arXiv:2303.03845v1 [physics.atom-ph] 7 Mar 2023

非整数维度中 Efimov 态的调控

S

Eduardo Garrido[1*]和 Aksel S. Jensen[2†]

[1*]西班牙马德里 E-28006 塞拉诺街123号，物质结构研究所，IEM-CSIC。[2]丹麦奥胡斯 C, DK-8000，奥胡斯大学物理与天文学系。

*通讯作者。电子邮箱：e.garrido@csic.es；贡献作者：asj@phys.au.dk；
†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

本文旨在说明，通过结合费什巴赫共振与外部束缚势，可以大幅降低相邻 Efimov 态的能量尺度因子。由三个不同粒子组成的系统也能满足 Efimov条件。对于由两个相同的轻粒子和一个重粒子组成的系统，能量因子可降低多个数量级，因此 Efimov态在实验中更容易实现。本文利用外势与非整数维度表述之间的等价性， d。我们采用技术上更简单的 d 方法，推导解析表达式，用以描述两个通过短程方势阱相互作用的粒子的双分量相对波函数。这两个分量分别对应一个开放通道和一个闭合通道。通过相移展开可得散射长度，并由此得到 Efimov条件的解析形式。我们以由 ^{7}锂、 ^{39}钾和 ^{87}铷组成的系统为例，采用现实参数展示结果。文中列出了相关的维数与磁场组合，并进行了讨论。由于这些结果仅依赖远距离性质，因此具有普适性。

关键词：Efimov效应、量子系统的束缚、 d维三体计算、Feshbach共振

1 引言

通过静磁场 [1, 2]诱导费什巴赫共振态布居的能力，在实践中意味着可以调节原子间相互作用，例如控制相应二体势的散射长度。这一事实为研究三体系统打开了大门；在这些系统中，至少一种内部二体相互作用，尤其是，可以调节至具有无限散射长度。这样，含有三个粒子的系统便满足了Efimov效应 [3] 出现的条件。

铯三聚体 [4] 或 Li-Cs-Cs系统 [5] 就是很好的例子。

最近，在文献 [6], 中已有研究表明，约束系统的外场也能诱发 Efimov效应。这是基于这样一个事实：在三维中，吸引势可能无法束缚二体系统；但在二维中，二体系统总是会被束缚。因此，如果二体系统在三维中未被束缚，那么在向二维约束的过程中，必然会有某一时刻二体束缚能等于零，换言之，二体散射长度等于无穷大。在这些条件下，

由两个或三个相同粒子组成的三体系统也会满足Efimov条件。

通过外场描述囚禁的一种有效方法是 d方法，该方法最近发表于参考文献[7]。该方法的核心思想是引入一个连续维数 d，使得依赖于 d的离心势垒能够体现外场的作用，而无需在计算中显式引入外场。囚禁诱导的 Efimov效应在 [8],中首次提出，但文中并未研究压缩程度的连续变化。

沿某一轴施加的外势会限制粒子，使其只能在有限体积内运动。两个极端情形分别是球形和薄饼形，对应的维数分别为 $d = 3$ 和 $d = 2$。参考文献 [9, 10], 证明了这种情形等价于维数相关的离心势垒，并严格证明了两个极限 $d = 2$,3。随后，在通常的三维空间中，将 d波函数解释为沿囚禁轴发生形变的波函数。特别是，当存在Efimov态时，它们必定会沿着形变后的外场方向伸长，也就是说，垂直于压缩方向。

非整数维数 d 与外部谐振子压缩势的长度 b_{ho} 之间的等价关系，可在 [9]中找到，适用于二体系统。对于由全同粒子构成的三体系统，假设粒子间相互作用为谐振子势，谐振子长度为 r_0，则 d 与b_{ho} 之间的关系可推导为 [10]

$$\frac{b_{ho}}{r_0} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{b_{ho}}{r_{2\mathrm{D}}} = \sqrt{\frac{2(d-2)}{(d-1)(3-d)}}, \qquad (1)$$

其中 $r_{2\mathrm{D}}$ 是具有现实相互作用的二维三体系统的均方根半径。

“d 与 $b_{ho}/r_{2\mathrm{D}}$”曲线（式（1））具有很强的普适性，不仅适用于三体系统中粒子间的谐振子势。参考文献 [10],展示了这一点，其中考察了高斯势和莫尔斯势。当涉及不同种类粒子时，中间的 d值可能对应不同的外场。不过，仍然要在两个极限下都成立，式（1）就必须在定量上近似正确，或至少在定性上对区间内所有 d 都成立， $2 < d < 3$。无论如何，针对任何具体实验，可能都需要进行精细调节。

囚禁长度， b_{ho}，与谐振频率， ω，之间满足关系 $\omega = \hbar/(mb_{ho}^2)$，其中 m 是原子的质量。目前可用的囚禁频率范围为数百赫兹，对于中等大小的原子而言，这意味着 b_{ho}/r_0 甚至应接近1000。这个数值对应非常弱的囚禁，因为正如我们从式(1)中所见，对于$b_{ho}/r_0 \approx 1000$ ，我们得到 $d \approx 2.999999$，非常接近3。请注意，例如，对于 $d = 2.9$ ，我们有 $b_{ho}/r_0 \approx 3.1$。这使得 ω 处于数十兆赫的范围，原则上目前尚无法通过实验实现。

当二体势具有无限散射长度时对应的临界维数为 $d = d_E$，它描述了相应二体态能量为零时的囚禁情形。当三个子系统中有两个满足这一条件时，会出现一系列无限多个三体束缚态；这一系列中相邻态的能量比和大小比均保持恒定。这正是 Efimov效应出现的标志。文献 [6, 11] 研究了任意 d下 Efimov态的性质和行为，以及它们如何在 $d = d_E$ 附近出现和消失。在这些条件下，短程二体势的细节所起的作用极小，因此物理学具有普适性。正因如此，许多物理性质都可以用简单的势来描述，甚至可能得到解析解。文献 [12] 针对 $d = 3$，以解析方式推导了散射长度、磁场强度与测得的分子束缚能之间的普适关系。本文采用有限程方势构成的双通道模型，避免了文献 [13] 中出现的零程奇异性。这些详细关系在实验上已知的铯分子体系中得到了成功检验，并且很好地再现了 Feshbach共振位置附近的强烈变化。

