arXiv:2303.03802v1 [math.NT] 7 Mar 2023

高斯梅森卢卡斯数和多项式 Nabiha Saba LMAM实验室和数学系，穆罕默德·塞迪克·本·叶海亚大学，阿尔及利亚吉杰勒 电子邮箱：sabarnhf1994@gmail.com Ali Boussayoud*LMAM实验室和数学系，穆罕默德·塞迪克·本·叶海亚大学，阿尔及利亚吉杰勒 电子邮箱：aboussayoud@yahoo.fr

*通讯作者 摘要

在本文中，我们引入了三个新概念，分别称为高斯梅森卢卡斯数、梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式。我们给出了并证明了它们的一些有趣性质和结果，例如：递推关系、比内公式、显式公式、生成函数、对称函数和负向扩展。

2010年数学主题分类。主要：05E05；次要：11B39。
关键词和短语。高斯梅森卢卡斯数；梅森卢卡斯多项式；高斯梅森卢卡斯多项式；比内公式；生成函数；对称函数；显式公式。

1. 引言与背景

在现有文献中，整数数列及其在各个科学领域中的应用一直受到广泛关注。其中，斐波那契数列、卢卡斯数列、梅森数列和梅森卢卡斯数列得到了深入研究。

梅森卢卡斯数列 $\{m_n\}_{n\geq 0}$ 由 [8] 中的递推关系给出：

$$\begin{cases} m_0 = 2,\ m_1 = 3 \\ m_n = 3m_{n-1} - 2m_{n-2},\ \text{for } n \geq 2 \end{cases}.$$

该数列的项 m_n 称为梅森卢卡斯数。注意，梅森卢卡斯数既可以由显式公式（见 [9]）给出：

$$m_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n}{n-j} \left(\begin{array}{c} n-j \\ j \end{array} \right) 3^{n-2j} 2^j.$$

也可以由比内公式 [8]给出：

$$m_n = 2^n + 1, \tag{1.1}$$

在比内公式中用（$-n$）替换（n），可得到梅森卢卡斯数的负指标扩展如下：

$$m_{-n} = \frac{m_n}{2^n}. \tag{1.2}$$

文献中已有许多关于高斯数列的研究。例如，Horadam 在 [3] 中考察了复平面上的斐波那契数，并阐明了它们的一些有趣性质。此外，Jordan 在 [5] 中研究了高斯斐波那契数和高斯卢卡斯数。另外，Tasci 在 [4] 中定义并研究了高斯梅森数。此外，关于各种高斯多项式数列的研究，例如高斯雅各布斯塔尔数列、高斯雅各布斯塔尔卢卡斯数列、高斯佩尔数列和高斯佩尔卢卡斯多项式，可见于论文 [6], [13], [14]。

定义 1. [1] 设 λ 和 μ 是任意两个字母表。我们通过以下形式定义 $S_n(\lambda - \mu)$：

$$\frac{\prod\limits_{\mu_i \in \mu} (1 - \mu_i z)}{\prod\limits_{\lambda_i \in \lambda} (1 - \lambda_i z)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\lambda - \mu) z^n, \tag{1.3}$$

条件为： $S_n(\lambda-\mu)=0$，其中 $n<0.$

方程（1.3）可改写为以下形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\lambda-\mu)z^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\lambda)z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-\mu)z^n\right),$$

其中

$$S_n(\lambda-\mu)=\sum_{j=0}^{n} S_{n-j}(-\mu)S_j(\lambda).$$

注 1. 将 $\lambda=\{0\}$ 代入（1.3）可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-\mu)z^n=\prod_{\mu_i\in\mu}(1-\mu_i z).$$

定义 2. [12, 11] 令 n 为正整数， $\lambda=\{\lambda_1,\lambda_2\}$ 为一组给定变量。则对称函数 $S_n(\lambda_1+\lambda_2)$ 定义如下：

$$S_n(\lambda)=S_n(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

with

$$\begin{aligned} S_0(\lambda) &= S_0(\lambda_1+\lambda_2)=1,\\ S_1(\lambda) &= S_1(\lambda_1+\lambda_2)=\lambda_1+\lambda_2,\\ S_2(\lambda) &= S_2(\lambda_1+\lambda_2)=\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2,\\ &\vdots \end{aligned}$$

