arXiv:2303.03804v1 [cs.RO] 7 Mar 2023

自主固定翼无人机的长距离GNSS拒止视觉惯性导航：基于虚拟视觉传感器的SO(3)流形滤波器

Eduardo Gallo*†和 Antonio Barrientos‡§

2023年3月

摘要

本文提出了一种视觉惯性导航算法，旨在减小自主固定翼无人机（无人飞行器）在没有全球导航卫星系统（GNSS）信号时经历的水平位置漂移。除加速度计、陀螺仪和磁力计外，所提出的导航滤波器还依赖于视觉里程计（VO）系统生成的精确增量位移输出；本文将该系统称为虚拟视觉传感器（VVS）。该系统利用机载相机拍摄的地球表面图像，并由滤波器的惯性估计提供辅助。尽管由于其位置观测是相对的而非绝对的，该系统不能完全替代GNSS接收机，但它能够大幅降低GNSS拒止时的姿态和位置估计误差。为尽量减少缺少绝对观测时误差的累积，该滤波器在刚体旋转流形或 $\mathbb{SO}(3)$上实现。本文采用涉及GNSS信号丢失的两个代表性场景进行随机高保真仿真，以评估结果。作者将视觉惯性导航滤波器和高保真仿真的C++ 实现作为开源软件发布 [1]。

关键词 **词**：GNSS拒止、视觉惯性导航、自主导航、扩展卡尔曼滤波器、自主性、视觉惯性里程计

数学符号

带帽符号的变量 $<\hat{\cdot}>$ 表示其（惯性）估计值，带圆圈符号的变量 $<\mathring{\cdot}>$ 表示其（视觉）估计值，带波浪号的变量 $<\tilde{\cdot}>$ 表示其测量值，带点号的变量 $<\dot{\cdot}>$ 表示其时间导数。对于以粗体显示的向量（例如 $\mathbf{x}$），所用的其他符号包括宽帽符号 $<\widehat{\cdot}>$，表示反对称形式；以及双竖线 $<\|\cdot\|>$，表示范数。对于标量，竖线 $<|\cdot|>$ 表示绝对值。对于以粗体显示的四元数（例如 $\mathbf{q}$），上标星号 $<\cdot^*>$ 表示共轭；它们的串接和乘法分别用 $\circ$ 和 $\otimes$ 表示，而 $\oplus$ 和 $\ominus$ 表示加法和减法运算符。

本文使用刚体旋转空间，因此依赖于 $\mathbb{R}^3$特殊正交群的李代数，记作 $\mathbb{SO}(3)$，尤其涉及群作用、串接、扰动和雅可比矩阵，以及其切空间、旋转向量 $\mathbf{r}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$。建议参阅 [2, 3, 4] 。

*联系方式：e.gallo@alumnos.upm.es，edugallo@yahoo.com，https://orcid.org/0000-0002-7397-0425

†单位：自动化与机器人中心，马德里理工大学 - 西班牙国家研究委员会。自动化与机器人中心，马德里理工大学。

‡联系方式：antonio.barrientos@upm.es，https://orcid.org/0000-0003-1691-3907§单位：自动化与机器人中心，马德里理工大学 - 西班牙国家研究委员会。自动化与机器人中心，马德里理工大学。

本文采用四种不同的参考坐标系：地心地固坐标系 $\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$[1]、北东地坐标系 $\mathbf{F}_{\mathrm{N}}$[2]、机体坐标系 $\mathbf{F}_{\mathrm{B}}$[3]和惯性坐标系 $\mathbf{F}_{\mathrm{I}}$[4]。向量上方的上标用于指定其所处的参考坐标系（例如，$\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$ 表示在北东地坐标系中观察到的地速，而 $\mathbf{v}^{\mathrm{B}}$ 是同一向量在机体坐标系中的表示）。下标可用于说明变量或向量的含义，例如，$\mathbf{v}_{\mathrm{TAS}}$ 表示空速，以区别于地速 $\mathbf{v}$；此时，下标要么是缩写，要么会在首次出现时明确解释。下标也可表示向量的某个分量，例如，$\mathbf{v}_2^{\mathrm{N}}$ 表示 $\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$的第二个分量。此外，若向量的下标中出现两个参考坐标系，则表示该向量从第一个坐标系指向第二个坐标系。例如，$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}}$ 表示在机体坐标系中观察到的、从北东地坐标系指向机体坐标系的角速度。

1 引言与大纲

本文的主要目标是开发一种导航系统，以减轻自主固定翼飞机在全球导航卫星系统（GNSS）拒止条件下飞行时固有的位置漂移。因此，若飞行期间GNSS信号不可用，飞机便更有可能抵达远处回收点附近，并可从该处通过遥控降落。

所提出的方法将两种不同的导航系统（惯性和视觉）结合起来，使它们能够同时相互辅助、相互控制。惯性姿态和高度估计用于约束相应的视觉估计，从而大幅提高视觉水平位置估计的精度；随后，这些估计以增量位移观测的形式反馈给惯性滤波器，以减小其估计误差，并在一定程度上取代GNSS接收机。由此得到的水平位置估计误差仅为惯性算法或视觉算法独立运行时误差的一小部分。与文献中大多数视觉惯性方法不同，后者主要关注地面车辆、机器人和多旋翼飞行器的短期GNSS拒止导航，而所提出的算法主要面向自主固定翼飞机的长距离GNSS拒止导航。

第2节介绍了本文的创新点和主要应用。第3节讨论了所提出的惯性与视觉导航算法相结合的架构。第4节介绍VVS（虚拟视觉传感器），它只是借助惯性输出的先进视觉里程计流程的另一种称呼。随后，将 VVS 输出的精确增量位移视觉估计提供给一个在 $\mathbb{SO}(3)$ 飞行器姿态切空间中实现的导航滤波器；第5节详细说明了滤波方程。第6节介绍了完全集成的闭环视觉惯性导航系统的运行方式。

第7节介绍了用于评估导航结果的随机高保真仿真，并通过对两个具有代表性的 GNSS拒止导航挑战场景进行蒙特卡洛运行来开展评估。第8节介绍了将所提算法应用于这两个 GNSS拒止场景后得到的结果，并将其与独立惯性系统和视觉系统的结果进行比较。最后，第9节对结果进行了总结，以便查阅；第10节则给出了简短的结论。

本文最后附有两个附录，将其置于正文之外更为合适。附录A介绍了GNSS拒止导航及其面临的挑战，并综述了两种最有前景的减轻其负面影响的方法的最新进展，例如视觉里程计 (VO)和视觉惯性里程计 (VIO)。附录 B 介绍了所提出方法所需的各种雅可比矩阵的推导

[1]地心地固坐标系以地球质心为原点，其中 $\mathbf{i}_3^{\mathrm{E}}$ 沿地球自转轴指向大地北向，$\mathbf{i}_1^{\mathrm{E}}$ 同时位于赤道平面和零经度平面内，且 $\mathbf{i}_2^{\mathrm{E}}$ 与 $\mathbf{i}_1^{\mathrm{E}}$ 正交，二者与 $\mathbf{i}_3^{\mathrm{E}}$ 共同构成右手坐标系。[2]北东地坐标系以飞机质心为原点，其各轴分别与大地北向、东向和向下方向对齐。[3]机体坐标系以飞机质心为原点，其中 $\mathbf{i}_1^{\mathrm{B}}$ 位于飞机的对称面内，沿固定方向向前，$\mathbf{i}_3^{\mathrm{B}}$ 位于飞机的对称面内，与 $\mathbf{i}_1^{\mathrm{B}}$ 正交并指向下方，$\mathbf{i}_2^{\mathrm{B}}$同时与前两者正交，使三者构成右手坐标系。[4]惯性坐标系以地球质心为原点，其各轴相对于除太阳之外的任何恒星均不发生旋转。

第5节中的导航滤波器。

2 创新性与应用

所提出的方法将两种不同的导航系统（惯性和视觉）结合起来，使二者能够同时相互辅助和相互控制，从而形成良性的（正向）反馈循环，与单独使用任一系统相比，水平位置估计精度得到显著提高。

与附录A讨论的最先进技术相比，所提出的系统兼具紧耦合平滑器所代表的高精度，以及滤波器和松耦合方法复杂度低、计算需求较少的优点。两种独立解（惯性解和视觉解）的存在似乎表明该方法采用了松耦合方式，但实际上，所提出的解具备紧耦合流程的大多数特征。首先，由于这两种解并非相互独立，因此没有信息被丢弃：它们彼此同时提供信息并接收信息。视觉估计依赖惯性姿态和高度输出，而惯性滤波器则将视觉增量位移估计用作观测值。与松耦合解不同，姿态和高度的视觉估计不允许偏离惯性估计超过一定阈值，因此不会发生漂移。此外，这两种估计从不进行融合，因为惯性解构成最终输出，而视觉输出的唯一作用是充当前文提到的增量传感器。所提出的解既包含惯性系统中的滤波器，也包含视觉系统中基于关键帧的滑动窗口平滑器，从而兼具这两类方法的优点。

附录A中列出的视觉惯性里程计解在其搭载平台方面具有较强的通用性，大多数应用集中于地面车辆、室内机器人和多旋翼飞行器；在所用传感器方面也具有通用性，通常仅限于惯性测量单元（IMU）和一个或多个摄像机。本文聚焦于一个特定场景（固定翼自主飞行器在 GNSS拒止环境中的长距离湍流飞行），因此应用范围更为有限，但也能利用这些平台上已有的额外传感器（磁力计、气压计），更适合这类飞行器的特定运动方式（前向运动速度比横向和垂直方向的运动速度高出几个数量级），并能应对与这些平台所经历的性质不同的 GNSS拒止环境（可以假设飞行开始时存在 GNSS信号；若信号消失，原因很可能是技术故障或人为干预，因此飞行器需要具备在 GNSS拒止条件下长时间飞行的能力）。

然而，所提出的系统并不能构成完整的GNSS替代方案，因为它依赖的是增量位置观测，而非绝对位置观测，因此只能减小位置漂移，无法将其消除。此外，该系统的使用还受到一些限制，例如需要日光、飞机下方不能有云层覆盖，而且无法在大片水域上空导航。

本文证明，无人机（无人飞行器）的惯性与视觉导航系统可以通过适当方式结合，使组合系统在长期GNSS拒止环境下的水平位置漂移显著小于任一单独系统所能达到的水平。当飞行途中GNSS信号变得不可用时，平台需要依靠GNSS拒止导航，在没有GNSS接收机提供的绝对位置和地面速度观测值的情况下完成任务或返回基地。如下文各节所示，所提出的系统能够显著提高无人机安全抵达预定回收地点附近的可能性，之后可通过遥控使其着陆。

3 提出的视觉惯性导航架构

导航系统处理各种机载传感器的测量值（$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{SENSED}}$），并生成制导与控制系统所需的估计状态（$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{EST}}$），其中包含对真实飞行器状态 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}$ 的尽可能准确的估计。请注意，本文将图像 I 视为

感知状态 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{SENSED}}$ 的一部分，因为相机被视为一种额外的传感器。硬件和计算能力限制通常要求相机和视觉导航算法以低于传感器和惯性算法的频率运行；表1列出了本文采用的运行频率。

离散时间	频率	周期	变量	系统
$t_t = t \cdot \Delta t_{\text{TRUTH}}$	500 赫兹	0.002 秒	$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}$	飞行物理学
$t_s = s \cdot \Delta t_{\text{感测}}$	100 赫兹	0.01 秒	$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{感测}}$	传感器
$t_n = n \cdot \Delta t_{\text{EST}}$	100赫兹	0.01秒	$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{EST}}$	惯性导航
$t_c = c \cdot \Delta t_{\text{CNTR}}$	50赫兹	0.02 秒	$\boldsymbol{\delta}_{\text{目标}}, \boldsymbol{\delta}_{\text{CNTR}}$	制导与控制
$t_i = i \cdot \Delta t_{\text{IMG}}$	10赫兹	0.1 秒	$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{IMG}}$	视觉导航与相机
$t_g = g \cdot \Delta t_{\text{GNSS}}$	1 Hz	1 s		GNSS接收机

表1：不同系统的工作频率

同一作者团队此前发表的一篇文章 [5], 表明，在全球导航卫星系统信号丢失时冻结大气和风估计值，可以为固定翼飞机构建基于扩展卡尔曼滤波器的惯性导航系统（INS），使姿态、高度和地速的估计值保持有界（无漂移）[5]，，同时，由于在没有绝对观测的情况下对地速进行积分，水平位置不可避免地会发生漂移。图1以图示方式说明，惯性导航系统的输入包括除相机图像 I 以外的所有传感器测量值。



图1：惯性导航系统流程图

第二篇文章 [6], 聚焦于视觉导航（即完全依赖机载相机生成的图像）。该方法基于附录A中介绍的开源半直接视觉里程计（SVO）流程 [7, 8]，其机体姿态、高度和水平位置估计误差增长缓慢但不受限制，即会产生漂移。姿态误差过大并超过某些阈值时，可能导致系统不稳定；超过这些阈值后，控制系统将无法按预期运行。因此，[6] 以开环配置实现视觉导航系统（VNS）（图2）：制导与控制系统仍依赖惯性（INS）估计值 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{EST}}$，而视觉状态 $\breve{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{IMG}}$ 仅用于评估视觉导航系统。

融合惯性与视觉导航系统的策略基于两者作为独立系统时的性能，如表2所示。在六个自由度中，惯性系统在其中四个方面（姿态和高度）明显优于视觉估计，因为其GNSS拒止状态下的估计值有界且不会漂移。对于水平位置，两种系统都会发生漂移，因此都不适用于长期无全球导航卫星系统信号导航，但原因各不相同：惯性导航系统的漂移是由对有界地面速度估计值进行积分、且缺少绝对位置观测所致；而视觉导航系统的漂移则源于连续图像之间估计误差缓慢但持续的累积。

此外值得注意的是，惯性估计的噪声显著高于视觉估计，因此后者尽管在绝对意义上表现较差，但在增量评估估计结果时往往更加准确，也就是说，从一幅图像到下一幅图像，甚至是在对应于几幅图像的时间间隔内进行评估时更加准确。

惯性与视觉导航系统的融合分两个阶段完成。第一阶段，将惯性俯仰角、倾侧角和高度的有界估计值作为目标提供给 VNS；此时，VNS 称为惯性辅助视觉导航系统（IA-VNS），以避免视觉俯仰角、倾侧角和垂直位置估计

[5]有界的姿态估计可确保飞机在GNSS拒止条件下，只要燃料充足，就能持续飞行。高度估计误差取决于大气压力偏差相对于GNSS信号丢失时数值的变化，而该变化受大气物理学限制。地面速度估计误差取决于风速相对于GNSS信号丢失时数值的变化，而该变化同样受大气物理学限制。