本工作的目的是在 d 维数中，采用一种类似的、具有方势阱势的双通道模型。我们的目标是研究在一般的、未必为整数的维数 d下，散射长度在

静磁场作用下的行为。因此，我们采用 d-方法作为理论框架。该模型同时纳入了改变有效二体散射长度的两种不同方法：维数 d （或约束参数）以及磁场。这两个参数使我们能够同时调节两个不同二体系统的散射长度。这样一来，便有可能同时调节包含两个全同粒子的三体系统中的两种相互作用，甚至在由三个不同组分粒子构成的三体系统中诱发 Efimov 效应。本文并不着重讨论与具体实验的联系。尽管这些结果总体上具有适用性，但要进行直接的实验比较，还需要作详细考量。

本文的结构安排如下。我们在第 2 节推导二维¨问题（一个开放通道和一个闭合通道）薛定谔方程的解析解，其中采用d 维数和方势阱势。利用推导出的波函数，我们在第 3节给出双通道散射长度和有效程的表达式。我们在第 4节研究散射长度随维数和外磁场变化的行为，重点关注散射长度为无穷大的条件。

现利用可通过维数和磁场共同调节二体散射长度的可能性，研究三体系统以及同时调节两个内部二体势。在第5 节中，我们讨论当三个组分粒子中有两个相同以及三个均不相同时，最适宜研究的系统。第 ^{87}Rb-^{7}Li-^{7}Li 和 ^{7}Li-^{39}K-^{87}Rb 三聚体的具体情形分别在第6 节和第7节中讨论。对于其中每一种情形，我们确定使这些系统中出现Efimov效应、且能量尺度因子相对较小的维数 d (通过式(1)与压缩谐振子势的长度相关)和磁场。最后，我们在第8节中给出总结和结论。此外，若干数学推导收录于附录中。

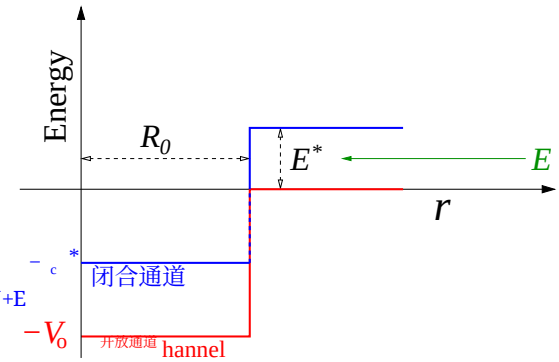


图 1 开放通道与闭合通道方势阱势的示意图。能量 E 和 E^* 分别为入射能量和激发能量。两个方势阱势具有相同的半径 R_0。

2 公式构建

我们考虑一个二体系统，其中仅有两个通道，即基态和一个激发态，对其波函数有贡献。我们假设系统的能量 E 低于激发阈值 E^*，并分别将基态通道和激发态通道称为开放通道和闭合通道。

图中展示了开放通道和闭合通道的势1 ，其中方势阱势的半径为 R_0。开放通道与闭合通道通过短程耦合势相耦合。开放通道中不与任何闭合通道耦合的直接散射过程所产生的效应，形成了二体散射长度的背景部分 [14], ，通常记为 $a_{\rm bg}$。

下面，我们假设相对 s 波态、方势阱二体相互作用以及一般的、未必为整数的维数 d，推导散射过程的波函数和相移的解析表达式。

2.1 运动方程

描述具有相对能量 E 的二体系统中相对运动的约化耦合径向薛定谔方程，且其中仅有一个开放通道和一个闭合通道参与，其形式为:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)+V_c(r)\right]u_c \\ +V_{co}u_o=(E-E^*)u_c, \tag{2}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)+V_o(r)\right]u_o +V_{oc}u_c = Eu_o, \quad (3)$$

其中， u_c 和 u_o 分别是描述闭合通道和开放通道的两个分量，它们与总波函数 Ψ 的关系为

$$r^{\frac{d-1}{2}}\Psi(r)=\begin{pmatrix}u_c(r)\\u_o(r)\end{pmatrix}. \quad (4)$$

在公式（2）和（3）中， r 是相对坐标， μ 是约化质量， V_c（r）、 V_o（r）和 V_{oc}（r）$=V_{co}$（r）分别是对角（闭合和开放）势以及耦合势， E 是系统的能量，而 E^* 是从基态到激发态的激发能。广义 s波角动量 ℓ取决于维数 d，其表达式为 [6, 7, 9, 10, 15]

$$\ell=\ell_{d,N=2}=\frac{d-3}{2}, \quad (5)$$

使得离心势垒强度

$$\ell(\ell+1)=\frac{(d-3)(d-1)}{4}, \quad (6)$$

在 $d=3$ 和 $d=1$ 时为零，而对于 $d=2$为负且等于 $-1/4$。

在本文中，我们假设所有相互作用 V（r）均为半径相同的球形方势阱 R_0，其形式为（见图1）：

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & r<R_0\\ 0 & r>R_0\end{cases}, \quad (7)$$

其中， $V_0(>0)$ 表示 $V_c(r)$、 $V_o(r)$ 和 $V_{oc}(r)=V_{co}(r)$ 的不同强度，我们将它们分别记为 V_c、 V_o 和 V_{co}。

引入无量纲坐标$x=r/R_0$，并将方程（2）和（3）乘以$-2\mu R_0^2/\hbar^2$后，运动方程变为

$$\begin{pmatrix}u_c''(x)\\u_o''(x)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_c(x)\\u_o(x)\end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中，撇号表示对 x 求导，矩阵 A 定义为

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}-a_+ & -a_{co}\\ -a_{co} & \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}-a_-\end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中

$$a_+=S_c^2-\kappa_c^2, \qquad a_-=S_o^2-\kappa_o^2, \quad (10)$$

并且这里使用了以下缩写

$$S_c^2=\frac{2\mu R_o^2V_c}{\hbar^2}, S_o^2=\frac{2\mu R_o^2V_o}{\hbar^2}, a_{co}=\frac{2\mu R_o^2V_{co}}{\hbar^2}, \quad (11)$$