本文组织如下：第 2 节定义高斯梅森卢卡斯数并给出其有趣性质，同时建立经典梅森卢卡斯数与高斯梅森卢卡斯数之间的关系。第 3 节介绍梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式，并推导出这些多项式的一些结果，例如比内公式、显式公式、生成函数、对称函数和负指标扩展。

2. 高斯梅森卢卡斯数及其一些性质

本节首先给出高斯梅森卢卡斯数的基本定义，然后推导这些数的比内公式、显式公式和负指标形式。我们先给出以下定义。

定义3. 设 $n\geq 0$为整数，高斯梅森卢卡斯数 $\{Gm_n\}_{n\geq 0}$的递推关系如下：

$$Gm_n:=\begin{cases} 2+\frac{3i}{2}, & if\ n=0\\ 3+2i, & if\ n=1\\ 3Gm_{n-1}-2Gm_{n-2}, & if\ n\geq 2 \end{cases}, \tag{2.1}$$

容易看出：

$$Gm_n=m_n+im_{n-1},\ \text{for } n\geq 1, \tag{2.2}$$

其中 m_n 为 n^{th} 梅森卢卡斯数。

为便于后续使用，高斯梅森卢卡斯数的前几项如下表所示：

n	0	1	2	3	4	5	...
Gm_n	$2+\frac{3i}{2}$	$3+2i$	$5+3i$	$9+5i$	$17+9i$	$33+17i$	...

表1. $0\leq n\leq 5$.对应的高斯梅森卢卡斯数

设 λ_1 和 λ_2 是递推关系（2.1）的特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ 的根，则

$$\lambda_1=2 \text{ and } \lambda_2=1.$$

现在我们可以给出高斯梅森卢卡斯数的第 n^{th} 项。

定理 1. 对于 $n\geq 0$，高斯梅森卢卡斯数的比内公式为：

$$Gm_n=2^n+1+i\left(2^{n-1}+1\right). \tag{2.3}$$

证明. 我们知道，高斯梅森卢卡斯数递推关系的通解为：

$$Gm_n=c2^n+d,$$

其中 c 和 d 是系数。

利用初始值 $Gm_0=2+\frac{3i}{2}$ 和 $Gm_1=3+2i$，我们得到：

$$c+d=2+\frac{3i}{2} \text{ and } 2c+d=1.$$

由这些等式可得：

$$c=1+\frac{i}{2} \text{ and } d=1+i.$$

因此：

$$\begin{aligned} Gm_n &= \left(1+\frac{i}{2}\right)2^n+1+i \\ &= 2^n+1+i\left(2^{n-1}+1\right). \end{aligned}$$

如所需。 □

高斯梅森卢卡斯数的负指标扩展（Gm_{-n}）将在下一个定理中给出。

定理 2. 设 n 为任意正整数。则有：

$$Gm_{-n}=\frac{1}{2^n}\left[m_n+\frac{i}{2}m_{n+1}\right], \tag{2.4}$$

其中 m_n 是 n^{th}梅森卢卡斯数。

证明。由 [8], 可知，梅森卢卡斯数的负指标扩展为：

$$m_{-n}=\frac{m_n}{2^n}.$$

利用方程 (2.2)，我们很容易得到：

$$\begin{aligned} Gm_{-n} &= m_{-n}+im_{-n-1} \\ &= \frac{m_n}{2^n}+i\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^n}\left[m_n+\frac{i}{2}m_{n+1}\right]. \end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的结果。 □

现在，我们旨在给出高斯梅森卢卡斯数的显式公式。为此，我们将证明以下定理。

定理3。高斯梅森卢卡斯数的显式公式如下：

$$Gm_n=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n}{n-j}\left(\begin{array}{c} n-j \\ j \end{array}\right)3^{n-2j}2^j+i\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n-1}{n-j-1}\left(\begin{array}{c} n-j-1 \\ j \end{array}\right)3^{n-2j-1}2^j. \tag{2.5}$$

