arXiv:2303.03820v2 [math.AG] 3 Apr 2023

# 三次四维簇的 K3 范畴——最新进展

DANIEL HUYBRECHTS

摘要。 我们重新审视 [20], 回顾后续进展，并指出一些尚未解决的问题。本文避开较为技术性的要点，着重阐述主要思想和整体图景。

论文 [20] 主要依托 Hassett [16], 、Kuznetsov [27, 29], 、Addington– Thomas [2], 的工作；往前追溯，还依托 Mukai [36] 和 Orlov [37]的工作。

[20]的目的有二：(i) 将现有关于三次四维簇与 K3 曲面的理论扩展至扭曲 K3 曲面；(ii) 为与三次四维簇相关联的 Kuznetsov K3 范畴，建立类似于（扭曲）K3 曲面之间导出等价理论的理论。

论文 [20] 在 (i) 方面取得了成功，但在 (ii) 方面仅部分成功。即便到了今天，正如下文将回顾的那样，针对三次四维簇的 Mukai–Orlov计划仍未完成。

有关更 为全面地论述一般理论，我们参见 [17, 21, 22, 35]。

## 1. 霍奇理论与导出范畴

我们回顾两个主要对象的基本特征：三次四维簇的霍奇结构及其导出范畴。

**1.1. 霍奇理论。** Deligne 和 Rapoport 首先注意到，三次四维簇的霍奇结构与 K3曲面的霍奇结构之间存在某些相似性[41] ，后来 Beauville、Donagi、Voisin [8], [45], 及其他人对此作了进一步研究。这一神秘联系的首次系统研究由 Hassett 在其博士论文 [16]中完成。

对于复数域上的光滑三次四维簇 $X \subset \mathbb{P}^5$ ，其中间上同调$H^4(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 23}$ 的秩为 23，非平凡的霍奇数为 $h^{3,1} = h^{1,3} = 1$ 和$h^{2,2} = 21$。因此，经过 Tate 扭曲后，它是一个 K3型的权二霍奇结构。通过转向本原上同调 $H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} := h^{2\perp} \subset H^4(X,\mathbb{Z})$, 可将其秩降至 22。作为一个格，后者可以本原且等距地（相差一个整体符号）嵌入

这是于2022年2月10日在柏林举行的Compositio基金会颁奖典礼上所作报告的讲稿。作者受到 ERC协同基金 HyperK（ID 854361）的资助。我谨感谢 N. Addington、P. Belmans 和 R. Thomas 提出的宝贵意见和建议。

K3 曲面的完整上同调格：

$$H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \hookrightarrow H^*(\mathrm{K3},\mathbb{Z}).$$

注意，补格 $H^4(X,\mathbb{Z})^{\perp}_{\mathrm{pr}} \subset H^*(X,\mathbb{Z})$ 是秩为五的格 $H^0 \oplus H^2 \oplus \mathbb{Z}\cdot h^2 \oplus H^6 \oplus H^8$，其霍奇结构是平凡的；特别是，它在 $X$的变形下保持不变。

**注 1.1.** Voisin 证明的三次四维簇的全局托雷利定理 [45] 指出，两个光滑三次四维簇 $X$，$X' \subset \mathbb{P}^5$ 同构，当且仅当存在一个霍奇等距 $H^4(X,\ \mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \simeq H^4(X',\ \mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$：

$$X \simeq X' \ \Leftrightarrow\ H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \simeq H^4(X',\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}.$$

此外， $X$ 的自同构群 Aut$(X)$ 与$H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$ 的霍奇等距群 Aut$(H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}})$ 在映射 –id 下相同。

霍奇数为 $h^{3,\ 1} = h^{1,\ 3} = 1$ ，且格 $H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$ 与 K3 曲面的上同调环密切相关，因此自然引出了以下问题。

**问题 1.2**。 在什么条件下，霍奇结构 $H^4(X\,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$ 能够由某个 K3 曲面实现（其具体含义将在下文明确）？

Hassett [16] 通过极化 K3 曲面的本原上同调$(S\,H)$来研究这一问题。权二霍奇结构 $H^2(S\ \mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$的秩为 21，他询问在什么条件下，它能够以本原、等距且与霍奇结构相容的方式嵌入到 $X$的本原上同调中：

$$H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \hookrightarrow H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \tag{1.1}$$

（这会自动成为余秩一的）。事实证明，更适合范畴化观点的方法则是转而寻求一个霍奇等距

$$\widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}(S,\mathbb{Z}). \tag{1.2}$$

这里， $\widetilde{H}(S\,\mathbb{Z})$ 是完整上同调 $H^*(S\,\mathbb{Z})$，并将其视为权二霍奇结构（即 Mukai 霍奇结构）。左边的定义更为复杂。Addington 和 Thomas [2] 引入了一个来自拓扑 K 理论的余秩三格

$$\widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \subset K_{\mathrm{top}}(X)$$

作为 $[\mathcal{O}]$、$[\mathcal{O}(1)]$、$[\mathcal{O}(2)] \in K_{\mathrm{top}}(X)$ 的补空间，并通过声明 $\widetilde{H}^{2,\ 0}(X)$ 是 $H^{3,\ 1}(X)$（经由陈特征）的拉回，为其赋予权二霍奇结构。配对由 Mukai 向量定义，即黎曼–罗赫配对。从标准整系数上同调 $H^*(X、\ \mathbb{Z})$ 到整系数拓扑 K 理论的过渡颇为微妙。对于 K3曲面，两者相同，而认识到这种差异的重要性是关键所在。

该理论的发展。霍奇等距的两侧（1.2）扩展了 $X$ 和 $S$：

$$H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \subset \widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \text{ and } H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \subset \widetilde{H}(S,\mathbb{Z}).$$