它们均为正数，并且

$$\kappa_o=\sqrt{\frac{-2\mu R_o^2E}{\hbar^2}}=ik_o \quad (12)$$

$$\kappa_c=\sqrt{\frac{2\mu R_o^2(E^*-E)}{\hbar^2}}. \quad (13)$$

请注意，根据这些定义， a_+、 a_-、 S_c、S_o、a_{co}、 κ_o、 k_o 和 κ_c 均为无量纲量。

2.2 解

方势阱需要在两个区域内求解，即势阱内和势阱外。势阱外的方程 $r>R_0$ $(x>1)$ 相互解耦，因为此时 $V_c(r)=V_o(r)=V_{co}(r)=0$，而矩阵 A 为对角矩阵，其形式为

$$A^{(\mathrm{out})}=\begin{pmatrix}\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+\kappa_c^2 & 0\\ 0 & \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+\kappa_o^2\end{pmatrix}. \quad (14)$$

取 $A=A^{(\mathrm{out})}$ 代入式（8），对于正能量，两分量解明确写为 $E>0$,

$$u_c^{(\mathrm{out})}=B_cxh_\ell^{(+)}(i\kappa_cx), \quad (15)$$

$$u_o^{(\mathrm{out})}=B_ox\big(\cos\delta j_\ell(k_ox)-\sin\delta\eta_\ell(k_ox)\big), \quad (16)$$

其中， $h_\ell^{(+)}$ 是第一类出射汉克尔函数， j_ℓ 和 η_ℓ 分别是规则和非规则球贝塞尔函数，B_c 和 B_o 是归一化常数。描述闭合通道的波函数呈指数衰减，而开放通道的波函数在

较大距离处振荡。对于负能量，$E < 0$也 $u_o^{(\mathrm{out})}$ 必须呈指数衰减，这对应于一个虚数k_o，见式（16）。

势阱 内的 方程，$r < R_0$ $(x < 1)$，通过一般矩阵 A 中的非对角势，在方程 (8) 中相互耦合。求解的步骤是对该矩阵进行对角化，A。对角线上的坐标依赖离心势垒项相同。幸运的是，这意味着变换矩阵 U与坐标无关，是一个常数，x。我们将所得的对角矩阵D定义为:

$$U^{-1}AU = D = \begin{pmatrix} \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - D_+^2 & 0 \\ 0 & \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - D_-^2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

由 A 的特征值构成，其中:

$$D_\pm^2 = \frac{1}{2}\left((a_+ + a_-) \pm \sqrt{(a_+ - a_-)^2 + 4a_{co}^2}\right), \tag{18}$$

若 $a_+ > a_-$，或在相反情形 $a_+ < a_-$ 下交换两个特征值，即:

$$D_\pm^2 = \frac{1}{2}\left((a_+ + a_-) \mp \sqrt{(a_+ - a_-)^2 + 4a_{co}^2}\right). \tag{19}$$

这些定义的选取使得当 $a_{co} \to 0$ 时，$D_\pm^2 \to a_\pm$，且与 a_+ 和 a_- 的相对大小无关。根据这些定义，我们还有:

$$D_+^2 - a_+ = -(D_-^2 - a_-)\,, \tag{20}$$
$$D_+^2 - a_- = -(D_-^2 - a_+)\,, \tag{21}$$
$$(D_+^2 - a_+)(D_+^2 - a_-) = a_{co}^2\,. \tag{22}$$

与上述特征值对应的特征向量可用于构造变换矩阵 $U = U^{-1}$，其列向量均已归一化，如下:

$$U = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} D_+^2 - a_- & a_{co} \\ a_{co} & D_-^2 - a_+ \end{pmatrix}, \tag{23}$$

其中，归一化因子为

$$\begin{aligned} N &= (D_+^2 - a_-)^2 + a_{co}^2 = (D_-^2 - a_+)^2 + a_{co}^2 \\ &= (D_+^2 - a_-)(D_+^2 - D_-^2)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

差值与和 a_+ 和 a_-，它们出现在 $D_\pm$ 方程（18）和（19）中

$$a_+ - a_- = S_c^2 - S_o^2 - \frac{2\mu R_0^2 E^*}{\hbar^2}\,. \tag{25}$$

$$a_+ + a_- = S_c^2 + S_o^2 - \frac{2\mu R_0^2 E^*}{\hbar^2} + \frac{4\mu R_0^2 E}{\hbar^2}\,. \tag{26}$$

对角问题:

$$\begin{pmatrix} \phi_+'' \\ \phi_-'' \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} \tag{27}$$

得到关于 $\phi_\pm$ 的解耦方程:

$$\phi_\pm'' = \left(\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - D_\pm^2\right)\phi_\pm\,, \tag{28}$$

其在原点正则的解为

$$\phi_\pm = C_\pm x j_\ell(xD_\pm)\,, \tag{29}$$

其中 $C_\pm$ 为归一化常数，j_ℓ 为正则球贝塞尔函数。

现在结合方程（8）和（17）可简单得到:

$$U^{-1}\begin{pmatrix} u_c''(x) \\ u_o''(x) \end{pmatrix} = DU^{-1}\begin{pmatrix} u_c(x) \\ u_o(x) \end{pmatrix}, \tag{30}$$

通过与方程（27）比较，立即得到:

$$\begin{pmatrix} u_c^{(\mathrm{in})} \\ u_o^{(\mathrm{in})} \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}\,, \tag{31}$$

通过结合公式（23）和（29，可以得到势阱内的解:

$$u_c^{(\mathrm{in})} = (D_+^2 - a_-)C_+ x j_\ell(xD_+) + a_{co}C_- x j_\ell(xD_-) \tag{32}$$
$$u_o^{(\mathrm{in})} = (D_-^2 - a_+)C_- x j_\ell(xD_-) + a_{co}C_+ x j_\ell(xD_+), \tag{33}$$