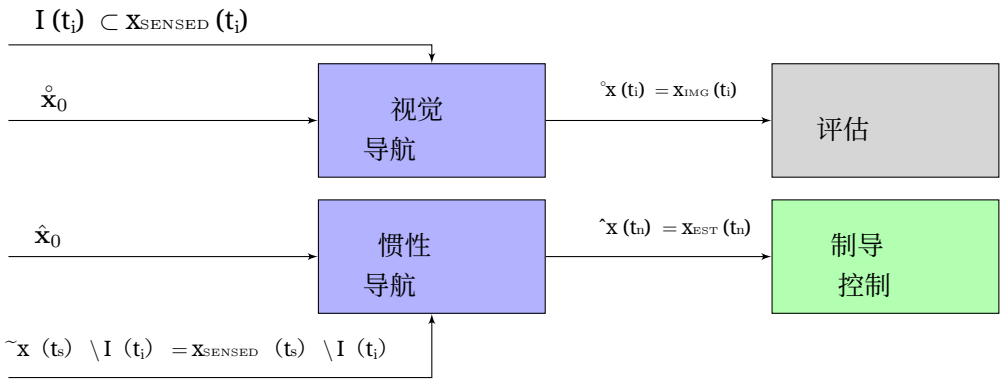


图2：视觉导航系统流程图

相对于其惯性对应项出现过大的偏差。 [6], 中对这一过程作了详细说明：该过程通过在 SVO 的非线性位姿优化中加入先验信息，不仅显著改善了这些变量的视觉估计，更重要的是，还提高了 SVO 构建的地形地图与图像中所含特征之间的匹配度，因此，与独立惯性导航系统或 VNS 相比，水平位置估计误差大幅降低。由于漂移虽有所减小但并未完全消除， [6] 中的 IA-VNS 也采用图3所示的开环配置，其中视觉输出仅用于评估。

GNSS拒止	惯性（INS）	视觉（VNS）
姿态	受传感器质量限制	发生漂移
	偏航角不如俯仰角和倾侧角	偏航角优于俯仰角和倾侧角
垂直方向	受大气物理学约束	发生漂移
水平	漂移	漂移

表2：惯性和视觉独立导航系统概述

IA-VNS 的定性特性与表2中列出的 VNS 相同，但从定量角度来看，在五个自由度上的漂移显著降低（如 [6] 中所述，偏航精度并未改变）。特别值得关注的是，与已经具有较高精度的 VNS 相比，IA-VNS 从一幅图像到下一幅图像的水平位置估计，即增量位移观测（等价于地面速度观测），也更加准确，这构成了第二阶段的基础。

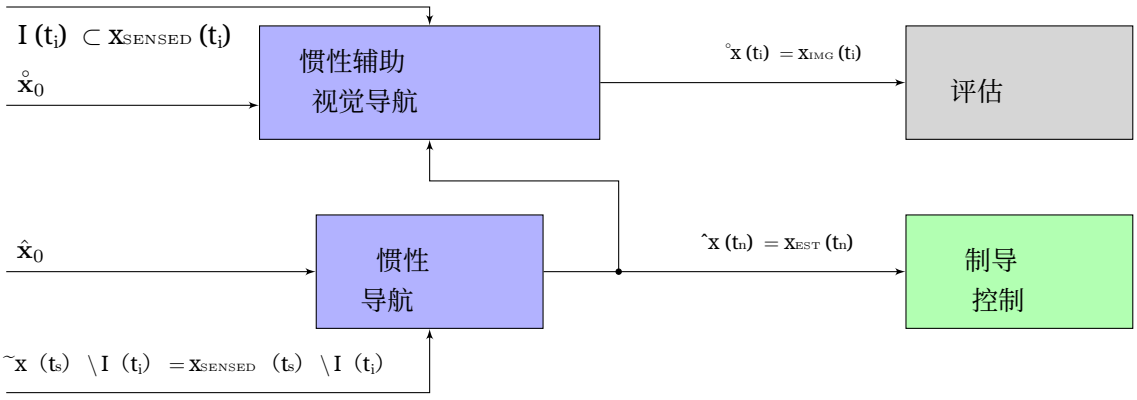


图3：IA-VNS流程图

本文提出了一种在刚体旋转流形或 $\mathbb{SO}(3)$[2, 4], 上实现的惯性导航滤波器；在缺少GNSS信号时，该滤波器利用 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{IMG}}$ IA-VNS增量位移输出，将其视为由一种称为虚拟视觉传感器或VVS的附加传感器生成的观测值（第4节）。在所提出的扩展卡尔曼滤波器（第5节）中，惯性导航滤波器依赖于机载加速度计、陀螺仪和磁力计提供的观测值，并在GNSS接收机

有信号时结合GNSS接收机的观测值；没有信号时，则结合VVS的观测值。

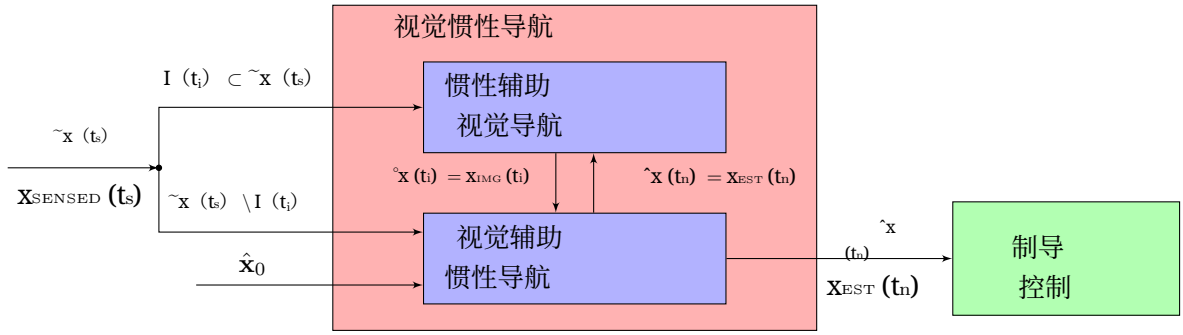


图 4：视觉惯性导航系统流程图

完全集成视觉惯性导航系统（VINS）如图 4 所示，它摒弃了原有的独立惯性导航系统，并融合惯性与视觉算法，使二者相互馈送信息。这形成了一个正反馈回路，其中 IA-VNS 或 VVS 的水平位置估计改进成功传递到惯性系统（现称为视觉辅助惯性导航系统，即 VA-INS），显著降低了其姿态估计误差，进而带来新一轮水平位置估计精度的大幅提升，详见第 8 节。

4 虚拟视觉传感器

虚拟视觉传感器（VVS）是对 IA-VNS [6]所获得的增量位移输出的另一种称谓。尽管 IA-VNS 的水平位置估计比独立式VNS（第 8 节）准确得多，但由于缺少绝对观测值，其仍会随时间发生漂移。从增量角度进行评估，即从一幅图像到下一幅图像，IA-VNS 的增量位移估计却相当准确。本节将展示如何将这些增量估计转换为大地坐标（$\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{E,\,GDT}}$）和北东地坐标系（$\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$）中的地速测量值，从而使 VVS 能够在缺少 GNSS信号时，在导航滤波器（第 5 节）中平稳地替代 GNSS接收机。

这些量的获取依赖于视觉系统（IA-VNS）生成的当前视觉状态 $\mathring{\mathbf{x}}(t_i) = \mathbf{x}_{\mathrm{IMG}}(t_i) = \mathring{\mathbf{x}}_i$、由前一帧获得的视觉状态 $\mathring{\mathbf{x}}(t_{i-1}) = \mathbf{x}_{\mathrm{IMG}}(t_{i-1}) = \mathring{\mathbf{x}}_{i-1}$，以及由惯性系统（VA-INS）根据前一幅图像生成的相应惯性状态 $\hat{\mathbf{x}}(t_{n-\delta t}) = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}(t_{n-\delta t}) = \hat{\mathbf{x}}_{n-\delta t}$。注意，当 $t = t_i = i \cdot \Delta t_{\mathrm{IMG}} = t_n = n \cdot \Delta t_{\mathrm{EST}}$ 时，i 与 n 之间的关系如下，其中 $\delta t = 10$ 是每幅待处理图像对应的惯性执行次数（表1）：

$$n = i \cdot \frac{\Delta t_{\mathrm{IMG}}}{\Delta t_{\mathrm{EST}}} = i \cdot \delta t \tag{1}$$

为获得 VVS 速度（$\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$）观测值，需先计算大地坐标（经度 λ、纬度 φ、高度 h）的导数，即取对应于最后两幅图像（2）的坐标值之差除以时间间隔，然后将其转换为 $\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$ per（3）[6]。请注意，由于获取方式的缘故，$\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$ 噪声很大。

$$\dot{\mathring{\mathbf{T}}}_i^{\mathrm{E,GDT}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathring{\lambda}}_i & \dot{\mathring{\varphi}}_i & \dot{\mathring{h}}_i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{\mathring{\mathbf{T}}_i^{\mathrm{E,GDT}} - \mathring{\mathbf{T}}_{i-1}^{\mathrm{E,GDT}}}{\Delta t_{\mathrm{IMG}}} \tag{2}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_n^{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \left[M(\tilde{\varphi}_{n-\delta t}) + \tilde{h}_{n-\delta t}\right] \dot{\mathring{\varphi}}_i & \left[N(\tilde{\varphi}_{n-\delta t}) + \tilde{h}_{n-\delta t}\right] \cos\tilde{\varphi}_{n-\delta t}\, \dot{\mathring{\lambda}}_i & -\dot{\mathring{h}}_i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$\tilde{}$相对于 VVS 大地坐标，根据 (5) 和 (6)，可通过将之前的惯性估计（对应于上一次 VVS$\tilde{}$读数的时间）与视觉获取的导数相加，得到感测到的经度 λ 和纬度 $\tilde{\varphi}$。为避免漂移，几何高度 h 的估计基于

[6]M 和 N 分别表示 WGS84 子午线和卯酉圈的曲率半径。

气压计观测值，并假设自 GNSS信号丢失[7]以来，大气压力偏移保持不变。

$$\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{E,GDT}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_{\mathrm{n}} & \widetilde{\varphi}_{\mathrm{n}} & \widetilde{\mathrm{h}}_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\widetilde{\lambda}_{\mathrm{n}} = \hat{\lambda}_{\mathrm{n}-\delta\mathrm{t}} + \dot{\mathring{\lambda}}_{\mathrm{i}} \, \Delta\mathrm{t}_{\mathrm{IMG}} \tag{5}$$

$$\widetilde{\varphi}_{\mathrm{n}} = \hat{\varphi}_{\mathrm{n}-\delta\mathrm{t}} + \dot{\mathring{\varphi}}_{\mathrm{i}} \, \Delta\mathrm{t}_{\mathrm{IMG}} \tag{6}$$

关于协方差，作者为 VVS 指定了一个临时的位置标准差，其数值比 GNSS接收机所采用的低一个数量级，以便导航滤波器（第 5 节）紧密跟踪 VVS 提供的位置观测[8]。鉴于虚拟速度观测存在噪声，作者选择对速度标准差进行动态估计：对三个维度中的每一个维度，取每个新速度观测与最近二十次读数（相当于最近 2 秒）的滑动平均值之差的绝对值。

5 提出的导航滤波器

如图 4 所示，视觉辅助惯性导航系统（VA-INS）中的导航滤波器根据机载传感器提供的观测值 $\tilde{\mathbf{x}} \setminus \mathbf{I} = \mathbf{x}_{\mathrm{SENSED}} \setminus \mathbf{I}$ 估计飞行器位姿 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}$；必要时（在没有 GNSS信号的情况下），还会结合 VVS 提供的视觉观测 $\mathring{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\mathrm{IMG}}$。该导航滤波器采用扩展卡尔曼滤波器（EKF）实现，其目标是估计飞行器姿态，即北东地坐标系与机体坐标系之间的旋转，并以单位四元数 $\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$ [2, 3] 表示；同时估计以大地坐标 $\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}}$表示的飞机位置。此外，它还估计飞行器角速度 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}}$（从北东地坐标系到机体坐标系，在机体坐标系中观测）、以北东地坐标系表示的地速 $\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$、比力 $\mathbf{f}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$（从惯性坐标系到机体坐标系的非重力加速度，在机体坐标系中观测）、陀螺仪、加速度计和磁力计的全部误差（$\mathbf{E}_{\mathrm{GYR}}$、$\mathbf{E}_{\mathrm{ACC}}$、$\mathbf{E}_{\mathrm{MAG}}$）[9],，以及机载模型提供的地球磁场 $\mathbf{B}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{MOD}}$ 与真实磁场 $\mathbf{B}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{REAL}}$ 之间的差值 $\mathbf{B}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{DEV}}$。

$$\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\mathrm{NB}} & \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} & \mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}} & \mathbf{v}^{\mathrm{N}} & \mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} & \mathbf{E}_{\mathrm{GYR}} & \mathbf{E}_{\mathrm{ACC}} & \mathbf{E}_{\mathrm{MAG}} & \mathbf{B}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

由于机体姿态 $\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$ 属于非欧几里得的特殊正交群 或 $\mathbb{SO}(3)$，因此应避免采用依赖线性代数的经典EKF方案 [2, 10],，转而使用其他形式，以确保估计姿态始终不偏离其 $\mathbb{SO}(3)$ 流形 [11][10]。李理论借助流形和切空间，能够构建严谨的微积分方法，从而精准、便捷地处理非欧几里得元素的不确定性、导数和积分 [4]。

将 EKF 方案适配到刚体旋转等非欧几里得元素（$\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$）存在情形的最严谨、最精确方法，是将旋转元素 $\mathcal{R} \in \mathbb{SO}(3)$ 从状态系统中排除，并用局部（机体）切空间扰动替代单位四元数 $\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$，该扰动由旋转向量 $\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}} \in \mathbb{R}^3$ [2, 4]表示。请注意，状态向量还包含 $\mathcal{R}$ 沿其流形运动时的速度（即其角速度），该速度包含在局部或机体切空间中。现在，每个滤波步骤都包括：根据 $\mathrm{t}_{\mathrm{n}-1} = (\mathrm{n}-1)\ \Delta\mathrm{t}$ 时刻的取值，估计旋转元素 $\hat{\mathcal{R}}_{\mathrm{n}} = \hat{\mathcal{R}}(\mathrm{t}_{\mathrm{n}}) \in \mathbb{SO}(3)$、状态向量 $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{n}} = \hat{\mathbf{x}}(\mathrm{t}_{\mathrm{n}}) = [\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NBn}} \; \hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NBn}} \; \hat{\mathbf{z}}_{\mathrm{n}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{27}$及其协方差 $\mathbf{P}_{\mathrm{n}} = \mathbf{P}(\mathrm{t}_{\mathrm{n}}) \in \mathbb{R}^{27\mathrm{x}27}$。

$$\mathcal{R}(\mathrm{t}) = \mathbf{q}_{\mathrm{NB}} \in \mathbb{SO}(3)(\mathrm{t}) \tag{8}$$