*Pro*的。根据 [9], ，我们有 n^{th} 梅森卢卡斯数的显式公式如下 y:

$$m_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n}{n-j} \left(\begin{array}{c} n-j \\ j \end{array} \right) 3^{n-2j} 2^j.$$

利用方程 (2.2)，我们很容易得到：

$$\begin{aligned} Gm_n &= m_n + i m_{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n}{n-j} \left(\begin{array}{c} n-j \\ j \end{array} \right) 3^{n-2j} 2^j + i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n-1}{n-j-1} \left(\begin{array}{c} n-j-1 \\ j \end{array} \right) 3^{n-2j-1} 2^j. \end{aligned}$$

如所要求。 □

定理 4. 对于 $n \in \mathbb{N}$，高斯梅森卢卡斯数的生成函数为 *y:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Gm_n z^n = \frac{4 + 3i - (6+5i) z}{2 - 6z + 4z^2}. \tag{2.6}$$

证明。高斯梅森卢卡斯数可以看作形式幂级数的系数：

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Gm_n z^n.$$

利用初始条件，我们得到：

$$\begin{aligned} g(z) &= Gm_0 + Gm_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} Gm_n z^n \\ &= Gm_0 + Gm_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(3Gm_{n-1} - 2Gm_{n-2} \right) z^n \\ &= Gm_0 + Gm_1 z + 3z \sum_{n=1}^{\infty} Gm_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} Gm_n z^n \\ &= Gm_0 + \left(Gm_1 - 3Gm_0 \right) z + 3z \sum_{n=0}^{\infty} Gm_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} Gm_n z^n \\ &= 2 + \frac{3i}{2} + \left(\frac{5i}{2} - 3 \right) z + \left(3z - 2z^2 \right) g(z). \end{aligned}$$

因此，我们得到：

$$\left(1 - 3z + 2z^2 \right) g(z) = 2 + \frac{3i}{2} - \left(\frac{5i}{2} + 3 \right) z.$$

因此：

$$g(z) = \frac{4 + 3i - (6+5i) z}{2 - 6z + 4z^2}.$$

因此，我们得到所需结果。 □

定理 5. 对于 $n \in \mathbb{N}$，高斯梅森卢卡斯数的对称函数为：

$$Gm_n = \left(2 + \frac{3i}{2} \right) S_n \left(\lambda_1 + [-\lambda_2] \right) - \left(\frac{5i}{2} + 3 \right) S_{n-1} \left(\lambda_1 + [-\lambda_2] \right). \tag{2.7}$$

与 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = 1$.

证明。由 [2], 可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right) z^n=\frac{1}{1-\left(\lambda_1-\lambda_2\right) z-\lambda_1\lambda_2 z^2}, \text{ with } \lambda=\{\lambda_1,\lambda_2\} \text{ an alphabet.} \tag{2.8}$$

由此方程可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right) z^n=\frac{z}{1-\left(\lambda_1-\lambda_2\right) z-\lambda_1\lambda_2 z^2}. \tag{2.9}$$

在方程 (2.8) 和 (2.9) 中令 $\lambda_1-\lambda_2=3$ 和 $\lambda_1\lambda_2=-2$, 可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right) z^n = \frac{1}{1-3z+2z^2}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right) z^n = \frac{z}{1-3z+2z^2}. \tag{2.11}$$

将方程 (2.10) 乘以 $\left(2+\frac{3i}{2}\right)$, 并加上由方程 (2.11) 乘以 $\left(-\frac{5i}{2}-3\right)$所得的方程, 则得到以下等式:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(2+\frac{3i}{2}\right) S_n\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right)-\left(\frac{5i}{2}+3\right) S_{n-1}\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right)\right) z^n &= \frac{4+3i-(6+5i) z}{2-6z+4z^2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Gm_n z^n.\end{aligned}$$

比较 z^n 的系数, 可得:

$$Gm_n=\left(2+\frac{3i}{2}\right) S_n\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right)-\left(\frac{5i}{2}+3\right) S_{n-1}\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right).$$

证明完成。 □

现在, 我们旨在 给出奇数和偶数高斯梅森卢卡斯数的生成函数 s.

