arXiv:2303.03815v1 [physics.flu-dyn] 7 Mar 2023

空穴惯性塌缩后喷出的射流

Jos´e M. Gordillo* 和 Francisco J. Blanco–Rodr´ıguez *Área de Mecánica de Fluidos, Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos,Universidad de Sevilla, Avenida de los Descubrimientos s/n 41092, Sevilla, Spain*（日期：2023年3月8日）

受 Gordillo 和 Blanco-Rodriguez 的研究结果启发——“气泡破裂射流由气体空穴的纯惯性塌缩驱动”， *Phys. Rev. Lett., Submitted* (2023) [1], 该研究发现，气泡破裂射流由纯惯性机制驱动。本文研究了在远场边界条件的作用下，通用形状的气体空穴内爆所产生射流的动力学；该边界条件规定单位长度流量 q_∞ 随时间保持恒定。我们结合理论和数值模拟，首先分析半开角为 β 的圆锥形气泡，且 q_∞ 固定为常数的情形。结果发现，这类射流趋向于一种仅依赖 β 的纯惯性自相似方程解；在极限 $\beta \ll 1$ 下，射流宽度和速度分别为 $r_{jet} \approx 2.25 \tan\beta\sqrt{q_\infty \tau}$ 和 $v_{jet} \approx 3q_\infty/(2\tan\beta\sqrt{q_\infty\tau})$，其中 τ 表示射流喷出后的无量纲时间。对于对称面处无量纲曲率半径为 r_c 的抛物线形空腔，我们的理论预测 $r_{jet} \propto (2r_c)^{-1/2}(q_\infty\tau)^{3/4}$ 和 $v_{jet} \propto q_\infty (2r_c)^{1/2}(q_\infty\tau)^{-3/4}$，这一结果也与数值模拟吻合良好。本研究结果或可用于描述气泡在壁面附近空化后产生的极高速射流（速度最高可达 1000 m s^{-1}），并量化所谓的火箭筒效应。

* jgordill@us.es

I. 引言

众所周知，气泡内爆后产生的这类高速液体射流广泛应用于表面清洁， [2], 并在一定程度上导致空化流中的结构损伤[3] ，同时在污染物扩散中发挥关键作用 [4, 5]。这些高速射流还可应用于医学，例如用于无针药物注射系统， [6] 并且通常可观察到它们由液滴[7–10] 或固体 [11, 12] 撞击气液界面后产生。据我们所知，尽管近期已有许多关于这一主题的研究，但目前仍没有公认的理论框架能够预测空腔内爆后产生的各种快速、细长惯性液体射流的动力学。因此，本文的主要目的是提出一种理论，用以描述细长空腔塌缩后喷出射流的动力学，并将理论预测与使用GERRIS [13, 14] 进行的数值模拟结果进行比较。

空腔内爆后产生的射流速度很大程度上取决于射流喷出的界面的初始几何形状，因此有理由将射流至少分为两类：i）在初始为球形表面的轴处产生的射流；ii）在截锥形表面底部产生的射流。例如，[15, 16], 所报告的射流属于从球冠底部喷出的射流类型；这类射流可根据界面处初始的近轴非均匀径向速度场进行分析 [17] ，并可用于喷墨打印等应用[18, 19] 。边界附近气泡空化产生的射流[20, 21], 也属于同一类型，前提是所谓的离壁参数——即气泡中心与边界之间的初始距离和气泡最大半径之比——为 1 左右或更大。事实上，当离壁参数为 $\lesssim O(0.1)$时， [3] 在数值模拟中保留可压缩性效应并给出了数值结果，表明刚性边界附近空化气泡产生的射流并非从初始平滑、局部呈球形的球冠喷出，而是从截锥形界面的底部喷出。随后，[22], 通过实验验证了这一数值结果：对于从球冠产生的空化气泡射流，即离壁参数约为 1 的情况，测得的速度约为 $\sim 100\ m/s$ ；而对于从截锥形气泡底部喷出的射流，测得的速度要大得多，约为 $\sim 1000\ m/s$。这一结果与[3]最初报告的发现一致。此外， [22] 发现，从局部呈圆锥形的气泡底部喷出的射流，是平行于边界的柱状流向对称轴汇聚的结果。受此启发，他们还报告了忽略可压缩性效应的简化数值模拟结果，所得结果与他们自己的实验测量结果一致。

本文的主要目的是从数值和理论两方面描述所谓的“圆锥形射流”，即从截锥形界面底部喷出的射流。与从球冠喷出的射流相比，圆锥形射流速度更快；它们不仅出现在离壁参数较小时空化气泡的塌陷过程中，也出现在其他类型的自然流动中，例如界面处气泡破裂[1, 10, 23–25] ，或液滴撞击液池之后 [7–10]。事实上，在后两种情形中，射流喷出之前，沿界面朝空腔底部传播的毛细波会使原本呈球形的气泡变形成截锥[25]。此外，本文还将对圆锥形空穴塌陷的分析推广至形状一般的空穴，并特别关注抛物线形空穴，因为固体撞击自由表面时形成的空腔正是这种几何形状 [11, 12]。

本文结构如下：在 §II 中，我们提出一种理论，用以描述由恒定单位长度流量驱动塌陷的细长空腔所产生的射流；在本节中，我们还将理论预测与附录 A中所述数值模拟的结果进行比较。结论见 §III。

II. 塌陷空腔射流喷射理论

这里考虑一个特征长度为 L_c 的轴对称气泡，其中充满密度为 ρ_g 、黏度为μ_g 的气体。该气泡在密度为 ρ、黏度为 μ 、界面张力系数为 σ 的液体以特征速度 V_c流向对称轴的作用下塌陷。取 L_c、 L_c/V_c 和 ρV_c^2分别为长度、时间和压力的特征尺度，所研究的物理情形可用以下无量纲参数描述：

$$We = \frac{\rho V_c^2 L_c}{\sigma}, \quad Re = \frac{\rho V_c L_c}{\mu}, \quad m = \frac{\mu_g}{\mu}, \quad \Lambda = \frac{\rho_g}{\rho}. \tag{1}$$

从现在起，无量纲变量将用小写字母表示，以区别于用大写字母表示的有量纲对应变量； r 和 z 分别表示柱坐标系中的无量纲径向和轴向

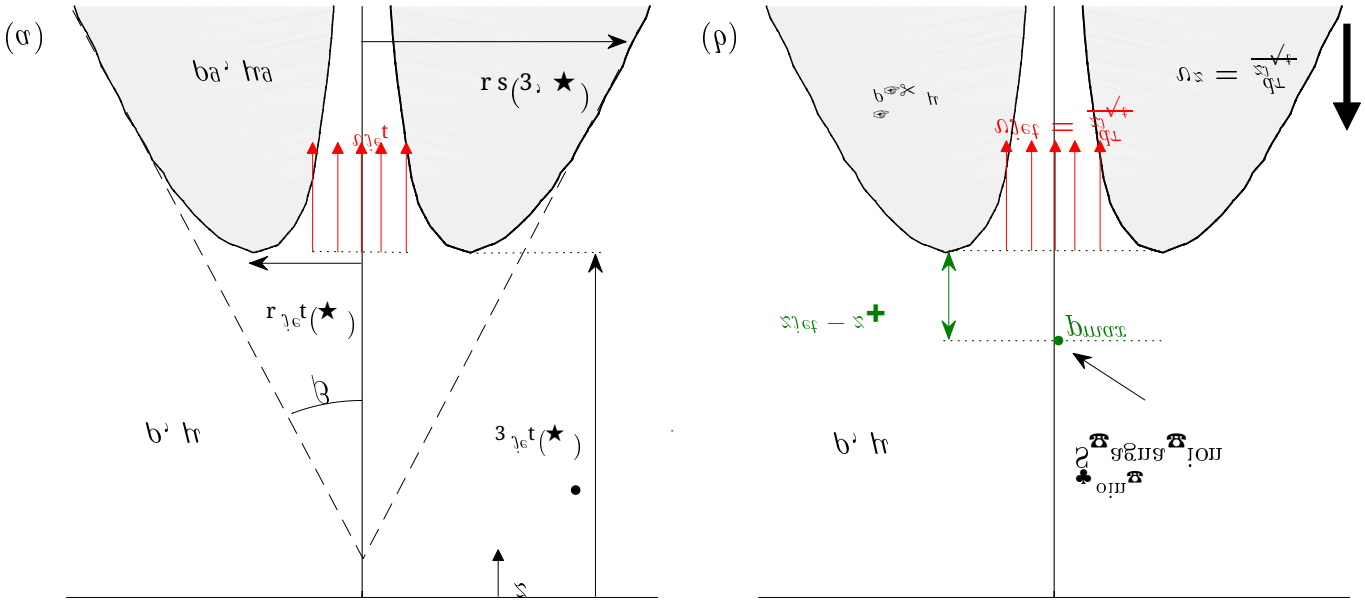

图 1. (a) 示意图说明了用于分析射流喷射过程的时间依赖变量的定义：界面位于 $r = r_s(z,\tau)$ 处，射流底部是界面上坐标为 $r = r_{jet}(\tau)$，$z = z_{jet}(\tau)$ 的点，其中$\partial r_s/\partial z = 0$；射流速度定义为 $v_{jet}(\tau) = v_z(r = 0, z = z_{jet} + \alpha r_{jet})$，其中 $\alpha \sim 1$，$z = z_{jet}(\tau) + \alpha r_{jet}(\tau)$ 是射流内的垂直坐标，在该处压力近似恢复到气体的压力。(b) 在以速度 $dz_{jet}/d\tau$ 垂直移动的参考系中流动的示意图。在此参考系中，流动存在一个驻点，距射流底部 $z_{jet} - z_s \propto r_{jet}(\tau)$，该处压力最大，等于 $p_{max}(\tau)$。

空间坐标，τ 表示射流喷出后的无量纲时间。在 [1]中，$L_c = R_b$，其中 R_b 表示球形气泡的初始半径，而 $V_c = \sqrt{\sigma/(\rho R_b)}$ 即所谓的毛细速度。因此，对于 [1]中所研究的气泡破裂射流，$We = 1$ 和 $Re = Oh^{-1}$，其中 $Oh = \mu/\sqrt{\rho R_b \sigma}$ 为所谓的奥内佐格数；若要从塌陷气泡底部喷出射流 [26]，则必须满足 $Oh \ll 1$。[1] 中的结果表明，两个时间依赖函数$z_{jet}(\tau)$ 和 $r_{jet}(\tau)$ 在描述射流动力学方面发挥着重要作用，它们刻画了方程 $r - r_s(z,\tau) = 0$ 中界面的位置（见图 1）。因此，本文的主要目的将是在此处关注的极限 $\tau \ll 1$下，为$r_{jet}(\tau)$ 和 $z_{jet}(\tau)$ 求得解析表达式。