其中省略了不重要的归一化常数 N。

3 散射长度和有效程

势阱内外解的对数导数匹配，即

方程（15）和（32）以及方程（16）和（33）在 $x = 1$ 处的匹配过程见附录 A。由此得到相移的如下表达式，方程（A8）：

$$\cot\delta = \frac{\eta_\ell(k_o)}{j_\ell(k_o)} \frac{F_2 - k_o \frac{\eta_{\ell+1}(k_o)}{\eta_\ell(k_o)}}{F_2 - k_o \frac{j_{\ell+1}(k_o)}{j_\ell(k_o)}}, \tag{34}$$

其中，F_2 由方程（A9）给出。

相移可按能量的幂次展开，从而得到定义散射长度和有效程的有效程展开。最低阶项可通过将能量展开至 E 的一阶，或 k_o 的二阶，并在所有所得项中代入零能量（$E = 0$）而得到。例外的是由 $\eta_\ell(k_o)$ 和 $j_\ell(k_o)$ 导致的整体能量因子；不过，该因子也必须展开，以包含能量的最低两阶。

为清晰起见，推导的详细过程见附录 B，此处仅列出并讨论最终结果。

3.1 相移的展开

对其中所有项进行低能展开之后 Eq.(34) we get that, Eq.(B26):

$$\frac{(2\ell+1)}{[(2\ell+1)!!]^2} k_o^{2\ell+1} \cot\delta \simeq -\left(1 - \frac{2\ell+1}{F_2^{(0)}}\right) \tag{35}$$
$$-E\,\frac{2\ell+1}{F_2^{(0)}}\left[\frac{F_2'^{(0)}}{F_2^{(0)}} - \frac{k_o^2}{E}\frac{1}{2\ell+3}\left(1 + \frac{1}{F_2^{(0)}} - \frac{F_2^{(0)}}{2\ell-1}\right)\right],$$

where for non-integer values of ℓ the factor $(2\ell+1)!!$ 必须替换为 $\Gamma(2\ell+2)/(2^\ell\Gamma(\ell+1))$,$F_{(0)\,2}$ 由公式（B21）给出，$F'_{(\ 0\ 2}$ $= \partial F_2^{(0)}/\partial E)$；此后，无论上标 (0) 出现在何处，均表示在 $E = 0$ 处取值的函数。

上述表达式可以与以下式子进行比较

$$\frac{(2\ell+1)}{[(2\ell+1)!!]^2} k_o^{2\ell+1} \cot\delta \to -\left(\frac{R_0}{a_{\rm tw}} - \frac{1}{2}\frac{R_{\rm eff}}{R_0}k_o^2\right)^{2\ell+1} \tag{36}$$
$$= -\left(\frac{R_0}{a_{\rm tw}}\right)^{2\ell+1} + (2\ell+1)\left(\frac{R_0}{a_{\rm tw}}\right)^{2\ell}\frac{1}{2}\frac{R_{\rm eff}}{R_0}k_o^2 + \mathcal{O}(k_o^4),$$

其中，$a_{\rm tw}$ 和 $R_{\rm eff}$ 分别是双分量散射长度和有效程。

由方程（36），与方程（35）比较，并注意到 $E = \hbar^2 k_0^2/(2\mu R_0^2)$，我们可以确定：

$$\frac{a_{\rm tw}}{R_0} = \left(1 - \frac{2\ell+1}{F_2^{(0)}}\right)^{-\frac{1}{2\ell+1}}. \tag{37}$$

如果 $a_{co} = 0$，$a_{\rm tw} = a_{\rm bg}$，则公式（37）化为：

$$\frac{a_{\rm bg}}{R_0} = \left(1 - (2\ell+1)\frac{j_\ell(S_o)}{S_o j_{\ell+1}(S_o)}\right)^{-\frac{1}{2\ell+1}}, \tag{38}$$

这是方势阱势和任意相对分波 ℓ的散射长度表达式。

由公式（35）和（36）还可以提取出有效程，如附录 C 所示。

3.2 与开放通道和闭合通道的联系

式（37）给出了方势阱势的双组分散射长度。为了使其更具一般性，可以用闭合通道和开放通道的散射长度来表示它，$a_{\rm closed}$ 和 $a_{\rm open}$。基于此，我们定义：

$$\left(\frac{a_{\rm closed}}{R_0}\right)^{2\ell+1} = \left[1 - (2\ell+1)\frac{j_\ell(D_+^{(0)})}{D_+^{(0)} j_{\ell+1}(D_+^{(0)})}\right]^{-1}, \tag{39}$$

and

$$\left(\frac{a_{\rm open}}{R_0}\right)^{2\ell+1} = \left[1 - (2\ell+1)\frac{j_\ell(D_-^{(0)})}{D_-^{(0)} j_{\ell+1}(D_-^{(0)})}\right]^{-1}, \tag{40}$$

使得在无耦合的极限下，$a_{co} = 0$，我们可以恢复已知的 ℓ依赖的方势阱表达式，式（38），因此 $a_{\rm open} = a_{\rm bg}$。

同样地，我们将 $\tilde{\kappa}_c$ 定义为：

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}} = \left[1 - (2\ell+1)\frac{K_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa_c^{(0)})}{\kappa_c^{(0)} K_{\ell+\frac{3}{2}}(\kappa_c^{(0)})}\right]^{-1}, \tag{41}$$

对于任意 ℓ，在存在一个非常弱的束缚态时，它变为 $\tilde{\kappa}_c \to R_0/a_{\rm closed}$。

利用这些定义，不难将 $F_2^{(0)}$ 在式（B21）中表示为 $a_{\rm closed}$、$a_{\rm open}$和 $\tilde{\kappa}_c$的函数，并得到散射长度

式（37）变为：

$$\frac{(2\ell+1)}{[(2\ell+1)!!]^2}k_o^{2\ell+1}\cot\delta \to -\left(\frac{R_0}{a_{\rm tw}}\right)^{2\ell+1} = -\left(\frac{R_0}{a_{\rm open}}\right)^{2\ell+1} + \frac{\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm open}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}\right)\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm open}^{2\ell+1}}-\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm closed}^{2\ell+1}}\right)\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}}{\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm closed}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}\right)+\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm open}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}\right)\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}}. \tag{42}$$