定理6. 对于 $n\in\mathbb{N}$, 偶数和奇高斯梅森卢卡斯数的生成函数分别为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Gm_{2n} z^n = \frac{4+3i-(10+9i) z}{2-10z+8z^2}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Gm_{2n+1} z^n = \frac{6+4i-(12+10i) z}{2-10z+8z^2}. \tag{2.13}$$

证明。由 [10],可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n-1}\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right) z^n = \frac{\left(\lambda_1-\lambda_2\right) z}{1-\left(\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2+2\lambda_1\lambda_2\right) z+\lambda_1^2\lambda_2^2 z^2}, \tag{2.14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right) z^n = \frac{1-\lambda_1\lambda_2 z}{1-\left(\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2+2\lambda_1\lambda_2\right) z+\lambda_1^2\lambda_2^2 z^2}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}\left(\lambda_1+[-\lambda_2]\right) z^n = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\left(\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2+2\lambda_1\lambda_2\right) z+\lambda_1^2\lambda_2^2 z^2}, \tag{2.16}$$

其中 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ 为一个字母表。将 $\lambda_1 - \lambda_2 = 3$ 和 $\lambda_1\lambda_2 = -2$ 代入方程（2.15）、（2.16）和（2.17），可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n-1}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) z^n = \frac{3z}{1-5z+4z^2}, \tag{2.17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) z^n = \frac{1+2z}{1-5z+4z^2}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) z^n = \frac{3}{1-5z+4z^2}. \tag{2.19}$$

在方程 (2.7) 中用 $(2n)$ 代替 (n)，得到:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Gm_{2n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(2 + \frac{3i}{2}\right) S_{2n}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) - \left(\frac{5i}{2} + 3\right) S_{2n-1}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) \right) z^n \\
&= \left(2 + \frac{3i}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) z^n - \left(\frac{5i}{2} + 3\right) \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n-1}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) z^n \\
&= \frac{(4+3i)(1+2z)}{2(1-5z+4z^2)} - \frac{(6+5i)3z}{2(1-5z+4z^2)} \\
&= \frac{4+3i-(10+9i)z}{2-10z+8z^2}.
\end{aligned}$$

这就是偶高斯梅森卢卡斯数的生成函数。在方程 (2.7) 中用 $(2n+1)$ 代替 n，得到:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Gm_{2n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(2 + \frac{3i}{2}\right) S_{2n+1}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) - \left(\frac{5i}{2} + 3\right) S_{2n}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) \right) z^n \\
&= \left(2 + \frac{3i}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) z^n - \left(\frac{5i}{2} + 3\right) \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}\left(\lambda_1 + [-\lambda_2]\right) z^n \\
&= \frac{3(4+3i)}{2(1-5z+4z^2)} - \frac{(6+5i)(1+2z)}{2(1-5z+4z^2)} \\
&= \frac{6+4i-(12+10i)z}{2-10z+8z^2}.
\end{aligned}$$

这就是奇高斯梅森卢卡斯数的生成函数。 □

3. 梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式及其一些有趣性质

本节给出梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式的定义，并得到一些有趣的性质。

定义4. 设 $n \geq 0$ 为整数，梅森卢卡斯多项式 $\{m_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的递推关系如下:

$$m_n(x) := \begin{cases} 2, & \text{if } n = 0 \\ 3x, & \text{if } n = 1 \\ 3xm_{n-1}(x) - 2m_{n-2}(x), & \text{if } n \geq 2 \end{cases}, \tag{3.1}$$

定义5. 设 $n \geq 0$ 为整数，高斯梅森卢卡斯多项式$\{Gm_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的递推关系如下:

$$Gm_n(x) := \begin{cases} 2+\frac{3i}{2}x, & if\ n=0 \\ 3x+2i, & if\ n=1 \\ 3xGm_{n-1}(x)-2Gm_{n-2}(x), & if\ n\geq 2 \end{cases}, \tag{3.2}$$