我们将（1.2）视为（1.1）的非极化版本，即其中不涉及 K3 曲面的极化 $S$。当然， $X$的极化选择并不存在歧义。

1.2. **导出范畴**。 与其研究三次四维簇的霍奇结构，不如考察其凝聚层的有界导出范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ 。

**备注 1.3**。 备注 1.1 的类似结果是 Bondal 和 Orlov [11]的定理：两个光滑三次四维簇 $X$、$X'$ 同构，当且仅当存在精确线性等价$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X')$:

$$X \simeq X' \Leftrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X').$$

类似地， $X$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 与 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ 的精确线性自同构等价群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X))$ 基本上一致，差别仅在于移位以及与线丛作张量积。

通过某个全三角子范畴建立起了与K3曲面的联系 y

$$\mathcal{A}_X \subset \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X).$$

根据定义，它由正交条件 $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(i), E[*]) = 0 \text{ for } i = 0, 1, 2$ 确定。Kuznetsov [27, 29], 的一项著名成果提出了一个关键观察：按照此定义，$\mathcal{A}_X$ 具有K3曲面或阿贝尔曲面的导出范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$ 所典型具备的一种性质：对所有 $E, F \in \mathcal{A}_X$，都存在一个函子性同构 $\mathrm{Hom}(E,F) \simeq \mathrm{Hom}(F, E[2])^*$。Buchweitz [13] 和Orlov [38]则将 $\mathcal{A}_X$ 解释为一个分次矩阵分解范畴。

问题 1.2 的类似问题如下。

**问题 1.4.** 在什么条件下，对 $X$ 存在一个精确线性等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$ ，使其等价于某个K3曲面的导出范畴 $S$?

## 2. 有理性猜想

三次三维体的中间上同调 $H^3(Y、\mathbb{Z})$ 和中间雅可比簇 $J(Y)$ 是重要且有趣的不变量，除了 Clemens 和 Griffiths 将其应用于光滑三次三维超曲面的非有理性这一著名成果之外，它们还具有其他重要意义。三次四维簇的中间上同调 $H^4(X、\mathbb{Z})$ 以及 K3范畴 $\mathcal{A}_X$也是如此。[1]

[1]虽然三维和四维的三次超曲面情形有一些相似之处，但它们的Kuznetsov分量所起的作用并不相同。例如，光滑三次三维超曲面由其Kuznetsov分量决定 [10]。

对于需要以具体应用作为研究这两个概念 $H^4(X、\mathbb{Z})$ 和 $\mathcal{A}_X$动机的读者，我们回顾两个广为人知的有理性猜想（以及两个知名度较低的猜想）。

**猜想 2.1** (Hassett)。一个光滑三次四维簇 $X \subset \mathbb{P}^5$ 是有理的，当且仅当存在某个极化 K3 曲面 $(S, H)$，使得霍奇结构 $H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \hookrightarrow H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$ 之间存在本原等距嵌入：

$$X \text{ rational} \;\Leftrightarrow\; \exists\, H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \hookrightarrow H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}. \tag{2.1}$$

~ ~等价地， $X$ 是有理的，当且仅当存在某个（未极化的）K3 曲面 $S$，使得霍奇等距 $H(X,\mathbb{Z}) \simeq H(S,\mathbb{Z})$

$$X \text{ rational} \;\Leftrightarrow\; \exists\, \widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}(S,\mathbb{Z}). \tag{2.2}$$

Hassett [16] 没有明确陈述这一猜想（2.1），但显然这正是他（以及 Harris）的想法，而改写形式（2.2）则归功于 Addington 和 Thomas。已知结果汇总见注记 4.1 。

下一个猜想首次明确发表于 [31, 猜想 3]。

**猜想 2.2** （Kuznetsov）。光滑三次四维簇 $X \subset \mathbb{P}^5$ 是有理的，当且仅当存在精确线性等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$ ，其中某个 K3 曲面为 $S$:

$$X \text{ rational} \;\Leftrightarrow\; \exists\, \mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S). \tag{2.3}$$

这两个猜想的风格截然不同，但 Addington 和 Thomas 的显著结果 [2] 表明，它们实际上是等价的。我们将在下文对此作更详细的说明。

不过，当然，在这两个猜想中的任何一个得到证实之前（这也就意味着另一个也得到证实），我们可以自由提出其他猜想。对于较为谨慎的读者而言，如果认为上述两个猜想预言有理的三次超曲面过多，那么下面这个版本或许更合其意 [15]。与前两个猜想相比，这个有理性猜想似乎有更充分的几何依据。

**猜想 2.3** （Galkin–Shinder）。光滑三次四维簇 $X$ 是有理的，当且仅当其直线Fano簇 $F(X)$ 与某个 K3 曲面 $S$的希尔伯特概形 $S^{[2]}$ 双有理：

$$X \text{ rational} \;\Leftrightarrow\; \exists\, F(X) \sim S^{[2]}. \tag{2.4}$$

如果正如 Hassett 和 Kuznetsov 所猜想的那样，K3 曲面确实决定三次四维簇是否有理，那么我们可以大胆提出一个猜想：允许存在扭曲 K3 曲面 $(S, \alpha \in \mathrm{Br}(S))$，便能预测更多三次超曲面是有理的。由此便会引出以下更具挑衅性的推测。

**猜想 2.4.** 光滑三次四维簇 $X$ 是有理的，当且仅当存在一个扭曲 K3 曲面 $(S,\alpha)$，使得有精确线性等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S,\alpha)$。

反对这一最后的有理性猜想的唯一依据是，它会预言所有包含一个平面的三次四维簇都是有理的。然而，由于这类簇是研究最多的三次四维簇实例之一，若它们确为有理的，早就应该有人证明了。请注意，在包含一个平面的三次四维簇中，已知为有理的那些构成一个稠密子集。

总有一天，三次四维簇的有理性问题会得到定论，无论是依据上述某个猜想，还是通过其他方式。不过，我相信，人们对三次四维簇的霍奇结构$H^4(X,\mathbb{Z})$ 以及 K3范畴 $\mathcal{A}_X$ 的兴趣仍将持续。例如，可以考虑用以下相关猜想来控制三次四维簇的双有理性。

