为 $\aleph_0$ 的强极限的情形，例如 $\beth_\omega$。要想为每个普遍类 K 找出这两个问题的答案，似乎有些过于乐观。定义 1.3 完成了一项更适度的任务：它给出了一个大型框架，许多有序对（K μ）都满足该框架；我们将证明这些有序对满足一个等价关系。特别地，我们的类 $\mathrm{K}_{\rm lf}$ 属于这个族。

定义 1.3。若 K 是 μ-良好的，则称 K 为 μ-良好：

(a) $\tau_{\mathbf{K}}$ 的基数为 $<\mu$，(b) 对每个 $M\in \mathrm{K}_{<\mu}$，都存在一个 $N\in \mathrm{K}_\mu$ 扩张 M，(c) K 具有联合嵌入性质，(d) K 是 $(\mu,<\mu,\mathrm{cf}(\mu))$- 不可分解的，或者仅仅是，(d)′ 对于任意大的 $\lambda_2<\mu$，令 $\theta=\mathrm{cf}(\mu)\le\lambda_2$，我们有 K 是 (μ,λ_2,θ)-不可分解的。

自然，我们希望证明对 $(\mathrm{K}_{\rm lf},\beth_\omega)$ 符合定义 1.3 的框架。这正是 1.4、1.5 的作用。在第 3 节中，我们指出了另一个族。对于主要情形， μ 是一个共尾数为 $\aleph_0$的强极限。

断言 1.4. 当 $\mu\ge\aleph_1$. 时，$\mathrm{K}_{\rm lf}$ 是 μ -nice

[1]但是，作者的存档版本中的定理 1.5（类似地，3.4）就是 1.4

证明. 在定义 1.3 的条款 (a) 中，结论显然成立；由于 K_{lf} 对乘积封闭，条款 (b)、(c) 显然成立。对于 μ 正则的情形，条款 (d) 显然成立（且未被使用）；对于 μ奇异的情形，由 1.2(3) 可知该条款成立，另见下文 1.5(2)。$\square_{1.4}$

下面给出的内容超出了严格所需的范围。

断言 1.5. 假设 $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathrm{lf}}$. 1) 我们有 $(A) \Rightarrow (B)$，其中：(A) (a) $\mu \geq \aleph_1$，(b) $\delta_* \leq \mu$ 且 $\lambda_\alpha < \mu$ 对于 $\alpha < \delta_*$，(c) $\lambda_\alpha \geq |\alpha|$ 是非递减的，(d) $G_1 \in \mathrm{K}^{\leq \mu}$，(e) $G_{1,\alpha} \in \mathrm{K}^{\leq \lambda_\alpha}$ 是 G_1 的子群，对于 $\alpha < \delta_*$，(B) 存在 G_2, G_2 使得：(a) $G_2 \in \mathrm{K}^\mu$ 扩张 G_1，(b) $G_2 = \langle G_{2,\alpha} : \alpha < \delta_* \rangle$ 是递增的，(c) $G_{2,\alpha} \in \mathrm{K}^{\lambda_\alpha}$ 扩张 $G_{1,\alpha}$，(d) G_2 是 Θ-不可分解的，其中[2] $\Theta = (\Theta_\mu \cup \{\text{参见}(\delta_*)\})^{\mathrm{orth}}$(e) 对每个 $\alpha < \delta_*$，$G_{2,\alpha}$ 是 $\Theta^{\mathrm{orth}}_{\lambda_\alpha}$-不可分解的（不只是在 H_2内部）(f) 如果 $\mu = \Sigma\{\lambda_\alpha : \alpha < \delta_*\}$ 则 $G_2 = \cup\{G_{2,\alpha} : \alpha < \delta_*\}$，(g) 如果 $\mu > \sum\{\lambda_\alpha : \alpha < \delta_*\}$，那么 G_2 是 Θ^{orth}_M-不可分解的。

2）如果 $\mu > \lambda \geq \aleph_1$，那么 $\aleph_0 \in \Theta^{\mathrm{orth}}_{\mathrm{cf}(\mu)} \cup \Theta^{\mathrm{orth}}_\lambda$，但 $\mu = \lambda^+$ 时可能例外，$\mathrm{cf}(\lambda) = \aleph_0$。

证明。1）通过对 $\alpha \leq \delta_*$ 进行归纳法，我们选取 H_α、H_α、L_α，但 L_α 与 $H_{\alpha+1}$ 一起选取，而不为 $\alpha = \alpha_*$ 选取，使得：

（a） H_α 是递增连续的，且满足 α；（b） $H_0 = G_1$ 和 $\alpha > 0 \Rightarrow H_\alpha \in \mathrm{K}^\mu$；（c）$(H_\alpha, L_\beta) \in \mathrm{K}^\lambda$，当 $\alpha = \beta + 1 \leq \alpha_*$ 时，λ_β；（d）$H_\alpha = \langle H_\alpha, \varepsilon : \varepsilon < \delta_* \rangle$，使得若 $\mu = \Sigma\{\lambda_\varepsilon : \varepsilon < \delta_*\}$，则此序列递增，其并为 H_α，且当 $\alpha > 0$ 时，$H_{\alpha,\varepsilon}$ 的基数为 λ_ε；当 $\alpha = 0$ 时则为 $\leq \lambda_\varepsilon$；（e）当 $\beta \leq \alpha$、$\varepsilon \leq \alpha$、$\gamma < \alpha$ 时，$G_{1,\beta}$、$H_{\beta,\varepsilon}$、L_γ 是 L_α 的子群；（f） L_β 是 $\Theta^{\mathrm{orth}}_{\lambda_\beta}$-不可分解的；（g） G_2 是 Θ-不可分解的，其中 $\Theta = (\Theta_\mu \cup \{\mathrm{cf}(\delta_*)\})^{\mathrm{orth}}$

为什么可以进行归纳法? 在选择了 H_α 之后，我们选择 H_α。对于 $\alpha = 0$，这是显然的（注意， L_α 尚未被选择）；对于 α 为极限序数的情形，同样如此。最后，对于 $\alpha = \beta + 1 \leq \alpha_*$，定义1.1(4) 1.2(3)给出了所需的结论。具体而言，首先选择基数至多为 λ_α 的 $L^+_\beta \subseteq H_\beta$，使其包含所需的集合（在条款(e)中列出）。然后对对(H_β, L^+_β)应用1.2(3)，得到(H_α, L_α)。最后，如果 $\mu > \sum\{\lambda^+_\alpha : \alpha < \delta_*\}$，令 $G_2 \in \mathrm{K}_\lambda$ 扩展 $H_{\alpha_{\delta_*}}$ 并满足不可分解性要求；如果 $\mu > \sum\{\lambda_\alpha : \alpha < \delta_*\}$，令 $G_2 = H_{\delta_*}$. 现在，令 $G_{2,\ \alpha} = L_\alpha$ 我们就完成了。