[7]感兴趣的读者请参阅 [5]，了解如何在没有GNSS信号的情况下估计几何高度。[8]GNSS接收机的位置协方差较大，因此导航滤波器会缓慢修正通过积分状态方程获得的位置估计，而不是紧密跟随含噪的GNSS位置测量值。[9]$\mathbf{E}_{\mathrm{GYR}}$、$\mathbf{E}_{\mathrm{ACC}}$和$\mathbf{E}_{\mathrm{MAG}}$ 包含陀螺仪、加速度计和磁力计的所有误差源，但不包括系统噪声，详见 [9]。[10]由于 $\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$ 并非欧几里得空间中的元素，直接应用经典EKF方案会导致必须持续将估计四元数重新投影（归一化）回流形；否则，估计状态将不满足约束（对于刚体旋转，即正交性和手性）。反复偏离流形并重新投影回流形，可能会显著降低估计精度 [2, 4]。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\left(\mathrm{t}\right) &= \left[\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \mathbf{z}\right]^{\mathrm{T}} = \left[\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \mathbf{p}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \left[\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}}\ \ \mathbf{v}^{\mathrm{N}}\ \ \mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\ \ \mathbf{E}_{\mathrm{GYR}}\ \ \mathbf{E}_{\mathrm{ACC}}\ \ \mathbf{E}_{\mathrm{MAG}}\ \ \mathbf{B}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}}\right]^{\mathrm{T}}\ \in\mathbb{R}^{27}\left(\mathrm{t}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

观测值 $\mathrm{y_n}$ 由以下设备提供：陀螺仪测量从惯性坐标系到机体坐标系、并以机体坐标系表示的角速度 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$；加速度计提供从惯性坐标系到机体坐标系、并以机体坐标系表示的比力 $\widetilde{\ }\mathbf{f}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$ 或非重力加速度；磁力计测量机体坐标系中的磁场 $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{\mathrm{B}}$；以及 GNSS接收机或 VVS（第4节），它们提供绝对位置（大地坐标）和北东地速度观测值（$\widetilde{\ }\mathrm{T}_{\mathrm{E,GDT}}$, $\widetilde{\ }\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$）。请注意，测量值以不同频率提供，如表1所列；大多数测量值每 $\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{SENSED}}=0.01$ 秒可获得一次，但如果由 GNSS接收机提供，地速和位置测量值每 $\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{GNSS}}=1$ 秒生成一次；当 GNSS信号不可用、读数改由 VVS 提供时，则每 $\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{IMG}}=0.1$ 秒生成一次。

$$\mathbf{y}_{\mathrm{n}} = \left[\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\ \ \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\ \ \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}\ \ \widetilde{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}\ \ \widetilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}\right]^{\mathrm{T}}\ \in\mathbb{R}_{\mathrm{n}}^{15} \tag{10}$$

状态变量 (11) 随时间的变化构成了一个连续时间非线性状态系统，该系统由三个精确方程（未作任何简化）组成，分别包含转动运动的时间导数 (12) [2, 4], 大地坐标的运动学 (13)[11], 以及飞机速度动力学 (14) [5], ，此外还包括另外六个微分方程 (15)。滤波器对状态变量的时间导数一无所知，因此将其设为零。注意，在表达式 (14) 中，$\mathrm{g}_{*}()$ 表示 $\mathbb{SO}(3)$ 群的旋转作用，$\oplus$ 表示 $\mathbb{SO}(3)$ 加法算子，宽帽符号 $<\hat{\cdot}>$ 表示向量的反对称形式，$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{EN}}$ 表示在北东地坐标系中观察到的运动角速度[12]，$\mathrm{g}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{c\ MOD}}$ 表示导航系统建模的重力加速度，而 $\mathrm{a}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{cor}}$ 表示同样在北东地坐标系中观察到的科里奥利加速度。在表达式 (11) 中，u 是已知的控制量或输入向量，w 是过程噪声[13]。

$$\dot{\mathbf{x}}\left(\mathrm{t}\right) = \left[\Delta\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \dot{\mathbf{z}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\left(\mathrm{t}\right)\oplus\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\left(\mathrm{t}\right),\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\left(\mathrm{t}\right),\mathbf{z}\left(\mathrm{t}\right),\mathbf{u}\left(\mathrm{t}\right),\ \mathbf{w}\left(\mathrm{t}\right),\mathrm{t}\right) \tag{11}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{1-3} = \Delta\dot{\mathrm{r}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{x}_{4-6} \tag{12}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{7-9} = \dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} = \left[\frac{\mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}}{\left[\mathrm{N}\left(\varphi\right)+\mathrm{h}\right]\cos\varphi}\quad\frac{\mathrm{v}_1^{\mathrm{N}}}{\mathrm{M}\left(\varphi\right)+\mathrm{h}}\quad-\mathrm{v}_3^{\mathrm{N}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{10-12} = \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} = \mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\oplus\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}*}^{\mathrm{B}}\left(\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\right)} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{N}} + \mathbf{g}_{\mathrm{c,MOD}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{OTHER}} = \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\ \ \dot{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\ \ \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{GYR}}\ \ \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ACC}}\ \ \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{MAG}}\ \ \dot{\mathbf{B}}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}_{18} \tag{15}$$

$$\mathrm{u\left(t\right)} = \mathbf{0} \tag{16}$$

其线性化得到以下系统矩阵 $\mathbf{A}\left(\mathrm{t}\right)=\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}(\mathrm{w}=\mathbf{0})\in\mathbb{R}^{27\mathrm{x}27}$，附录 B 介绍了各个雅可比矩阵的求法。请注意，线性化忽略了大地坐标 $\mathrm{T}^{\mathrm{E,GDT}}$ 对 (11) 个微分方程中四个不同项（$\dot{\ }\mathrm{T}_{\mathrm{E,GDT}}$, $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{EN}}$, $\mathrm{g}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{c\ MOD}}$ 和 $\mathrm{a}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{cor}}$）的影响，但考虑了飞机速度 $\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$ 对其中三项的影响（重力不依赖于速度）。这是因为单个状态估计步内 $\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$ 的变化量可能会显著影响所考虑变量的值，而大地坐标 $\mathrm{T}^{\mathrm{E,GDT}}$ 的变化不会产生这种影响，因此可以忽略。

$$\dot{\mathbf{x}}\left(\mathrm{t}\right) = \mathbf{A}\left(\mathrm{t}\right)\mathbf{x}\left(\mathrm{t}\right)+\mathbf{B}\left(\mathrm{t}\right)\widetilde{\mathbf{u}}\left(\mathrm{t}\right)+\widetilde{\mathbf{w}}\left(\mathrm{t}\right) \tag{17}$$

$$\mathbf{A}_{1-3,4-6} = \frac{\mathrm{d}\Delta\dot{\mathrm{r}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}} = \mathrm{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{18}$$

$$\mathbf{A}_{7-9,10-12} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = \mathbf{J}\begin{matrix}\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}\\ \mathbf{v}^{\mathrm{N}}\end{matrix} \tag{19}$$

$$\mathrm{A}_{10-12,1-3} = \frac{\mathrm{d}\ \dot{\mathrm{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}} = \mathbf{J}\begin{matrix}\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}}{}_{*}(\mathrm{f}_{\mathrm{B\,IB}})\\ \mathcal{R}_{\mathrm{NB}}\end{matrix} \tag{20}$$

[11] M 和 N 分别表示 WGS84 子午线和卯酉圈的曲率半径。[12] 运动角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}$ 表示任何相对于地球表面保持姿态不变而移动的物体所经历的旋转。[13] 请注意，尽管系统噪声 w(t) 存在，但在公式 (12) 至 (15) 中并未显示。

$$\mathbf{A}_{10-12,10-12} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = -\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}} + \widehat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}\,\mathbf{J}\,\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}}}{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} - \mathbf{J}\,\frac{\mathbf{a}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{cor}}}{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} \tag{21}$$

$$\mathbf{A}_{10-12,13-15} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\mathbf{f}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}} = \mathbf{J}\,\frac{\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\oplus\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}*}(\mathbf{f}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}})}{\mathbf{f}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}} \tag{22}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{ij,OTHER}} = 0 \tag{23}$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}\,(\mathrm{t}) = \mathbf{0} \tag{24}$$

离散时间非线性观测系统 (25) 包含不同传感器提供的观测值，未作任何简化。引入的新术语包括 $\mathbb{SO}(3)$ 群伴随 $\mathrm{Ad}()$ 、逆伴随 $\mathrm{Ad}^{-1}()$ 和逆旋转 $\mathrm{g}^{-1}_{*}()$ 作用。此外，$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{IE}}$ 表示地球角速度（在北东地坐标系中观察），这是由地球以恒定角速度 ω_{E}绕 $\mathbf{i}^{\mathrm{E}}_{3}$ 轴旋转所产生的；$\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$ 表示测量噪声或观测噪声[14]。

$$\mathbf{y}_{\mathrm{n}} = \mathbf{h}\left(\mathbf{q}_{\mathrm{NBn}} \oplus \Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NBn}},\, \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NBn}},\, \mathbf{z}_{\mathrm{n}},\, \mathbf{v}_{\mathrm{n}},\, \mathrm{t}_{\mathrm{n}}\right) \tag{25}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}} + \mathbf{Ad}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}} \oplus \Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}}\left(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{IE}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}}\right) + \mathbf{E}_{\mathrm{GYR}} \tag{26}$$

$$\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} = \text{女}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}} + \text{东}_{\mathrm{ACC}} \tag{27}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{g}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}} \oplus \Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}*}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{MOD}} - \mathbf{B}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{DEV}}\right) + \mathbf{E}_{\mathrm{MAG}} \tag{28}$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} = \mathbf{T}^{\mathrm{E}}{}_{,\mathrm{GDT}} \tag{29}$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} = \mathbf{v}^{\mathrm{N}} \tag{30}$$

其线性化得到如下输出矩阵 $\mathrm{H}_{\mathrm{n}} = \partial\mathrm{h}/\partial\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(\mathrm{v}_{\mathrm{n}} = \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{15\mathrm{x}27}$，附录 B 描述了各个雅可比矩阵的求取过程。与上文的状态系统情况相同，线性化也忽略了大地坐标 $\mathbf{T}^{\mathrm{E},\,\mathrm{GDT}}$ 对观测方程 (25) 中三个不同项（$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{IE}}$、 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{EN}}$ 和 $\mathrm{B}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{MOD}}$）的影响。注意，无需计算观测输入向量 $\mathbf{z}_{\mathrm{n}}$ ，因为它在求解 [2, 10]中不起作用。

$$\mathbf{y}_{\mathrm{n}} \approx \mathbf{H}_{\mathrm{n}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{n}} + \mathbf{z}_{\mathrm{n}} + \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{n}} \tag{31}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,1-3} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}}{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}} = \mathbf{J}\,\frac{\mathbf{Ad}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{IE}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}})}{\mathcal{R}_{\mathrm{NB}}} \tag{32}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,4-6} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{33}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,10-12} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = \mathbf{J}\,\frac{\mathbf{Ad}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\oplus\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}})}{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}}}\,\mathbf{J}\,\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}}}{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} \tag{34}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,16-18} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}}{\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{GYR}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{35}$$

$$\mathbf{H}_{4-6,13-15} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}}{\mathrm{d}\mathbf{f}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{36}$$

$$\mathbf{H}_{4-6,19-21} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}}{\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{ACC}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{37}$$

$$\mathbf{H}_{7-9,1-3} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}} = \mathbf{J}\,\frac{\mathbf{g}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}*}(\mathbf{B}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{MOD}} - \mathbf{B}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{DEV}})}{\mathcal{R}_{\mathrm{NB}}} \tag{38}$$

$$\mathbf{H}_{7-9,22-24} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{MAG}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{39}$$

$$\mathbf{H}_{7-9,25-27} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{B}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{DEV}}} = -\,\mathbf{J}\,\frac{\mathbf{g}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\oplus\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}*}(\mathbf{B}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{DEV}})}{\mathbf{B}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{DEV}}} \tag{40}$$

$$\mathrm{H}_{10-12,7-9} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}}{\mathrm{d}\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{41}$$

$$\mathrm{H}_{13-15,10-12} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{42}$$

[14]请注意，尽管测量噪声 v_{n} 确实存在，但在公式（26）至（30）中并未显示。

$$\mathbf{H}_{\mathrm{ij,\ OTHER}} \;=\; 0 \tag{43}$$

基于上述线性化连续状态系统和离散观测，经典扩展卡尔曼滤波的每个步骤 [2, 10] 都会对状态向量 $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{n}} = [\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NBn}}\ \hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NBn}}\ \hat{\mathbf{z}}_{\mathrm{n}}]^{\mathrm{T}}$ 及其协方差 $\mathbf{P}_{\mathrm{n}}$进行估计。注意，协方差矩阵的定义结合了欧几里得分量及其局部李群对应项 [2], ，并包含额外的组合成员[15]:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{n}} \;=\; \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R},\mathrm{n}} & \mathbf{C}^{\mathcal{R}}_{\mathrm{p},\mathrm{n}} \\ \mathbf{C}^{\mathcal{R}}_{\mathrm{p}\mathcal{R},\mathrm{n}} & \mathbf{C}_{\mathrm{pp},\mathrm{n}} \end{bmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^{27\mathrm{x}27} \tag{44}$$

$$\mathbf{C}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}\mathcal{R},\mathrm{n}} \;=\; \mathrm{E}\left[\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NBn}}\,\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B,T}}_{\mathrm{NBn}}\right] = \mathrm{E}\left[\left(\mathcal{R}_{\mathrm{NBn}} \ominus \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{R},\mathrm{NBn}}\right)\left(\mathcal{R}_{\mathrm{NBn}} \ominus \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{R},\mathrm{NBn}}\right)^{\mathrm{T}}\right] \qquad \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{45}$$

$$\mathbf{C}^{\mathcal{R}}_{\mathrm{p},\mathrm{n}} \;=\; \mathrm{E}\left[\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NBn}}\left(\mathbf{p}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p},\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{T}}\right] = \mathrm{E}\left[\left(\mathcal{R}_{\mathrm{NBn}} \ominus \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{R},\mathrm{NBn}}\right)\left(\mathbf{p}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p},\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{T}}\right] \qquad \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}24} \tag{46}$$

$$\mathbf{C}^{\mathcal{R}}_{\mathrm{p}\mathcal{R},\mathrm{n}} \;=\; \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{p}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p},\mathrm{n}}\right)\Delta\mathbf{r}^{\mathrm{B,T}}{}_{\mathrm{NBn}}\right] = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{p}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p},\mathrm{n}}\right)\left(\mathcal{R}_{\mathrm{NBn}} \ominus \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{R},\mathrm{NBn}}\right)^{\mathrm{T}}\right] \qquad \in \mathbb{R}^{24\mathrm{x}3} \tag{47}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{pp},\ \mathrm{n}} \;=\; \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{p}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p},\ \mathrm{n}}\right)\left(\mathbf{p}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p},\ \mathrm{n}}\right)^{\mathrm{T}}\right] \qquad \in \mathbb{R}^{24\mathrm{x}24} \tag{48}$$