容易看出:

$$Gm_n(x) = m_n(x) + im_{n-1}(x), \text{ for } n \geq 1. \tag{3.3}$$

梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式的前几项如下表所示:

n	$m_n(x)$	$Gm_n(x)$
0	2	$2+\frac{3i}{2}x$
1	$3x$	$3x+2i$
2	$9x^2-4$	$9x^2-4+3ix$
3	$27x^3-18x$	$27x^3-18x+i\left(9x^2-4\right)$
4	$81x^4-72x^2+8$	$81x^4-72x^2+8+i\left(27x^3-18x\right)$
5	$243x^5-270x^3+60x$	$243x^5-270x^3+60x+i\left(81x^4-72x^2+8\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

表 2. $0 \leq n \leq 5$ 的梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式 .

λ_1和 λ_2是递推关系（3.1）和（3.2）的特征方程 $\lambda^2-3x\lambda+2=0$的根。则

$$\lambda_1 = \frac{3x+\sqrt{9x^2-8}}{2} \text{ and } \lambda_2 = \frac{3x-\sqrt{9x^2-8}}{2}.$$

注意:

$$\lambda_1+\lambda_2 = 3x,\ \lambda_1\lambda_2 = 2 \text{ and } \lambda_1-\lambda_2 = \sqrt{9x^2-8}.$$

现在我们可以给出梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式的 n^{th} 项。

定理 7. 对于 $n \geq 0$，梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式的比内公式分别为:

$$m_n(x) = \lambda_1^n + \lambda_2^n, \tag{3.4}$$

$$Gm_n(x) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + i\left(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}\right). \tag{3.5}$$

证明。我们知道，梅森卢卡斯多项式的递推关系的一般解为:

$$m_n(x) = c\lambda_1^n + d\lambda_2^n,$$

其中， c 和 d 是系数。

利用初始值 $m_0(x) = 2$ 和 $m_1(x) = 3x$，我们得到:

$$c+d = 2 \text{ and } c\lambda_1+d\lambda_2 = 3x.$$

由这些等式可得:

$$c = d = 1\ .$$

因此:

$$m_n(x) = \lambda_1^n + \lambda_2^n.$$

这就是第一个方程。第二个方程可用类似的方法证明。 □

梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式（$m_{-n}(x)$）和（$Gm_{-n}(x)$）的负向扩展如下一个定理所示。

定理 8. 设 n 为任意正整数。则有：

$$m_{-n}(x) = \frac{m_n(x)}{2^n}, \tag{3.6}$$

$$Gm_{-n}(x) = \frac{1}{2^n}\left[m_n(x) + \frac{i}{2}m_{n+1}(x)\right]. \tag{3.7}$$

证明。将 (n) 替换为 $(-n)$ 代入比内公式 (3.4)，可写为：

$$\begin{aligned} m_{-n}(x) &= \lambda_1^{-n} + \lambda_2^{-n} \\ &= \frac{1}{\lambda_1^n} + \frac{1}{\lambda_2^n} \\ &= \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2^n} \\ &= \frac{m_n(x)}{2^n}. \end{aligned}$$

这就是梅森卢卡斯多项式的负指标扩展。根据方程 (3.3)，可得：

$$\begin{aligned} Gm_{-n}(x) &= m_{-n}(x) + im_{-n-1}(x) \\ &= \frac{m_n(x)}{2^n} + i\frac{m_{n+1}(x)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^n}\left[m_n(x) + \frac{i}{2}m_{n+1}(x)\right]. \end{aligned}$$

这就是高斯梅森卢卡斯多项式的负指标扩展。 □

定理 9。当 $n \in \mathbb{N}$ 时，梅森卢卡斯和高斯梅森卢卡斯多项式的生成函数分别为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n(x) z^n = \frac{2 - 3xz}{1 - 3xz + 2z^2}, \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Gm_n(x) z^n = \frac{4 + 3ix + \left(i\left(4 - 9x^2\right) - 6x\right)z}{2 - 6xz + 4z^2}. \tag{3.9}$$