2）显然。 $\square_{1.5}$

断言1.6。如果 μ 是强极限奇异基数且 $N \in \mathrm{K}^\mu$，那么集合 $\mathrm{IDC}^{<\mu}(N)$ 的基数为 $\leq \mu$，其中，对于 $N \in \mathrm{K}^\mu$，

[2]如果 $\mu = \sum\{\lambda_\alpha : \alpha < \delta_*\}$ 那么 $\mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\delta_*)$，因此“$\cup\{\delta_*\}$”并非必要。

(∗) IDC<μ(N) $= \{M :\ M \subseteq N$ 基数为 $< \mu$，且是 cf(μ)–不可分解的$\}$。证明。显然。

$\square_{1.6}$

§2. 泛性

对于相当多的类，在任意（足够大的） μ（其为共尾数 $\aleph_0$ 的强极限基数）中，都存在泛成员，参见 [She17b]，其中包含相关历史。下面我们探讨“对于这样的 μ，$\mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\mu}$ 中是否存在泛成员”。我们证明，若存在泛成员，例如在 $\mathrm{K}^{\mathrm{lf}}_{\mu}$ 中，那么就存在一个典范成员。

我们所说的“典范”是什么意思？这不是一个精确定义，但我们的意思是，按照一种自然的定义，它在同构意义下唯一。我们想到的例子包括域的代数闭包、基数为 $\mu^+ = 2^\mu > |T|$ 的完备一阶理论 T 的饱和模型，以及奇异强极限基数 $\mu > |T|$ 上完备一阶理论 T 的特殊模型，参见 [CK62]。最后一个例子指的是：

(∗) 对于这样的 T、μ，当 M 是基数为 μ 的 T 的特殊模型，且 $\bar{}M$ 见证了这一点时，我们称之为：$\bar{}$(a) $M = \langle M_i : i < \mathrm{cf}(\mu)\rangle$；(b) M_i 关于 i 是 $\prec$-递增的；(c) 每个 M_i 都具有基数 $< \mu$；(d) $M = \cup\{M_i : i < \mathrm{cf}(\mu)\}$；(e) 对于每个 $\lambda < \mu$，以及所有充分大的 $i < \mathrm{cf}(\mu)$，模型 M_i 都是 λ^+-饱和的。

考虑我们的主要情形 K_{lf}，一个重大区别在于（我们在此证明的内容，例如对于 K_{lf}，与（∗）相比）这里融合失败，因此 2.1 的条款 (B) 是一种退而求其次的替代方案。

定理 2.1。假设 μ 是共尾数为 $\aleph_0$ 的强极限，并且 K 是 μ-良好的。1）以下条件等价：

(A) 存在一个泛 $G \in \mathrm{K}^\mu$·(B) 若 $H \in \mathrm{K}^\lambda$ 对某个 $\lambda < \mu$ 是 $\aleph_0$-不可分解的，则存在一个序列 $G = \langle G_\alpha : \alpha < \alpha_* \le \mu\rangle$，满足：($a$) $H \subseteq G_\alpha \in \mathrm{K}^\mu$，($b$) 若 $G \in \mathrm{K}^\mu$ 扩张 H，则对某个 α，G 可在 G_α 上方嵌入到 H 中。(B)$^+$ 我们可以在 (B) 中补充 (c) 若 $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_*$，则 G_{α_1}、G_{α_2} 不能在 H 上融合；也就是说，不存在 G、f_1、f_2 使得 $H \subseteq G \in \mathrm{K}$ 且 f_ℓ 将 G_{α_ℓ} 在 $\ell = 1$ 的情况下嵌入到 G 中，且位于 H 上方，2，(d) (H, G_α) 是一个 amalgamation 对（见定义 0.8(1)），而且是一个通用 amalgamation 基（见 0.8(2)）。

2）我们可以在第（1）部分中补充：

（C）存在 G_*，使得：（a） $G_* \in \mathrm{K}^\mu$ 对 $\mathrm{K}^{<\mu}$而言是泛的；（b） $\mathscr{E}^{\aleph_0}_{G_*,\,<\mu}$，见下文定义 2.2，是一个具有 $\le \mu$个等价类的等价关系；（c） G_* 是 μ-特殊的，见下文 2.2(E)。

(C)$^+$ 类似于子句 (C)，但我们添加 (d)：如果 $G, G_* \in \mathrm{K}^\mu$ 是 μ-特殊的，那么 G，G_* 同构（即唯一性）。

在证明 2.1 之前，我们先给出定义（此定义不仅用于证明，也用于表述 2.1(2)）。

定义 2.2。对于 $\theta = \mathrm{cf}(\mu) < \mu$ 和 $M_* \in \mathbf{K}^\mu$：我们定义：

(A) $\mathrm{IND}^\theta_{M_*,<\mu} = \{N : N \le_{\mathfrak{k}} M_*$ 的基数为 $< \mu$，且是 θ-不可分解的$\}$。(B) $\mathscr{F}^\theta_{M_*,<\mu} = \{f$：对于某个论域为序数的 θ-不可分解 $N = N_f \in K_{<\mu}$，f 是从 N 到 $M_*\}$的一个嵌入。(C) $\mathscr{E}^\theta_{M_*,<\mu} = \{(f_1, f_2)$：$f_1, f_2 \in \mathscr{F}^\theta_{M_*,<\mu}, N_{f_1} = N_{f_2}$，且存在从 M_* 到 M_* 的某个扩张 $M \in \mathbf{K}^\mu$ 中的嵌入 g_1, g_2，使得 $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2\}$。(D) 若存在某个 M 作为见证，我们称 M_* 是 $\theta - \mathscr{E}^\theta_{M_*,<\mu}$-不可分解齐次的（或简称 M_* 是 θ-不可分解齐次的），其含义是：(a) $M = \langle M_i : \mathrm{cf}(\mu)\rangle$ 是递增连续的，且极限为 M；(b) 若 $f_1, f_2 \in \mathscr{F}^\theta_{M_*,<\mu}$，$(f_1, f_2) \in \mathscr{E}^\theta_{M_*,<\mu}$，且 $(\exists i < \theta)$ $(A \subseteq M_i)$ A 的基数为 $< \mu$，则存在 $(g_1, g_2) \in \mathscr{E}^\theta_{M_*,<\mu}$，使得 $f_1 \subseteq g_1 \wedge f_2 \subseteq g_2$ 且 $A \subseteq \mathrm{Rang}(g_1) \cap \mathrm{Rang}(g_2)$；由此可知，若 $\mathrm{cf}(\mu) = \aleph_0$，则存在某个 $g \in \mathrm{aut}(M_*)$，使得 $f_2 = g \circ f_1$。