**猜想 2.5**。 假设两个光滑三次四维簇 $X, X' \subset \mathbb{P}^5$ 之间存在精确线性等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathcal{A}_{X'}$。那么 $X$ 和 $X'$ 是双有理的。

秉承 [2], 这一猜想应等价于预测 $X$ 与$\sim$ $\sim X'$之间存在定向霍奇等距时 $H(X,\mathbb{Z}) \simeq H(X',\mathbb{Z})$，更多说明见下一节。Fan 和 Lai 为这一猜想提供了一些证据 [14]。这一猜想的逆命题显然不成立。

## 3. 两个著名例子

两类光滑三次四维簇一直被用作检验各种问题和猜想的试验场：普法夫三次四维簇，以及含有平面的三次四维簇。后者在[2]中扮演着核心角色。

**3.1. 普法夫三次四维簇**。若三次四维簇 $X$ 是由六维向量空间 $W$上所有退化二形式构成的空间 $\mathbb{P}(\bigwedge^2 W^*)$ 中的普法夫通用超曲面与一个线性 $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 W^*)$ 相交而得到，则称其为普法夫型。事实证明，一个（一般的）普法夫三次四维簇包含某些四次正规卷曲面 $\Sigma_P$，这些曲面由14 次 K3 曲面 $S$ 上的点 $P \in S \subset \mathrm{G}(2,W)$ 参数化。这些曲面的存在意味着存在一个非平凡的霍奇类 $0 \neq v \in H^{2,2}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$，即 $v = 4h^2 - 3[\Sigma_P]$。它在$H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$ 中的正交补与 $S$ 的本原上同调霍奇等距：

$$v^{\perp} \simeq H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}. \tag{3.1}$$

这些霍奇理论计算可追溯至 Beauville 和 Donagi [8]。他们还证明了法诺簇 $F(X)$（线的法诺簇）与希尔伯特概形 $S^{[2]}$ 之间的双有理性，并证明了 $X$的有理性；这是一项早已为 Fano 所知的经典结果。

正如第 1.1 节已提及的，从范畴的角度来看，将 (3.1) 扩展为霍奇等距

$$\widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}(S,\mathbb{Z})$$

更为 概念性的，但并未充分体现几何情形的丰富性 n.

在范畴论方面，Kuznetsov [31] 利用他的同调射影对偶构造了一个精确线性等价

$$\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S).$$

Addington 和 Lehn [1]利用四次滚曲面族 $\Sigma_P$提出了另一种更直接从几何出发的论证。

**3.2. 含平面的三次超曲面。** 包含一个平面的光滑三次四维簇 $\mathbb{P}^2 \simeq P \subset X \subset \mathbb{P}^5$ 还具有一个额外的霍奇类 $0 \neq v \in H^{2,\,2}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$，即 $v = h^2 - 3[P]$。它的正交补 $v^{\perp} \subset H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$ 与 K3 曲面 $S$ 相关联；该曲面以所有包含该平面的线性交截的剩余二次曲面$Q_x$, $x \in S$为参数，并带有一族直纹。各直纹粘合成一个布劳尔–塞韦里簇 $F_P \longrightarrow S$，并可自然地与之关联一个布劳尔类$\alpha \in \mathrm{Br}(S)$。

事实证明，霍奇结构 $v^{\perp}$ 等距嵌入于 $H^2(S、\,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$:

$$v^{\perp} \hookrightarrow H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}. \tag{3.2}$$

不同于（3.1），这个嵌入的指标为二，Voisin 已经注意到这一点 [45]。直到 [18] 之后，才有可能从扭曲 K3 曲面的角度对此获得清晰的理解。也许理解（3.2）的最佳方式，是将其视为与扭曲超越格之间的霍奇等距

$$v^{\perp} \simeq T(S,\alpha) := \ker(\alpha\colon T(S) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

这对于包含一个平面 $P \subset X$ 的非常一般的三次超曲面成立，或者将其视为一个霍奇等距

$$\widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}(S,\alpha,\mathbb{Z}).$$

关于扭曲 K3 曲面的霍奇结构的定义，参见 [18] $(S,\ \alpha)$ 其中需要选择一个额外的 $B$-域提升 $\alpha$。

霍奇理论图景由 Kuznetsov [27] 证明存在一个精确线性等价

$$\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S,\alpha).$$

这里，等式右侧表示 $\alpha$ 上的扭曲凝聚层有界导出范畴；这一概念在 [36] 中已有先声，并在 [18] 中得到进一步研究。沿用 Addington 和 Lehn [2] 对 Pfaffian 三次超曲面的思路，更具几何性的证明见 [22, 第 7 章。3] 利用扭曲 K3 曲面 $(S$ 的霍奇结构，$\alpha)$ Kuznetsov [27] 证明了

对于包含一个平面的非常一般的三次超曲面，范畴 $\mathcal{A}_X$ 不等价于任何 K3 曲面的 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S')$ $S'$。

## 4. Hassett除子

考虑所有光滑三次四维簇的模空间 $\mathcal{C}$ 。它是一个 Deligne–Mumford叠，其准射影粗模空间的维数为 20。标准的霍奇理论论证表明，

$$\{X \mid H^{2,2}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \neq 0\} \subset \mathcal{C}$$

所有具有非平凡本原霍奇类的光滑三次四维簇构成一个可数并$\bigcup \mathcal{C}_d$，其分支为不可约除子 $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{C}$。例如，按照适当的约定， $\mathcal{C}_8$ 是所有包含平面的三次超曲面的集合，而 $\mathcal{C}_{14}$ 是所有 Pfaffian 三次体的集合。