当 $a_{co}\to 0$时，对式(42) 关于 a_{co}^2 作一阶展开，可将方程化简为：

$$\frac{(2\ell+1)}{[(2\ell+1)!!]^2}k_0^{2\ell+1}\cot\delta \to -\left(\frac{R_0}{a_{\rm tw}}\right)^{2\ell+1} = -\left(\frac{R_0}{a_{\rm open}}\right)^{2\ell+1} + \frac{\beta^2}{\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm closed}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}}, \tag{43}$$

其中，参数 β^2 正是式(42) 最后一项的分子，其中包含 a_{co}^2与一系列有限或很小的因子相乘。

通过将式(β 43)中的 β 与文献 [13], 中采用的耦合参数ℓ =进行对应，可以看出，当维数为三维（ [13], 0）时，式(43)可直接化简为文献 [13], 中的式(7)。该文献采用接触相互作用模型研究了三维中的双分量问题。

4 临界维数

式(42给出了 d 维双分量问题的散射长度，由此可写为：

$$a_{\rm tw}^{2\ell+1} = a_{\rm open}^{2\ell+1} \times \frac{\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm closed}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}\right)+\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm open}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}\right)\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}}{\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm closed}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}\right)+\frac{a_{\rm open}^{2\ell+1}}{a_{\rm closed}^{2\ell+1}}\left(\frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm open}^{2\ell+1}}-\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1}\right)\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}}. \tag{44}$$

显然，当上述表达式中分式的分母等于零时，双分量散射长度 $a_{\rm tw}$ 变为无穷大。经过一些改写后，这一条件可以写为：

$$\tilde{\kappa}_c^{2\ell+1} = \frac{R_0^{2\ell+1}}{a_{\rm closed}^{2\ell+1}} + \frac{1-a_{\rm open}^{2\ell+1}/a_{\rm closed}^{2\ell+1}}{\frac{a_{\rm closed}^{2\ell+1}}{R_0^{2\ell+1}}+\frac{a_{\rm open}^{2\ell+1}}{R_0^{2\ell+1}}\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}}\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}. \tag{45}$$

请注意，式($\tilde{\kappa}_c$ 中的量41)， $a_{\rm closed}$式(39)中的量，以及 $a_{\rm open}$ 式(40)中的量，均通过式(ℓ5)而成为维数 d的函数。我们将临界维数 $d=d_E$定义为使得式(d45)中的等式成立的的取值。对于该维数，有 $a_{\rm tw}=\infty$，或者等价地，双体双分量系统的束缚能为零。

动量 $\tilde{\kappa}_c$ 在式（41）中，是d 和 $\kappa_c^{(0)}$的函数，其表达式见式（B13）。此外， $a_+^{(0)}$ 在式（B14）中，因此 $D_\pm^{(0)}$ 在式（B12）中，也依赖于 $\kappa_c^{(0)}$。若系统受到外部静磁场 B的作用，动量 $\kappa_c^{(0)}$则变为：

$$\kappa_c^{(0)} \to \kappa_c^{(0)}(B) = \sqrt{\frac{2\mu R_0^2(E^*-\delta_\mu B)}{\hbar^2}}, \tag{46}$$

其中， δ_μ 是系统处于基态（开放态）和激发态（闭合态）时磁矩之差。

因此，式（45）中决定 $a_{\rm tw}=\infty$ 的条件现在是 d 和B的函数。换言之，可以由满足式（B_0、d_E）的点绘出“B_0与 d_E”曲线。

5 三体系统的性质

我们来考虑一个由两个全同粒子和一个不同粒子组成的三体系统。该系统涉及两种不同的二体相互作用。如果我们分别绘制这两种相互作用的“B_0 与 d_E”曲线，且它们恰好相交，那么就有维数 $d=d_E$ 和磁场 $B=B_0$，使两种势同时满足 $a_{\rm tw}=\infty$ 。这样便有可能使所有二体子系统都满足 Efimov条件。此外，按照相同的步骤，Efimov条件也可以

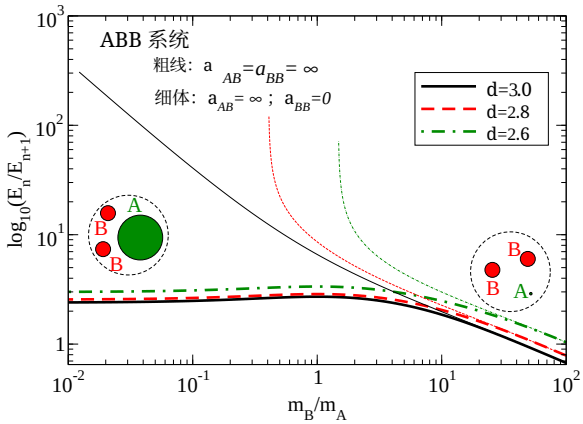


图2 ABB 系统中相邻两个 Efimov 态之间能量尺度因子的对数随 m_B/m_A 质量比的变化。粒子 A 和 B 之间的散射长度 a_{AB} 等于 ∞。粗线和细线分别表示两个全同粒子之间的散射长度 a_{BB} 等于 ∞ 和 0 时的结果。图中展示了三个不同维数 $d = 3.0$ 下的结果：2.8（实线）、2.8（虚线）和 2.6（点划线）。

在由三个不同组分粒子组成的三体系统中得到满足，因为采用这种方法，原则上可以调节其中三种二体相互作用中的两种的 $a_{\mathrm{tw}} = \infty$ 。

接下来，我们将重点讨论这两种不同的三体系统：一种由两个全同粒子和一个不同粒子组成（ABB系统），另一种由三个不同粒子组成（ABC系统）。这里我们分析相邻 Efimov 态之间的标度关系，以及如何构造合适的二体势。

5.1 尺度因子的质量依赖性

我们回顾一下，对于 ABB 情形，当只有 AB 散射长度足够大时，由两个重粒子和一个轻粒子组成的体系特别有利于 Efimov态的出现[16]。在这种情况下，相邻态之间的能量尺度因子显著减小。因此，与由两个轻粒子和一个重粒子组成的情形相比，对其进行实验测定，甚至数值计算，都要容易得多。