由于 [1] 中的结果表明，当圆锥形空腔的塌陷由远场边界条件驱动，且该边界条件表示 $r_{jet} \propto \sqrt{q_\infty \tau}$和 $v_{jet} \propto \sqrt{q_\infty/\tau}$ 随时间保持不变时，表征射流底部流动的局部雷诺数 q_∞，将随时间保持不变，而局部韦伯数将在 $Re_l = Oh^{-1} v_{jet} r_{jet} \propto Oh^{-1}$时发散，在本文关注的极限 $We_l = v_{jet}^2 r_{jet} \propto \tau^{-1/2} \gg 1$下 $\tau \ll 1$。因此，只要气泡尺度上的雷诺数足够大，即对于[1]中所考虑的情形，若 $Oh^{-1} \gg 1$，则可以忽略毛细效应和黏性效应；附录 [1], 中给出的数值结果也进一步支持这一近似。A此外，由于我们不考虑气体对射流喷射过程的影响，接下来推导的解将不依赖于式（1）中定义的任何无量纲参数；然而，正如下文所示，我们的结果将强烈依赖于单位长度无量纲流量 q_∞ 以及空腔的初始几何形状，即函数 $r_s(z,\ \tau = 0)$。

中已解释 [1]，从物理角度来看，指向对称轴的单位长度径向流量之所以随时间保持近似不变，是因为液体惯性确保了在射流出现后的极短时刻内，该量不会发生明显变化[1, 10, 12]。随后，在圆锥形空腔塌陷的极短瞬态过程中 $\tau \ll 1$，流量 q_∞充当驱动射流喷射过程的远场边界条件[1]。单位长度流量的恒定迫使圆锥形空腔壁面向内运动，因此，射流的喷出仅仅是质量守恒的结果[1, 10, 25]。

因此，鉴于上文各段中的讨论，可以忽略黏性效应和毛细效应。本文考虑不可压缩流动且涡量为零的情况，从而能够用速度势表示速度场 ϕ，即 $\mathbf{v} = \nabla\phi$，其中 ϕ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$。随后，我们分析短时间内 $\tau \ll 1$ 关于平面 $z = 0$ 对称的轴对称空腔的内爆，该空腔

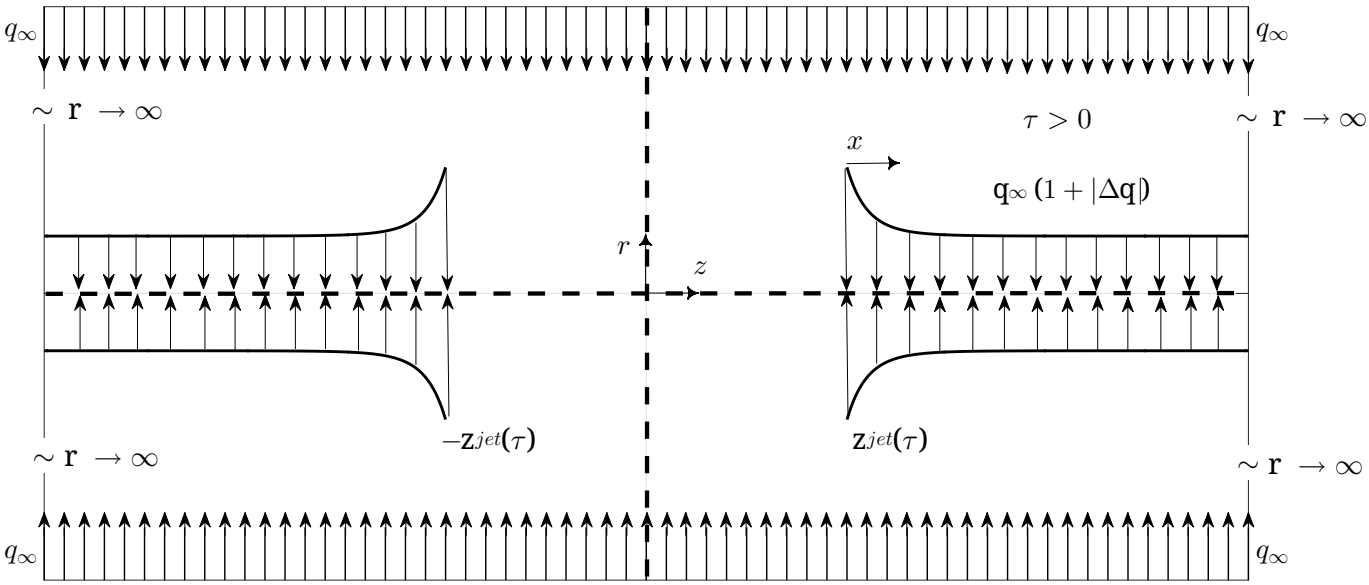

图2. 示意图说明，在时刻 $\tau \ll 1$，满足方程（2）—（3）中边界条件的无旋速度场，是一条沿轴线延伸、强度为 $q_\infty(1+|\Delta\, q(z,\tau)|)$的汇线，位于区域 $|z| > z_{jet}(\tau)$内，其中$q_\infty \Delta\, q(z,\tau)$，使得 $\partial\phi/\partial z = 0$在 $r = r_s(z,\tau)$处成立，因为 $r_s \ll 1$，见方程（4）—（7）。

在如图所示类型的远场边界条件作用下塌陷2,

$$r\,\frac{\partial \phi}{\partial r} = -q_\infty \quad \text{for} \quad r \to \infty\,. \tag{2}$$

我们还假设空腔是细长的，即界面的位置满足 $r_s(z,\tau) \ll 1$ 且 $\partial r_s/\partial z \ll 1$。射流喷出之前，即在时刻 $\tau < 0$，满足边界条件（2）的无旋速度场由位于对称轴上的一条汇线产生，其强度为 q_∞ 。由于空腔细长，轴线上汇线产生的速度场在一阶近似下垂直于界面，因此，在 $\tau = 0^+$处的势（此时射流首次喷出）可设为$\phi = const$，在 $r = r_s(z, \tau = 0^+)$处。如图2所示，当两个对称射流在时刻 $\tau > 0$从 $z = \pm z_{jet}(\tau)$喷出后，自由界面在区域 $|z| < z_{jet}(\tau)$内消失，并从 $z = \pm z_{jet}(\tau)$处喷出两个对称射流。因此,

$$r\frac{\partial \phi}{\partial r}(r = 0, z, \tau) = 0 \quad \text{for} \quad |z| < z_{jet}(\tau) \quad \text{and} \quad \tau > 0 \tag{3}$$

否则，液体速度在轴上将趋于无穷大。因此，满足边界条件（2）—（3）的无旋、不可压缩速度场，是由一条沿 $|z| \geq z_{jet}(\tau)$延伸、强度为$q_\infty(1+|\Delta\, q(z,\tau)|)$的汇线所诱导的，见图2。为了确定未知函数 $\Delta\, q(z,\tau)$，我们描述轴对称流撞击 $r = 0$ 的过程，并运用Wagner理论框架 [27],；该框架最初用于量化小升角的二维固体对自由表面的撞击 [28, 29]。事实上，请注意，对欧拉-伯努利方程（A5）进行时间积分可得，对于 $\tau \ll 1$，在 $r = r_s(z,\tau)$处有 $\phi \simeq const$，对于 $|z| \geq z_{jet}(\tau)$则有 $\ll 1$，因为在自由界面处有 $\tau = 0^+$ $\phi = const$，且当 $\tau \to 0$时$\tau|\nabla\phi|^2/2 \to 0$。此外，由于 $r_s \ll 1$，通过仅保留 ϕ 在 $r = 0$附近泰勒级数展开的第一项，可以将拉普拉斯方程的这一边界条件线性化，从而得到 $\partial\phi/\partial z$ 在 $r = 0$处的以下边界条件:

$$\phi(r = 0, z, \tau) = const \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z}(r = 0, z, \tau) = 0 \quad \text{for} \quad |z| \geq z_{jet}(\tau)\,, \tag{4}$$

这也是一个条件，它表明对于此处关注的细长空腔极限情形，速度垂直于界面。现在注意，满足边界条件（2）-（4）的拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$ 的解是一个位于对称轴上并沿 q_∞ 延伸、强度为 $|z| < \infty$ 的汇分布，外加一条沿轴线在区域 q_∞ 延伸、强度为 $|z| < z_{jet}$（τ）的源线，以及一条沿轴线在区域 $q_\infty \Delta\, q$（z，τ）延伸、强度为 $|z| \geq z_{jet}$（τ）的汇线。注意，分布 $q_\infty \Delta\, q$（z，τ）是必需的

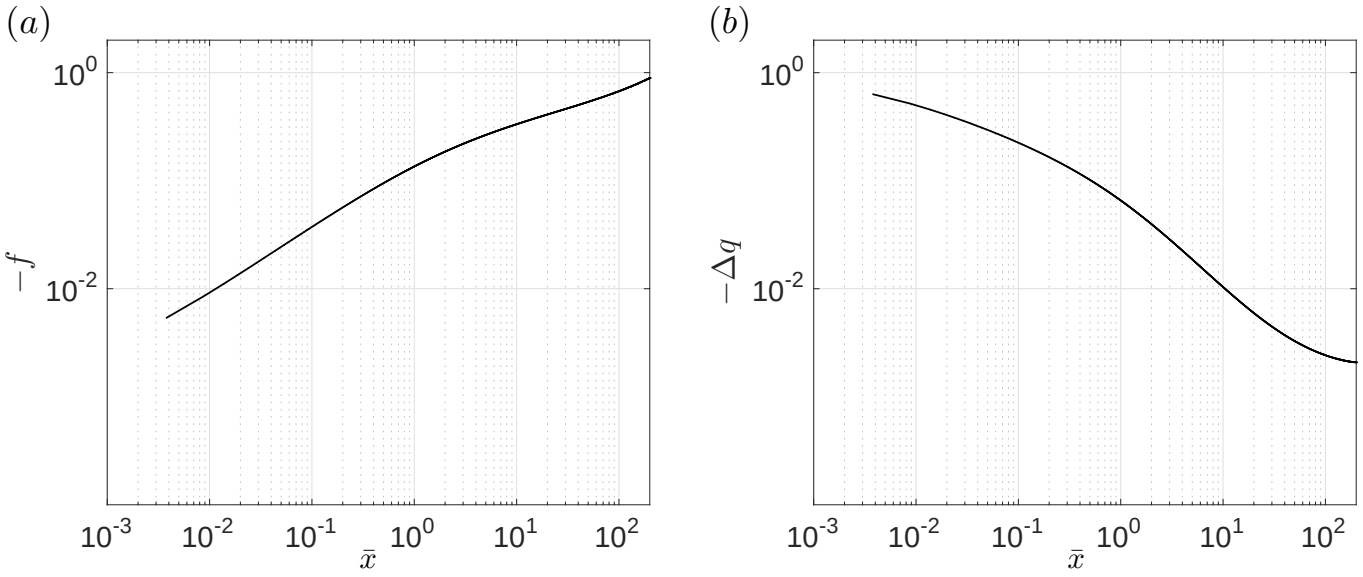

图3。（a）函数 f（$\bar{x}$），其中 $\bar{x}=\bar{z}-1$，使得 f（$\bar{x}=0$）$=0$ 且 f（$\bar{x}\to\infty$）$\to -1$，通过使用附录B中提供的数值代码求解积分方程（7）计算得到。（b）函数 Δq（$\bar{x}$）$=df/d\bar{x}$ 满足 $-\Delta q$（$\bar{x}\to 0$）$\to 0.7$。