(E) 当 $M_* \in \mathbf{K}^\mu$ 是 μ-特殊时，我们称之为 θ-不可分解齐次的，且它是 $\mathbf{K}^{<\mu}$ 的泛对象；也就是说，每个 $M \in \mathbf{K}^{<\mu}$ 都可嵌入其中。

注记 2.3。我们也可以在 2.1 中考虑 $(A)_0 \Rightarrow (A)$，其中

$(A)_0$ 若 $\lambda < \mu, H \subseteq G_1 \in \mathbf{K}^{<\mu}$ 且 $|H| \le \lambda$，则存在某个 G_2，使得 $G_1 \subseteq G_2 \in \mathbf{K}^{<\mu}$，且 (H, G_2) 是一个 (μ, μ, λ)-amalgamation 基。

2.1 的证明

只需证明以下蕴含关系：

$(A) \Rightarrow (B)$：设 $G_* \in \mathbf{K}^\mu$ 是泛对象，并选取一个序列 $\langle G^*_n : n < \omega\rangle$，使得 $G_* = \bigcup_{n} G^*_n, G^*_n \subseteq G^*_{n+1}, |G^*_n| < \mu$。

令 H 如 2.1(B) 中所述，并令 $\mathscr{G} = \{g : g$ 嵌入 H 到 G^*_n 中，其中 $n\}$。因此显然有 $|\mathscr{G}| \le \sum_{\lambda<\mu} |G^*_n|^{|H|} \le \sum 2^\lambda = \mu$（这有些过于周全了）。

令 $\langle g^*_\alpha : \alpha < \alpha_* \le \mu\rangle$ 列出 $\mathscr{G}$，并令 (G_α, g_α) 满足以下条件（可通过重新命名得到）：

$(*)_1$ (a) $H \subseteq G_\alpha \in \mathbf{K}^\mu$；$(b)$ g_α 是从 G_α 到 G_* 的同构，并且扩展了 g^*_α。

只需证明 $G = \langle G_\alpha : \alpha < \alpha_*\rangle$ 满足条款 (B) 的要求。由上面的 $(*)_1(a)$，条款 (B)(a) 成立。对于条款 (B)(b)，令 G 满足 $H \subseteq G \in \mathbf{K}^{\le\mu}$，于是存在扩展了 G 的 $G' \in \mathbf{K}^\mu$，因此我们可以找到一个将 G' 嵌入到 G_* 中的嵌入 g。我们知道 $g(H) \subseteq G = \bigcup G_n$，因此 $\langle g(H) \cap G_n : n < \omega\rangle$ 是 $\subseteq$-递增的，其并为 $g(H)$；但根据关于 H 的假设，$g(H)$ 是 $\aleph_0$-不可分解的，因此对某个 n，有 $g(H) = g(H) \cap G^*_n \subseteq G^*_n$。这意味着 $g{\restriction}H \in \mathscr{G}$，故对某个 $\alpha < \alpha_*$，有 $g \restriction H = g^*_\alpha$。因此，$g^{-1}_\alpha g$ 是一个将 G 嵌入到 G_* 中并扩展 $(g_\alpha{\restriction}H)^{-1}(g{\restriction}H) = (g^*_\alpha)^{-1}(g^*_\alpha) = \mathrm{id}_H$ 的嵌入，正如所需。

$(B) \Rightarrow (B)^+$:

那么 $(B)^+(c)$ 呢？虽然 $\bar{G}$ 不一定满足这一条件，但我们可以“修正它”，例如，选择 u_α, v_α，若 $\alpha \notin \cup\{v_\beta : \beta < \alpha\}$ 也可通过归纳法得到 G'_α

$\alpha<\alpha_*$ 使得（其思路是，如果 $\beta\in v_\alpha$，那么 $\beta>\alpha$，而 G_β 因可嵌入某个 G'_α 而被舍弃，G'_α 则是“修正后”的成员）：

$(*)^2_\alpha$ (a) $G_\alpha\subseteq G'_\alpha\in \mathrm{K}^\mu$ 若 $\alpha\notin\cup\{v_\beta:\ \beta<\alpha\}$；(b) $u_\alpha\subseteq\alpha$ 且 $v_\alpha\subseteq\alpha_*\backslash(\alpha+1)$；(c) 若 $\beta<\alpha$ 则 $u_\beta=u_\alpha\cap\beta$ 且 $u_\alpha\cap v_\beta=\emptyset$；(d) 若 $\alpha=\beta+1$ 则 $\beta\in u_\alpha$ 当且仅当 $\beta\notin\cup\{v_\gamma:\ \gamma<\beta\}$；(e) 若 $\alpha\notin\cup\{\overline{v_\gamma}:\ \gamma<\alpha\}$，则：

- $\bullet_1$ $\gamma\in v_\alpha$ 当且仅当 $(\gamma>\alpha$ 且) G_γ 可嵌入到 G'_α 中，且基于 H
- $\bullet_2$ 若 $\gamma\in\alpha_*\backslash(\alpha+1)\backslash(\cup\{v_\beta:\ \beta\le\alpha\})$，则 G_γ 不可嵌入到满足 $G'_\alpha\subseteq G'\in \mathrm{K}$ 的任何 G' 之中，且基于 H；(f) 若 $\alpha=\beta+1$ 且 $\beta\notin u_\alpha$，则 $v_\beta=\emptyset$。

为什么这就足够了?

因为若令 $u_{\alpha_*}=\alpha_*\backslash(\cup\{v_\gamma:\ \gamma<\alpha_*\})$，则 $\langle G'_\alpha:\ \alpha\in u_{\alpha_*}\rangle$ 符合要求；不过我们进一步说明。

首先，对于条款 $(B)^+$(c)，假设 $\alpha<\beta$ 来自 u_{α_*}。由于 $\beta\notin v_\alpha$，根据 $(*)^2_\alpha(e)\bullet_2$，我们知道 G_β 不能嵌入到 G'_α 在 H上的任何扩张中；但由于 $G_\beta\subseteq G'_\beta$ 显然，G'_β 也不能嵌入到 G'_α 在 H上的任何扩张中。重新命名后，这意味着 G'_α和 G'_β 不能在 H上粘合，正如所承诺的那样。

其次，对于条款 $(B)^+$(d)，令 $\alpha\in u_{\alpha_*}$，我们需要证明对 (G'_α,H) 是一个泛 (μ,κ)-融合基，其中 κ是 H的基数。因此，假设 $G'\in \mathrm{K}^\mu$ 扩张了 G'_α；回顾一下，我们假设 $\langle G_\alpha:\ \alpha<\alpha_*\rangle$ 如条款 (B) 所述，因此存在 $\beta<\alpha_*$ 以及一个将 G' 嵌入到 G_β 中的嵌入 f，且该嵌入在H上；我们将证明 $\beta=\alpha$，因此（回顾 $G_\alpha\subseteq G'_\alpha$）$f$ 将 G' 嵌入到 G'_α 中，且该嵌入在 H 上，从而完成对 (B) $\Rightarrow$ $(B)^+$ 的证明。

若 $\beta\in u_{\alpha_*}\setminus\{\alpha\}$，则将 G'_α 在 H 上嵌入到 G'_β 中，这与我们已经证明的 $(B)^+$(c) 矛盾。

若 $\beta\in\alpha_*\backslash u_{\alpha_*}$，则对于某个 γ，有 $\beta\in v_\gamma$，因此 $\gamma<\beta$，且 G_β 可在 H 上嵌入到 G'_γ 中；因此 G' 可在 H 上嵌入到 G'_γ 中。正如前一句所述，必有 $\gamma=\alpha$，于是结论成立。

为什么可以进行归纳法?