Hassett [16] 对这个可数并进行了详细的数值分析。首先，指标$d$ 是 $H^2$的判别式, $^2(X,$ $\mathbb{Z})$ 非常一般的 $X \in \mathcal{C}_d$。 [2] 然后他引入了两个数值条件（$*$）和（$**$），这里不再详述，它们满足

- 当且仅当 $d$ 满足（$*$）时，除子 $\mathcal{C}_d$ 非空。
- 满足（$**$）的 $d$所对应的除子 $\mathcal{C}_d$ 描述了所有满足以下条件的三次四维簇 $X$ 的集合：存在霍奇结构的本原等距嵌入 $H^2(S、\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \hookrightarrow H^4(X、\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$（其余秩自动为一），其中 $(S\,H)$ 是一个次数为 $d$的极化 K3 曲面。从更具范畴论的角度来看，略去极化后，可以将其重新表述为

$$\bigcup_{(**)} \mathcal{C}_d = \{X \mid \widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}(S,\mathbb{Z})\}. \tag{4.1}$$

普法夫三次四维簇的除子 $\mathcal{C}_{14}$ 是这些除子中的一个。此外，假设猜想 2.1成立，并集（4.1）就是所有有理光滑三次四维簇的集合。

**注释 4.1**。 展开数值条件（$**$），可知猜想 2.1 预言了包含于 Hassett除子 $\mathcal{C}_{14}$、 $\mathcal{C}_{26}$、 $\mathcal{C}_{38}$、 $\mathcal{C}_{42}$、 $\mathcal{C}_{62}$、 $\mathcal{C}_{74}$.....中的所有三次超曲面都是有理的。对于$d = 14$，这是经典结果；对于接下来的两个值 $d = 26$ 和 $d = 38$，Russo 和 Staglianò 最近证实了这一点 [42]。情形 $d = 42$ 再次由 Russo 和 Staglianò 解决 [43]，因此，这一系列中第一个尚未知道其有理性的 Hassett 除子是 $\mathcal{C}_{62}$。

- 在 Hassett 的工作基础上， [20] 给出了所有与扭曲K3曲面相关联的三次四维簇的数值描述。这个数值条件记作（$**'$）。因此

$$\bigcup_{(**')} \mathcal{C}_d = \{X \mid \widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}(S,\alpha,\mathbb{Z})\}.$$

[2]如果将其作为除子 $\mathcal{C}_d$ 的定义，那么它的不可约性就非常难以证明。

• 另一数值条件（$***$）描述了猜想 2.3中的三次四维簇集合，该条件由 Addington 描述 [3], ，改进了 Hassett 早期的工作 [16]。

这四个数值条件由一系列严格蕴含关系相互联系

$$(***) \Rightarrow (**) \Rightarrow (**') \Rightarrow (*),$$

例如， $d = 74$ 满足（$**$），但不满足（$***$）；而 $d = 8$、32 满足（$**'$），但不满足（$**$）。[3]

请注意，如果猜想 2.1 或者等价地，猜想 2.2 最终被证明成立，那么我们仍然可以对数值条件（$***$）作几何解释。但三次四维簇的哪一种特殊几何性质对应于（$**'$）呢?

为方便读者，下面列出满足相应四个数值条件的 $d$的最小若干个值:

$(*)$ $d = 8$, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 30, 32, 36, 38, 42, 44, 48, 50, 54, 56, 60, 62, 66, 68, 72, 74, 78, .....。$(**')$ $d = 8$, 14, 18, 24, 26, 32, 38, 42, 50, 54, 62, 72, 74, 78, 86, 96, 98, 104, .....。$(**)$ $d = 14$, 26, 38, 42, 62, 74, 78, 86, 98, 114, 122, 134, 146, .....。$(***)$ $d = 14$, 26, 38, 42, 62, 86, 114, 122, 134, 146, .....。

## 5. Addington 和 Thomas 及其扭曲

Addington 和 Thomas 的方法 [2]包含两个主要要素。

（i）一方面，他们发展了格论中出人意料地微妙的论证，从 Hassett 以本原等距嵌入 $H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \hookrightarrow H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$ ~霍奇结构为出发点，转向更适合范畴的霍奇等距 $H(X, \mathbb{Z}) \simeq H(S,\mathbb{Z})$。此外，他们还证明，对于每个满足（$*$）的 $d$，也就是说，对于使得 $\mathcal{C}_d$ 非空的 $d$，都存在一个位于交集 $X \in \mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_d$中的三次四维簇，即一个含有平面的三次四维簇，并且其相关 K3 曲面上的相关布劳尔类 $\alpha$ 还是平凡的。因此，根据 Kuznetsov[27], 的结果，每个非空的 Hassett除子 $\mathcal{C}_d$ 都包含一个三次四维簇 $X \in \mathcal{C}_d$ ，其具有某个 K3 曲面的 $\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$ $S$。

(ii) 给定等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$ 的傅里叶–穆凯核 $\mathcal{E}$ 的变形理论由其在上同调上的作用所控制。只要上同调未检测到任何障碍，傅里叶–穆凯核就可以变形。因此，对于每个满足 $(**)$ 的$d$ ，都可以在一个开子集 $\varnothing \neq U \subset \mathcal{C}_d$ 上对 $\mathcal{E}$ 进行变形。这种变形论证最初由 Toda [44] 运用，随后 Huybrechts–Macrì–Stellari [24] 和 Huybrechts–Thomas [25] 也采用了这种方法。从形式变形过渡到扎里斯基开集上的变形，依赖于 Lieblich[34] 的结果。

[3]Ouchi 的结果 [39] 链接 $(***)$ 以及 $(**')$ 对于 $d$ 的某些取值。例如，对于 $d = 8$ ，他证明，只要 $\alpha = 1$ ，从而 $X$ 是有理的，那么 $F(X)$ 就与 $S^{[2]}$ 双有理。