表 I。该表利用图3所示的 n （ Δq）的数值，给出了不同x取值下式（11）中积分的数值。

$1+n\int_0^\infty \lvert\Delta q(\bar{x})\rvert/(1+\bar{x})^{(n+1)}d\bar{x}$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=8$	$n=10$
	1.14	1.18	1.20	1.20	1.24	1.24	1.30

为了保持远场边界条件（2）所规定的单位长度流量，并补偿区域 $|z|<z_{jet}$ 内未通过轴线吸入的流量。因此， Δq（z， τ）由施加方程（4）所表达的边界条件后得到的积分方程的解确定：

$$\int_{-z_{jet}}^{z_{jet}} \frac{(z-z_0)\,d\,z_0}{\left[(z-z_0)^2\right]^{3/2}} + \int_{z_{jet}}^{\infty} \frac{\Delta q(z_0)\,(z-z_0)\,d\,z_0}{\left[(z-z_0)^2\right]^{3/2}} + \int_{-\infty}^{-z_{jet}} \frac{\Delta q(-z_0)\,(z-z_0)\,d\,z_0}{\left[(z-z_0)^2\right]^{3/2}} = 0\,. \tag{5}$$

式（5）中的第一个积分对应于强度为 $r=0$ 、位于 $z>z_{jet}$的源线在τ和 q_∞ 处产生的轴向速度；而第二个和第三个积分则对应于强度为 $|z|<z_{jet}$（ $r=0$， $q_\infty\Delta q$）、位于z的汇分布在τ处产生的轴向速度，见图2中的示意图。请注意，与式（5）中的第二个积分相比，第三个积分的贡献相当小，因此下文将忽略该项。

为了求解关于 Δq 的积分方程，我们首先注意到，用以下变量表示时

$$\bar{z}=\frac{z}{z_{jet}(\tau)}\,,\quad \bar{z}_0=\frac{z_0}{z_{jet}(\tau)}\,,\quad \Delta q=\frac{df}{d\bar{z}} \tag{6}$$

其中 $f(\bar{z}=1)=0$，积分方程 (5) 可写为：

$$\frac{1}{\bar{z}-1}-\frac{1}{\bar{z}+1}+\int_1^\infty \frac{df/d\bar{z}_0\,(\bar{z}-\bar{z}_0)\,d\,\bar{z}_0}{\left[(\bar{z}-\bar{z}_0)^2\right]^{3/2}} = 0\,. \tag{7}$$

方程（7）采用附录B中详述的方法进行数值求解，所得函数 f 和 Δq如图3所示，图中还显示了 $-\Delta q(\bar{z}\to 1)$ ≈ 0.7。这里指出，图 $q_\infty\,(1+|\Delta q|)$ 中给出的、 Δq 取值为3 的汇分布，在附录11 的图B 中与附录A所述类型的数值模拟结果进行了比较，理论结果与数值结果吻合良好。已知 Δq后，可按照 z_{jet}(τ中的相同思路推导出 [27]

也就是说，利用界面处的运动学边界条件，并考虑到射流根部位于界面与对称轴相交的位置：

$$\frac{dr_s}{d\tau} = v_r(r=r_s) = -q_\infty \frac{1+|\Delta\, q|}{r_s} \Rightarrow -\frac{r_s^2(z=z_{jet})}{2\,q_\infty} = -\tau - \int_0^\tau |\Delta\, q(z=z_{jet}(\tau))|\, d\tau' \,. \tag{8}$$

在时刻 $\tau' \leq \tau$，对于 $z_{jet}(\tau)$ 的固定值，我们定义

$$\bar{x} = z_{jet}(\tau)/z'_{jet} - 1 \quad \text{with} \quad z'_{jet} = z_{jet}(\tau') \tag{9}$$

因此，积分方程（8）可写为

$$-\frac{r_s^2(z=z_{jet})}{2q_\infty} = -\tau - \int_\infty^0 |\Delta\, q(\bar{x})|\, \frac{d\tau'}{dz'_{jet}} \frac{dz'_{jet}}{d\bar{x}}\, d\bar{x} \,. \tag{10}$$

方程（10）可以采用与 [30], 中所述的类似步骤求解；在该文中，我们考虑了球形液滴撞击壁面的类似情形：事实上，对于具有如下类型方程的轴对称空穴 $r_s^2\,(z=z_{jet}) = 2C^{-1}\, z_{jet}^n$ 其中 C 为任意常数，方程（10）的解具有如下形式 $\tau = A^{-1}\, z_{jet}^n$因此，

$$\begin{aligned} -\frac{r_s^2(z=z_{jet})}{2q_\infty} &= -\tau - \int_\infty^0 -|\Delta\, q(\bar{x})|\, nA^{-1}\left(z'_{jet}\right)^{(n-1)} \frac{z'^2_{jet}}{z_{jet}(\tau)}\, d\bar{x} \Rightarrow \\ z_{jet} &= \left(1 + n\int_0^\infty \frac{|\Delta\, q(\bar{x})|}{(1+\bar{x})^{n+1}}\, d\bar{x}\right)^{1/n} (Cq_\infty \tau)^{1/n} \,, \end{aligned} \tag{11}$$

其中我们使用了方程（9）。注意，积分 $\int_0^\infty |\Delta\, q|/(1+\bar{x})^{(n+1)} d\bar{x}$ 的值可以利用图3所示的函数 $\Delta q(\bar{x})$，针对 n 的不同取值进行数值计算，其结果列于表 I 中。一旦通过方程（11）计算出 $z_{jet}(\tau)$，就可以在以射流基部速度 $dz_{jet}/d\tau$ 运动的相对参考系中写出欧拉-伯努利方程，从而计算实验室参考系中的射流速度 v_{jet}。事实上，图4(a)中的数值结果对应于附录A所述类型的数值模拟，表明在运动参考系中，自由表面在从射流底部向上延伸的竖直距离 $\sim r_{jet}$ 内是一条流线；此外，流动的驻点位于射流底部下方距离$\sim r_{jet}(\tau)$处，另见图1(b)。此外，图4(a)显示，射流由自由界面附近一个宽度为 $\sim r_{jet}(\tau)$ 的狭窄区域供给，这一结果此前已被 [31] 通过实验以及被 [11] 通过数值方法观察到。除此之外，图4(b)显示，当使用 $r_{jet}(\tau)$ 作为特征长度尺度进行重标度时，不同时刻对应的射流形状会重合为一条曲线；而图4(c)则显示了沿对称轴、在空间区域 $z - z_{jet}(\tau) \sim r_{jet}(\tau)$ 内，于不同时刻计算得到的重标度压力值。图4(c)表明，流动的驻点确实位于射流底部下方距离$\sim r_{jet}$ 处，并且液体压力在 $z \simeq z_{jet}(\tau)+r_{jet}(\tau)$ 处松弛至气体压力 p_{gas}。因此，由于射流细长且毛细效应处于次要地位，在第一近似下，液体中的压力将在 $z \gtrsim z_{jet}(\tau) + r_{jet}(\tau)$ 内保持不变；这意味着，在时空区域（z,τ）内，且 $z \gtrsim z_{jet}(\tau) + r_{jet}(\tau)$，射流形状和其中的速度均可利用[12]中推导出的弹道方程进行预测。图4(c)还显示，最大压力 p_{max} 即为驻点压力，该值在分界流线与对称轴相交的位置达到，见图4(a)。因此，可以在运动参考系中利用欧拉-伯努利方程计算 p_{max}，其形式为

$$p_{max} - p_{gas} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{dz_{jet}}{d\tau}\right)^2 \tag{12}$$

因为分界流线上运动参考系中的上游速度的模为 $\approx dz_{jet}/d\tau$，而分界流线上游紧邻自由表面处的压力等于气体压力，这是因为毛细效应可以忽略。因此，考虑到射流底部周围宽度为 $\sim r_{jet}$（τ）的区域内流场处于准稳态，并沿一条流线应用欧拉-伯努利方程，该流线连接相对参考系中的流动驻点与射流内下游压力松弛至气体压力的位置，我们得到

$$p_{max} - p_{gas} \simeq \frac{1}{2}\,\tilde{v}_{jet}^2 \quad \text{with} \quad \tilde{v}_{jet} = v_z(r=0, z=z_{jet}+r_{jet}) - \frac{dz_{jet}}{d\tau} \tag{13}$$