在此提出的改进的扩展卡尔曼滤波方案中，每个估计步骤都以将切空间扰动 $\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NBn}}$ 的估计重置为零结束，同时相应地修改李旋转群元素 $\hat{\mathcal{R}}_{\mathrm{NBn}}$ 和误差协方差 $\mathbf{P}_{\mathrm{n}}$ [16]的估计。请注意，获得系统矩阵 A 和输出矩阵 H 所需的线性化精度基于一阶泰勒展开，而这与切空间扰动的大小直接相关。尽管并非必须在每个扩展卡尔曼滤波周期中都重置扰动，但通过尽可能保持扰动较小，可以提高整个状态估计过程的精度，因此建议始终执行重置步骤。

考虑到旋转元素将根据（51）进行更新，误差协方差将传播至新的旋转元素，如下所示： [2], 其中，雅可比矩阵由附录 B 中的（59）给出:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{n}} \;\longleftarrow\; \mathbf{D}\,\mathbf{P}_{\mathrm{n}}\,\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \tag{49}$$

$$\mathbf{D} \;=\; \begin{bmatrix} \mathbf{J}\,\hat{\mathcal{R}}_{\mathrm{NBn}} \oplus \Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NBn}} & \mathbf{0}_{3\mathrm{x}24} \\ \mathcal{R}_{\mathrm{NB}} & \\ \mathbf{0}_{24\mathrm{x}3} & \mathbf{I}_{24\mathrm{x}24} \end{bmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^{27\mathrm{x}27} \tag{50}$$

最后，通过局部旋转向量扰动来传播旋转元素，然后将该扰动重置为零:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NBn}} \;\longleftarrow\; \hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NBn}} \oplus \Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NBn}} \tag{51}$$

$$\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NBn}} \;\longleftarrow\; \mathbf{0}_3 \tag{52}$$

根据测量值由 GNSS接收机还是 VVS 提供，采用不同的位置（大地坐标）和地速系统噪声值。当 GNSS信号可用时，采用较低的大地坐标系统噪声值，因为目标是使解平滑地遵循状态方程，且仅根据 GNSS 观测略微更新位置，以避免长期位置漂移。若位置观测由 VVS 提供，则采用较高的系统噪声值，使扩展卡尔曼滤波器更多地依赖观测值、较少地依赖积分。请注意，由于式（2）的原因，VVS 速度观测噪声很大，因此最好让扩展卡尔曼滤波器紧密遵循源自 IA-VNS 的位置观测，并在每一步按需进行校正。

6 完全集成的视觉惯性导航系统

如图 4 所示，完全集成的视觉惯性导航系统（VINS）将视觉（IA-VNS）系统与惯性（VA-INS）系统结合起来，使二者相互辅助，同时也相互控制。由于 VINS 需要估计

[15] $\ominus$ 表示 $\mathbb{SO}(3)$旋转群的减法算子 [2, 4]。[16]角速度 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NBn}}$ 和欧几里得分量 $\hat{\mathbf{z}}_{\mathrm{n}}$ 的估计值保持不变。

每个 $t = x_{EST}$ 时刻的状态 $\hat{x} = x_{EST}$ at every $t_n = t_s = n \cdot \Delta t_{EST} = s \cdot \Delta t_{SENSED}$，因此它有三种不同的运行模式。这些模式不仅取决于是否有 GNSS信号，也取决于执行时刻 $t_n = t_s$ 是否存在位置和地速观测：

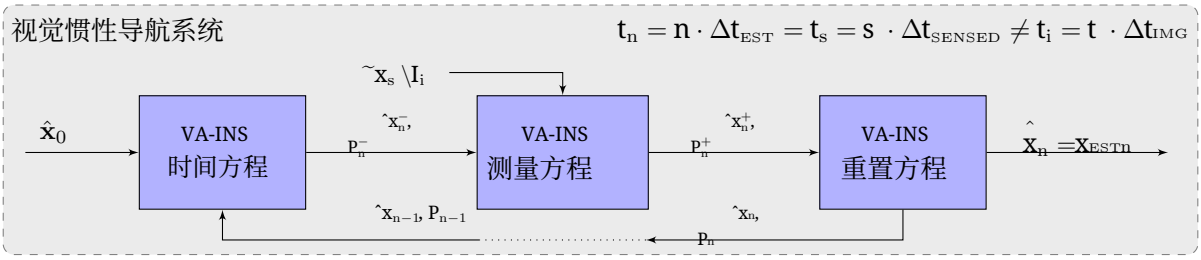


图5：当 $t_n = t_s \neq t_i$ 时的视觉惯性导航系统流程图

• 鉴于不同传感器的运行频率（表1），大多数视觉惯性导航系统的执行过程（基于全球导航卫星系统的导航中为百分之九十九，GNSS拒止条件下为十分之九）无法依赖 GNSS接收机或 VVS 提供的位置和地面速度观测值。如图5所示，这些视觉惯性导航系统的执行过程依赖于所提出的导航滤波器（第5节），该滤波器遵循经修改的李代数扩展卡尔曼滤波方案，即在初始化后依次应用时间更新、测量更新和重置方程[17]。请注意，滤波器观测系统（25）需要修改，移除（29）和（30），因为没有可用的 GNSS接收机或 VVS 观测值。

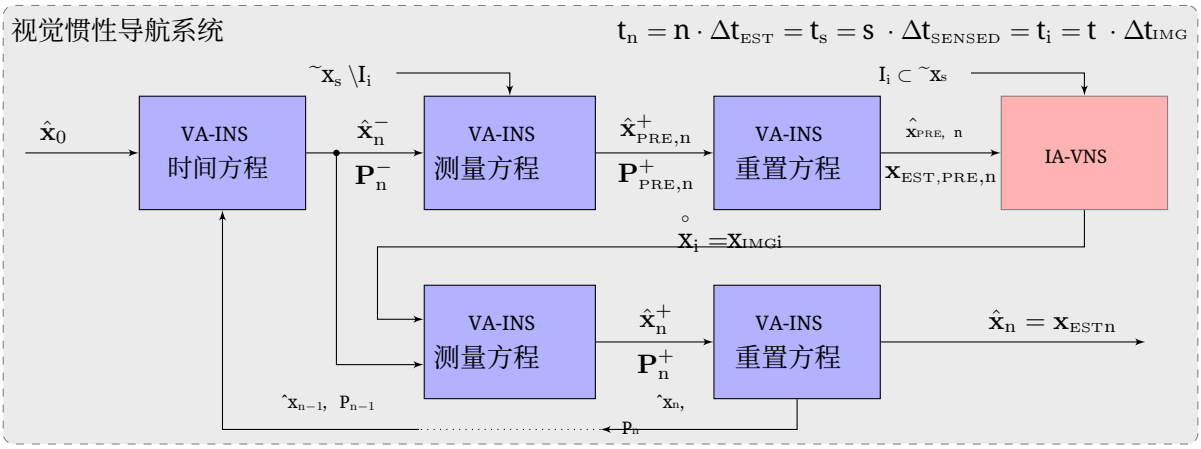


图6：当 $t_n = t_s = t_i$ 时的 VINS 流程图

• 对于在所需时间（$t_n = n \cdot \Delta t_{估计} = t_i = i \cdot \Delta t_{IMG}$）具有 VVS 位置和地面速度观测值的 GNSS拒止执行，则改用图6所示的更复杂方案。请注意，这种情况仅发生在 GNSS拒止条件下十次执行中的一次。该过程的第一部分与前一种情况完全相同，得到一个不使用 VVS测量值的初步估计状态（即不使用与 t_i 对应的 I_i 图像，也不使用 IA-VNS算法），在图中记为 $\hat{x}_{PRE}(t_n) = x_{EST,PRE}(t_n)$，以避免混淆。

随后，将该初步估计与 I_i 图像一同传递给 IA-VNS（如 [6] 所述），以获得视觉状态 $\circ x(t_i) = x_{IMG}(t_i)$；如第4节所述，该状态等价于 VVS位置和地面速度输出。只有此时，才能再次应用完整的 VA-INS导航滤波器测量更新和重置方程，从而获得最终状态估计 $\hat{x}(t_n) = x_{EST}(t_n)$。

• 在所需时间（$t_n = n \cdot \Delta t_{估计} = t_g = g \cdot \Delta t_{全球导航卫星系统}$）可获得GNSS接收机位置和地面速度观测值的基于 GNSS的执行。这种情况仅在GNSS信号可用时每百次执行中出现一次，如图7所示，实际上与上述第一种情况非常相似

[17]如第 5 节所述，在完全欧几里得扩展卡尔曼滤波方案中不存在重置步骤。

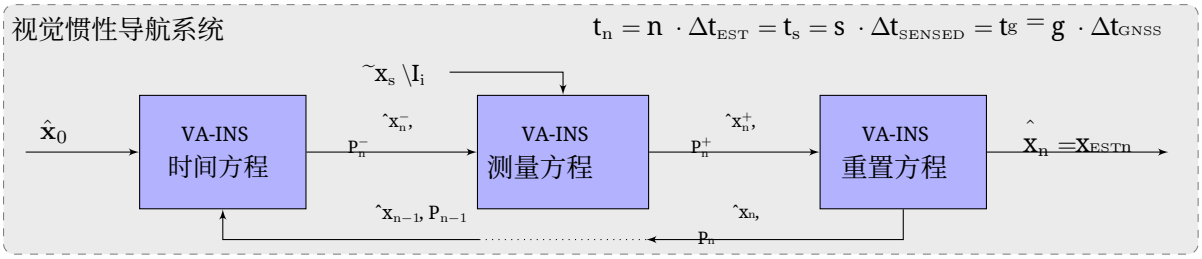


图7：当 $t_n = t_s = t_g$ 时的 VINS 流程图

唯一的区别是，由于包含GNSS接收机观测值，导航滤波器观测系统（25）可以按原样应用。

7 测试：高保真仿真与场景

为评估所提出导航算法的性能，本文采用基于图8所示高保真随机飞行仿真的蒙特卡罗仿真，对两种不同场景分别进行了100次运行。该仿真器的详细说明见 [12]，其开源 C++ 实现可在 [1], 获取。它模拟了固定翼活塞发动机自主无人机在不同天气和湍流条件下的飞行。

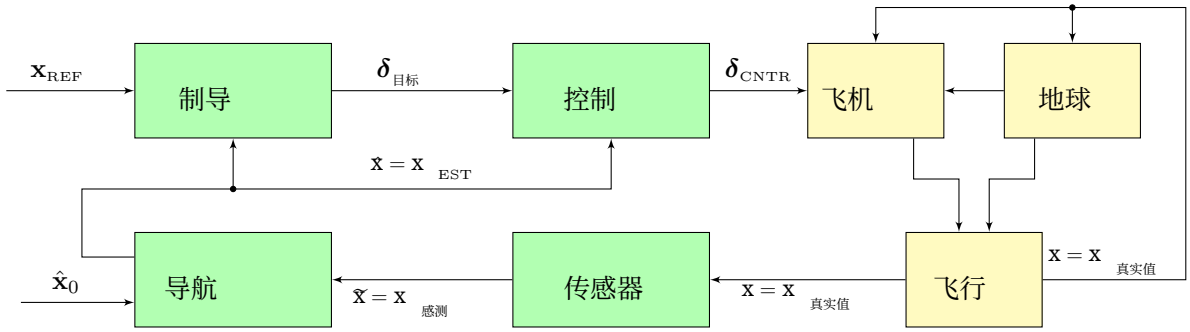


图8：高保真仿真的组成部分

仿真器由两个不同的过程组成。第一个过程由图8右侧的黄色模块表示，用于模拟飞行动力学以及飞机与其周围环境之间的相互作用，由此得到真实的飞行器轨迹 $x = x_{TRUTH}$；第二个过程由左侧的绿色模块表示，包含负责确保所得轨迹尽可能符合任务目标的飞行器系统。其中包括：各种传感器，其输出构成感知轨迹 $\tilde{x} = x_{SENSED}$；负责对其进行滤波以获得估计轨迹 $\hat{x} = x_{EST}$的导航系统；将参考目标 x_{REF} 转换为控制目标 δ_{TARGET}的制导系统；以及调节油门和气动操纵面的位置 δ_{CNTR} 的控制系统，从而使估计轨迹 $\hat{x}$ 尽可能接近参考目标 x_{REF}。表1列出了图8所示各模块的工作频率。

如 [9, 12] 所述，飞行仿真器的所有组件均尽可能少地进行简化建模，以提高结果的真实感。除飞行器性能及其控制系统是确定性的之外，仿真器的所有其他组件均视为随机的，因此会在每次运行时发生变化，从而提高蒙特卡罗仿真结果的意义。

附录A中讨论的大多数视觉惯性里程计软件包都在其发布论文中评估了其在EuRoC微型飞行器（MAV）数据集[18] [13], 上的表现，独立论文也有类似评估，例如 [14]。因此，本文提出的算法通过仿真在两种不同场景下进行测试，以分析

[18]这些数据集包含完全同步的双目图像、IMU测量值和使用激光雷达获取的真实值读数，涵盖了 MAV 飞行的 11 条不同室内轨迹，每条轨迹持续时间约为两分钟，总距离为

长时间失去GNSS信号所造成的影响。下文虽提供了简要概述，但各场景所采用的任务、天气和风场的详细说明见 [12]。构成场景的大多数参数均以随机方式设定，因此每次运行都会得到不同的数值。请注意，第 8 节展示的所有结果均基于蒙特卡罗仿真，每种场景运行一百次，以测试所提出的导航算法对参数取值广泛变化的敏感性。

- 场景#1旨在充分体现自主固定翼无人机突然无法依赖全球导航卫星系统后所面临的挑战。此时，无人机必须改变航向，前往预先设定的回收地点，该地点约需一小时飞行时间才能抵达。在此过程中，除了执行高度和空速调整外，自主飞行器还会遭遇显著的天气和风场变化，使其GNSS拒止导航面临更大挑战。

  在任务方面，随机参数包括初始空速、气压高度和方位角（$v_{\text{TAS, INI}}$，$H_{\text{P, INI}}$，χ_{INI}）、这些参数的最终值（$v_{\text{TAS, END}}$，$H_{\text{P, END}}$，χ_{END}），以及三种机动动作各自的开始时间[19]。场景持续时间为$t_{\text{END}} = 3800\text{s}$，GNSS信号则在$t_{\text{GNSS}} = 100\text{s}$时丢失。

  风场也按随机方式定义：其两个参数（速度和方位角）在场景开始时（$v_{\text{WIND, INI}}$，$\chi_{\text{WIND, INI}}$）和结束时（$v_{\text{WIND, END}}$，$\chi_{\text{WIND, END}}$）均保持恒定，中间则呈线性过渡。不同仿真运行中，风场变化开始和结束的具体时间也各不相同，且具有随机性。如 [12], 所述，整个场景期间湍流始终较强，但其具体数值也会因每次运行而随机变化。

  温度和气压偏差也会发生类似的线性过渡，它们定义了大气特性 [15], ，因为在飞行开始时（ΔT_{INI}、Δp_{INI}）和结束时（ΔT_{END}、Δp_{END}）均保持不变。与风场不同的是，这两次过渡开始和结束的具体时间不仅是随机的，而且彼此不同。