对于 $\alpha=0$，若 α 是极限情形，则无需做任何事，因为 u_α 由 $(*)^2_\alpha(b)$ 和 $(*)^2_\alpha(c)$ 确定。对于 $\alpha=\beta+1$，若 $\beta\in\bigcup v_\gamma$，则无需做任何事；在剩下的$\gamma<\beta$情形中，我们通过对 $i\in[\alpha,\alpha_*]$归纳，选取递增连续的 $G'_{\beta,i}\in \mathrm{K}^\mu$，使得$i$。对于 $i=0$，令 $G'_{\beta,i}=G_\beta$；对于极限 i，令 $G'_{\beta,i}=\cup\{G'_{\beta,j}:\ j<i\}$。然后选取$G'_{\beta,i+1}$，使条件 (e) 成立。也就是说，首先，若 $G'_{\beta,i}$ 有一个扩张，使得 G_i 可在 H 上嵌入其中，那么就存在这样一个基数为 μ 的扩张；并选取$G'_{\beta,i+1}$ 作为这样的扩张。

其次，如果 $G'_{\beta,i}$ 没有任何扩张可使 G_i 在 H之上嵌入其中，那么我们令 $G'_{\beta,i+1}=G'_{\beta,i}$。

最后，令 $G'_\alpha=G'_{\beta,\alpha_*}$和 $u_\alpha=u_\beta\cup\{\beta\}$ 以及 $v_\alpha=\{i:\ i<\alpha_*$、$i\ge\alpha$、$i\notin\cup\{v_\gamma:\ \gamma<\beta\}$，且 G_i 可在 H}之上嵌入 G'_β。

$(B)^+\Rightarrow(A)$:

我们将在下文证明更多内容：存在一种类似“特殊模型”的东西，即 2.1 的第（2）部分，也就是说 $(B)^+\Rightarrow(C)^+$。$(C)^+\Rightarrow(C)\Rightarrow(A)$ 这显然成立，因此我们只需证明以下结论。

$(B)^+ \Rightarrow (C)^+$: 令 $\mathrm{K}^{\mathrm{spc}}_\mu$为满足以下条件的 G 类:

$(*)^3_G$ (a) $G \in \mathrm{K}_\mu$; (b) 若 $H \subseteq G, H \in \mathrm{K}_{<\mu}$，则存在按 n 递增、由 $\aleph_0$-不可分解的 $H_n \subseteq G$ 组成的序列，且其并的基数为 $< \mu$，满足$H \subseteq \cup\{H_n\colon n < \omega\}$; 并且[3] 存在 $\aleph_0$- 不可分解的 $G_n \subseteq G$，使得 $n < \omega$ $G_n \in \mathrm{K}_{<\mu}$, $G_n \subseteq G_{n+1}$ 且 $G = \cup\{G_n\colon n < \omega\}$; (c) 若 $H \subseteq G$ 是基数为 $< \mu$ 的 $\aleph_0$-不可分解对象，则对 (G, H) 是一个泛 $(\mu, < \mu)$-融合基（见定义 0.8(2)）; (d) 若 $H \subseteq G$ 是基数为 $< \mu$的 $\aleph_0$-不可分解对象，$H \subseteq H' \in \mathrm{K}_{<\mu}, H'$是 $\aleph_0$-不可分解的[4]，且 G, H' 在 H 上相容（属于 $\mathrm{K}_{\leq\mu}$），则 H' 可在 H上嵌入到 G 中。

现在我们可以通过证明下述 $(*)_4 + (*)_5$ 来完成证明。$(*)_4$ 如果 $G \in \mathrm{K}_{\leq\mu}$，那么某个 $H \in \mathrm{K}^{\mathrm{spc}}_\mu$扩展了 G。我们将证明分为几个阶段，$(*)_{4.3}$ 给出 $(*)_4$的所需结论。$(*)_{4.0}$ 如果 $G \in \mathrm{K}_{\leq\mu}$，那么对于某些 H、H，我们有: (a) $G \subseteq H \in \mathrm{K}_\mu$; (b) $H = \langle H_n\colon n < \omega\rangle$; (c) $H_n \subseteq H_{n+1} \subseteq H$; (d) $H = \cup\{H_n\colon n < \omega\}$; (e) 每个 H_n 都是基数为 μ 的 $\aleph_0$-不可分解对象; (f) （实际上并不需要）当 $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathrm{lf}}$ 时，如果 $K \subseteq H_n$、$|K| \leq \partial$且 $2^\partial \trianglelefteq |H_n|$，那么存在一个 H_n 的子群 L，它扩展了 K，并且是 $\Theta^{\mathrm{orth}}_\partial$-不可分解的。

[为什么? 对于条款 (a)-(e)，这是由 K 为良好的定义得出的。对于条款 (f)，这是由 1.5(1),(2)] 得出的。

$(*)_{4.1}$ 如果 $N_1 \in \mathrm{K}_{\leq\mu}$，那么存在 N_2 使得

(a) $N_2 \in \mathrm{K}_\mu$; (b) $N_1 \subseteq N_2$; (c) 如果 $H \in \mathrm{IDC}_{<\mu}(N_1)$，那么 (N_2, H) 是一个泛 $(\mu, < \mu)$-融合基。

为什么? 根据 1.6，只需处理一个这样的 H; 回顾我们根据 $(B)^+$ 所作的假设“泛 $(\mu, < \mu)$-融合基”，由定义 1.3 的条款 (d) 可知这是成立的。

$(*)_{4.2}$ 类似于 $(*)_{4.1}$，但其中的条款 (c) 被替换为: (c)' 如果 $H_1 \in \mathrm{IDC}_{<\mu}(N_1)$ 且 $H_1 \subseteq H_2 \in \mathrm{K}_{<\mu}$（并且我们还可以补充，$H_2$ 是 $\aleph_0$-不可分解的），那么 N_2, H_1 在 H_1 上于 $\mathrm{K}_{\leq\mu}$ 中不相容，或者 ~~H_2~~ 可在 H_1. 上嵌入到 N_2 中