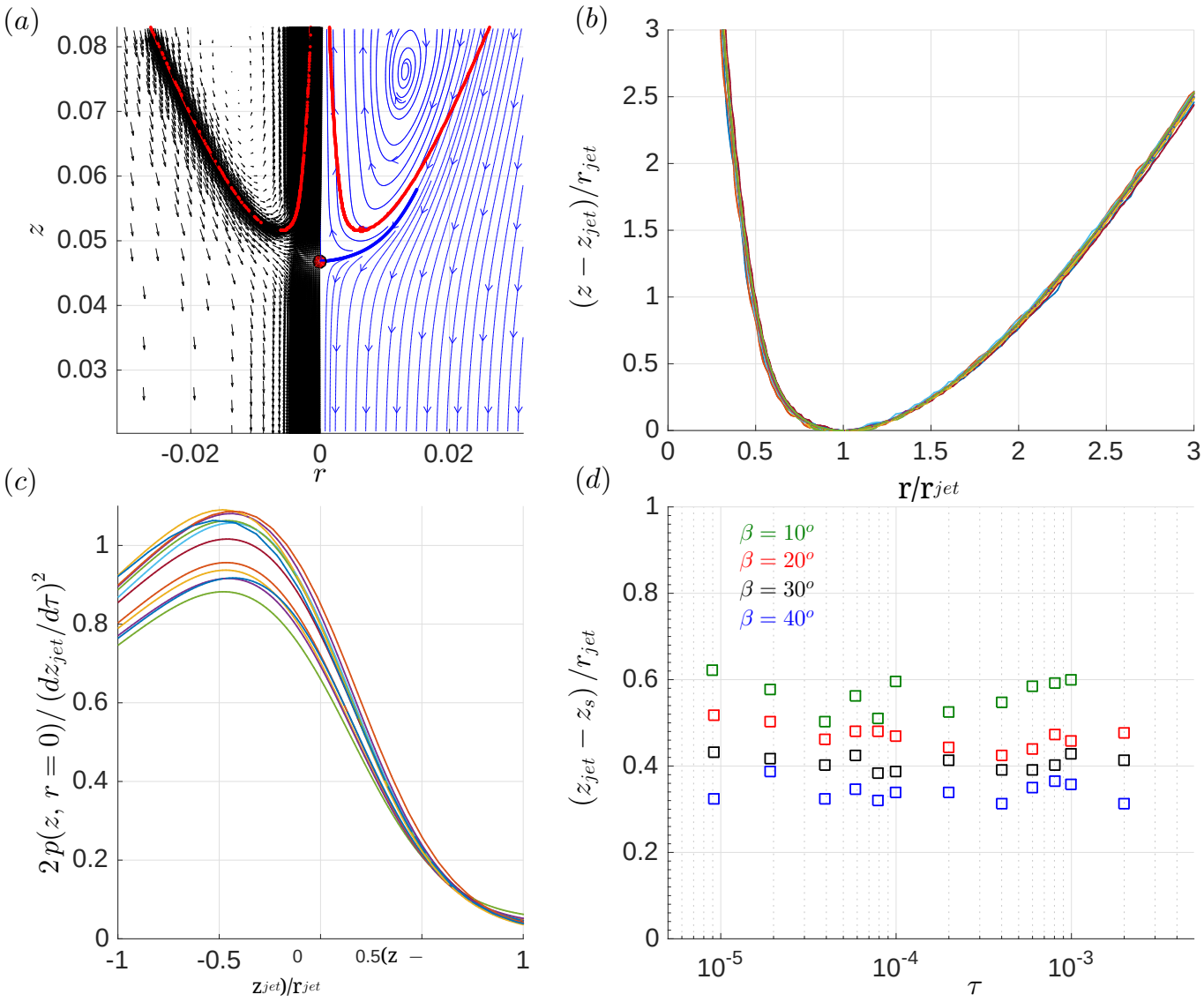

图4. (*a*) 开口半角为 $\beta = 20°$的圆锥形空腔对应的流线；数值细节见附录A。图示为某一时刻 τ_0在以速度 $dz_{jet}/d\tau(\tau_0)$垂直运动的参考系中的情况。粗蓝线表示分界流线。(*b*) 使用 $r_{jet}(\tau)$进行缩放后， $\beta = 20°$对应的射流形状在两个数量级以上的时间范围内重合为一条曲线。(*c*) 射流底部周围区域内对称轴上的缩放压力在两个数量级以上的时间范围内的变化；此处， $\beta = 20°$。压力以运动参考系中的驻点压力值 $1/2\,(dz_{jet}/d\tau)^2$为基准进行缩放。(*d*) 流动在运动参考系中的驻点位置随时间的变化，示意见图 1(b)。绿色、红色、黑色和蓝色方块分别表示开口半角为 $\beta = 10°$、 $20°$、 $30°$和 $\beta = 40°$的圆锥形空腔对应的结果；数值细节见附录A。

表示运动参考系中的轴向速度。因此，利用方程（12），我们得出，在液体压力松弛至气体压力处的轴向坐标 z 处，实验室参考系中的射流速度为

$$v_{jet}(\tau) = v_z(r = 0, z = z_{jet} + r_{jet}) = 2\,\frac{dz_{jet}}{d\tau}\,. \tag{14}$$

最后，图4(d)中的结果表明，压力的最大值，即运动参考系中的驻点压力（另见图1(b)中的示意图），出现在距射流底部$z_{jet}(\tau) - z_s(\tau)$处，使得比值 $(z_{jet}(\tau) - z_s(\tau))\,/r_{jet}(\tau) \sim O(1)$随时间近似保持不变。Th

en, ma king use o f Eqs. (11) 和 (14)，我们得出结论：在射流内液体压力

松弛至与气体压力相等的位置，即在 $z = z_{jet}(\tau) + \alpha\, r_{jet}(\tau)$ 且 $\alpha \simeq 1$ 时，速度为：

$$v_{jet} \simeq 2\frac{d\, z_{jet}}{d\tau} \simeq \frac{2\, C\, q_\infty}{n}\left(1 + n\int_0^\infty \frac{|\Delta\, q(\bar{x})|}{(1+\bar{x})^{n+1}}\, d\bar{x}\right)^{1/n} (C q_\infty \tau)^{(1-n)/n}\,. \tag{15}$$

将式（11）和（15）具体化到具有如下形式方程的圆锥形空腔情形 $r_s = z\tan\beta$，（$C = 2/\tan^2\beta$）可得

$$z_{jet} = \left(1 + 2\int_0^\infty \frac{|\Delta\, q(\bar{x})|}{(1+\bar{x})^3}\, d\bar{x}\right)^{1/2} \left(2\, q_\infty\, \tau/\tan^2\beta\right)^{1/2} \simeq \frac{1.5}{\tan\beta}\sqrt{q_\infty \tau} \tag{16}$$

and

$$v_{jet} \simeq 2\frac{dz_{jet}}{d\tau} \simeq \frac{1.5}{\tan\beta}\sqrt{\frac{q_\infty}{\tau}}\,, \tag{17}$$

这里利用了表I 中给出的、对应于 $n = 2$的积分值。对于具有如下形式方程的抛物线形空腔的类似情形 $r_s = z^2/(2r_c)$，式（11）和（15）给出了 z_{jet} 和 v_{jet}的以下表达式：

$$z_{jet} = 1.25\,(2r_c)^{1/2}\,(q_\infty\tau)^{1/4} \quad \text{and} \quad v_{jet} = 0.625\, q_\infty\, (2r_c)^{1/2}\, (q_\infty\,\tau)^{-3/4}\,, \tag{18}$$

这里利用了表I 中给出的、对应于 $n = 4$的积分值。

为了推导 r_{jet}（τ）的方程，首先注意到，沿对称轴的汇分布q_∞（$1 + |\Delta\, q|$），其中 $\Delta\, q$为图3所示的函数，恰好平衡了式（2）中作为远场边界条件施加的流量。然而，如图4（a）所示，界面在以速度 $dz_{jet}/d\tau$ 沿竖直方向运动的参考系中，在从射流底部向上延伸、长度为 $\sim r_{jet}$ 的距离上是一条流线；这意味着，在该区域内，运动参考系中界面法向速度为零。因此，质量守恒要求形成宽度为 $\sim r_{jet}$ 的射流，以补偿汇分布无法吸入的流量 q_∞（$1 + |\Delta\, q|$）——在该区域内，运动参考系中的法向速度为零。因此，质量守恒要求：界面无法通过这段长度为 $\sim r_{jet}$的区域吸入的流量，必须以宽度为r_{jet} 的射流形式排入气态大气中，其表达式为：

$$2\pi\int_{z_{jet}}^{z_{jet}+r_{jet}} q_\infty\,(1 + |\Delta\, q(z)|)\, dz \approx 2\pi r_{jet}^2 \frac{dz_{jet}}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad r_{jet}\frac{dz_{jet}}{d\tau} \simeq 1.7 q_\infty\,, \tag{19}$$

其中我们考虑了以下几点：i）液体主体体积的增长率为 $\pi r_{jet}^2 dz_{jet}/d\tau$；ii）根据欧拉-伯努利方程，运动参考系中的射流速度为 $dz_{jet}/d\tau$；iii）图（10）所示的函数 Δq满足 $-\Delta q(\bar{x} \to 0) \to 0.7$，因此，

$$\int_{z_{jet}}^{z_{jet}+r_{jet}} |\Delta\, q|\, dz \simeq |\Delta q(\bar{x} = 0)|\, r_{jet} \approx 0.7 r_{jet}\,. \tag{20}$$

为验证方程（11）、（12）、（15）和（19）中的结果，我们采用附录A所述数值模拟的结果。事实上，在附录A 中，我们分析了利用GERRIS [13, 14] 脚本进行数值模拟的结果；该脚本由 [22] 使用，用于模拟极高速射流的产生，其速度高达 1000 $m\, s^{-1}$。当气泡在极靠近固壁处发生空化，且将单位长度流量指定为远场边界条件时，便会产生这种射流。此处请注意，我们对控制方程以及附录A 所报告数值结果的分析表明，对于任意 β 值，射流形状和速度场均收敛于欧拉-伯努利方程与拉普拉斯方程的 β依赖自相似解，其中长度和速度分别正比于$\sqrt{q_\infty \tau}$ 和 $\sqrt{q_\infty/\tau}$。据我们所知，此前尚未有相关报道。

图5 将方程（12）、（16）、（17）和（19）给出的预测与数值模拟中获得的数值进行比较：r_{jet}（τ）、v_{jet}（τ）、p_{max}（τ）以及 $r_{jet}dz_{jet}/d\tau$（τ）。这些数值来自附录A中详细说明的数值模拟，研究对象为开口半角不同的圆锥形空腔 β，取 $q_\infty = 1$。图5