相邻两个态之间的能量尺度因子为 $E_n/E_{n+1} = \exp(2\pi/|\nu_\infty|)$，其中 E_n 是 n^{th} Efimov 态的束缚能，且 $|E_n| > |E_{n+1}| (n = 1, 2, 3, \cdots)$。$d$相关的 $|\nu_\infty|$ 与相互作用无关，也与 n无关。$|\nu_\infty|$ 的值可以通过超越方程求得，如 Ref. [17] 中针对$d = 3$的 Eqs.(26) 和 (27) 所示，并在 Ref. [15]的第 5.2 小节中推广到任意维数。

ABB 系统的结果如图所示2，图中展示了相邻 Efimov 态之间能量比的对数随质量比变化的关系 m_B/m_A。更准确地说， y轴给出了能量比写成 a 时的指数 10^a。

我们首先关注两个全同粒子之间的散射长度 a_{BB}等于 0，而两个不同粒子之间的散射长度 a_{AB} 等于无穷大的结果（细曲线）。考虑了三个不同的维数： $d = 3.0$、2.8 和 2.6。可以看到，当 $m_B \gg m_A$时（对应于两个重粒子和一个轻粒子），能量尺度因子比$m_B \ll m_A$时小许多个数量级；后者对应于两个相同的轻粒子和一个重粒子。我们还可以看到，维数越小，随着质量比 m_B/m_A 减小，能量尺度因子的发散就越早出现。

当两个散射长度 a_{AB} 和a_{BB}均为无穷大时，我们得到图2中粗曲线所示的结果。对于两个重粒子和一个轻粒子的情况，可以看到，使 $a_{BB} = \infty$ 发生变化所产生的影响很小。然而，对于两个轻粒子和一个重粒子的情况，相邻两个 Efimov 态之间的比值会显著减小。对于图中所示的三维情形，当 $m_B/m_A \ll 1$时，尺度因子介于 250 和 1000 之间。这些比值与三维中三个相同玻色子的情况相当，甚至更小；后者的能量尺度因子为 515。

在图 3 中，我们展示了与图 2 相同的结果，但针对的是 ABC系统。粒子 A 和 B 之间的散射长度 a_{AB}，以及粒子 A 和 C 之间的散射长度 a_{AC}，均为无穷大；而粒子 B 和 C 之间的散射长度 a_{BC}为 0。粒子 B 和 C 的质量 m_B 和 m_C经过选择，使得 $m_C = 2m_B$。曲线再次以 m_B/m_A为自变量绘出。这些曲线的行为与图 2中的细线非常相似。也就是说，当 $m_B \ll m_A$ 时，该系统的行为类似于图 2 中的两个相同轻粒子和一个重粒子的情形，并且能量

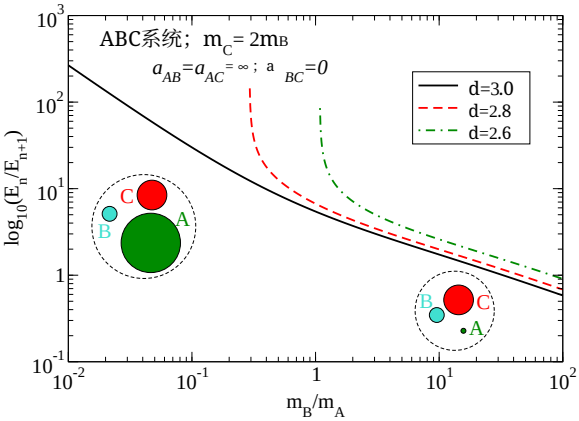


图 3 与图 2 中的情况相同，但对象是 ABC 系统。粒子 C 的质量设为粒子 B 质量的两倍（$m_C = 2m_B$）。粒子 A 和 B 之间的散射长度 a_{AB}，以及粒子 A 和 C 之间的散射长度 a_{AC}，均为无穷大。B 和 C 之间的散射长度 a_{BC}为 0。图中展示了三个不同维数下的结果：$d = 3.0$（实线）、2.8（虚线）和 2.6（点划线）。

相邻两个 Efimov能级之间的尺度因子非常大。相反，当 m_A 远小于另外两个质量时，该系统的行为类似于两个相同重粒子和一个轻粒子的情形；对于图中所示的三维和 $m_B/m_A = 100$，能量尺度因子甚至小于 10。因此可以得出结论：对于 ABC系统，如果其中一个粒子远轻于另外两个粒子，并且该轻粒子与另外两个粒子之间的散射长度足够大，那么能量尺度因子可以相当小。

5.2 构造二体势

方程（45）和（46）可用于求出使双分量散射长度 $a_{\rm tw}$等于无穷大时，磁场与维数的取值对。满足这一条件的磁场和维数值记为（B_0， d_E）。

现在的目标是求出特定二体系统对应的（B_0，d_E）点。为此，需要指定所用的势。一般而言，相互作用中的参数将根据三维下可用的实验信息确定。

文献 [13] 研究了三维空间中的双分量问题。在该文中，已证明双分量散射长度为：

$$\frac{1}{a_{\rm tw}} = \frac{1}{a_{\rm open}} + \frac{\beta^2}{\kappa(B) - a_{\rm closed}^{-1}}, \tag{47}$$

其中 β^2 描述开放通道与闭合通道之间的耦合，而

$$\kappa(B) = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E^* - \delta_\mu B)}. \tag{48}$$

在参考文献 [13]中，$a_{\rm open}$ 取为 $a_{\rm bg}$，这一数值通常可通过实验获知。本文也将考虑相同的等式$a_{\rm open} = a_{\rm bg}$。

由式（47），并取磁场值 $B = B_0$使得 $a_{\rm tw} = \infty$，很容易得到：

$$\frac{1}{a_{\rm closed}} = \kappa(B_0) + \beta^2 a_{\rm open}. \tag{49}$$

同理，若取 $B = B_0 + \Delta B$ 使得 $a_{\rm tw} = 0$，则得到：

$$\delta_\mu \Delta B = \frac{\hbar^2}{\mu}\kappa(B_0)\beta^2 a_{\rm open}. \tag{50}$$