证明。梅森 nne 卢卡斯多项式可视为形式幂级数的系数 ：

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(x) z^n.$$

利用初始条件，我们得到：

$$\begin{aligned} g(z) &= m_0(x) + m_1(x) z + \sum_{n=2}^{\infty} m_n(x) z^n \\ &= m_0(x) + m_1(x) z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(3xm_{n-1}(x) - 2m_{n-2}(x)\right) z^n \\ &= m_0(x) + m_1(x) z + 3xz \sum_{n=1}^{\infty} m_n(x) z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_n(x) z^n \\ &= m_0(x) + \left(m_1(x) - 3xm_0(x)\right) z + 3xz \sum_{n=0}^{\infty} m_n(x) z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_n(x) z^n \\ &= 2 - 3xz + \left(3xz - 2z^2\right) g(z). \end{aligned}$$

因此，我们得到：

$$\left(1-3xz+2z^2\right)g(z)=2-3xz.$$

因此：

$$g(z)=\frac{2-3xz}{1-3xz+2z^2}.$$

由此得到方程（3.8）。采用相同的步骤，可以得到方程（3.9）。 □

定理10. 对于 $n\in\mathbb{N}$，梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式的对称函数分别为：

$$m_n(x) = 2S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])-3xS_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2]), \tag{3.10}$$

$$Gm_n(x) = \left(2+\frac{3ix}{2}\right)S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])+\left(i\left(2-\frac{9}{2}x^2\right)-3x\right)S_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2]). \tag{3.11}$$

其中 $\lambda_1=\frac{3x+\sqrt{9x^2-8}}{2}$ 和 $\lambda_2=\frac{3x-\sqrt{9x^2-8}}{2}$.

证明. 将 $\lambda_1-\lambda_2=3x$ 和 $\lambda_1\lambda_2=-2$ 代入方程（2.8）和（2.9），得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])z^n = \frac{1}{1-3xz+2z^2}, \tag{3.12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2])z^n = \frac{z}{1-3xz+2z^2}. \tag{3.13}$$

将方程（3.12）乘以（2），并将其与方程（3.13）乘以（$-3x$）所得的方程相加，可得以下等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])-3xS_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2])\right)z^n=\frac{2-3xz}{1-3xz+2z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}m_n(x)z^n.$$

比较 z^n 的系数，可得：

$$m_n(x)=2S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])-3xS_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2]).$$

将方程（3.12）乘以 $\left(2+\frac{3ix}{2}\right)$，并将其与方程（3.13）乘以 $\left(i\left(2-\frac{9}{2}x^2\right)-3x\right)$ 所得的方程相加，可得以下等式：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(2+\frac{3ix}{2}\right)S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])+\left(i\left(2-\frac{9}{2}x^2\right)-3x\right)S_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2])\right)z^n &= \frac{4+3ix+\left(i\left(4-9x^2\right)-6x\right)z}{2-6xz+4z^2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}Gm_n(x)z^n.\end{aligned}$$

比较 z^n 的系数，可得：

$$Gm_n(x)=\left(2+\frac{3ix}{2}\right)S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])+\left(i\left(2-\frac{9}{2}x^2\right)-3x\right)S_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2]).$$

证明完毕。 □

现在，我们旨在给出梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式的显式公式。为此，我们将证明以下定理。

定理 11. 梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式的显式公式分别如下：

$$m_n(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}(3x)^{n-2j}2^j, \tag{3.14}$$

$$Gm_n(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}(3x)^{n-2j}2^j+i\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n-1}{n-j-1}\binom{n-j-1}{j}(3x)^{n-2j-1}2^j. \tag{3.15}$$

证明. 根据 [7], , 我们有:

$$S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n-j}{j}(\lambda_1-\lambda_2)^{n-2j}(\lambda_1\lambda_2)^j. \tag{3.16}$$

$$S_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2])=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n-j-1}{j}(\lambda_1-\lambda_2)^{n-2j-1}(\lambda_1\lambda_2)^j. \tag{3.17}$$