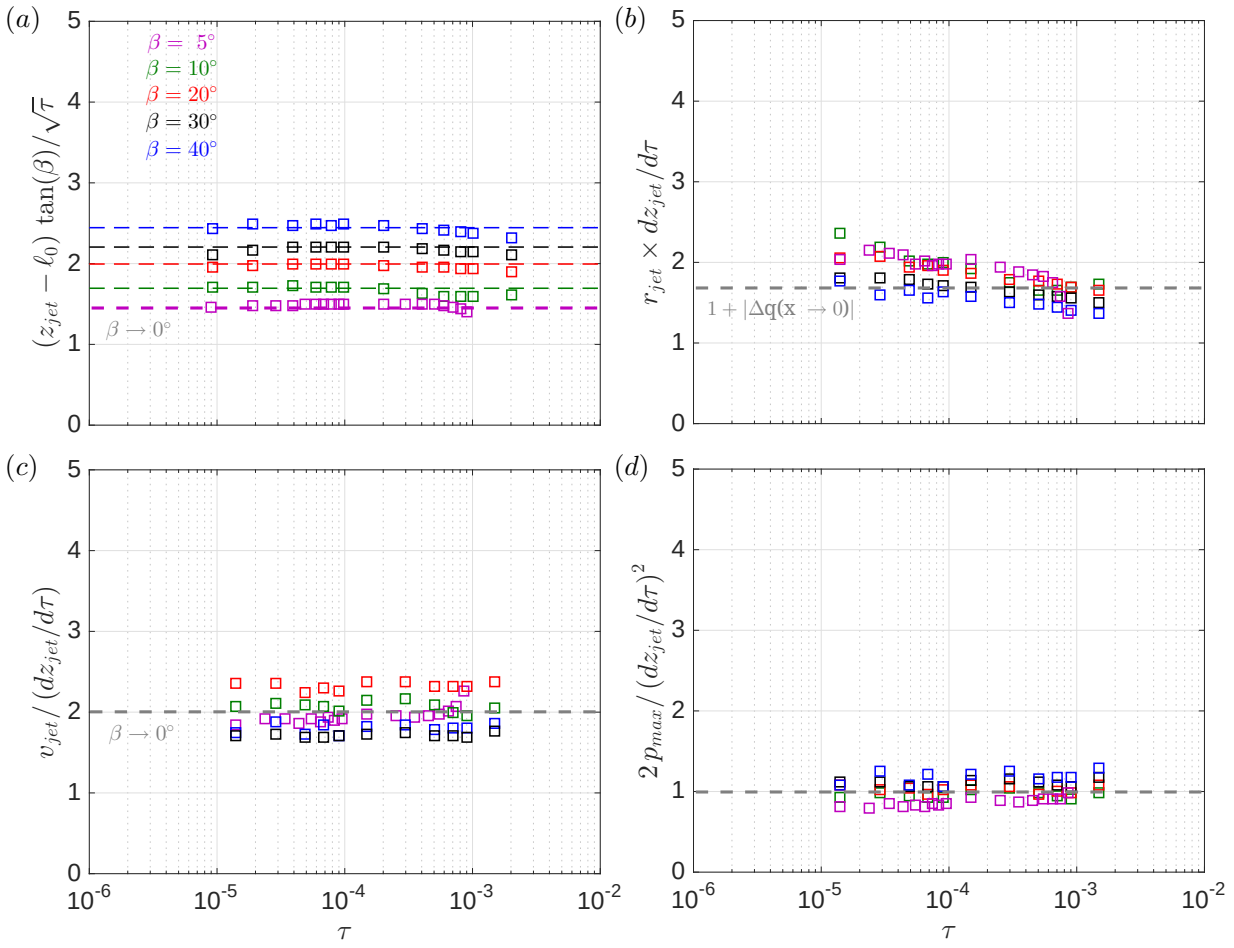

图 5. 附录中的数值结果对比A 对应于开口半角取不同值的圆锥形空腔情况

β 12 16 17 19 $v_{jet}\ \tau\ = v_z\ z = z_{jet}\ \tau\ +$与方程（）、（）、（）和（）$\alpha\, r_{jet}\ \tau$ $\alpha = 1$ $\beta = 5°$ $\beta = 10°$ $\beta = 20°$ 中的预测值。此处，对于细长空腔的情况，即具有、、的圆锥形空腔，( ) (( ) ( )），见图4(c)，而 $\alpha = 0$ 对于非细长圆锥形空腔的情况，即具有 $\beta = 30°$ 和 $\beta = 40°$。不同的 α 值是因为液体压力在射流内不同的垂直位置弛豫至气体压力，具体位置取决于开口半角的值；对于情况，见图4(c) $\beta = 20°$。此处，$\ell_0(\beta = 5°) = 0.0080$, $\ell_0(\beta = 10°) = 0.0045$, $\ell_0\ \beta = 20°$ $\ell_0\ \beta = 30°$ $\ell_0\ \beta = 40°$ () $= 0.0028$, （） $= 0.0022$, （） $= 0.0012$。

证实了我们在极限 $\beta \ll 1$ 下的预测，也使我们能够通过直接写成以下形式，将结果推广到 β 的一般取值：

$$z_{jet}(\beta, \tau) = K(\beta) z_{jet}(\beta \ll 1, \tau) = K(\beta) \frac{1.5}{\tan\beta} \sqrt{q_\infty \tau} \quad \text{with} \quad K(\beta \le 5°) = 1 \quad \text{and} \tag{21}$$

K（$\beta = 10°$）$= 1.13$, K（$\beta = 20°$）$= 1.33$, K（$\beta = 30°$）$= 1.47$ 和 K（$\beta = 40°$）$= 1.63$。

此外，图6 将式（12）、（18）和（19）中的预测结果，与 r_{jet}（τ）、v_{jet}（τ）、p_{max}（τ）以及 $r_{jet} dz_{jet}/d\tau$（τ）的数值进行比较；这些数值采用与附录A 中详述的同类数值模拟计算得到，但将界面的初始形状方程替换为方程 r_s（z，$\tau = 0$）$= z^2/2$所表示的抛物线。图6所示结果未包含任何类型的可调常数，进一步支持了我们的理论。

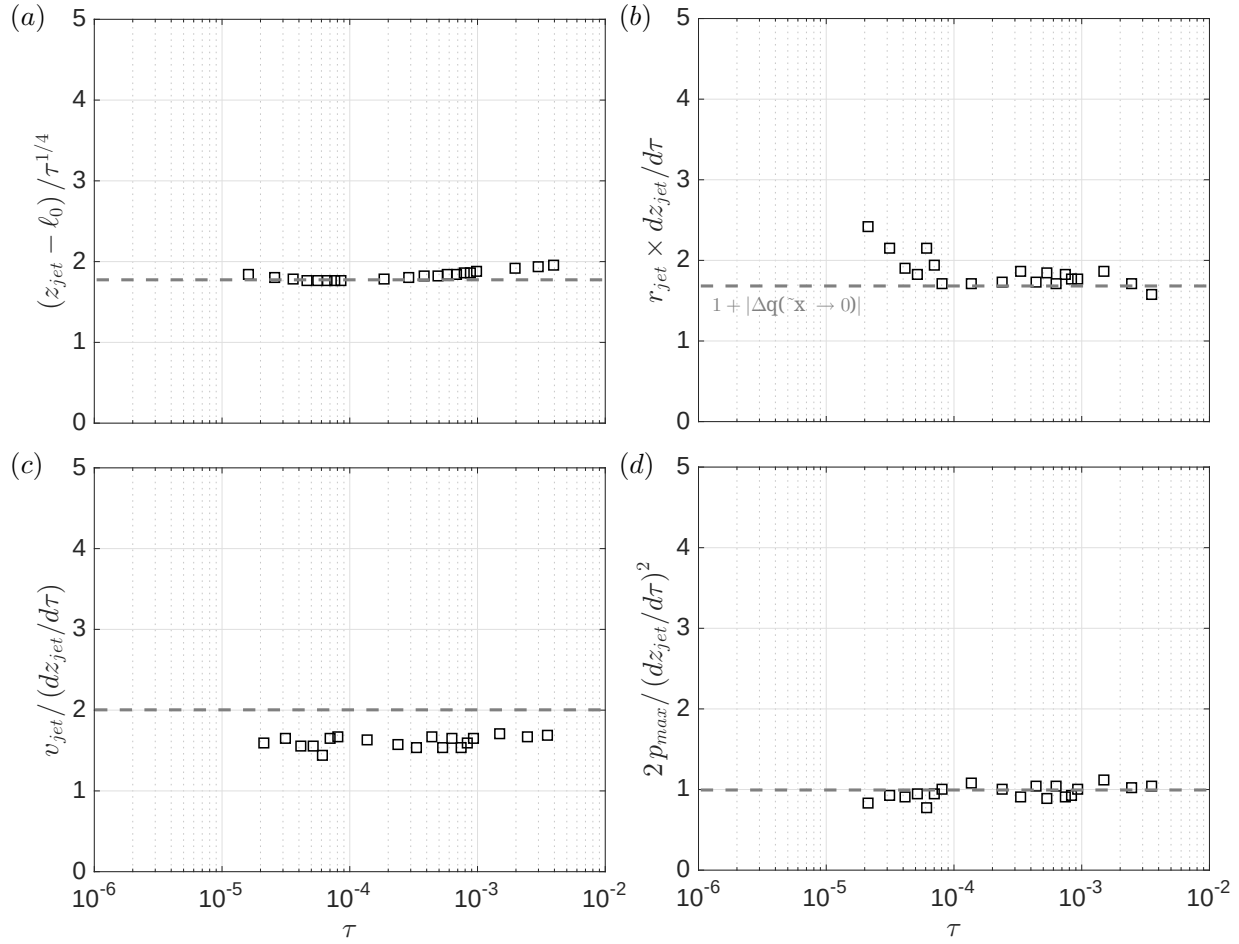

图 6。 $p_{max}(\tau) - p_{gas}$、 $z_{jet}(\tau)$、 $v_{jet}(\tau) = v_z(r=0, z=z_{jet}+r_{jet})$、 $r_{jet}(\tau)$ 的数值结果与由方程 (12)、(18) 和 (19) 预测的相应值的比较。预测的射流速度与计算得到的射流速度之间存在小偏差，这是因为在射流内高于 $z = z_{jet}(\tau) + r_{jet}(\tau)$ 的某一垂直位置处，液体压力趋于与气体压力相等。此处， $\ell_0(r_c = 1) = 0.015$。

III. 结论

总之，本文分析了高雷诺数条件下空穴的内爆，其中塌陷由一个表明单位长度流量随时间保持恒定的远场边界条件驱动。我们提出了一种自洽理论，用于描述具有一般几何形状的细长空腔的塌陷，并给出了不含可调常数的代数方程，以描述射流速度、宽度和垂直位置的时间演化。当将其应用于圆锥形气泡时，我们的代数方程再现了在开口半角较小极限下数值获得的自相似结果；当应用于抛物线形空腔时，我们还发现，对于射流半径、射流速度和最大液体压力的预测与数值模拟高度一致。我们在本文以及[1] 中均表明，当射流从截锥底部出现时，气泡在界面处破裂后立即产生的射流可用我们的纯惯性理论来描述。这一结果不同于通常的观点，即空穴惯性-毛细塌陷后产生的射流动力学可用惯性-毛细平衡来描述，参见例如 [32]。本文及 [1] 中给出的结果还可能用于描述圆锥形气泡在极靠近壁面处内爆时产生的超高速射流，这一现象可能在液体空化引起的材料劣化中发挥作用。

致谢

本研究部分由西班牙科学与创新部/国家研究署资助的项目 PID2020-115655G 提供支持。

作者贡献：JMG 负责研究设计与理论构建、数据分析及论文撰写；FJBR 负责数值模拟和数据分析。所有作者均审阅了研究结果，并批准了论文最终版本。

附录A：自相似圆锥射流

本附录给出了描述圆锥形空腔高雷诺数内爆的数值结果，例如驻波塌陷凹陷中出现的此类空腔[33]，、破裂气泡塌陷过程中的此类空腔 [23, 25]，或液滴撞击液池后形成的空腔塌陷所产生的此类空腔 [7, 8, 10]。数值结果采用开源软件包 GERRIS[13, 14] 获得，因此，模拟中未考虑可压缩性对空腔塌陷和射流喷射过程的影响。事实上，本节结果使用了 [22] 在其关于刚性边界附近、离壁参数较小时空化气泡产生的射流动力学研究中提供的 GERRIS 脚本。图7(a)所示的数值设置展示了径向坐标和轴向坐标， R 和 Z 分别表示这两个坐标；还展示了半开角为 β的圆锥形空腔初始形状，以及 L_c，即施加远场径向速度 V_c的圆柱面半径。下文中， ρ、 μ 和 σ 分别表示液体密度、黏度和界面张力系数，而 ρ_g 和 μ_g 则分别表示气体密度和黏度。数值代码通过固定单位长度流量 L_cV_c为 $R = L_c$ ，并在 $Z = \pm L_c/2$ 处施加流出边界条件来求解；也就是说，顶部和底部边界处速度场和压力场关于Z的导数均为零。最小网格尺寸为$2^{-12}L_c$ ；射流与圆锥面相交区域的射流半径（见图7(b)）至少由6个数值网格单元分辨。

以 L_c、 L_c/V_c 和 ρV_c^2作为长度、时间和压力的特征尺度，图7 所示的流动可用以下无量纲参数描述：

$$We = \frac{\rho\, V_c^2\, L_c}{\sigma}\,, \quad Re = \frac{\rho\, V_c L_c}{\mu}\,, \quad m = \frac{\mu_g}{\mu}\,, \quad \Lambda = \frac{\rho_g}{\rho} \quad \text{and} \quad \beta \tag{A1}$$