由于傅里叶–穆凯核定义等价这一性质是一个开条件，因此得到了 [2] 的主要结果，该结果曾在 [20] 遵循相同思路推广到了扭曲情形。

**定理5.1 (Addington–Thomas、Huybrechts)。** 设 $X \subset \mathbb{P}^5$ 为光滑三次四维簇，且 $\sim$ $\sim(S,\ \alpha)$ 为扭曲 *K3* 曲面。则存在霍奇等距 $H(X,\ \mathbb{Z}) \simeq H(S,\ \alpha,\ \mathbb{Z})$ 当且仅当存在正合等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S,\ \alpha)$。

**注5.2。** 该结果并未完全按照[2, 20] 上述表述得到证明。由于技术上的限制，当时只对每个Hassett除子 $\mathcal{C}_d$的扎里斯基稠密开子集进行了证明，并假设所有等价都是傅里叶–穆凯型。Bayer等人 [6] 以及 Li、Pertusi和Zhao [33] 的最新成果，使我们能够以这一更完整的形式表述该结果。

将关于 K3曲面的结果推广到扭曲情形，或许看起来并不十分令人兴奋，也并非特别困难。然而，研究一般的扭曲K3曲面 $(S,\alpha)$有一个主要优势：根据[23], 群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S,\alpha))$ 的正合线性自等价通常（足够）容易计算。在给出精确表述之前，回顾一下，对于射影 K3 曲面 $S$，群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S))$ 的正合线性自等价可由 Bridgeland猜想 [12], 猜测性地描述；除皮卡秩为一的情形外，该猜想仍未解决，并且预计该群总是很大且结构复杂。

**定理5.3** (Huybrechts–Macrì–Stellari)。 假设 $(S,\ \alpha)$ 是一个扭曲 *K3* 曲面，且$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S,\ \alpha)$ 不包含任何球形对象。那么自然表示的核

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S,\alpha)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{H}(S,\alpha,\mathbb{Z}))$$

由二重移位 [2]张成。

事实证明，这种情况在与三次四维簇相关的扭曲 K3 曲面中经常出现。

**定理5.4** (Huybrechts)。 对于满足 $(**')$ 的无穷多个 $d$，与非常一般的三次超曲面 $X \in \mathcal{C}_d$ 相关的扭曲 *K3* 曲面$(S,\ \alpha)$ 不含任何球形对象。

[2, 20] 中发展的变形理论使我们能够据此描述非常一般的三次四维簇的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_X)$。理想情况下，下一个结果应涵盖所有未包含在任何 Hassett除子 $\mathcal{C}_d$中的 $X$，但目前尚无此结论。

**定理5.5** (Huybrechts)。 非常一般的三次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^5$ 的辛自等价群自同构群$_s(\mathcal{A}_X)$ 包含偶移位群 $\mathbb{Z}\cdot[2]$，且其为指数三的子群

$$\mathrm{Aut}_s(\mathcal{A}_X)/\mathbb{Z}\cdot[2] \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

**注5.6**。 非常一般的三次超曲面 $X$ 的 K3范畴 $\mathcal{A}_X$与非常一般的非射影 K3 曲面 $S$的有界导出范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$ 有一些相似之处，但也存在差异。对于前者，霍奇类构成正定秩二格 $\widetilde{H}^{2,\,2}(X,\mathbb{Z}) \simeq A_2$；对于后者， $\widetilde{H}^{1,\,1}(S,\mathbb{Z})$ 是一个不定双曲平面。

在这两种情况下，可以计算自等价群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_X)$ and $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S))$ ，而且 Bridgeland猜想已得到证明。然而，对于所有满足 $\widetilde{H}^{2,2}(X,\mathbb{Z}) \simeq A_2$ 的三次超曲面 $X$，我们尚无这一结果；目前只对其中一个未明确指定的非常一般子集成立。

## 6. 尚有哪些问题悬而未决?

要充分确立 Mukai 为 K3 曲面所发展的这一图景的类比[36] 以及 Orlov [37] (和 Huybrechts–Stellari [18] 在扭曲情形下的成果)，就需要证明以下猜想。

**猜想6.1**。 两个光滑三次四维簇 $X, X' \subset \mathbb{P}^5$ 的 K3 范畴$\mathcal{A}_X$ 和 $\mathcal{A}_{X'}$ 之间存在精确线性等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathcal{A}_{X'}$，当且仅当存在一个保持定向的霍奇等距 $\widetilde{\quad} \qquad \widetilde{\quad} H(X,\mathbb{Z}) \simeq H(X',\mathbb{Z})$。

“仅当”方向，至少对于傅里叶–穆凯型的等价，在[20]中已经得到证明，并不困难。至于“如果”部分，也就是从给定的霍奇等距构造一个等价，我们有两类结果：

（i）对于满足（$**'$）的 $X \in \mathcal{C}_d$ ，猜想成立。这一点在 [2]中对满足更强条件（$**$）的 $d$ 作了一般性证明，随后又在 [20] 中通过扭曲处理，从而也涵盖较弱的条件（$**'$）。同样，要涵盖所有 $\mathcal{C}_d$ 以及一般的等价，需要采用较新的工作 [6, 33]。对于每个 $\mathcal{C}_d$中的非常一般（但未具体指定）的三次体，猜想也成立（对 $d$不再附加任何条件）。

（ii）[20] 中注意到，如果 $X$ 不包含于任何Hassett除子中，即 $X \notin \bigcup_{(*)} \mathcal{C}_d$，那么任何满足 $\mathcal{A}_X \simeq \mathcal{A}_{X'}$ 的其他三次 $X'$ 实际上都同构于 $X$:

$$\mathcal{A}_X \simeq \mathcal{A}_{X'} \;\Leftrightarrow\; X \simeq X'.$$

事实上，根据猜想6.1 中显而易见的“仅当”方向，任何此类（FM）等价都会在超越格之间诱导一个霍奇等距 $H^4(X,\ \mathbb{Z})_{\mathrm{pr}} \simeq H^4(X',\ \mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$。由全局托雷利定理可知，这意味着 $X \simeq X'$。