[为什么? 同样，只需处理一对 (H_1, H_2)]，这可以手动完成。]$(*)_{4.3}$ 如果 $N_1 \in \mathrm{K}_{\leq\mu}$，那么存在 N_2 使得

(a) $N_2 \in \mathrm{K}_\mu$; (b) $N_1 \subseteq N_2$; (c) 若 $H \in \mathrm{IDC}_{<\mu}(N_2)$，则 (N_2, H) 是一个泛 $(\mu, < \mu)$-融合基;

[3]对于普适类，可以将“并且”替换为“因此”。[4] $\aleph_0$-不可分解性并非总是必要的，但有时我们需要它。

(d) 若 $H_1 \in \mathrm{IDC}_{<\mu}(N_2)$ 且 $H_1 \subseteq H_2 \in \mathrm{K}_{<\mu}$（并且，我们还可以补充说，$H_2$ 是$\aleph_0$-不可分解的），则 N_2、H_1 在 $\mathrm{K}_{\leq\mu}$ 中关于 H_1 不相容，或者 H_2 可嵌入到 N_2 中且保持 H_1.

[为什么？我们对 $\varepsilon \leq \mathrm{cf}(\mu)$ 进行归纳，选择 $L_\varepsilon \in \mathrm{K}^\mu$，使得

(a) $L_\alpha \in \mathrm{K}^\mu$；(b) $\langle L_\beta : \beta \leq \alpha \rangle$ 是递增连续的；(c) $G_1 \subseteq L_0$；(d) 若 $\alpha = 3\beta + 1$，则 L_α 与 $L_{3\beta}$ 的关系如同 N_2 与 N_1 在 $(*)_{4.0}$ 中的关系；(e) 若 $\alpha = 3\beta + 2$，则 L_α 与 $L_{3\beta+1}$ 的关系如同 N_2 与 N_1 在 $(*)_{4.1}$ 中的关系；(f) 若 $\alpha = 3\beta + 3$，则 L_α 与 $L_{3\beta+2}$ 的关系如同 N_2 与 N_1 在 $(*)_{4.2}$. 中的关系

进行归纳并注意以下几点没有问题：若 $N \subseteq L_{\mathrm{cf}(\mu)}$ 是 cf(μ)-不可分解的，则对某个 $\varepsilon < \mathrm{cf}(\mu)$，有 $N \subseteq L_\varepsilon$。于是 $N_2 = L_{\mathrm{cf}(\mu)}$ 正是 $(*)_{4.3}$ 所要求的，因此也满足 $(*)_4$。

$(*)_5$ (a) 若 $G_1, G_2 \in \mathrm{K}^{\mathrm{spc}}_\mu$，则 G_1, G_2 同构；(b) 若 $G_1, G_2 \in \mathrm{K}^{\mathrm{spc}}_\mu, H \in \mathrm{K}$ 是 $\aleph_0$-不可分解的，且 f_ℓ 嵌入 H 到G_ℓ中，对于 $\ell = 1, 2$，且此图可以补全（即存在 $G \in \mathrm{K}^\mu$ 以及嵌入 $g_\ell : G_\ell \to G_*$，使得 $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$），则存在 h，使得：(α) h 是从 G_1 到 G_2上的同构；(β) $h \circ f_1 = f_2$；

为什么？取 H 为平凡群，即可由条款 (B) 得出条款 (a)。对于条款 (b)，令 $\mathscr{F} = \mathscr{F}[G_1, G_2]$ 为满足以下条件的 f 集合：

(a) f是从 $G_{1,f} \in \mathrm{IDC}_{<\mu}(G_1)$ 到 $G_{2,f} \in \mathrm{IDC}_{<\mu}(G_2)$ 上的同构；(b) G_1, G_2 在 K^μ 中 f-相容，这意味着存在 $G \in \mathrm{K}^\mu$ 以及将 G_ℓ 嵌入 G 的嵌入 g_ℓ，对于 $\ell = 1, 2$，使得 $g_2 \circ f = g_1 \restriction G_{1,f}$。

首先，$\mathscr{F}$ 非空（定义域为 f_1、值域为 f_2 的函数 f (H) 和 H 会满足要求）。其次，使用来回论证；这里我们使用 cf(μ) $= \aleph_0$。 $\square_{2.1}$

注 2.4. 1) 对于具有不可数共尾数 κ 的强极限奇异基数 μ，我们能否证明一个类似的结果？嗯，我们需要考虑以下博弈：

($*$) 博弈定义如下：(a) 一局持续 last θ 步；(b) 在第 ε 步中，玩家 I 先选择 $M_\varepsilon \in \mathrm{K}_{<\mu}$，然后玩家 II 选择 $N_\varepsilon \in \mathrm{K}_{<\mu}$；(c) $M_\varepsilon \in \mathrm{K}_{<\mu}$，并且如果 ε 不是极限序数，那么 M_ε 是 cf(μ)-不可分解的；(d) $\langle M_\zeta : \zeta \leq \varepsilon \rangle$ 是递增连续的；(e) $M_\varepsilon \subseteq N_\varepsilon \subseteq M_{\varepsilon+1}$；(f) 一局结束时，当且仅当对于每个极限序数 $\varepsilon <$ cf(μ) M_ε 是 $\mathrm{K}_{<\mu\cdot}$ 内的一个 amalgamation 基，玩家 II 获胜

现在，如果玩家 II 没有输，那么我们可以仿照上面的证明；这一点应该很清楚。K 中存在泛成员μ 是否意味着这一点？我们希望在其他地方再讨论这个问题。

见下文。

2）该证明适用于任何具有 $\mathrm{LST}_{\mathfrak{k}} < \mu$ 的抽象初等类 $\mathfrak{k}$。不过我们可能会想：能否降低对 $\mathfrak{k}$ 的要求？事实上可以：并不需要光滑性（也就是说，如果 $\langle M_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的，那么 $\cup\{M_\alpha : \alpha < \delta\} \leq_{\mathfrak{k}} M_\delta$）。此外，虽然

我们需要每个 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增序列都有一个上界，但我们只要求并成为这样的上界的情形限于共尾数为 cf(μ) 的序列。

3）我们可以补充一个修正版，固定 $\bar{\lambda}$

我们可以补充（期刊版本之后）：

定义 2.5。我们称 K 为 μ-非常良好，当且仅当：

（A）K 是 μ-良好的（见定义 1.3）；（B）若 cf(μ) $> \aleph_0$，则对 $\chi < \mu$ 的一个闭无界集，有 K 是 χ- 良好的。