但是，由于这里将密度比和黏度比固定为气水系统的特征值，$\Lambda = 1.2 \times 10^{-3}$、 $m = 1.8 \times 10^{-2}$，数值解将仅取决于 We、 Re 和 β。还要注意，从现在起，无量纲变量将用小写字母表示，以区别于用大写字母表示的对应有量纲变量；τ 和 $\mathbf{n}$ 将分别表示射流喷出后的无量纲时间，以及方程中界面的单位法向量

$$r = r_s(z,\tau) \Rightarrow F = r - r_s(z,\tau) = 0\,. \tag{A2}$$

图8 表明，在本研究考察的这两个参数取值范围内，数值结果实际上几乎不受 We 和 Re 的影响，即 $Re \geq 50$ 和 $We \geq 0.5$。鉴于 Re 的最小值已经很大， $Re = 50$，雷诺数对结果的影响本来就可以预料；而解不随 We 变化则表明，射流喷出的机制并非由毛细作用驱动。图 β 分析了开口半角对射流形状随时间演变的影响；从图9可以清楚看出， β 减小时，射流速度会增大。

我们现在的目的是探究，对于图 9 所示的高雷诺数射流，在满足 $\tau \ll 1$的时刻，是否存在自相似解。分析首先假设，在 $Re \gg 1$ 极限下描述射流动力学时，可以忽略界面处的涡量生成；此时，速度场 $\mathbf{v}$ 可用速度势 ϕ 表示为

$$\mathbf{v} = \nabla\phi\,. \tag{A3}$$

因此，在此处关注的不可压缩极限下，连续性要求

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = 0\,, \tag{A4}$$

其中使用了方程（A3）。拉普拉斯方程（A4）必须在由欧拉-伯努利方程特定化计算得到的速度势值下求解

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} - We^{-1}\nabla\cdot\mathbf{n} = C(\tau) \tag{A5}$$

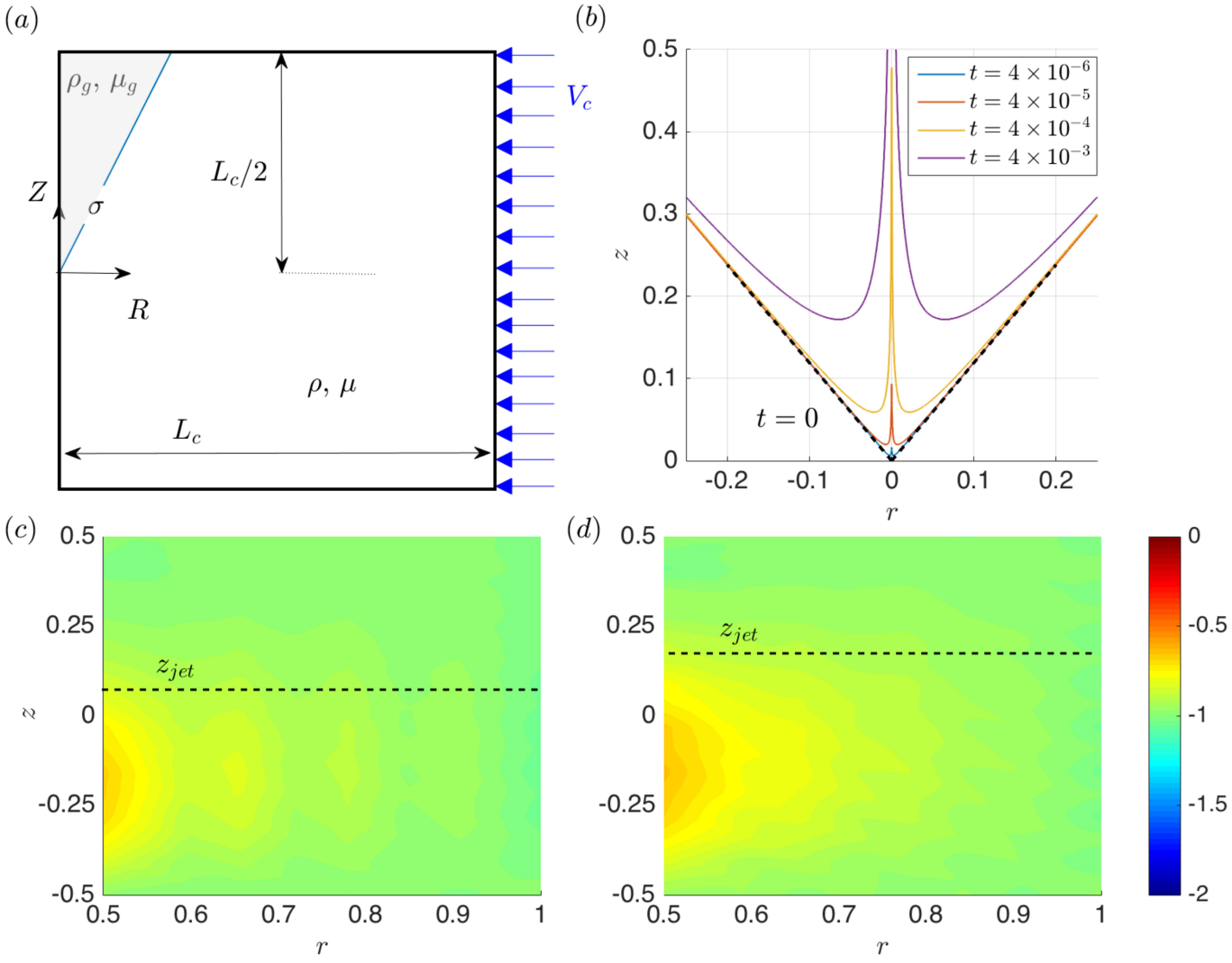

图7。(a) 数值设置示意图，标示了远场边界条件、锥形界面的初始形状、液体和气体的材料属性，以及径向和轴向坐标，分别为 R 和 Z 。(b) 对应于 $Re = 100$ 和 $We = 1$ 以及 $\beta = 40°$的数值结果。(c)-(d) 与(b)中所示数值模拟对应的 rv_r 数值，分别为两个不同时刻： $\tau = 4\times10^{-4}$ (c) 和 $\tau = 4\times10^{-3}$ (d)。请注意，采用(a)中所示边界条件进行的这类数值模拟，将单位长度流量 $rv_r \to -1$ 的恒定值作为远场边界条件。

在方程 $F = 0$的界面处，其中 F （A2）中定义的函数满足运动学边界条件，

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial r_s}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial r_s}{\partial z}, \quad \text{with} \quad r_s(z\to\infty,\tau)\to z\tan\beta \tag{A6}$$

以及 D/Dt 表示物质导数。在 [33], 通过引入缩放变量，推导出了流场的自相似结构

$$\phi = (\tau-\tau_0)^{\delta}\ h\left[\frac{z-\ell_0}{(\tau-\tau_0)^{\varepsilon}}, \frac{r}{(\tau-\tau_0)^{\varepsilon}}\right] \quad \text{and} \quad r_s(z,\tau) = (\tau-\tau_0)^{\varepsilon}\ g\left[\frac{z-\ell_0}{(\tau-\tau_0)^{\varepsilon}}\right] \tag{A7}$$

代入方程组（A4）-（A6），可得方程（A4）和（A6）均可用（A7）中定义的自相似变量表示，条件是 $\delta = 2\varepsilon - 1$; 该条件还确保欧拉-伯努利方程（A5）中的项 $\partial\phi/\partial\tau$和 $|\nabla\phi|^2/2$具有相同的时间函数依赖关系。在 [33], 中，通过施加一个附加条件，即方程（A5）左端三项的时间依赖关系必须相同，推导出了表征其惯性-毛细自相似解中长度尺度的指数 $\varepsilon = 2/3$ 。

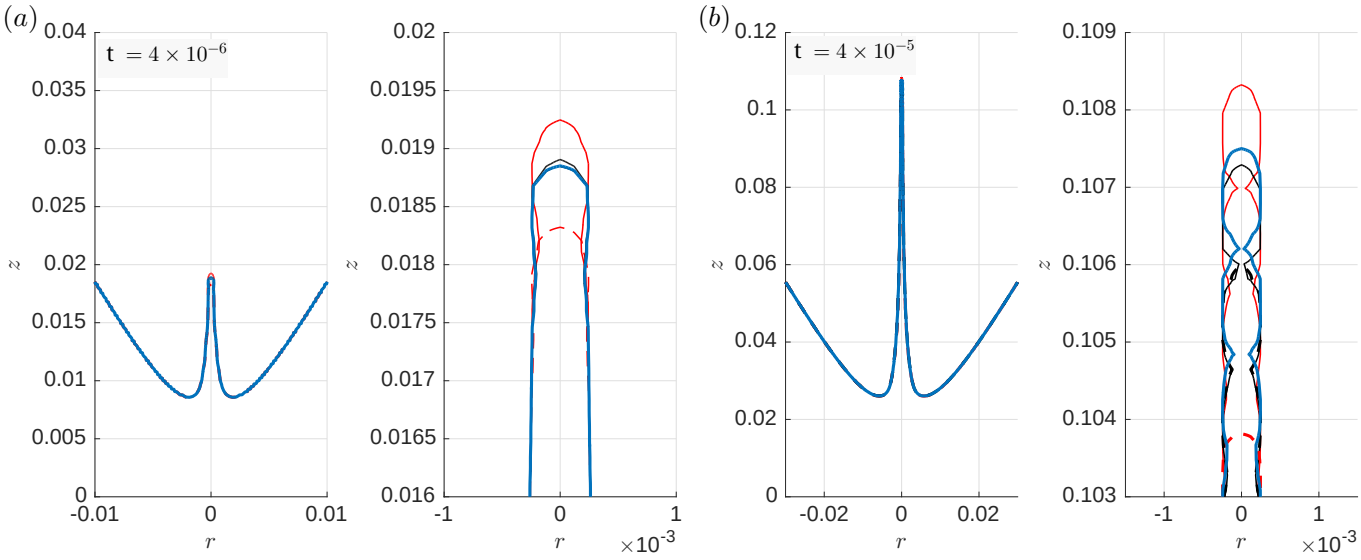

图8. 分析在固定的 $\beta = 30°$ 值下， Re 和 We 对射流喷射过程的影响，并比较两个不同时刻 $\tau = 4\times10^{-6}$ （a）和 $\tau = 4\times10^{-5}$ （b）的情况。图中结果对应以下控制参数取值： $Re = 100$、 $We = 1$ （蓝色实线）， $Re = 50$、 $We = 1$ （红色虚线）， $Re = 200$、 $We = 1$ （红色实线）， $Re = 100$、 $We = 5$ （黑色实线）， $Re = 100$、 $We = 0.5$ （黑色虚线）。请注意，射流形状之间的差异几乎无法区分，只有在射流尖端对应的放大图像中才较为明显；这表明射流的时空演化实际上不受 Re 和 We 的影响。

然而，图 8 所示结果表明，射流的时间演化与韦伯数无关，这说明此处考察的射流类型并非由毛细作用驱动。因此，在本例中，方程（A4）-（A6）对自相似解存在的唯一限制是 $\delta = 2\varepsilon - 1$；随后，方程（A7）中的指数 ε 应由拉普拉斯方程（A4）的远场边界条件确定。在本例中，该条件为——见图 7（c）-（d）：

$$r\frac{\partial\phi}{\partial r} \to -1 \quad \text{for} \quad r \to \infty\,. \tag{A8}$$