- 场景#2体现了在全球导航卫星系统信号丢失后继续执行原任务所面临的挑战：在没有大气或风变化的情况下，于相对较短的时间内执行一系列连续转弯机动。与场景#1一样，全球导航卫星系统信号在 $t_{\text{GNSS}} = 100\text{s}$ 时丢失，但场景持续时间更短（$t_{\text{END}} = 500\,\text{s}$）。初始空速和气压高度（$v_{\text{TAS, INI}}$、$H_{\text{P, INI}}$）以随机方式设定，并在整个场景中保持不变；然而，方位角会在初始值和最终值之间总共变化八次，所有中间方位角值以及每次转弯所需的时间，都会在每次执行之间随机变化。尽管采用了与场景#1相同的湍流，风和大气参数（$v_{\text{WIND, INI}}$ $\chi_{\text{WIND, INI}}$ ΔT_{INI} Δp_{INI}）在整个场景#2中保持不变。

8 GNSS拒止条件下的导航系统误差

本节介绍了采用所提出的完全集成视觉惯性导航系统（VINS）执行第 7 节所述两个 GNSS拒止场景的蒙特卡罗仿真所得结果，每个场景均执行一百次。仿真结果与独立惯性系统和视觉系统（INS 和 VNS）的结果，以及第 3 节所述惯性辅助视觉导航系统（IA-VNS）的结果进行了比较。下表包含各种导航系统产生的导航系统误差[20]（NSE）（因此分别记为

约 100 米。仅此一点就表明，现有视觉惯性里程计实现的目标应用与本文的主要关注点存在显著差异，因为在如此短的时间内，可能已经出现累积误差，却完全无法察觉；但这些误差会非线性增长，并可能在飞机长时间飞行时造成显著的位姿误差。[19]转弯时采用的倾侧角为 $\xi_{\text{TURN}} = \pm 10\,^{\circ}$，高度变化采用的气动航迹角为$\gamma_{\text{TAS, CLIMB}} = \pm 2\,^{\circ}$，而空速调整则由控制系统通过设定值变化自动执行。[20]导航系统误差（NSE）是导航系统估计的真实状态 (x) 与其估计值 (ˆx 或 ˚x) 之间的差值。

INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE），即两个 GNSS拒止场景结束时的估计误差均值、标准差和最大值。此外，图中描绘了一百次执行过程中 NSE 均值（实线）和标准差（虚线）随时间的变化。以下几点需要说明：

- 本文讨论了在相同的两个 GNSS拒止场景下使用 INS 获得的结果，详见 [5]。姿态 INSE 不会漂移，其误差受机载传感器质量的限制，因此只要燃料充足，飞机就能持续飞行。垂直位置和地速的 INSE 同样受大气物理学限制，不会漂移；自 GNSS信号丢失以来发生的大气压力偏差和风场变化会影响其估计误差。另一方面，由于对地速进行积分时缺少绝对观测，水平位置 INSE 会发生漂移。因此，在 GNSS拒止条件下，INS 能够成功估计六个 $\mathbb{SE}(3)$ 自由度中的四个（姿态有三个自由度，水平位置有两个，高度有一个）。

- 视觉导航系统（VNS、IA-VNS 和完全集成的 VINS）仅用于降低剩余两个自由度（水平位置）的估计误差。尽管这些系统都会估计完整的六维飞行器位姿，但其姿态和高度估计应仅被视为提高水平位置估计精度的手段，而这正是它们唯一的目标。

- 在相同的两个场景下，通过 VNS 和 IA-VNS 获得的结果将在 [6] 中讨论。尽管 VNSE 在六个自由度上均缓慢漂移，但加入基于惯性导航系统的先验信息后，IA-VNS 能够减小六个维度上的漂移，其水平位置 IA-VNSE 仅为 INSE 的一小部分。与 VNSE 相比，姿态和高度 IA-VNSE 虽有所改善，但在定性上仍不如无漂移的 INSE。

- 本文主要关注水平位置估计方面的改进，即导航滤波器扩展卡尔曼滤波器能够利用 IA-VNS 提供的 VVS观测 来替代 GNSS接收机 提供的观测值。

8.1 机体姿态估计

表 3 展示了两个场景结束时，真实机体姿态 $\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$ 与其估计值 $\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}}$ 或 $\mathring{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}}$之间旋转向量范数对应的导航系统误差。因而，误差可以形式化地写为 $\|\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}}\| = \|\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}} \ominus \mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\|$或 $\|\Delta\mathring{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}}\| = \|\mathring{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}} \ominus \mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\|$，其中 $\ominus$ 表示 $\mathbb{SO}(3)$ 减法算子 [2, 4]。此外，图 9 和图 10 描绘了两个场景中机体姿态导航系统误差随时间的变化。

场景 (t_{END})		NSE	VNSE	IA-VNSE	VINSE
	[°]	$\|\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}\|$	$\|\Delta\mathring{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}\|$	$\|\Delta\mathring{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}\|$	$\|\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}\|$
	mean	**0.158**	**0.296**	**0.218**	**0.100**
#1	std	0.114	0.158	0.103	0.059
	max	0.611	0.791	0.606	0.328
	mean	**0.128**	**0.253**	**0.221**	**0.107**
#2	std	0.078	0.161	0.137	0.068
	max	0.369	0.730	0.788	0.377

表 3：机体姿态 INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE 的最终汇总结果（100 次运行）

- 在 $t_{\mathrm{GNSS}} = 100\mathrm{s}$ 时引入 GNSS拒止条件后经过一个短暂的过渡周期，机体姿态 INSE（蓝线）在两种场景中均不会随时间发生漂移，其范围受机载传感器的性能和惯性导航算法 [5] 的限制。受限的姿态意味着，只要燃料充足，无人机就能在没有 GNSS信号的情况下持续飞行。

- 在这两个场景中，机体姿态的 VNSE（红线）都会随时间略有漂移，其中大部分

误差归因于初始转弯中的滚入和滚出机动动作 [6]。场景#2的大部分时间内误差没有增长，是因为轨迹蜿蜒曲折（参见 [12]），使得先前已绘制地图的地形区域在连续转弯期间重新出现在相机视场中，因此 SVO 将其用作绝对参考，从而实现了比转弯间隔更大时更好的姿态估计。

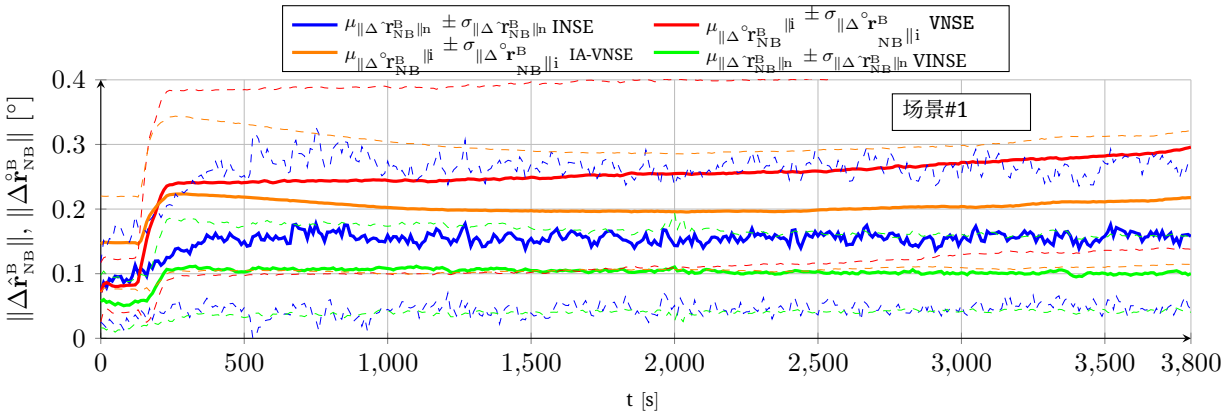


图 9：场景#1（100 次运行）的机体姿态 INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE

• IA-VNSE（橙色线）相较于 VNSE 有显著改进，因为 IA-VNS 成功限制了视觉俯仰角和横滚角估计与惯性导航系统提供的对应估计值之间的偏差（图3） [6]。在场景#1中，改进更为显著，因为 IA-VNS算法在设计上采用缓慢调整，需要较长时间才能逐步纠正偏差 [6]。请注意，两个场景开始时较高的 IA-VNSE 也由 IA-VNS初始化调整所致 [6]。

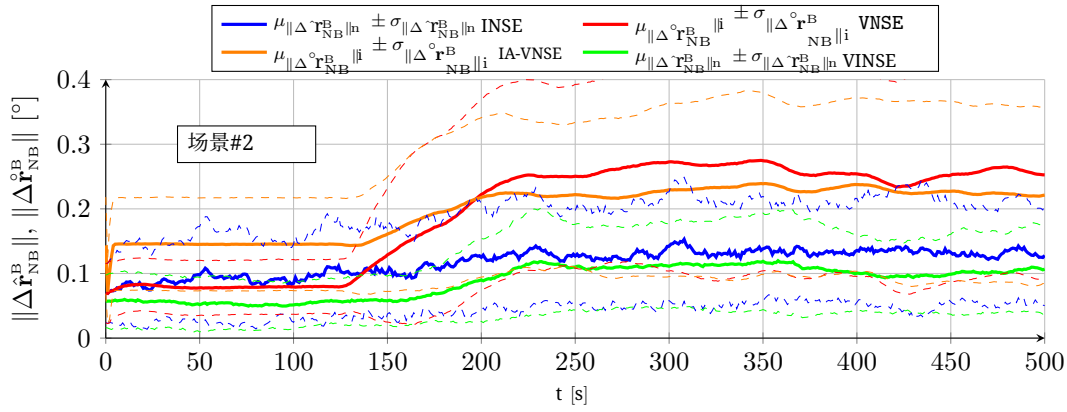


图10：场景#2中的机体姿态INSE、VNSE、IA-VNSE和VINSE（运行100次）

• 在两种场景中，完全集成的 VINSE 相较于 INSE 均持续显著改善了机体姿态估计，这可归因于多种因素。一方面，所提出的导航滤波器成功融合了 VVS 提供的增量水平位移观测值与磁力计提供的方位角，从而获得更准确的偏航估计。此外，EKF观测方程[21] 未作简化，确保改进效果也惠及原本已较准确的惯性俯仰角和倾侧角估计。通过闭环（图 4）并直接将日益准确的机体姿态惯性VA-INS估计用于 IA-VNS 的输入（第 6 节），机体姿态估计得以进一步改善。

[21]请注意，在既没有GNSS接收机也没有VVS观测的情况下，需要简化滤波器观测方程，以保护滤波器免受速度和位置估计不准确所带来的负面影响，正如 [5]中所讨论的。

8.2 垂直位置估计

ˆ ˆ ˚ ˚表4列出了两种场景结束时的垂直位置NSE（$\Delta h = h - h$, $\Delta h = h - h$）；在全部八种情况下（两个场景和四种估计方法），均可认为其无偏或均值为零，因为均值始终显著低于标准差和最大误差值。图11和图12分别展示了几何高度NSE随时间的变化。

场景 (t_{END})		INSE	VNSE	IA-VNSE	VINSE
	[m]	$\Delta\hat{h}$	$\Delta\mathring{h}$	$\Delta\mathring{h}$	$\Delta\hat{h}$
	mean	-4.18	+82.91	+22.86	-3.97
#1	std	**25.78**	**287.58**	**49.17**	**26.12**
	max	-70.49	+838.32	+175.76	-70.47
	mean	+0.76	+3.45	+3.59	+0.74
#2	std	**7.55**	**20.56**	**13.01**	**7.60**
	max	-19.86	+72.69	+71.64	-18.86

表4：垂直位置 INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE 的最终汇总值（100 次运行）

• 几何高度 INSE（蓝线）受 GNSS信号 [5]丢失时刻以来大气压力偏差 [15] 的变化所限制。

• 垂直位置 VNSE（红线）在定性和定量上都显著差于 INSE [6]，，会随时间持续漂移或误差增长；场景#1的误差在逻辑上更大，因为其持续时间长得多。这种漂移大部分源于：将两幅连续图像之间估计出的相对位姿，累加到姿态已存在微小俯仰误差的位姿（即前一幅图像的位姿）上（参见第8.1节的姿态估计分析）。请注意，即使俯仰角偏差只有几分之一度，作用于场景#1中飞行的总距离时，也会导致数百米的垂直误差。如图12所示，场景#2后半段的垂直位置 VNSE 增长较慢，因为如上文第8.1节所述，连续转弯机动会使先前绘制的地形点重新出现在相机视场内，从而阻止姿态误差（包括俯仰误差）继续增长，并间接减缓高度估计误差的增长。

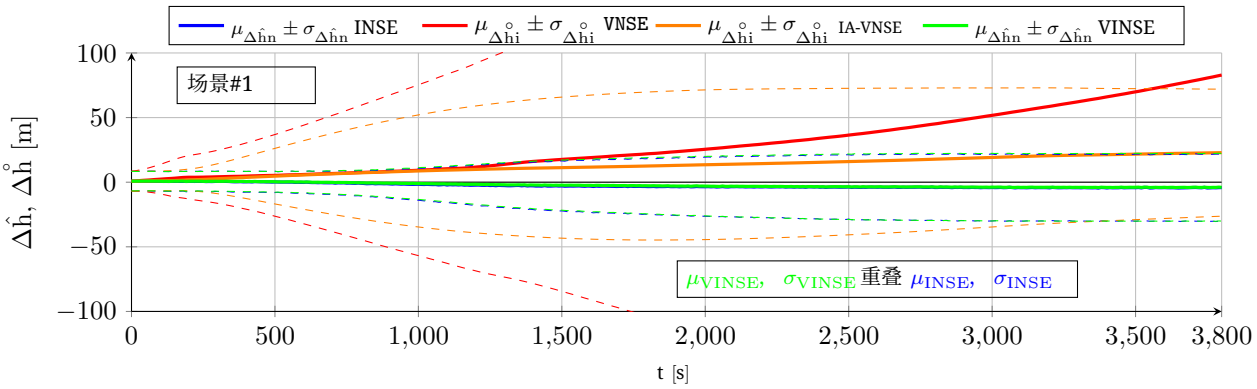


图11：场景#1（100次运行）下的垂直位置 INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE

• 在场景#1中，IA-VNSE（橙色线）相较于VNSE大幅降低，其持续时间更长，使IA-VNS缓慢的姿态调整逐渐累积，并随着时间推移转化为显著的高度修正；对于场景#2 [6]，虽然这种效果不那么明显，但仍然十分显著。尽管无法将其与使用INS获得的垂直位置结果进行比较，但请注意，其主要目的是改善真实地形与SVO生成的地图之间的拟合效果，从而改进水平位置（第8.3节）。