或者，任何等价 $\mathcal{A}_X \simeq \mathcal{A}_{X'}$ 对于$X \notin \bigcup_{(*)} \mathcal{C}_d$ 都会导出法诺簇 $F(X) \simeq F(X')$ 之间的一个同构，而 Charles 提出的全局托雷利定理的几何版本（参见 [22, 第2章。3], ）足以得出结论。

还有更多结果进一步证实了 Mukai–Orlov 理论与三次四维簇的 K3 范畴理论之间的类比：前者适用于（扭曲）K3 曲面的 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$，或更一般地，适用于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S,\alpha)$ 。例如，具有等价 K3 范畴的三次四维簇的数量为 $\mathcal{A}_X$

总是有限的。这一点已由 [20] 证明，Perry 也独立地得出了这一结论。Pertusi [40]讨论了 Hassett 除子中非常一般的三次四维簇的更精确计数；Fan 和 Lai 则研究了某些未与 K3 曲面相关联的三次超曲面 [14]。

## 7. 次数平移

我们在定理 5.5 中看到，自同构群$_s(\mathcal{A}_X)/\mathbb{Z}\cdot[2]\simeq\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 对于非常一般的三次四维簇。这个三阶群之所以出现，是因为次数平移函子。这是一个特定的自等价 $T_X\in$ 自同构群$(\mathcal{A}_X)$ 满足

$$T_X^3\simeq[2].$$

对 $T_X$ 有两种解释。按照 Kuznetsov [30], $T_X$ 是函子　　r

$$T_X\colon E\longmapsto j^*(E\otimes\mathcal{O}(1)),$$

其中 $j^*\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)\longrightarrow\mathcal{A}_X$ 是投影，即嵌入 $\mathcal{A}_X\hookrightarrow\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ 的左伴随。或者，采用 Orlov 将 $\mathcal{A}_X$ 解释为分次矩阵分解范畴的观点$(K\xrightarrow{\alpha}L\xrightarrow{\beta}K(3))$, $T_X$ 可以看作次数平移[4]

$$T_X\colon(K\xrightarrow{\alpha}L\xrightarrow{\beta}K(3))\longmapsto(L\xrightarrow{-\beta}K(3)\xrightarrow{-\alpha}L(3)).$$

**注7.1**。 请注意，任意 K3 曲面 $S$ 都不具有满足上述性质的自等价 $T_S\in$Aut$(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S))$ $T^3\simeq[2]$。这一性质是否可能刻画了那些存在三次四维簇 $X$ 且满足 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)\simeq\mathcal{A}_X$的 K3 曲面 $S$？这种等价在上同调层面的存在性 $T$ 是否就足够了?

次数平移函子 $T_X$ 不仅对非常一般的三次超曲面$X$起着特殊作用——对于这类超曲面，$T_X$ 和 [2] 基本上生成了 $\mathcal{A}_X$的自等价群——实际上它对所有三次超曲面都起着特殊作用。借助它，可以通过Jacobi环从 $\mathcal{A}_X$ 重构三次超曲面。

**定理7.2** (Huybrechts–Rennemo)。 两个光滑三次四维簇的 *K3* 范畴之间任何与次数平移函子 $T_X$和 $T_{X'}$ 相容的精确线性等价 $\mathcal{A}_X\simeq\mathcal{A}_{X'}$，都会诱导分次*Jacobian*环 $J(X)\simeq J(X')$ 之间的同构，进而诱导一个同构 $X\simeq X'$。

在 [26] 随后，这一结果被结合起来，为三次四维簇的全局托雷利定理提供了一个新的证明。首先利用猜想6.1 针对非常一般的三次超曲面 $X$，将任意霍奇等距 $H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}\simeq H^4(X',\mathbb{Z})_{\mathrm{pr}}$提升为一个等价 $\mathcal{A}_X\simeq\mathcal{A}_{X'}$，然后利用定理5.5 证明这种等价会自动与次数平移函子 $T_X$ 和$T_{X'}$交换。由此可证得一般整体Torelli定理；对于三次四维簇而言，该定理意味着所有光滑三次四维簇的全局托雷利定理。关于非常一般的

[4]人们原本会期待，将 $\mathcal{A}_X$ 解释为一个矩阵分解范畴能够带来具体的见解，但迄今仍缺少一个真正令人信服的应用，能将其用于这里讨论的相关思想。

三次超曲面，若仅假设其与次数平移函子在上同调层面相容，则该定理的另一种证明见 [7]。

## 8. $\mathcal{A}_X$的结构

K3范畴 $\mathcal{A}_X$ 产生了有趣的高维超凯勒范畴 $\mathcal{A}_X^{[n]}$。它们构造为外积的 $\mathfrak{S}_n$-等变版本

$$\mathcal{A}_X^n = \mathcal{A}_X \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_X \subset \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X^n)$$

或者，更直接地说，构造为 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}([X/\mathfrak{S}_n])$ 的某个满子范畴。

考虑 $\mathcal{A}_X$ 中对象的射影模空间 $M$，例如，假设这些对象关于某个稳定性条件是稳定的，并假设 $M$ 的维数为 $2n$。

**问题 8.1.** $\mathcal{A}_X^{[n]}$ 是否等价于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(M)$?

凭借 Li、Pertusi和Zhao 的结果[32], ，直线Fano簇 $F(X)$ 可以被视为这样的一个模空间。因此，作为这个一般问题的一个特例，我们可以得到一条归于 Galkin 的猜想。他提出的问题是：是否存在一个精确线性等价

$$\mathcal{A}_X^{[2]} \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(F(X))?$$

注意，对于满足$***$的一般三次 $X \in \mathcal{C}_d$，若 $d$，则有 $F(X) \simeq S^{[2]}$和$\mathcal{A}_X \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$，二者结合起来确实给出

$$\mathcal{A}_X^{[2]} \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)^{[2]} \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S^{[2]}) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(F(X)).$$