远场边界条件（A8）不同于空腔惯性-毛细塌陷所对应的边界条件；后者恰好类似于圆盘撞击液池后形成的自相似波所驱动的边界条件。事实上，在后一种情况下，[34, 35] 指出，速度势的远场边界条件是众所周知的、绕角度为 2π 的楔形体的二维无旋流，

$$\phi(r \to \infty) \propto r^{1/2} w(\theta)\,, \tag{A9}$$

其中 r 和 θ 表示极坐标。不同的边界条件（A9）和（A8）解释了 [33, 35] 所报告的自相似解中表征这些解的指数 $\varepsilon = 2/3$ 与由方程（A8）所强制确定的相应值 ε 之间的差异。事实上，此处 $\varepsilon = 1/2$，因为正如上文所指出的，$\delta = 2\varepsilon - 1$；此外，只有在 $\delta = 0$时，方程（A8）才能用（A7）中定义的自相似变量表示。由于 $\varepsilon = 1/2$，如果对于足够大的 $\tau > \tau_0$值，数值解收敛到满足该方程组及边界条件的自相似解，那么图8所示射流的特征长度尺度应随时间按 $(\tau - \tau_0)^{1/2}$ 变化，而速度应随时间按 $(\tau - \tau_0)^{-1/2}$变化；这些预测还意味着，在此处所关注的极限 $(\tau - \tau_0) \ll 1$ 下， C 以及方程（A5）中的毛细项相对于惯性项 $\partial\phi/\partial\tau$ 和 $|\nabla\phi|^2/2$均为次要项。

鉴于前述分析，这里探讨图9 所示的不同射流形状能否归并为一条曲线。为此，我们定义图 $z_{jet}(\tau,\ \beta)$ 和 $r_{jet}(\tau,\ \beta)$ 中所示的时间依赖函数。图10 显示，以前述分析提出并定义的缩放后的径向和垂直坐标作图时，图9所示的随时间变化的射流形状确实能在跨越两个数量级以上的时间范围内归并为一条与时间无关、且几乎与 β无关的函数：

$$\chi = \frac{r}{r_{jet}(\tau,\beta)}\,, \quad \text{and} \quad \eta = \frac{z - \ell_0(\beta)}{z_{jet}(\tau,\beta) - \ell_0(\beta)}\,, \tag{A10}$$

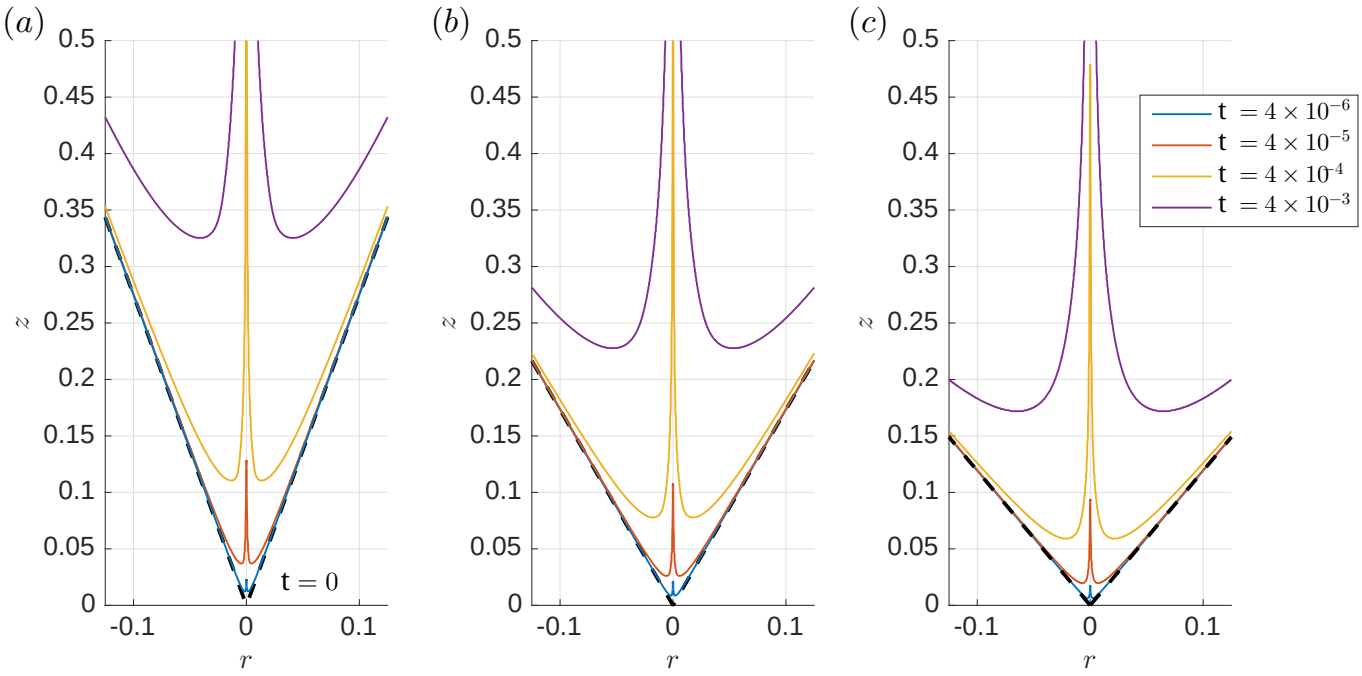

图 9。该图分析了开口半角对射流时空演化的影响：(a) $\beta = 20°$，(b) $\beta = 30°$，(c) $\beta = 40°$。在所考虑的三种情况下，$Re = 100$ 和 $We = 1$。注意，当 β 减小时，射流速度会增加。

其中 $\ell_0(\beta)$ 的取值见图5；图中确实显示，$z_{jet}(\tau,\ \beta) - \ell_0(\beta) \propto \tau^{1/2}$，$d\,z_{jet}/d\tau \propto \tau^{-1/2}$以及 $r_{jet}(\tau,\ \beta) \propto \tau^{1/2}$。

正文图中抛物腔对应的数值结果见6，其采用的数值代码和边界条件与本附录所述相同。唯一的区别在于，本例中界面初始形状的方程为 $r_s(z,\ \tau = 0) = z^2/2$。

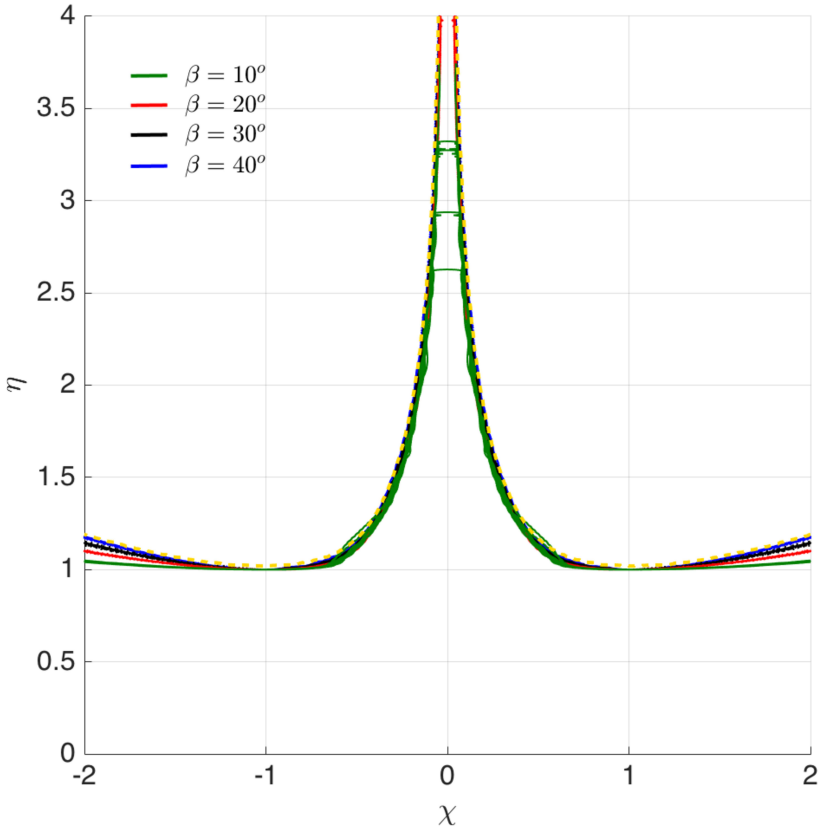

图 10. 图中展示了图 9 所示类型的塌陷后射流形状的时空演化，跨越两个数量级的时间范围，并对应四个不同的 β 值，即 $\beta = 10°$、 $20°$、 $30°$ 和 $\beta = 40°$，它们均趋向图中所示的 τ无关且几乎 β无关的函数，其中 χ 和 η 由方程（A10）定义。补充材料 [1] 将该射流自相似形状对应的函数与从截锥形表面底部产生的气泡破裂射流情况下得到的数值结果进行了比较。

附录B： Δq的积分方程的解

注意到对于 $\bar{z} > \bar{z}_0$，方程（7）中的被积函数可写为：

$$\frac{df/d\bar{z}_0}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2} = \frac{d}{d\bar{z}_0}\left(\frac{f}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right) - 2\frac{f}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^3} \tag{B1}$$

以及对于 $\bar{z} < \bar{z}_0$ ，有：

$$-\frac{df/d\bar{z}_0}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2} = -\left[\frac{d}{d\bar{z}_0}\left(\frac{f}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right) - 2\frac{f}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^3}\right] . \tag{B2}$$

注意

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_1^{\bar{z}-\gamma}\frac{d}{d\bar{z}_0}\left(\frac{f}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right)d\bar{z}_0 = \frac{f(\bar{z})}{\gamma^2} \tag{B3}$$

其中，我们已考虑到 $f(\bar{z}=1) = 0$。此外，请注意

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{\bar{z}+\gamma}^{\infty} -\frac{d}{d\bar{z}_0}\left(\frac{f}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right)d\bar{z}_0 = \frac{f(\bar{z})}{\gamma^2} . \tag{B4}$$

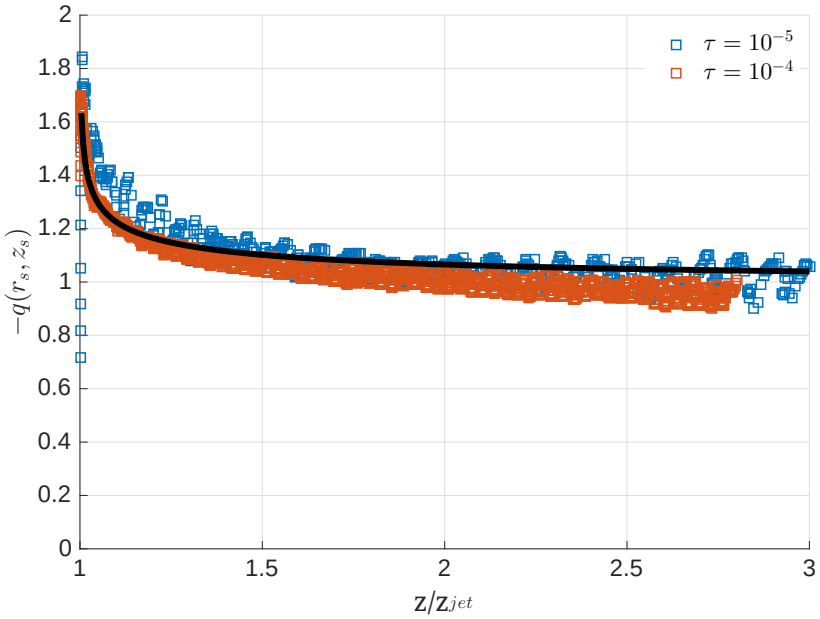

图11. 在两个时刻计算得到的数值 $-q(r_s,\ v_s) = -r_s(z,\ \tau)v_r(r = r_s,\ z,\ \tau$，其开口半角为 $\beta = 5°$ 与 $q_\infty(1 + |\Delta q|)$ 进行比较，其中 Δq 见图3（黑色实线），结果发现数值模拟与理论预测吻合良好。