• 完全集成的 VINS（绿色线条）的垂直位置估计精度与

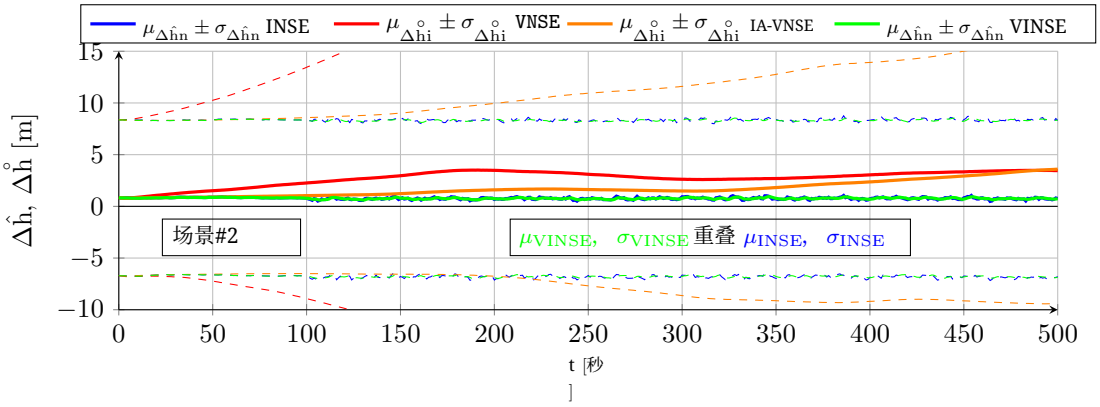


图12：场景#2（100次运行）的垂直位置INSE、VNSE、IA-VNSE和VINSE

INS 几乎相同，因为第 5 节所述的所提出的导航滤波器会在 GNSS信号丢失时冻结气压偏移估计 $\Delta\hat{p}$，这与惯性导航系统滤波器 [5]完全相同。由此得到的高度估计无偏且有界，其误差取决于 GNSS信号丢失以来气压偏移的变化。

8.3 水平位置估计

表5列出了两个场景结束时水平位置导航状态估计误差的均值、标准差和最大值，分别以长度单位表示，以及表示为GNSS拒止条件下飞行总距离的百分比。正如图13和图14所示，所考虑的四种导航系统的水平位置估计能力具有一个共同特点：它们都会随时间出现不受约束的漂移或增长。

场景（t_{END}）		距离	INSE $\Delta\hat{x}_{HOR}$		VNSE $\Delta\mathring{x}_{HOR}$		IA-VNSE $\Delta\mathring{x}_{HOR}$		VINSE $\Delta\hat{x}_{HOR}$	
		[m]	[m]	[%]	[m]	[%]	[m]	[%]	[m]	[%]
#1	mean	107873	7276	**7.10**	4179	**3.82**	488	**0.46**	207	**0.19**
	std	19756	4880	5.69	3308	2.73	350	0.31	185	0.15
	max	172842	25288	32.38	21924	14.22	1957	1.48	1257	1.09
#2	mean	14198	216	**1.52**	251	**1.77**	33	**0.23**	18	**0.13**
	std	1176	119	0.86	210	1.48	26	0.18	9	0.07
	max	18253	586	4.38	954	7.08	130	0.98	43	0.33

表5：最终水平位置 INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE 的汇总（100 次运行）

- 对于独立惯性导航系统（蓝线），漂移是由对有界水平速度估计进行积分造成的，且过程中没有任何绝对观测（通常由 GNSS接收机提供） [5], ，这导致飞机产生的位置误差，使惯性系统无法作为 GNSS拒止导航的有效导航源。请注意，如 [5], 所述，场景#2中的误差（按百分比计）要小得多，因为其中不包含任何风变化，因此其地速（进而水平位置）的估计比其他情况下更准确。

- 水平位置 VNSE（红线）同样表现出持续的误差累积，这是由于连续图像之间的相对位姿不断累积，且缺少绝对参考；此外，视觉里程计初始化期间对飞机相对于地形的高度估计也存在额外误差 [6]。图14显示，在场景后半段，斜率同样出现了前文各节所讨论的减小现象，这是因为场景#2中持续转弯，使先前绘制的地形点重新出现在相机视场内。

- 在两种场景中，IA-VNS（橙色线）的水平位置估计结果均显著优于 VNS：场景#1 的最终误差均值从 3.82% 降至 0.46%，而场景#2 则从

1.77% 降至 0.23%。结果的可重复性也有所提高，两种场景的标准差分别从 2.73% 降至 0.31%，以及从 1.48% 降至 0.18%。如 [6], 所述，之所以能够取得这一改进，是因为第 8.1 节和第 8.2 节讨论的 IA-VNS 姿态和高度估计结果有所改善，使 SVO 能够构建更好的地形地图，从而提高图像中地面地形及其对应三维点与估计的飞行器位姿之间的拟合程度；该位姿指示了拍摄图像时飞机所在的位置和姿态。

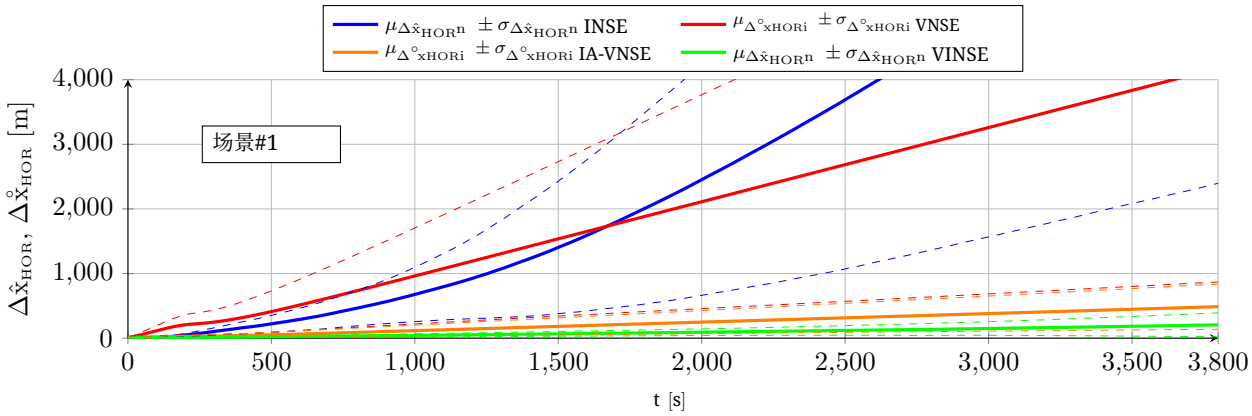


图13：场景#1的水平位置 INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE（100次运行）　　）

• 对于完全融合的 VINS（绿色线条），向所提出的导航滤波器提供 VVS观测（等同于增量辅助视觉导航系统增量位移估计）的目的是在扩展卡尔曼滤波器中采用更精确的观测方程，因为不再需要像惯性导航系统滤波器[5]那样，保护滤波器免受不准确速度和位置值的负面影响。这种改进的设计显著提升了机体姿态（第 8.1 节），因为滤波器能够将增量辅助视觉导航系统的全部水平位置改进纳入扩展卡尔曼滤波器。在正反馈回路中，VINS 随后利用更准确的姿态估计，进一步改进其内部的增量辅助视觉导航系统水平位置估计（图 4）。尽管与前几个阶段遇到的高得多的误差相比，绝对值（长度单位）上的改进很小，但从百分比来看，闭合回路后获得的水平位置改进非常显著：场景#1的最终误差均值从 0.46% 降至 0.19%，场景#2则从 0.23 % 降至 0.13%；相应地，标准差也分别从 0.31% 降至 0.15%，以及从 0.18% 降至 0.07%。

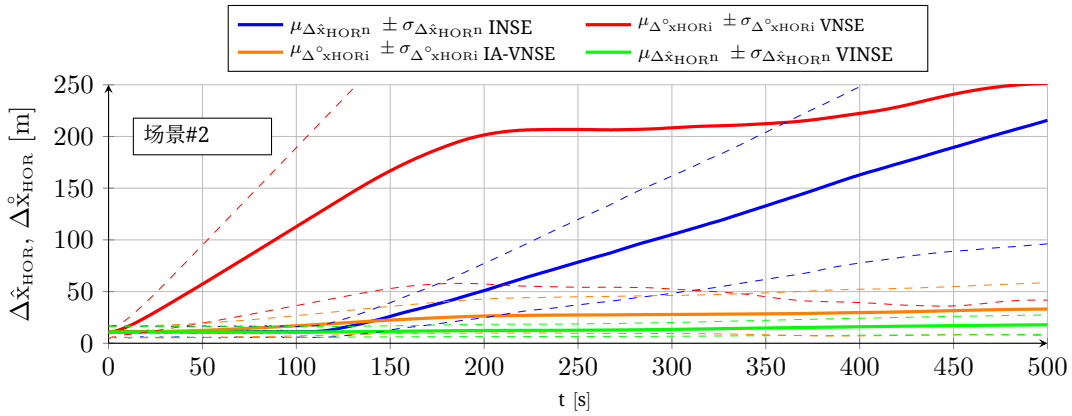


图14：场景#2 中的水平位置 INSE、VNSE、IA-VNSE 和 VINSE（100 次运行）

水平位置误差降低了两个数量级，这意味着，尽管在GNSS拒止条件下，由于缺少绝对位置观测，漂移仍然存在，但水平位置VINSE误差足够低，使自主飞行器即使面对湍流和多变的天气，也能在GNSS拒止条件下抵达远距离备降地点附近。

9 结果总结

本文提出了一种面向在GNSS拒止条件下飞行的固定翼自主无人机的视觉惯性导航系统（VINS），由两种算法（惯性算法和视觉算法）组成，二者同时相互控制并提供辅助。一方面， [6] 中提出的IA-VNS为公开可用的视觉里程计流程（如SVO [7, 8]）提供基于姿态和高度VA-INS估计值的先验信息，使视觉估计不会过度偏离其惯性对应项。其精确的增量位移输出可视为虚拟传感器（VVS）的测量值，并由VA-INS扩展卡尔曼滤波器用作GNSS接收机观测值的替代项，如第5节和第6节所述，从而在不使用GNSS信号的情况下显著改善飞机位置估计。将所提出的算法应用于两个具有代表性、可体现GNSS拒止导航挑战的场景的高保真蒙特卡罗仿真后，得到的结果表明：

- VINS的**机体姿态**估计与独立惯性导航系统 [5],的估计在定性上相似，后者完全依赖惯性滤波器，不使用任何视觉算法。有界的估计（各欧拉角的估计无偏或均值为零，而总误差因其为范数而存在偏差）使飞机能够在GNSS拒止条件下持续飞行，直至燃料耗尽。从定量角度看，在所考虑的两种场景中，VVS观测值及其相关的、更精确的滤波方程显著提高了机体姿态的精度。

- VINS的**垂直位置**估计在定性和定量上均与独立惯性导航系统 [5] 的估计相似，因为二者采用相同的算法：在GNSS信号丢失时冻结大气压力偏差估计。除电离层效应（GNSS信号可用时也会受到该效应影响）外，高度误差取决于进入GNSS拒止条件后气压偏差的变化量；该误差无偏（均值为零），受大气物理学限制，适用于除着陆以外的所有导航用途。

- 与仅依靠惯性滤波器、未使用机载摄像机和视觉算法的 INS [5], 基线相比，VINS**水平位置**估计在量化指标上有显著提升。虽然从定性角度来看，漂移无法被完全消除，因此估计误差没有界限，但在评估的两个场景中，水平位置 VINSE 仅为相应 INSE 的一小部分。漂移的减小意味着，自主飞行器至少能够抵达预定回收地点附近的概率很高；即使它需要在 GNSS拒止条件下长时间飞行，同时在湍流和多变天气中执行不同类型的机动动作（转弯、爬升或下降、空速变化），也可以从那里通过遥控降落。

  这一改进可归因于两个主要的融合步骤：利用准确的机体姿态惯性估计来限制视觉估计中的漂移 [6], ，同时利用由此获得的更准确的水平位置视觉估计，进一步减小惯性姿态误差（第5节和第6节）。因此，该方法形成了一个良性循环，其中 VINS 的两个组件（IA-VNS 和 VA-INS）相互协助并相互控制。

10 结论

这款视觉惯性导航滤波器专为应对自主固定翼飞机在GNSS拒止条件下面临的挑战而设计，它融合了一系列机载传感器与虚拟视觉传感器（VVS）提供的观测值，从而大幅降低水平位置漂移，提高平台成功抵达回收地点附近的可能性，之后即可通过遥控使其着陆。VVS是视觉惯性里程计流水线所生成输出的名称；该流水线依靠机载相机拍摄的地球表面图像以及导航滤波器的输出。该滤波器基于刚体旋转流形，即特殊

正交群 $\mathbb{R}^3$ 实现，该群称为 $\mathbb{SO}(3)$，以便在缺少GNSS接收机提供的绝对位置观测值时，最大限度地减少误差累积。

GNSS拒止导航与视觉惯性里程计

近几年，无人飞行器（UAV）的数量、种类和应用呈指数级增长，预计这一趋势未来仍将持续 [16, 17]。文献 [18]全面回顾了小型无人机导航系统及其面临的问题。全球导航卫星系统（GNSS）的使用是实现自主惯性导航的主要条件之一[22] [19, 20, 21], ，但它也是其主要弱点之一，因为一旦没有 GNSS信号，惯性系统就只能依赖航位推算，从而导致位置漂移，使飞机缓慢但持续地偏离预定航线 [22]。GNSS信号的可用性无法得到保证；文献 [23]全面分析了 GNSS 威胁及信号衰减的原因。

目前，针对自主无人机在 GNSS拒止场景下运行，尚无全面的解决方案。在此类场景中，GNSS信号永久丢失，等同于机体以不受控的方式失去控制。 [5, 24, 25]总结了 GNSS拒止导航所面临的挑战，以及旨在提升其性能的研究工作。彻底消除位置漂移的两种有前景的技术是使用机会信号[23] [26, 27, 28], 和地理配准[24] [29, 30, 31, 32], , 后者也称为图像配准。

视觉里程计（VO）通过使用一台或多台机载摄像机生成的地面图像，在不使用预先录制的图像数据库或任何其他传感器的情况下，根据载具运动在图像中引起的变化，逐步估计载具位姿（位置加姿态） [33, 34, 35, 36, 37]。它需要充足的光照、场景中静态部分占主导、足够的纹理，以及连续图像或帧之间存在场景重叠。现代独立算法，如半直接视觉里程计（SVO） [7, 8], 直接稀疏里程计（DSO） [38], 大规模直接同步定位与建图（ LSD-SLAM） [39], 和大规模基于特征的同步定位与建图（ORB-SLAM）[25] [40, 41, 42] ，具有较强的鲁棒性，且漂移有限。尽管视觉里程计已用于地面机器人、道路车辆以及在室内外飞行的多旋翼飞行器导航，但相对位姿的逐步累积会导致位姿缓慢却无界地漂移，因此不适用于长期自主无人机GNSS拒止导航。

GNSS拒止导航的一条很有前景的研究路径，是将惯性和视觉里程计算法融合到组合导航系统中。尽管这两类研究趋势有时会相互采用对方的技术，但相关文献中仍并存着两种不同的趋势：