断言 2.6. 如果 K 是 μ-非常好的，那么定理 2.1 的对应结论成立。

§ 3. Universal in $\beth_\omega$

在 §2 中，我们刻画了 K 中何时存在基数为 $\beth_\omega$ 等基数的特殊模型。我们尝试分析一个相关的组合问题。我们的初衷是先研究 $\mathfrak{k}_{\rm fnq}$ （由一个集合及其上的一个有向族等价关系构成的类结构，其中每个等价类的大小都有有限上界）。因此，$\mathfrak{k}_{\rm fnq}$ 与 $\mathrm{K}_{\rm lf}$ 相似，但似乎更容易分析。我们考察 $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_{\rm fnq}$ 上的一些偏序。

首先，在子结构序 $\leq_1=\subseteq$ 下，此类不满足融合。其次，我们还有其他序：$\leq_3$ 要求满足塔斯基–沃特条件（见下文 TV）。然而，使用 $\leq_3$，在那里我们对可数多个点和有限多个等价关系提出类似要求，我们便具有融合性质。

这与局部有限群自然相关，见 3.6、3.7。

定义 3.1。令 $\mathrm{K}=\mathrm{K}^{\rm fnq}$ 为结构类 M，满足（词汇表是隐式定义的，并且为 $\tau_{\mathbf{K}}$，即仅取决于 K）：

(a) P^M，Q^M是 M的划分，P^M非空；(b) $E^M\subseteq P^M\times P^M\times Q^M$（是一个三元关系），我们将 aE^M_cb写作（a，b，c）$\in E^M$；(c) 对于 $c\in Q^M$，E^M_c是 P^M上的等价关系，且 $\sup\{|a/E^M_c|:\ a\in P^M\}$有限（稍后详述）；(d) $Q^M_{n,\,k}\subseteq (Q^M)^{\,n}$对于 n，$k\geq 1$（e）若 $\bar c=\langle c_\ell:\ \ell<n\rangle\in {}^{\,n}(Q^M)$，则我们令 $E^M_{\bar c}$为将$\bigcup E_\ell$扩张为一个ℓ等价关系所得的闭包；但 $E^M_{\bar c}$不属于词汇表；(f) ${}^{\,n}(Q^M)=\bigcup\limits_{k\geq 1}Q^M_{n,\,k}$；(g) 若$\bar c\in Q^M_{n,\,k}$，则对每个 $a\in P^M$都有 $k\geq|a/E^M_{\bar c}|$。

定义 3.2。我们在 K 上定义一些偏序。

1) $\leq_1=\leq^1_{\mathbf{K}}=\leq^1_{\rm fnq}$是一个子模型。2) $\leq_3=\leq^3_{\mathbf{K}}=\leq^3_{\rm fnq}$ 如下定义：$M\leq_3 N$ 当且仅当：(a) $M,N\in\mathrm{K}$，(b) $M\subseteq N$，(c) 如果 $A\subseteq N$可数且 $A\cap Q^N$有限，那么存在一个将$N{\restriction}A$ 嵌入到 M中且在 $A\cap M$上扩张的嵌入，或者仅有一个一一同态。

3) $\leq_2=\leq^2_{\mathbf{K}}=\leq^2_{\rm fnq}$的定义与 $\leq_3$ 相同，但在条件 (c) 中，A 是有限的。

断言 3.3。1) K 是一个普遍类，因此 (K, $\subseteq$) 是一个抽象初等类。2) $\leq^3_{\mathbf{K}},\leq^2_{\mathbf{K}},\leq^1_{\mathbf{K}}$ 是 K 上的偏序。3) (K, $\leq^2_{\mathbf{K}}$) 是一个抽象初等类。4) (K, $\leq^3_{\mathbf{K}}$) 具有不交融合。5) 如果 $M\leq_2 N$, $c\in Q^M$和 $a\in P^M$，那么 a/E^N_c包含于 M.

6) 对于每个 n、k，都存在一个存在的一阶句子，它为 $M\in K$ 定义集合 $\{\bar a\in {}^{n+2}M:$ a_n、a_{n+1} 是 $E^M_{\bar a}$-等价的$\}$.

证明。1)、2)、3) 显然。

4) 由下文 3.4 得出。 $\square_{3.3}$

断言 3.4. 若 $M_0\leq^1_{\mathbf{K}}M_1$,$M_0\leq^3_{\mathbf{K}}M_2$ 和 $M_1\cap M_2=M_0$，则 $M=M_1+M_2$，M_1,M_2 的不交并属于 K，并扩展 M_ℓ，适用于 $\ell=0$、1、2，甚至$M_1\leq^3_{\rm fnq}M$ 和 $M_0\leq^2_{\mathbf{K}}M_1\Rightarrow M_2\leq^2_{\mathbf{K}}M$，当：

(∗) $M = M_1 +_{M_0} M_2$ 表示 M 定义如下：(a) $|M| = |M_1| \cup |M_2|$；(b) $P^M = P^{M_1} \cup P^{M_2}$；(c) $Q = Q^{M_1} \cup Q^{M_2}$；(d) 我们通过按以下情形定义 $c \in Q^M$ 对应的 E^M_c，来定义 E^M：(α) 若 $c \in Q^{M_0}$，则 E^M_c是将 $E^{M_1}_\ell \cup E^{M_2}_\ell$扩张为等价关系所得的闭包；(β) 若 $c \in Q^{M_\ell} \backslash Q^{M_0}$ 且 $\ell \in \{1,2\}$，则 E^M_c定义为

- $aE^M_c b$当且仅当$a = b \in P^{M_{3-\ell}} \backslash M_0$或 $aE^{M_\ell}_c b$因此 $a, b \in P^{M_\ell}$；

(e) $Q^M_{n,k}$ 是 $Q^{M_1}_{n,k}$,$Q^{M_2}_{n,k}$ 与满足条件的集合 $\bar{c}$ 的并：(α) $\bar{c} \in {}^n(Q^M)$, (β) $\bar{c} \notin ({}^n(Q^{M_1})) \cup {}^n(Q^{M_2})\}$, (γ) $E^M_{\bar{c}}$现在是良定义的，并且没有包含超过 k 个成员的等价类；也就是说，对于某个有限集 A 以及两两不同的 $a_0, .., a_k \in A$，它们是 $a/E^M_{\bar{c}}$的成员，并且将 $\bigcup\{E^M_{c_i} \restriction A$的闭包生成等价关系 $i < \lg(\bar{c})\}$，满足 $a_i E' a$ 对于 $i \leq k$。

证明。显然， M 是一个良定义结构，扩展了 M_0, M_1, M_2，并满足定义 3.1 的条款 (a)、(b)、(c)。有两点需要检查： $a \in P^M, \bar{c} \in Q^M_{n,k} \Rightarrow |a/E^M_{\bar{c}}| \leq k$以及 ${}^n(Q^M) = \bigcup\limits_{k \geq 1} Q^M_{n,k}$

$(*)_1$ if $a \in P^M$ and $\bar{c} \in Q^M_{n,k}$ then $|a/E^M_{\bar{c}}| \leq k$.