支持 $n = 2$存在肯定答案的某些证据，是三角范畴的 Grothendieck 群中的等式

$$[\mathcal{A}_X^{[2]}] = [\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(F(X))] \in K_0(\text{dg-cat}),$$

这相当容易证明。Belmans、Fu 和 Raedschelders[9] 给出了一个更强的结果，表明 $\mathcal{A}_X^{[2]}$ 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(F(X))$ 都可以实现为 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X^{[2]})$ 的两个半正交分解中的半正交因子，而这两个分解中所有其他因子都分别与 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$等价。

**注记 8.2**。除了极具启发性之外，上述问题也有助于阐明关于 K3 曲面的以下未解问题。设 $S$ 是一个 K3 曲面，$M(v)$ 是稳定层的一个射影模空间。它的导出范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(M(v))$ 是否等价于相同维数的希尔伯特概形的导出范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S^{[n]})$？换言之，在固定的 K3 曲面 $S$ 上，所有维数相同的稳定层射影模空间是否彼此导出等价？试图以朴素方法肯定或否定这一问题的尝试都未能成功。不过，人们已在具体例子 [4, 5] 中观察到这一现象，而且 Beckmann 和 Bottini 证明了 Taelman 的 $M(v)$ 和 $S^{[n]}$ 的 Mukai 格是霍奇等距的。

## 9. 未知变形

至少从猜想的角度来看，整体图景似乎相当清晰。然而，关于三次簇的变形理论中，似乎还有很大一部分尚未得到解释。

先从 K3曲面的情形说起。作为复K3曲面， $S$ 的一阶经典变形由 $H^1(S,\mathcal{T}_S)\simeq\mathbb{C}^{20}$ 参数化。若固定 $S$ 的一个极化，那么保持该极化的变形构成一个超平面

$$\mathbb{C}^{19}\simeq H^1(S,\mathcal{T}_S)_{\mathrm{pol}}\subset H^1(S,\mathcal{T}_S)\simeq\mathbb{C}^{20}.$$

$S$的非交换变形（我们将其视为其导出范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$的变形）由 Hochschild上同调 $HH^2(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S))$ 参数化。这个识别

$$HH^2(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S))\simeq H^2(S,\mathcal{O})\oplus H^1(S,\mathcal{T}_S)\oplus H^0(S,\textstyle\bigwedge^2\mathcal{T}_S) \tag{9.1}$$

表明这是一个 22 维空间。一维子空间 $H^2(S,\mathcal{O})$ 和$H^0(S,\bigwedge^2\mathcal{T}_S)$ 分别对应于 $S$的扭曲变形和泊松变形。不过请注意，直和分解通常不会被 $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S))$保持。

现在假设 K3 曲面 $S$ 与三次四维簇 $X$相关联，即 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)\simeq\mathcal{A}_X$。那么诱导映射 $H^1(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow HH^2(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S))$ 是单射，其像包含带极化变形的超平面

$$H^1(S,\mathcal{T}_S)_{\mathrm{pol}}\subset H^1(X,\mathcal{T}_X)\hookrightarrow HH^2(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)).$$

剩余的一个 $X$变形方向，即不包含在 $H^1(S$中的那个， $\mathcal{T}_S)_{\mathrm{pol}}$通常会涉及（9.1）中的三个加项。

然而， $X$ 也存在非交换维数。事实证明，[5]

$$\begin{array}{ccccccc} HH^2(X) & \simeq & H^2(X,\mathcal{O}) & \oplus & H^1(X,\mathcal{T}_X) & \oplus & H^0(X,\bigwedge^2\mathcal{T}_X) \\ & \simeq & 0 & \oplus & \mathbb{C}^{20} & \oplus & \mathbb{C}^{20}. \end{array}$$

两个非平凡子空间的维数都为 20，这一奇特的数值巧合尚无解释。

霍奇理论表明，$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(S)$ 的另一个非交换变形可由 $X$的非交换变形解释。这样一来，K3 曲面 $S$ 还剩下一个非交换变形，而三次四维簇$X$ 则有 19 个（无穷小）非交换变形，它们似乎彼此无关。

## 参考文献

[1] N.Addington, M. Lehn 关于与一个 *Pfaff* 三次四维簇相关联的辛八维簇。《纯粹与应用数学杂志》，731 (2017)，129–137。6