因此，费什巴赫共振由以下实验参数刻画：$a_{\rm bg}$、B_0、ΔB和 δ_μ。利用这些实验信息，我们可以通过式（50）确定耦合项 β^2，再通过式（49）确定闭合通道散射长度 $a_{\rm closed}$。

本文采用的简单双体方势阱相互作用需要两个参数才能完全确定：作用范围和强度。作用范围始终取范德瓦耳斯长度 $R_{\rm vdW}$，这一数值通常可通过实验获知。式（11）中开放通道和闭合通道的强度 V_o 和V_c ，分别设定为能够重现 $a_{\rm open}$（其值由实验获知）以及式（49）中给出的 $d = 3$。最后，通过要求在 $B = B_0$ 和 $d = 3$时得到 $a_{\rm tw} = \infty$，即可确定式（11）中的耦合强度 V_{co} 。

即使这些约束允许确定开放势、封闭势和耦合势的作用范围与强度，这些数值仍有一定的自由度可供调整。首先， E^*的值，

进入 $\kappa(B_0)$（见方程（49）和（50））完全是任意的，不过，正如 [13], 所述，其取值不会显著影响最终可观测量。其次， V_o 和 V_c 的取值可能因势所支持的束缚态数目不同而有很大差异。关于 V_{co}，在固定 V_o 和 V_c之后，仍然可以找到一系列不同的取值，它们都能产生 $a_{\mathrm{tw}} = \infty$。

无论如何，以下的目标并非为所研究的系统推导出详细的二体势，而是要具体说明，通过结合囚禁和外磁场，原则上可以同时调节 ABB 系统中涉及的两种相互作用，或 ABC 系统中涉及的三种相互作用中的任意两种。这样一来，ABB 系统中 Efimov 态之间的能量间隔可以大幅减小，甚至由三个不同组分粒子构成的系统也可能表现出Efimov效应，且态之间的能量间隔相当小。

6 ABB 系统

ABB 系统的能量尺度因子已在图 2 中讨论。特别是，我们看到，当粒子 A 的质量远大于另外两个粒子时，若两个散射长度 a_{AB} 和a_{BB}同时等于无穷大，相邻 Efimov 态之间的间隔会大幅缩小。

为说明这一点，我们选择 ^{87}铷-^{7}锂-^{7}锂系统；原则上，该系统并不是展现 Efimov效应的理想候选系统。为了研究该系统，首先需要构造所需的 ^{7}锂-^{87}铷和 ^{7}锂-^{7}锂二体势。

6.1 ^{7}锂-^{87}铷二聚体

关于该系统的实验信息可见参考文献[18]。特别是，文中给出了范德瓦耳斯势中 C_6 系数的数值 $2550E_h a_0^6$（E_h 为一个哈特里， a_0 为玻尔半径）；据此可得范德瓦耳斯长度为 $R_{\mathrm{vdW}} = 44.1a_0$，并将其作为我们方势的势程。 C_6 系数与以及 R_{vdW} 之间的关系由 [2]给出:

$$R_{\mathrm{vdW}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\mu C_6}{\hbar^2}\right)^{1/4}, \tag{51}$$

其中 μ 是该系统的约化质量。

在[18] 中，他们还发现了一个宽的 Feshbach 共振，其中心位于 $B_0 = 649$ G， $\Delta B = -70$G，且 $a_{\mathrm{bg}} = a_{\mathrm{open}} = -36a_0$。虽然没有给出 δ_μ 的数值，但我们将采用典型值 $\delta_\mu = 2\mu_B$ （其中 μ_B 是玻尔磁子）。

利用这些数值可得 $\delta_\mu B_0 = 0.087$钾，这意味着 E^* 必须大于该数值（否则，见式（48），我们将得到 κ（B_0）的虚数值）。特别地，我们选择了 $E^* = 5$ 钾，它充分大于 $\delta_\mu B_0$ ，因此最终结果几乎不依赖于 E^*的具体数值。利用上述给出的 a_{open}、 E^*、 B_0、 ΔB和 δ_μ 的数值，根据式（49）可得 $a_{\mathrm{closed}} = 1.65a_0$。

因此，我们选择强度 V_o 和 V_c，使其再现 $a_{\mathrm{open}} = -36a_0$ 和 $a_{\mathrm{closed}} = 1.65a_0$ 的数值。原则上，可以选择可能的最小强度，这相当于在散射长度为负的情况下，一个甚至不能束缚二体二聚体的二体势。这很不现实，因为束缚 ^{7}锂-^{87}铷态的数目可能相当多。基于这一原因，我们为开放通道选择了强度 $V_o = 28.448$钾，这会产生约 20 个束缚二聚体态。对于闭合通道，在所有能够再现所需 a_{closed} 数值的强度中，我们取 $V_c = 28.441$ 钾，因为它是最接近所选 V_o 数值的值。

对于耦合势 V_{co}，我们对其进行调节以获得 $a_{\mathrm{tw}} = \infty$ for $B = B_0$，所选取的数值明显小于 V_o 和 V_c，但又没有小到可以视为微扰。具体而言，我们取 $V_{co} = 4.733$ 钾。

这些势参数的选定值汇总于表 1的第一行。

6.2 ^{7}锂-^{7}锂二聚体

对于 ^{7}锂-^{7}锂相互作用，我们利用文献 [2] 提供的信息，以相同的方式进行处理。范德瓦耳斯长度等于 33.1 a_0，并将其作为这些势的作用范围。

在三维中， ^{7}Li-^{7}Li 系统的费什巴赫共振由 $B_0 =$ 表征

表1 对于本文研究的三种二聚体，我们给出了相应的参考文献，表中列出的费什巴赫共振参数 B_0、 ΔB、 δ_μ、 $a_{\rm open}$ 和 $R_{\rm vdW}$ 均取自这些文献。使用激发能 $E^* = 5$ K，所引用的费什巴赫共振参数可得出闭合道势的散射长度 $a_{\rm closed}$。最后三列给出了开放道、闭合道和耦合道的方势阱势强度，使得给定的 $a_{\rm open}$ 和 $a_{\rm closed}$ 值得以复现，并且 $a_{\rm tw} = \infty$ 适用于 $d = 3$ 和 $B = B_0$。磁场以高斯（G）为单位，能量和势强度以开尔文（K）为单位，距离以玻尔半径 a_0 为单位，磁矩差 δ_μ 以玻尔磁子 μ_B 为单位。