- 第一种可能性称为滤波，即将视觉估计作为附加观测值，用于惯性滤波器。在仅进行姿态估计的情况下（暂时忽略平台位置），全球导航卫星系统信号有助于惯性导航系统获得更准确、噪声更小的估计，但并非必不可少，因为无需使用这些信号，也可以仅基于IMU获得无漂移的姿态估计。适用于各类平台且不依赖全球导航卫星系统信号的成熟姿态估计技术包括高斯滤波器 [43], 确定性滤波器 [44], 互补滤波器 [45],和随机滤波器 [46, 47]。在完整位姿估计（包括姿态和位置）的情况下，若缺少GNSS接收机提供的绝对参考，则必须使用通过视觉里程计方法获得的速度或增量位置观测值。文献中包含基于高斯滤波器 [48], 以及较新的非线性确定性滤波器 [49], 随机滤波器 [50], Riccati观测器 [51], 和不变扩展卡尔曼滤波器（或扩展卡尔曼滤波器） [52]的方法。

[22]惯性导航依赖加速度计和陀螺仪提供的测量值，也称为惯性测量单元或 IMU。[23]原本用于其他用途的现有信号，例如电视和蜂窝网络信号，也可用于对飞机位置进行三角测量。[24]通过将飞机观测到的地标或地形特征与预加载的数据进行匹配，可以消除位置漂移。[25]ORB 代表定向 FAST 和旋转 BRIEF，是一种斑点特征。

- 另一种方法是借助惯性导航估计进行视觉里程计优化，从而减小视觉里程计固有的位姿估计漂移。这称为视觉惯性里程计（VIO） [53, 54]„ 还可以结合图像配准，彻底消除剩余的位姿漂移。目前的视觉惯性里程计实现也主要面向地面机器人、多旋翼飞行器和道路车辆。近年来，视觉惯性里程计已显著成熟，
  [53, 54, 55, 56, 57]中提供了详尽的综述。

目前已有多个开源VIO软件包，例如多状态约束卡尔曼滤波器（MSCKF） [58]„开放式关键帧视觉惯性SLA M（OKVIS） [59, 60], 、鲁棒视觉惯性里程计（ROVIO） [61], 、单目视觉惯性导航系统（VINS-Mono） [62], 、与多传感器融合（MSF）结合的SVO[7, 8, 63, 64], ，以及与增量平滑与建图（iSAM）结合的SVO [7, 8, 65, 66]。 [53], 对所有这些开源流程进行了比较，并在 [14]中讨论了它们应用于EuRoC MAV数据集 [13]时的结果。此外，还有其他已发表的视觉惯性里程计流程，其实现并未公开 [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73], ；也有一些仍完全为专有技术。

现有用于融合视觉与惯性测量的 VIO 方案大致可分为两种范式：松耦合流水线分别处理这些测量，从而得到独立的视觉位姿估计和惯性位姿估计，然后将二者融合以获得最终估计；另一方面，紧耦合方法直接根据跟踪的图像特征和 IMU输出计算最终位姿估计 [53, 54]。紧耦合方法通常能够获得更高的精度，因为它们利用了所有可用信息，并借助 IMU积分预测下一帧中的特征位置。松耦合方法虽然复杂度较低且计算效率更高，但由于将视觉与惯性约束解耦而损失了信息，并且无法修正视觉估计器中存在的漂移。

另一种分类方式涉及每次估计所使用的图像数量 [53, 54, 74], ，这与最终精度和计算需求直接相关。批处理算法，也称为平滑器，通过求解大规模非线性优化问题或束调整，同时估计多个状态，从而获得尽可能高的精度。限制所需计算资源的有效方法包括仅使用可用帧的一个子集（称为关键帧[26]）、将跟踪和建图分离到不同线程中，以及开发基于因子图的增量平滑技术 [66]。尽管对于非常短的轨迹，使用所有可用状态（全平滑）有时是可行的，但大多数流水线依赖于滑动窗口或固定滞后平滑，其中优化仅依赖于与最近几个关键帧相关的测量，丢弃旧关键帧以及所有其他未被编录为关键帧的帧。另一方面，滤波算法将估计过程限制在最新状态；它们所需资源较少，但会永久丢弃所有历史信息，并且更难识别和移除离群点，这两点都会导致误差累积或漂移。

B 所需雅可比矩阵

本附录汇总了本文中使用的各种雅可比矩阵，具体如下：

- 大地坐标 $\mathrm{T_E}$ ，$_{\mathrm{GDT}} = [\lambda\ \phi\ \mathrm{h}]_{\mathrm{T}}$ （经度、纬度和高度）的时间导数取决于式（53）中的北东地速度 $\mathrm{v_N}$ ，其中 M 和 N 分别表示 WGS84 椭球体的子午线和卯酉圈曲率半径。由式（ 54 ）给出的相对于 $\mathrm{v_N}$ 的雅可比矩阵因此可直接得到：

$$\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{v_2^N}}{[\mathrm{N}(\varphi)+\mathrm{h}]\cos\varphi} & \dfrac{\mathrm{v_1^N}}{\mathrm{M}(\varphi)+\mathrm{h}} & -\mathrm{v_3^N} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{53}$$

$$\mathbf{J}\begin{matrix}\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{N}}\end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{(\mathrm{N}+\mathrm{h})\cos\varphi} & 0 \\ \dfrac{1}{\mathrm{M}+\mathrm{h}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{54}$$

[26]常用准则　　识别关键帧时，需依据与前一关键帧之间的时间、位置或位姿增量设置阈值　　me.

• 运动角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}} = \dot{\lambda}\ \mathrm{i}_{\mathrm{E}3} - \dot{\varphi}\ \mathrm{i}_{\mathrm{N}2}$ 表示任何物体在相对于地球表面的姿态保持不变的情况下运动时所经历的旋转。这是由地球曲率引起的，其在北东地坐标系中的表达式由（55）给出。其关于 v_{N} 的雅可比矩阵由（56）给出，也很容易求得：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}(\varphi)+\mathrm{h}} & \dfrac{-\mathrm{v}_1^{\mathrm{N}}}{\mathrm{M}(\varphi)+\mathrm{h}} & \dfrac{-\mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}\ \tan\varphi}{\mathrm{N}(\varphi)+\mathrm{h}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{55}$$

$$\mathbf{J}\ \begin{matrix}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{N}}\end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mathrm{N}+\mathrm{h}} & 0 \\ \dfrac{-1}{\mathrm{M}+\mathrm{h}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\tan\varphi}{\mathrm{N}+\mathrm{h}} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{56}$$

• 科里奥利加速度 $\mathrm{a}_{\mathrm{cor}} = 2\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}\ \mathrm{v}$ 是地球角速度与飞机速度之间的双重叉积。地球角速度由地球以恒定速率 ω_{E} 绕 $\mathrm{i}_{\mathrm{E}3}$ 轴旋转产生。其在北东地坐标系中的表达式由式 (57) 给出，由此得到相对于 v_{N} 的雅可比矩阵 (58)：

$$\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} = 2\ \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}}\ \mathbf{v}^{\mathrm{N}} = 2\ \omega_{\mathrm{E}}\ [\mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}\ \sin\varphi \quad (-\mathrm{v}_1^{\mathrm{N}}\ \sin\varphi - \mathrm{v}_3^{\mathrm{N}}\ \cos\varphi) \quad \mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}\ \cos\varphi]^{\mathrm{T}} \tag{57}$$

$$\mathbf{J}\ \begin{matrix}\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{N}}\end{matrix} = 2\ \omega_{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{58}$$

• 李雅可比矩阵 $\mathrm{J}\ \mathcal{R} \oplus \Delta\mathrm{r}\mathcal{R}$ 表示函数 $\mathrm{f}(\mathcal{R}, \Delta\mathrm{r}) = \mathcal{R} \oplus \Delta\mathrm{r}$ 对姿态 $\mathbb{SO}(3)$ $\mathcal{R}$ 与其局部扰动 $\Delta\mathrm{r}$ 的串接关于姿态 $\mathbb{SO}(3)\mathcal{R}$ 的导数；这里，增量分别在各自的局部切空间中表示，即分别在$\mathcal{R}$ 和 $\mathrm{f}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \oplus \Delta\mathrm{r}$ 处的切空间中表示。有兴趣的读者可参阅文献 [2, 4]，了解式 (59) 的推导。其中，$\mathrm{R}(\Delta\mathrm{r})$ 表示与给定旋转向量 $\Delta\mathrm{r}$ 对应的方向余弦矩阵，宽帽符号 $<\hat{\cdot}>$ 表示向量的反对称形式：

$$\mathbf{J}\ \begin{matrix}\mathcal{R} \oplus \Delta\mathbf{r} \\ \mathcal{R}\end{matrix} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\Delta\mathbf{r}) = \mathbf{R}(-\Delta\mathbf{r}) = \mathbf{I}_3 - \frac{\Delta\widehat{\mathbf{r}}}{\|\Delta\mathbf{r}\|}\sin\|\Delta\mathbf{r}\| + \frac{(\Delta\widehat{\mathbf{r}})^2}{\|\Delta\mathbf{r}\|^2}(1-\cos\|\Delta\mathbf{r}\|) \quad \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{59}$$

• 李雅可比矩阵 $\mathrm{J}\ \mathrm{g}_{\mathcal{R}*}(\mathrm{v})\ \mathcal{R}$ 表示函数 $\mathrm{f}(\mathcal{R}, \mathrm{v}) = \mathrm{g}_{\mathcal{R}*}(\mathrm{v})$ 的导数，即当 $\mathcal{R}$ 增量在其局部切空间中观察，而所得 $\mathbb{R}^3$ 向量在其欧几里得空间中观察时，v 根据 $\mathbb{SO}(3)$ 姿态 $\mathcal{R}$ 相对于 $\mathbb{SO}(3)$ 姿态 $\mathcal{R}$ 旋转的导数。$\mathrm{J}\ \mathrm{g}_{\mathcal{R}*}(\mathrm{v})\mathrm{v}$ 是同一函数相对于 $\mathbb{R}^3$ 未旋转向量 v 的导数，其中未旋转向量的增量也在 $\mathbb{R}^3$ 欧几里得空间中观察。关于式 (60) 和 (61) 的推导，参见 [2, 4] ；其中 $\mathrm{R}(\mathcal{R})$ 表示与旋转$\mathcal{R}$对应的方向余弦矩阵：

$$\mathbf{J}\ \begin{matrix}\mathbf{g}_{\mathcal{R}*}(\mathbf{v}) \\ \mathcal{R}\end{matrix} = -\mathbf{R}(\mathcal{R})\ \widehat{\mathbf{v}} \quad \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{60}$$

$$\mathbf{J}\ \begin{matrix}\mathbf{g}_{\mathcal{R}*}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}\end{matrix} = \mathbf{R}(\mathcal{R}) \quad \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{61}$$

• 李雅可比矩阵 $\mathrm{J}\ \mathrm{g}_{\mathcal{R}*}^{-1}(\mathrm{v})\ \mathcal{R}$ 和 $\mathrm{J}\ \mathrm{g}_{\mathcal{R}*}^{-1}(\mathrm{v})\mathrm{v}$ 与前述结果类似，但对应于逆旋转作用 $\mathrm{f}(\mathcal{R}, \mathrm{v}) = \mathrm{g}_{\mathcal{R}*}^{-1}(\mathrm{v})$。表达式（62）和（63）也可在 [2, 4], 中得到，其中楔形符号$<\cdot^{\wedge}>$ 表示向量的反对称形式：

$$\mathbf{J}\ \begin{matrix}\mathbf{g}_{\mathcal{R}*}^{-1}(\mathbf{v}) \\ \mathcal{R}\end{matrix} = \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\mathcal{R})\ \mathbf{v}\right)^{\wedge} \quad \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{62}$$

$$\mathbf{J}\ \begin{matrix}\mathbf{g}_{\mathcal{R}*}^{-1}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}\end{matrix} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\mathcal{R}) \quad \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{63}$$

• 李雅可比矩阵 $\mathbf{J}\,\mathbf{Ad}_{\mathcal{R}}^{-1}(\boldsymbol{\omega})$ $\mathcal{R}$ 表示函数 $\mathbf{f}(\mathcal{R},\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{Ad}_{\mathcal{R}}^{-1}(\boldsymbol{\omega})$ 的导数，即根据 $\mathbb{SO}(3)$ 姿态 $\mathcal{R}$， $\boldsymbol{\omega}$ 的伴随的逆相对于 $\mathbb{SO}(3)$ 姿态 $\mathcal{R}$的导数；其中， $\mathcal{R}$ 增量是在其局部切空间中表示的，而所得 $\mathbb{R}^3$ 向量则是在其欧几里得空间中表示的。$\mathbf{J}\,\mathbf{Ad}_{\mathcal{R}}^{-1}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}$ 是同一函数相对于 $\mathbb{R}^3$ 原始向量$\boldsymbol{\omega}$的导数。关于（64）和（65）的推导，请参阅 [2, 4]：

$$\mathbf{J}\,\underset{\mathcal{R}}{\mathbf{Ad}}_{\mathcal{R}}^{-1}(\boldsymbol{\omega}) = \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\mathcal{R})\,\boldsymbol{\omega}\right)^{\wedge} \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{64}$$

$$\mathbf{J}\,\underset{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{Ad}}_{\mathcal{R}}^{-1}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3} \tag{65}$$

参考文献

[1] E. Gallo，《GNSS拒止条件下自主低尺寸、重量和功耗固定翼无人机的高保真飞行仿真》。https://github.com/edugallogithub/gnssdenied_飞行_仿真，2022年。C++开源代码。

[2] E. Gallo，《刚体旋转与运动的 SO(3) 和 SE(3) 李代数及其在离散积分、梯度下降优化和状态估计中的应用》，2022年。arXiv:2205.12572v1[cs.RO], https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.12572。

[3] J. Sola，《误差状态卡尔曼滤波器的四元数运动学》，2017年。arXiv:1711.02508v1 [cs.RO], https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.02508。

[4]J. Sola、J. Deray 和 D. Atchuthan，《机器人学中的状态估计微李理论》，2018年。arXiv:1812.01537v9 [cs.RO],https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.01537。

[5]E. Gallo 和 A. Barrientos，《固定翼自主无人飞行器的 GNSS拒止条件下的惯性导航误差削减》，《航空航天科学与技术》，2021年。https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107237。

[6] E. Gallo 和 A. Barrientos，《借助受比例-积分启发的先验信息的自主无人机 GNSS拒止条件下的半直接视觉导航》，《航空航天》，2023年。https://doi.org/10.3390/aerospace10030220。

[7]C. Forster、M. Pizzoli 和 D. Scaramuzza，《SVO：快速半直接单目视觉里程计》，载于 *IEEE*机器人与自动化国际会议，2014年。https://doi.org/10.1109/ICRA.2014.6906584。

[8]C. Forster、Z. Zhang、M. Gassner、M. Werlberger 和 D. Scaramuzza，《SVO：用于单目和多相机系统的半直接视觉里程计》，*IEEE*机器人学汇刊，2016年。https://doi.org/10.1109/TRO.2016.2623335。

[9] E. Gallo 和 A. Barrientos，《固定翼自主飞行器上机载传感器和相机的可定制随机高保真模型》，传感器，2022年。https://doi.org/10.3390/s22155518。