[为什么？如果 $\bar{c} \in Q^{M_1}_{n,k} \cup Q^{M_2}_{n,k}$根据定义这成立，那么假设 $\bar{c} \in Q^{M_\iota}_{n,k}, \iota \leq 2$。如果这不成立，那么存在一个有限集 $A \subseteq M$，使得 $\bar{c} \subseteq A, a \in A$，并且将 $\bigcup\{E^M_{c_\ell}$的闭包 $\ell < \bar{c}\lg(\{\})\} \leq k$ 化为一个等价关系后满足：每个等价类都有 $N = M \restriction A$ 个成员。$|a/E^N_{\bar{c}}| > k$ 我们有 $M_0 \leq^1_{\mathbf{K}} M_1$。根据 $M_0 \leq^3_{\mathbf{K}} M_2$, $M_0 \leq^2_{\mathbf{K}} M_2$（实际上 f 就足够），存在一个一一同态 $A \cap M_2$，将 M_0中的 $M_0 \cap A$映射到 $B' =$上。令 $A \cup M_1 (\cup f)\ A \cap M_2$($N' = M \restriction B$)，并令$g = f \cup \mathrm{id}_{A \cap M_1}$。因此 g是一个从 N到 N'上的同态，而 $g(a)/E^{N'}_{g\bar{c}}$( ) 有 $> k$ 个成员，这意味着 $g'(a)/E^{M_1}_{g'}(\bar{c})$ 有 $> k$ 个成员。此外， $g(\bar{c}) \in Q^{M_1}_{n,k_0}$（为什么？如果 $\iota = 1$，则显然成立；如果 $\iota = 2$，则根据 f的选择），这与 $M_1 \in \mathbf{K}$.] 矛盾。

$(*)_2$ 若 $\bar{c} \in {}^n(Q^M)$，则 $\bar{c} \in \bigcup\limits_k Q^M_{n,k_0}$

为什么？如果 $\bar{c} \in M_1$ 或 $\bar{c} \subseteq M_2$，根据 M 的定义，这显然成立，因此不妨假设它们都不成立。根据 $Q^M_{n,k}$ 的定义，我们需要证明 $\sup\{a/E^M_{\bar{c}}: a \in P^M\}$ 是有限的。为导出矛盾，假设对每个 $k \geq 1$，这一点都不成立，因此存在$a_k \in P^M$，使得 $a_k/E^M_{\bar{c}}$ 有 $\geq k$ 个元素；于是存在一个有限的 $A_k \subseteq M$，使得 $a_k/E^{M \restriction A_k}_{\bar{c}}$ 有 $\geq k$ 个元素。令 $A = \bigcup A_k$，那么 A_k 是$k \geq 1$的一个可数子集 M 并且我们按照 $(*)_1$ 的证明继续。

其他结论（实际上并未用到）可仿照 $(*)_2$ 证明：

$(*)_3$ $M_1 \leq^3_{\mathbf{K}} M$；$(*)_4$ $M_0 \leq^2_{\mathbf{K}} M_1 \Rightarrow M_2 \leq^2_{\mathbf{K}} M$；

$(*)_5$ $M_1 +_{M_0} M_2$ 等于 $M_2 +_{M_0} M_1$。

$\square_{3.4}$

断言 3.5. 1) 若 $\lambda = \lambda^{<\mu}$ 且 $M \in \mathbf{K}$ 的基数为 $\leq \lambda$，则存在 N 使得：

(a) $N \in \mathrm{K}_\lambda$ 扩展 M; (b) 若 $N_0 \leq^3_{\mathbf{K}} N_1$ 且 N_0 的基数为 $< \mu$，并且 $f_0 \leq_2$-嵌入 N_0 到 N中，则存在一个将 N_1 嵌入 N 的嵌入 f_1，且该嵌入扩展 f_0。

2) 对每个 $M \in$K，我们可以在类$\{N \in$K 上定义等价关系 $E = E_{\mathbf{K}}$： $M \leq_2 N\}$，其等价类为 $\leq 2^{\|M\|^{\aleph_0}}$；若 N_1、N_2 是 E-等价的，则它们可以在 M 上粘合（在 (K $\leq_2$ 中）。

3) 如果 μ 是强极限，则 (K $\leq_2$) 是 μ-良好的。

与 K_{lf} 有什么联系？以下内容将作出解释（参见 [KW73]）

定义 3.6. 1) 对于群 $G \in \mathrm{K}_{\mathrm{lf}}$，我们定义 $M = \mathbf{fnq}_G \in \mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}$ 如下：

(a) P^M 是 G的元素集合；(b) $Q^M = \{(c, 1)$： $c \in G\}$，一个 G的副本；(c) E^M是三元组（a， b，（c，1）的集合，其中 a、b、$c \in G$，并且对于某个 n、$m \in \mathbb{Z}$，我们有 $G \models c^n a c^m = b$。

2) 对于 $M \in$K，我们将 $G = \mathbf{grp}_M$定义为 sym(P^M) 的子群，由满足以下条件的置换 π 组成：对于 P^M 中的某个有限元素序列 $\bar{c}$，我们有：对于每个 $x \in P^M$，都有 $\pi(x) E^M_{\bar{c}} x$。

讨论 3.7。问题在于，(K $\leq_2$) 中的融合情形无法提升为 K_{lf} 中的情形；也就是说，在 3.4 中，对于 $c \in M_\ell \setminus M_0$，我们可以选择 $E^M_c \restriction (M_{3-\ell} \setminus M_0)$作为等式，但对群的相应要求却无法满足。

出版后，我们补充如下：

命题 3.8. 假设 μ 是共尾数为 $\aleph_0$. 的强极限奇异基数。那么 ($\mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}, \leq_{J^{\mathrm{bd}}_{\mu^+}}$) 在 μ.中有一个泛成员

证明. 根据一般判据 [She17b, 1.16 = L a34] + 联合嵌入性质成立，但我们在此详细说明。

$(*)_1$ 固定 $\bar{\lambda} = \langle \lambda_n : n < \omega \rangle$, $2^{\lambda_n} < \lambda_{n+1} < \mu = \sum\{\lambda_k : k < \omega\}$ 以及 $\lambda_n = \lambda_n^{\aleph_0}$.$(*)_2$ 对于 $\xi \leq \omega$，令：(a) $\mathrm{K}^\xi = K_{\bar{\lambda}, \xi}$ 是满足 $\bar{M} = \langle M_n : n < \xi \rangle$, $M_n \in$ 的 $\bar{M}$ 类，$\mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}_{\lambda_n}$ 是关于 n,递增的 $\leq_3$；(b) $\mathrm{K}^\xi = \mathrm{K}_{\bar{\lambda}, \xi} = \{M \in \mathrm{K}^\xi$: 对任意 $n < \xi\}$., M_n 的论域是 λ_n