[5]我谨感谢 Pieter Belmans 提供这条信息，并与我进行了有趣的邮件交流。

[2] N. Addington, R. Thomas 三次四维簇的霍奇理论与导出范畴。Duke Math. J. 163 (2014), 1885–1927。1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10[3] N. Addington 关于三次四维簇的两个有理性猜想。Math. Res. Lett. 23 (2016), 1–13。8 [4] N. Addington, W. Donovan, C. Meachan K3曲面上挠层的模空间与导出等价。J. Lond. Math. Soc. 93 (2016), 846–865。12[5] N. Addington, B. Antieau, S. Frei, K. Honigs 有理点与导出等价。Compositio Math. 157 (2021), 1036–1050。12[6] A. Bayer, M. Lahoz, E. Macrì, H. Nuer, A. Perry, P. Stellari 关于族中的稳定性条件。Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 133 (2021),157–325。9, 10[7] A. Bayer, M. Lahoz, E. Macrì, P. Stellari Kuznetsov分量上的稳定性条件。arXiv:1703.10839。即将发表于 Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 12[8] A. Beauville, R. Donagi 四维三次超曲面的直线簇。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 301(14) (1985), 703–706。1, 5[9] P. Belmans, L. Fu, T. Raedschelders 翻转与三次超曲面的导出范畴。Proc. LMS 125 (6) (2022),1452–1482。12[10] M. Bernardara, E. Macrì, S. Mehrotra, and P. Stellari 三次三维体的一个范畴不变量。Adv. Math. 229 (2021), 770–803。3[11] A. Bondal, D. Orlov 从导出范畴及自等价群重构簇。Compositio Math. 125 (2001), 327–344。3[12] T. Bridgeland K3曲面上的稳定性条件。Duke Math. J. 141 (2008), 241–291。9[13] R.-O. Buchweitz，Gorenstein环上的极大Cohen–Macaulay模与Tate上同调。https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/16682, 1986。AMS. Mathematical Surveys and Monographs 262, 2021。3[14]Y.-W. Fan, Kuan-Wen Lai 由 Cremona 变换产生的新有理三次四维簇。arXiv:2003.00366。即将发表于 Algebraic Geometry。5, 11[15]S. Galkin, E. Shinder 三次超曲面的直线Fano簇与有理性问题。arXiv:1405.5154。4[16] B. Hassett 特殊三次四维体。Compositio Math. 120 (2000), 1–23。1, 2, 4, 7, 8[17] B. Hassett 三次四维簇、K3曲面与有理性问题。载于《代数几何中的有理性问题》，Lecture Notes in Math. 第2172卷，第29–66页。Springer，Cham，2016。1[18] D. Huybrechts, P. Stellari 扭曲K3曲面的等价。Math. Ann. 332 (2005), 901–936。6, 10[19] D. Huybrechts 《K3曲面讲义》。Cambridge Studies in Advanced Mathematics 第158卷。Cambridge University Press，Cambridge，2016。[20] D. Huybrechts 三次四维簇的K3范畴。Compositio Math. 153 (2017), 586–620。1, 7, 9, 10, 11[21] D. Huybrechts 三次四维簇、其直线Fano簇及关联K3范畴的霍奇理论。载于《超曲面的双有理几何》，Lect. Notes Unione Mat. Ital. 第26卷，第165–198页。Springer，Cham，2019。1[22] D. Huybrechts 三次超曲面的几何。即将出版，Cambridge Studies in Advanced Mathematics 第206卷。Cambridge University Press，Cambridge，2023。1, 6, 10[23] D. Huybrechts, E. Macrì, P. Stellari 一般K3范畴的稳定性条件。Compositio Math. 144 (2008), 134–162。9[24] D. Huybrechts, E. Macrì, P. Stellari K3曲面的导出等价与定向。Duke Math. J. 149 (2009), 461–507。8

[25] D. Huybrechts，R. Thomas 通过 Atiyah 类和 Kodaira–Spencer 类研究复形的变形—障碍理论。Math. Ann. 346 (2010)，545–569。8[26] D. Huybrechts，J. Rennemo Hochschild上同调与 Jacobian环，以及三次四维簇的 Torelli定理。Algebr. Geom. 6 (2019)，76–99。11[27] A. Kuznetsov 三次四维簇的导出范畴。《有理性问题的上同调与几何方法》，Progr. Math. 282 (2010)，219–243。1, 3, 6, 8[28] A. Kuznetsov Hochschild同调与半正交分解。arXiv:0904.4330。[29] A. Kuznetsov 三次超曲面与 $V_{14}$ 三维簇的导出范畴。Proc. Steklov Inst. Math. 3 (246) (2004)，171–194。arXiv:math/0303037。1, 3[30] A. Kuznetsov 半正交分解的基变换。Compositio Math. 147 (2011)，852–876。11[31] A. Kuznetsov 直线Grassmann簇的同调射影对偶。math.AG/0610957。4, 6[32] C. Li，L. Pertusi，Zhao 三次四维簇上的扭曲三次曲线与稳定性条件。arXiv:1802.01134。12[33] C. Li，L. Pertusi，Zhao Kuznetsov分量中心上的心的导出范畴。arXiv:2203.13864。9, 10[34] M. Lieblich 扭曲轨形层的模空间。Adv. Math. 226 (2011)，4145–4182。8[35] E. Macrì，P. Stellari 关于非交换K3曲面、Bridgeland稳定性与模空间的讲义。载于《超曲面的双有理几何》，Lect. Notes Unione Mat. Ital. 第26卷，第199–265页。Springer，Cham，2019。1[36] S. Mukai 关于 K3 曲面上向量丛的模空间。I.《代数簇上的向量丛》（孟买，1984），Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. 11 (1987)，341–413。1, 6, 10[37] D. Orlov 导出范畴与 K3 曲面的等价。J. Math. Sci. 84 (1997)，1361–1381。1, 10[38] D. Orlov 凝聚层的导出范畴与奇点的三角范畴。《代数、算术与几何：纪念 Yu. I. Manin。第二卷》，Progr. Math. 270 (2009)，503–531。3[39] G. Ouchi K3 曲面上两点的希尔伯特概形与某些有理三次四维体。Comm. Alg. 49 (2021)，1173–1179。8[40] L. Pertusi 非常一般的特殊三次四维体的 Fourier–Mukai伙伴。Math. Res. Lett. 28 (2021)，213–243。11[41] M. Rapoport P. Deligne 文章《K3 曲面的 Weil 猜想》的补篇。Invent. Math. 15 (1972)，227–236。1[42] F. Russo，G. Staglianò 五割线圆锥曲线的一致性与某些可容许立方四次方簇的有理性。Duke Math. J. 168 (2019)，849–865。7[43]F. Russo，G. Staglianò 三割线翻转、相关的 K3 曲面及某些三次四维簇的有理性。JEMS (2022)，即将出版。arXiv:1909.01263。7[44] Y. Toda 变形与 Fourier–Mukai变换。J. Diff. Geom. 81 (2009)，197–224。8[45] C. Voisin 三次超曲面的 Torelli 定理。$\mathbb{P}^5$ Invent. Math. 6 (1986)，577–601。1, 2, 6

数学研究所与豪斯多夫数学中心，波恩大学，恩德尼歇尔大道60号，德国波恩53115电子邮件地址：huybrech@math.uni-bonn.de