将 $\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=3x\\ \lambda_1\lambda_2=-2\end{cases}$ 代入方程 (3.16) 和 (3.17)，得到:

$$S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(3x)^{n-2j}2^j, \tag{3.18}$$

$$S_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2])=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(3x)^{n-2j-1}2^j. \tag{3.19}$$

另一方面，由方程 (3.10) 可得:

$$m_n(x)=2S_n(\lambda_1+[-\lambda_2])-3xS_{n-1}(\lambda_1+[-\lambda_2]).$$

将方程 (3.18) 乘以 (2)，再与方程 (3.19) 乘以 $(-3x)$ 后所得的结果相加，得到:

$$\begin{aligned}m_n(x) &= 2\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(3x)^{n-2j}2^j-3x\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(3x)^{n-2j-1}2^j\\ &= 2\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(3x)^{n-2j}2^j-\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(3x)^{n-2j}2^j\\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}(3x)^{n-2j}2^j.\end{aligned}$$

这就是梅森卢卡斯多项式的显式公式。
利用方程 (3.3)，我们很容易得到:

$$\begin{aligned}Gm_n(x) &= m_n(x)+im_{n-1}(x)\\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}(3x)^{n-2j}2^j+i\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{n-1}{n-j-1}\binom{n-j-1}{j}(3x)^{n-2j-1}2^j.\end{aligned}$$

高斯梅森卢卡斯多项式的显式公式是什么? □

4. 结论

本研究定义了高斯梅森卢卡斯数、梅森卢卡斯多项式和高斯梅森卢卡斯多项式。随后，我们利用梅森卢卡斯数给出了高斯梅森卢卡斯数的一个公式，并利用梅森卢卡斯多项式给出了高斯梅森卢卡斯多项式。我们还得到了它们的比内公式、显式公式、生成函数、对称函数和负向扩展。

参考文献

[1] A. Abderrezzak，形式级数的欧拉变换推广。Adv. Math., 103, 180-195, 1994.[2] A. Boussayoud, M. Kerada，对称函数与生成函数，Int. Electron. J. Pure Appl. Math., 7, 195-203, 2014.[3] A. F. Horadam，复斐波那契数和斐波那契四元数，American Math. Monthly. 70, 289-291, 1963.[4] D. Tasci，关于高斯梅森数和多项式，J. Sci. Arts., 21.4(57), 1021-1028, 2021.[5] J. H. Jordan，高斯斐波那契数和卢卡斯数，Fibonacci Q. 3, 315-318, 1965.[6] M. Asci, E. Gurel，高斯雅各布斯塔尔多项式与高斯雅各布斯塔尔-卢卡斯多项式，Notes Number Theory Discrete Math. 19, 25-36, 2013.[7] *N. Saba, A. Boussayoud, M. Kerada, The generalized bivariate polynomials and some properties. (Submitted).*[8] N. Saba, A. Boussayoud, K. V. V. Kanuri, 梅森卢卡斯数与完全齐次对称函数，J. Math. Computer Sci., 24, 127-139, 2022.[9] N. Saba, A.Boussayoud，双变量梅森卢卡斯多项式及其性质，《混沌、孤子与分形》. 146, 110899, 1-6, 2021.[10] N. Saba, A. Boussayoud, M. Kerada，偶高斯数、奇高斯数及其多项式的生成函数，J. Sci. Arts., 21.1(54), 125-144, 2021.[11] N. Saba, A. Boussayoud, A. Abderrezzak，三阶和二阶线性递归数列的完全齐次对称函数，Electron. J. Math. Analysis Appl. 9, 221-245, 2021.[12] N. Saba, A. Boussayoud, M. Chelgham，若干广义多项式的对称函数和生成函数，Malaya J. Mat., 8, 1756-1765, 2020.[13] S. Halici, S. Oz，关于高斯佩尔多项式及其若干性质，Palest. J. Math. 7, 251-256, 2018.[14] T. Yagmur，高斯佩尔-卢卡斯多项式，Commun. Math. Appl. 10, 673-679, 2019.