$(*)_3$ 若 $M \in \mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}_M$，则存在 $\bar{M} \in \mathrm{K}_{\bar{\lambda}, \omega}$，其并为 M。

$(*)_4$ 我们可以找到 N，使得：

(a) $N = \langle N_{\alpha, \eta} : \alpha < 2^{\lambda_0}, \eta \in \prod_{\ell<n} 2^{\lambda_{\ell+1}}$，对于某个 $n < \omega \rangle$；(b) $\langle N_{\alpha, \langle\rangle} : \alpha < 2^{\lambda_0} \rangle$ 列出以 λ_0 为论域的 $M \in \mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}$；(c) 对于 $\alpha < 2^{\lambda_0}$, $\eta \in \prod_{\ell<n} 2^{\lambda_{\ell+1}}$，序列 $\langle N_{\alpha, \eta^\frown\langle\beta\rangle} : \beta < 2^{\lambda_{n+1}}$ 列出以 λ_{n+1} 为论域且 $<_3$-扩张 $N_{\alpha+1}$. 的 $M \in \mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}$

$(*)_5$ 我们可以找到 N_*, h，使得：

(a) $N_* \in \mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}$ 的基数为 μ，(b) $\bar{h} = \langle h_{\alpha,\eta} : \alpha < 2^{\lambda_0}$, $\eta \in \prod_{\ell<n} 2^{\lambda_{\ell+1}}$ 对于某个 $n < \omega \rangle$，(c) $h_{\alpha,\eta}$ 嵌入 $N_{\alpha,\eta}$ 到 N_*，(d) 若 $\nu \lhd \eta \in \prod_{\ell<n} 2^{\lambda_{\ell+1}}$ 且 $\alpha < 2^{\lambda_0}$，则 $h_{\alpha,\eta} \subseteq h_{\alpha,\nu}$.

$(*)_6$ N_* 是 $\mathrm{K}^{\mathrm{fnq}}$ 在 μ. 中的一个泛成员

[为什么？由 $(*)_3$ 和 $(*)_5$。] $\square_{3.8}$

References

[BG03] G´abor Braun 和 R¨udiger G¨obel, *Outer automorphisms of locally finite p-groups*, 《代数学杂志》264（2003），第 1 期，55–65。[CK62] 张振中和H. Jerome Keisler, *Model theories with truth values in a uniform space* **68** 1962 107 109 , 《美国数学会通报》（），–。

[CS20] Samuel M. Corson 和 萨哈隆·谢拉, *Strongly bounded groups of various cardinalities*, 《美国数学会会刊》148（2020），第 12 期，5045–5057，arXiv：1906.10481。MR 4163821[DG93] Manfred Dugas 和 R ¨ ¨ *On locally finite p-groups and a problem of Philip* udiger Gobel, , 《代数学 *Hall's* **159** 1993 138 杂志》（），第 1 期，115–。[D ˇza05] Mirna D ˇzamonja, *Club guessing and the universal models*, 《圣母大学形式逻辑杂志》46（2005），283–300。[GS83] Rami P. Grossberg 和 萨哈隆·谢拉, *On universal locally finite groups*, 《以色列数学杂志》44（1983），第 4 期，289–302，MR 710234[GS84] Donato Giorgetta 和 萨哈隆·谢拉, *Existentially closed structures in the power of the continuum* **26** 1984 148 739576 , 《纯粹与应用逻辑年刊》（），第 2 期，123–。MR [Hic78] Ken Hickin, *Complete universal locally finite groups*, 《美国数学会汇刊》239（1978），213–227。[J´on56] Bjarni J´onsson, *Universal relational systems*, 《斯堪的纳维亚数学》4（1956），193–208。[J´on60] , *Homogeneous universal relational systems*, 《斯堪的纳维亚数学》8（1960），137–142。[KS92] Menachem Kojman 和 萨哈隆·谢拉, *Nonexistence of universal orders in many cardinals* **57** 1992 3, 875 891, 9209201 , 《符号逻辑杂志》（），第 – 期，arXiv：math/。MR 1187454

[73] ——— *Locally finite groups* +210 KW Otto H. Kegel 和 Bertram A.F. Wehrfritz, , xi。[MS76] Angus J. Macintyre 和 萨哈隆·谢拉, *Uncountable universal locally finite groups*, 《代数学杂志》 **43** 1976 1, 168 175 0439625 （），第 – 期。MR MV M. D. Morley 和 R. L. Vaught,

[62] *Homogeneous and universal models*, 《斯堪的纳维亚数学》11（1962），37–57。[S$^+$] S. Shelah 等, *Tba*, 准备中。暂定编号：Sh:F2150。[She] 萨哈隆·谢拉, *LF groups, aec amalgamation, few automorphisms*, arXiv：1901.09747。[She09] , *Abstract elementary classes near* $\aleph_1$, 《抽象初等类的分类理论》，《逻辑研究》（伦敦），第 18 卷，College Publications，伦敦，2009，arXiv：0705.4137，第 I 章，[Sh:h]，第 vi+813 页。[She16] , *No universal group in a cardinal*, 《数学论坛》28（2016），第 3 期，573–585，arXiv：1311.4997。MR 3510831[She17a] , *Existentially closed locally finite groups (Sh312)*, 《超越一阶模型论》，CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，——— 2017, 1102 5578, 221 298 3729328 arXiv：。

[17] ——— *Universal structures* **58** 2017 2, 159 第 – 页。MR She b , , 《圣母大学形式逻辑杂志》（），第 –177 期，arXiv：math/

——— 0405159 3634974 。MR She , *Density of indecomposable locally finite groups*, 《帕多

[20] ——— 瓦大学数学研讨班报告》 **144** 2020 253 270 4186458 （），–。MR She ,

——— [21] ——— *Divide and conquer: dividing lines and universality* **87** 2021 2, , 《Theoria》（），第 – 259 348 4329456 期。MR [ST97] 萨哈隆·谢拉和 Simon Thomas, *The cofinality spectrum of the infinite symmetric group* **62** 1997 3, 902 916, 9412230 , 《符号逻辑杂志》（），第 – 期，arXiv：math/。MR 1472129

[79] *Algebraically closed groups of large cardinality* SZ Saharon Shelah 和 Martin Ziegler, , 《符号逻辑杂志》 **44** 1979 4, 522 532 550381

[86] （），第 – 期。MR Tho Simon Thomas, *Complete universal loclly finite groups of large cardinality*, 277–301。

Einstein Institute of Mathematics, Edmond J. Safra Campus, Givat Ram,
The HebrewUniversity of Jerusalem, Jerusalem, 9190401, Israel, and,
Department of Mathematics,Hill Center - Busch Campus, Rutgers,
The State University of New Jersey, 110 Frel-inghuysen Road, Piscataway,
NJ 08854-8019 USA*Email address*: shelah@math.huji.ac.il*URL*: http://shelah.logic.at