现在我们对 f 进行离散化，假设其为常数，取值为 $f(\bar{z}_i) = f_i$，并沿着 N 个宽度恒为 h、中心位于 $\bar{z}_i = 1 + 3h/4 + (i-1)\,h$ 的面板分布。然后，对于 $i > j$:

$$\int_{\bar{z}_j - h/2}^{\bar{z}_j + h/2} -\frac{2f_j}{(\bar{z}_i - \bar{z}_0)^3} d\bar{z}_0 = -f_j \left[\frac{1}{(\bar{z}_i - \bar{z}_j - h/2)^2} - \frac{1}{(\bar{z}_i - \bar{z}_j + h/2)^2} \right], \tag{B5}$$

对于 $i < j$:

$$\int_{\bar{z}_j - h/2}^{\bar{z}_j + h/2} \frac{2f_j}{(\bar{z}_i - \bar{z}_0)^3} d\bar{z}_0 = f_j \left[\frac{1}{(\bar{z}_i - \bar{z}_j - h/2)^2} - \frac{1}{(\bar{z}_i - \bar{z}_j + h/2)^2} \right], \tag{B6}$$

而对于 $i = j$:

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{z}_i - h/2}^{\bar{z}_i - \gamma} -\frac{2f_i}{(\bar{z}_i - \bar{z}_0)^3} d\bar{z}_0 = -f_i \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{(h/2)^2} \right] \quad \text{and} \\ &\int_{\bar{z}_i + \gamma}^{\bar{z}_i + h/2} \frac{2f_i}{(\bar{z}_i - \bar{z}_0)^3} d\bar{z}_0 = f_i \left[-\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{(h/2)^2} \right] \end{aligned} \tag{B7}$$

对于 $\bar{z} > \bar{z}_N + h/2$，当 $\bar{z}_N \gg 1$ 时，我们施加质量守恒条件，即位于 $0 \le \bar{z} \le 1$ 处的源分布所注入的流量等于通过自由界面的流量，见式（7）：

$$\int_1^\infty \Delta q d\bar{z} = \int_1^\infty \frac{df}{d\bar{z}} d\bar{z} = f_\infty = -1 \tag{B8}$$

a因此，对于7式中的积分，$\bar{z} > \bar{z}_N + h/2$ 可解析求解，得到 e:

$$\int_{\bar{z}_N + h/2}^\infty \frac{2f_\infty}{(\bar{z}_i - \bar{z}_0)^3} d\bar{z}_0 = \frac{1}{(\bar{z}_i - \bar{z}_N - h/2)^2} \tag{B9}$$

作为补充材料提供的数值代码利用方程（7）以及式（B1）-（B9）中的结果求解该积分方程，并且，一旦通过求解所得线性方程组计算出函数 f，函数 Δq 即可按如下方式计算

$$\Delta q_i = \Delta q(\bar{z}_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}. \tag{B10}$$

图11 中的结果将数值计算得到的界面处流量值 $-q\left(r_s,\ v_s\right) = -r_s\left(z,\ \tau\right) v_r\left(r = r_s,\ z,\ \tau\right)$ 与开口半角取值为 $\beta = 5^\circ$时我们在两个不同时刻的预测结果 $q_\infty\left(1 + |\Delta q|\right)$ 进行了比较，发现我们的理论与数值结果吻合良好。

[1] J. M. Gordillo 和 F. J. Blanco-Rodr´ıguez，“气泡破裂射流由气体空穴的纯惯性塌缩驱动”，《物理评论快报》，已投稿 xx（2023年）。[2] Claus-Dieter Ohl、Manish Arora、Rory Dijkink、Vaibhav Janve 和 Detlef Lohse，“激光诱导空化气泡的表面清洁”，《应用物理快报》89，074102（2006年）。[3] Christiane Lechner、Werner Lauterborn、Max Koch 和 Robert Mettin，“在极靠近固体边界处膨胀和塌陷的气泡产生的快速细射流：数值研究”，《物理评论：流体》4，021601（2019年）。[4] P.L.L. Walls、J.C. Bird 和 L. Bourouiba，“与气泡同行：气泡与其周围微生物之间相互作用综述”，《综合与比较生物学》54，1014–1025（2014年）。[5] Lena Dubitsky、Oliver McRae 和 James C. Bird，“由气泡尺寸和颗粒位置决定的射流液滴中捕获颗粒的富集”，《物理评论快报》130，054001（2023年）。[6] Yoshiyuki Tagawa、Nikolai Oudalov、Claas Willem Visser、Ivo R. Peters、Devaraj van der Meer、Chao Sun、Andrea Prosperetti 和 Detlef Lohse，“高度聚焦的超音速微射流”，《物理评论X》2，031002（2012年）。[7] G.-J. Michon、C. Josserand 和 T. S´eon，“深水池中液滴撞击后的射流动力学”，《物理评论：流体》2，023601（2017年）。[8] S. T. Thoroddsen、K. Takehara、H. D. Nguyen 和 T. G. Etoh，“液滴撞击坑塌陷过程中的奇异射流”，《流体力学杂志》848，R3（2018年）。[9] Zi Qiang Yang、Yuan Si Tian 和 S. T. Thoroddsen，“多种凹坑形状均可在不互溶液滴撞击坑塌陷过程中产生奇异射流”，《流体力学杂志》904，A19（2020年）。[10] Francisco J. Blanco–Rodr´ıguez 和 J. M. Gordillo，“关于液滴撞击深液池以及气泡破裂所产生的射流”，《流体力学杂志》916，A37（2021年）。[11] S. Gekle、J. M. Gordillo、D. van der Meer 和 D. Lohse，“固体物体撞击后的高速射流形成”，《物理评论快报》102，034502（2009年）。[12] S. Gekle 和 J. M. Gordillo，“空腔塌陷后沃辛顿射流的生成与破碎。第1部分：射流形成”，《流体力学杂志》663，293–330（2010年）。[13] S. Popinet，“Gerris：用于复杂几何中不可压缩欧拉方程的基于树结构的自适应求解器”，《计算物理学杂志》190，572–600（2003年）。[14] S. Popinet，“用于表面张力驱动界面流的高精度自适应求解器”，《计算物理学杂志》228，5838–5866（2009年）。[15] A. Antkowiak、N. Bremond、S. Le Dizes 和 E. Villermaux，“撞击后密度界面的短时动力学”，《流体力学杂志》577，241–250（2007年）。[16] Ivo R. Peters、Yoshiyuki Tagawa、Nikolai Oudalov、Chao Sun、Andrea Prosperetti、Detlef Lohse 和 Devaraj van der Meer，“高度聚焦的超音速微射流：数值模拟”，《流体力学杂志》719，587–605（2013年）。[17] J. M. Gordillo、Hajime Onuki 和 Yoshiyuki Tagawa，“流动聚焦产生的冲击式射流生成”，《流体力学杂志》894，A3（2020年）。[18] Hajime Onuki、Yuto Oi 和 Yoshiyuki Tagawa，“用于高黏度流体的微射流发生器”，《物理评论：应用》9，014035 2018( )。[19] Arjan Fraters、Maaike Rump、Roger Jeurissen、Marc van den Berg、Youri de Loore、Hans Reinten、Herman Wijshoff、Devaraj van der Meer、Detlef Lohse、Michel Versluis 和 Tim Segers，“流动聚焦驱动的弯月面振荡导致压电声学喷墨喷嘴中的气泡断裂与卷吸”，《物理评论：应用》16，044052（2021年）。[20] J R Blake 和 D C Gibson，“边界附近的空化气泡”，《流体力学年度评论》19，99–123（1987年）。[21] Outi Supponen、Danail Obreschkow、Marc Tinguely、Philippe Kobel、Nicolas Dorsaz 和 Mohamed Farhat，“单个空化气泡射流的标度律”，《流体力学杂志》802，263–293（2016年）。[22] Fabian Reuter 和 Claus-Dieter Ohl，“利用单个空化气泡生成超音速针状射流”，《应用物理快报》118，134103（2021年）。[23] L. Duchemin、S. Popinet、C. Josserand 和 S. Zaleski，“自由表面气泡破裂时的射流形成”，《流体物理学》14，3000–3008（2002年）。[24] L. Deike、E. Ghabache、G. Liger-Belair、A.K. Das、S. Zaleski、S. Popinet 和 T. Seon，“破裂气泡产生的射流动力学”，《物理评论：流体》3，013603（2018年）。[25] J. M. Gordillo 和 J. Rodr´ıguez-Rodr´ıguez，“毛细波控制气泡破裂射流的喷射”，《流体力学杂志》867，557–571（2019年）。[26] F. J. Blanco-Rodr´ıguez 和 J. M. Gordillo，“关于气泡破裂射流产生的海洋飞沫气溶胶”，《流体力学杂志》886，R2（2020年）。[27] H. Wagner，“¨液体表面的冲击与滑移过程”，《应用数学与力学杂志》12，193–215（1932年）。[28] A A Korobkin 和 V V Pukhnachov，“水体撞击的初始阶段”，《流体力学年度评论》20，159–185（1988年）。[29] S. D. Howison、J. R. Ockendon 和 S. K. Wilson，“小升角下的不可压缩入水问题”，

《流体力学杂志》**222**，215–230（1991年）。[30] G. Riboux 和 J. M. Gordillo，“液滴撞击光滑固体表面的实验：液滴飞溅临界撞击速度模型”，《物理评论快报》**113**，024507（2014年）。[31] F. MacIntyre，“破裂气泡中的流动模式”，《地球物理研究杂志》**77**，5211–5225（1972年）。[32] C.-Y. Lai、J. Eggers 和 L. Deike，“气泡破裂：普适空腔与射流轮廓”，《物理评论快报》**121**，144501（2018年）。[33] B.W. Zeff、B. Kleber、J. Fineberg 和 D.P. Lathrop，“流体表面曲率塌缩与射流喷发中的奇异性动力学”，《自然》**403**，401–404（2000年）。[34] Alessandro Iafrati 和 Alexander A. Korobkin，“平板撞击液体自由表面的初始阶段”，《流体物理学》**16**，2214–2227（2004年）。[35] Ivo R. Peters、Devaraj van der Meer 和 J. M. Gordillo，“圆盘撞击液体表面后的飞溅波与冠状射流破碎”，《流体力学杂志》**724**，553–580（2013年）。