[10] D. Simon，《最优状态估计》。约翰·威立父子出版公司，2006年。ISBN 0-471-70858-5。

[11] J. L. Blanco，《SE(3)变换参数化与流形上优化教程》，2020年。arXiv:2103.15980v2 [cs.RO], https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.15980。

[12]E. Gallo，《用于测试固定翼自主GNSS拒止导航算法的随机高保真仿真与场景》，2021年。arXiv:2102.00883v3 [cs.RO],https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.00883。

[13]M. Burri、J. Nikolic、P. Gohl、T. Schneider、J. Rehder、S. Omari、M. W. Achtelik 和 R. Siegwart，《EuRoC MAV数据集》，《*IEEE*国际机器人研究期刊》，2016年。https://doi.org/10.1177/0278364915620033。

[14]J. Delmerico 和 D. Scaramuzza，《飞行机器人单目视觉惯性里程计算法的基准比较》，*IEEE*机器人与自动化国际会议，2018年。https://doi.org/10.1109/ICRA.2018.8460664。[15] E. Gallo，《用于飞机轨迹预测和飞行仿真的准静态大气模型》，2021年。arXiv:2101.10744v1 [eess.SY]，https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.10744。[16] M. Hassanalian 和 A. Abdelkefi，《无人机的分类、应用与设计挑战：综述》，《航空航天科学进展》，2017年。https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2017.04.003。

[17] H. Shakhatreh、A. H. Sawalmeh、A. Al-Fuqaha、Z. Dou、E. Almaita、I. Khalil、N. S. Othman、A. Khreishah 和 M. Guizani，“无人驾驶飞行器（无人飞行器）：民用应用与关键研究挑战综述”，《*IEEE Access*》，2019年。https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2909530。

[18] S. Bijjahalli、R. Sabatini 和 A. Gardi，“小型无人驾驶航空器系统的智能自主导航系统进展”，《航空航天科学进展》，2020年。https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100617。

[19] J. A. Farrell，辅助导航：全球定位系统与高频传感器。麦格劳-希尔，电子工程系列，2008年。

[20] P. D. Groves，《全球导航卫星系统、惯性导航与多传感器组合导航系统原理》。Artech House，全球导航卫星系统技术与应用系列，2008年。

[21] A. B. Chatfield，《高精度惯性导航基础》。美国航空航天学会，《航天与航空进展》第174卷，1997年。

[22]M. Elbanhawi、A. Mohamed、R. Clothier、J. Palmer、M. Simic 和 S. Watkins，“实现自主微型航空器运行的技术”，《航空航天科学进展》，2017年。https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2017.03.002。

[23]R. Sabatini、T. Moore 和 S. Ramasamy，“航空领域全球导航卫星系统性能分析与增强策略”，《航空航天科学进展》，2017年。https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2017.10.002。

[24] C. Tippitt、A. Schultz 和 W. Procino，《车辆导航：通过启用全球定位系统和全球定位系统拒止环境实现自主》，技术现状报告 DSIAC-2020-1328，国防系统信息分析中心，2020年12月。[25] N. Gyagenda、J. V. Hatilima、H. Roth 和 V. Zhmud，《全球导航卫星系统无关的无人机导航技术综述》，《机器人与自主系统》，2022年。https://doi.org/10.1016/j.robot.2022.104069。[26] R. Kapoor、S. Ramasamy、A. Gardi 和 R. Sabatini，《城市环境中利用机会信号进行无人机导航：综述》，《能源学报》，2017年。https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.03.156。[27] A. Coluccia、F. Ricciato 和 G. Ricci，《基于机会信号的定位》，《*IEEE*通信快报》，2014年。https://doi.org/10.1109/LCOMM.2013.123013.132297。[28]S. T. Goh、O. Abdelkhalik 和 S. A. Zekavat，《用于无人机导航的加权测量融合卡尔曼滤波器实现》，《航空航天科学与技术》，2013年。https://doi.org/10.1016/j.ast.2012.11.012。[29] A. Couturier 和 M. A. Akhloufi，《无人机绝对视觉定位综述》，《机器人与自主系统》，2020年。https://doi.org/10.1016/j.robot.2020.103666。[30]H. Goforth 和 S. Lucey，《利用预先存在的卫星影像进行全球定位系统拒止环境下的无人机定位》，载于 *IEEE*机器人与自动化国际会议，IEEE，2019年。https://doi.org/10.1109/ICRA.2019.8793558。

[31] N. Ziaei, 《利用图像配准耦合模式对飞机进行地理定位以实现自主导航》，2019年。arXiv:1909.02875v1 [eess.IV]，https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.02875。

[32]T. Wang, 《利用合成视觉在全球定位系统拒止地形环境中增强无人机导航》，爱荷华州立大学研究生论文与学位论文，*15835*，2018年。https://doi.org/10.31274/etd-180810-5462。

[33] D. Scaramuzza 和 F. Fraundorfer, 《视觉里程计（第一部分）：前三十年与基础知识》，*IEEE*《机器人与自动化杂志》，2011年。https://doi.org/10.1109/MRA.2011.943233。[34] F. Fraundorfer 和 D. Scaramuzza, 《视觉里程计（第二部分）：匹配、鲁棒性、优化与应用》，*IEEE*《机器人与自动化杂志》，2012年。https://doi.org/10.1109/MRA.2012.2182810。

[35] D. Scaramuzza, 《视觉里程计教程》。苏黎世大学机器人与感知组，2012年。无可用 DOI。

[36] D. Scaramuzza，“视觉里程计与SLAM：过去、现在与鲁棒感知时代。”机器人与感知组，苏黎世大学，2017年。无可用 DOI。

[37] C. Cadena、L. Carlone、H. Carrillo、Y. Latif、D. Scaramuzza、J. Neira、I. Reid 和 J. J. Leonard，“同步定位与地图构建的过去、现在与未来：迈向鲁棒感知时代”，*IEEE*机器人学汇刊，2016年。https://doi.org/10.1109/TRO.2016.2624754。

[38] J. Engel、V. Koltun 和 D. Cremers，“直接稀疏里程计”，*IEEE*《模式分析与机器智能汇刊》，2018年。https://doi.org/10.1109/TPAMI.2017.2658577。

[39] J. Engel、T. Schops 和 D. Cremers，“LSD-SLAM：大规模直接单目同步定位与地图构建”，欧洲计算机视觉会议，2014年。https://doi.org/10.1007/978-3-319-10605-2_54。

[40] R. Mur-Artal、J. M. M. Montiel 和 J. D. Tardos, 《ORB-SLAM：一种通用且准确的单目同步定位与地图构建系统》，*IEEE*机器人学汇刊，2015年。https://doi.org/10.1109/TRO.2015.2463671。

[41] R. Mur-Artal 和 J. D. Tardos, 《ORB-SLAM2：一种用于单目、双目和 RGB-D 相机的开源同步定位与地图构建系统》，*IEEE*机器人学汇刊，2017年。https://doi.org/10.1109/TRO.2017.2705103。

[42] R. Mur-Artal, 《结合地点识别的实时精确视觉SLAM》。博士论文，萨拉戈萨大学，2017年。https://doi.org/10.1109/TRO.2017.2705103。

[43] J. L. Crassidis 和 F. L. Markley, 《用于航天器姿态估计的无迹滤波》，《制导、控制与动力学杂志》，2003年。https://doi.org/10.2514/2.5102。

[44] H. F. Grip、T. I. Fossen、T. A. Johansen 和 A. Saberi, 《使用有偏陀螺仪和矢量测量进行姿态估计：参考矢量随时间变化》，*IEEE*《自动控制汇刊》，2012年。https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2173415。

[45]R. Kottah、P. Narkhede、V. Kumar、V. Karar 和 S. Poddar, 《用于姿态估计的多模型自适应互补滤波器》，《航空航天科学与技术》，2017年。https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.10.010。[46]H. A. Hashim, 《特殊正交群 SO(3) 上非线性随机估计器的系统收敛性》，《国际鲁棒与非线性控制杂志》，2020年。https://doi.org/10.1002/rnc.4971。[47] H. A. Hashim、L. J. Brown 和 K. McIsaac, 《特殊正交群 SO(3) 上的非线性随机姿态滤波器：伊藤与斯特拉托诺维奇》，*IEEE*《系统、人类与控制论汇刊》，2019年。https://doi.org/10.1109/TSMC.2018.2870290。[48] P. Batista、C. Silvestre 和 P. Oliveira, 《导航系统中线性运动量的可观测性》，《系统与控制快报》，2011年。https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2010.11.002。

[49] H. A. Hashim、L. J. Brown 和 K. McIsaac，《特殊欧氏群 SE(3) 上具有瞬态与稳态性能保证的非线性位姿滤波器》，*IEEE*《系统、人类与控制论汇刊》，2019年。https://doi.org/10.1109/TSMC.2019.2920114。

[50]H. A. Hashim，《拒止环境下的GPS导航：使用非线性随机观测器进行姿态、位置、线速度和重力估计》，*2021*年美国控制会议论文集，2021年。https://doi.org/10.23919/ACC50511.2021.9482995.

[51] M.-D. Hua 和 G. Allibert，《利用地标位置和IMU测量值进行位姿、线速度和重力方向估计的Riccati观测器设计》，*IEEE*控制技术与应用会议，2018年。https://doi.org/10.1109/CCTA.2018.8511387.[52] A. Barrau 和 S. Bonnabel，《不变扩展卡尔曼滤波器作为稳定观测器》，*IEEE*自动控制汇刊，2017年。https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2594085.

[53] D. Scaramuzza 和 Z. Zhang，《空中机器人的视觉惯性里程计》，2019年。arXiv:1906.03289v2[cs.RO], https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.03289。

[54] G. Huang，《视觉惯性导航：简明综述》，2019年。arXiv:1906.02650v1 [cs.RO]，https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.02650。

[55] L. von Stumberg、V. Usenko 和 D. Cremers，《第 7 章——直接视觉惯性里程计综述与定量评估》，载于 多模态场景理解 （M. Y. Yang、B. Rosenhahn 和 V. Murino 编），Academic Press，2019年。https://doi.org/10.1016/B978-0-12-817358-9.00013-5。

[56] X. Feng、Y. Jiang、X. Yang、M. Du 和 X. Li，《计算机视觉算法与硬件实现：综述》，积分：《超大规模集成电路》期刊，2019年。https://doi.org/10.1016/j.vlsi.2019.07.005。

[57]A. Al-Kaff、D. Martin、F. Garcia、A. de la Escalera 和 J. Maria，《无人驾驶飞行器计算机视觉算法及应用综述》，《专家系统与应用》，2017年。https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.09.033。

[58]A. I. Mourikis 和 S. I. Roumeliotis，《用于视觉辅助惯性导航的多状态约束卡尔曼滤波器》，*2007*年*IEEE*机器人与自动化国际会议论文集，2007年。https://doi.org/10.1109/ROBOT.2007.364024。

[59]S. Leutenegger、P. Furgale、V. Rabaud、M. Chli、K. Konolige 和 R. Siegwart，《使用非线性优化的基于关键帧的视觉惯性同步定位与地图构建》，机器人学：科学与系统，2013年。https://doi.org/10.3929/ethz-b-000236658.

[60]S. Leutenegger、S. Lynen、M. Bosse、R. Siegwart 和 P. Furgale，“基于关键帧的视觉惯性同步定位与地图构建：采用非线性优化”，《国际机器人学研究期刊》，2015年。https://doi.org/10.1177/0278364914554813。[61]M. Bloesch、S. Omari、M. Hutter 和 R. Siegwart，“采用基于直接扩展卡尔曼滤波器的方法实现鲁棒视觉惯性里程计”，智能机器人系统国际会议，2015年。https://doi.org/10.3929/ethz-a-010566547。[62] T. Qin、P. Li 和 S. Shen，“VINS-Mono：一种鲁棒且通用的单目视觉惯性状态估计器”，*IEEE*机器人学汇刊，2018年。https://doi.org/10.1109/TRO.2018.2853729。[63] S. Lynen、M. W. Achtelik、S. Weiss、M. Chli 和 R. Siegwart，“应用于微型飞行器导航的鲁棒模块化多传感器融合方法”，智能机器人系统国际会议，2013年。https://doi.org/10.1109/IROS.2013.6696917。[64] M. Faessler、F. Fontana、C. Forster、E. Mueggler、M. Pizzoli 和 D. Scaramuzza，“四旋翼微型飞行器的自主视觉飞行与实时稠密三维建图”，《野外机器人学期刊》，2015年。https://doi.org/10.1002/rob.21581。

[65] C. Forster、L. Carlone、F. Dellaert 和 D. Scaramuzza，“关于实时视觉惯性里程计的流形预积分”，*IEEE*机器人学汇刊，2017年。https://doi.org/10.1109/TRO.2016.2597321。[66]M. Kaess、H. Johannsson、R. Roberts、V. Ila、J. Leonard 和 F. Dellaert，“iSAM2：使用贝叶斯树进行增量平滑与建图”，《国际机器人学研究期刊》，2012年。https://doi.org/10.1177/0278364911430419。[67] R. Mur-Artal 和 J. M. M. Montiel，“采用地图复用的视觉惯性单目SLAM”，*IEEE*机器人学与自动化快报，2017年。https://doi.org/10.1109/LRA.2017.2653359。[68]R. Clark、S. Wang、H. Wen、A. Markham 和 N. Trigoni，“VINet：将视觉惯性里程计视为序列到序列学习问题”，*AAAI*人工智能会议论文集，2017年。https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/11215。[69] M. K. Paul、K. Wu、J. A. Hesch、E. D. Nerurkar 和 S. I. Roumeliotis，“紧耦合单目、双目和立体VINS的比较分析”，*IEEE*机器人与自动化国际会议，2017年。https://doi.org/10.1109/ICRA.2017.7989022。[70] Y. Song、S. Nuske 和 S. Scherer，“基于远距离立体视觉、IMU、全球定位系统和气压传感器的多传感器融合MAV状态估计”，传感器，2017年。https://doi.org/10.3390/s17010011。[71]A. Solin、S. Cortes、E. Rahtu 和 J. Kannala，“PIVO：用于遮挡鲁棒导航的概率惯性视觉里程计”，*IEEE*冬季计算机视觉应用会议，2018年。https://doi.org/10.1109/WACV.2018.00073。[72]S. Houben、J. Quenzel、N. Krombach 和 S. Behnke，“面向微型飞行器的高效多相机视觉惯性SLAM”，*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议，2016年。https://doi.org/10.1109/IROS.2016.7759261。[73]K. Eckenhoff、P. Geneva 和 G. Huang，“采用解析预积分的直接视觉惯性导航”，*IEEE*机器人与自动化国际会议，2017年。https://doi.org/10.1109/ICRA.2017.7989171。[74] H. Strasdat、J. M. M. Montiel 和 A. J. Davison，“实时单目SLAM：为何采用滤波器？”，*IEEE*机器人与自动化国际会议，2010年。https://doi.org/10.1109/ROBOT.2010.5509636。