二聚体	Ref.	B_0 (G)	ΔB (G)	$\delta_\mu(\mu_B)$	$a_{\rm open}(a_0)$	$R_{\rm vdW}(a_0)$	$a_{\rm closed}(a_0)$	V_o (钾)	V_c (钾)	V_{co} (钾)
^{7}锂-^{87}铷	[18]	649	−70	2.0	−36	44.1	1.65	28.448	28.441	4.773
^{7}锂-^{7}锂	[2]	737	−192.3	1.93	−25	33.1	2.25	20.049	20.026	3.883
^{7}锂-^{39}钾	[19]	319	30	1.5	89	42.1	1.71	17.072	17.040	2.505

737 G、 $\Delta B = -192.3$G、 $a_{\rm open} = -25a_0$ 和 $\delta_\mu = 1.93\mu_B$。这些值对应于 $\delta_\mu B_0 = 0.096$K；与 ^{7}Li-^{87}Rb 系统一样，我们选择$E^* = 5$ K。

有了这些信息，利用公式(49)，现在可以得到 $a_{\rm closed} = 2.25a_0$。开放通道与闭合通道的强度分别选为 $V_o = 20.049$钾和 $V_c = 20.026$钾，这分别再现了所需的 $a_{\rm open}$和 $a_{\rm closed}$值。在这些强度下，二聚体有 10 个束缚态。最后，使用耦合势强度 $V_{co} = 3.883$ 钾，可得 $a_{\rm tw} = \infty$ 对于$d = 3$。

我们在表格 1第二行列出了该势的详细信息，

6.3 费什巴赫共振的维数依赖性

现在，既然已经选定了两体相互作用的参数，我们便可以研究费什巴赫共振的位置如何随维数 d 变化。

图 4a 中展示了，对于 $d = 3$，公式(44) 的分母随磁场 B变化的情况；所用的是 ^{7}锂-^{7}锂和^{7}锂-^{87}铷二聚体的势参数。曲线与零轴的交点对应于产生 B值的参数，并由此产生 $a_{\rm tw} = \infty$，从而形成费什巴赫共振。这些磁场值当然再现了参考文献 [2]和 [18], 中给出的数值，详见表格 1: $B_0 = 737$ G 对应于^{7}锂-^{7}锂，而 $B_0 = 649$ G 对应于 ^{7}锂-^{87}铷。

与图 4a 中相同的计算，但针对维数的不同取值，将产生不同的 B_0值，使得每个二体系统上都出现一个 Feshbach 共振。

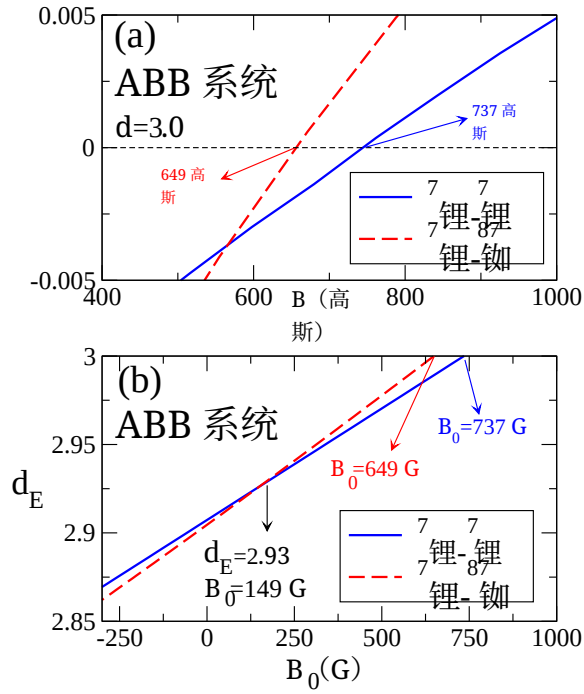


图4 (a) 对于 $d = 3$，方程(44)的分母随磁场 B 变化时，对于 ^{7}锂-^{7}锂（实线）和 ^{7}锂-^{87}铷（虚线）二聚体的变化情况。与零轴的交点对应于产生费什巴赫共振的 B值，适用于 $d = 3$。(b) 使 B_0, d_E) 值在 ^{7}锂-^{7}锂（实线曲线）和 ^{7}锂-^{87}铷（虚线曲线）二聚体中产生费什巴赫共振。曲线的交点对应于使两个系统同时发生共振的 (B_0, d_E) 值。

在图 4b 中，我们展示了产生费什巴赫共振的（B_0， d_E）值族，分别对应于 ^{7}Li-^{7}Li 和 ^{7}Li-^{87}Rb 二聚体，它们构成了 ^{87}Rb-^{7}Li-^{7}Li 三聚体。图中的箭头标示了 B_0 值（ $d_E = 3$， $B_0 = 737$ G（^{7}Li-^{7}Li）和 649 高斯（^{7}Li-^{87}Rb）），如上所述，这些值用于构造势。

值得注意的是，正如图中所示，实线和虚线曲线在某个特定的（B_0, d_E）点相交，即 $d_E = 2.93$ 和$B_0 = 149$G。对于这些维数和磁场值，两种二体势的散射长度 $a_{\rm tw}$同时等于无穷大。这意味着，在这个特定的（B_0, d_E）值下，三体系统 ^{87}铷-^{7}锂-^{7}锂的所有内部二体子系统同时满足 Efimov 条件。特别是，对于 $d_E = 2.93$，相邻两个 Efimov态的能量尺度因子仅约为317；而当只有 ^{87}铷-^{7}锂的散射长度为无穷大时所得的尺度因子则无法与之相比，因为此时尺度因子大于 10^{50}。

需要付出的代价是，正如式（1）下方所讨论的，d_E 取值为 2.93，这会导致 b_{ho}/r_0 =3.71，对应的囚禁频率处于兆赫范围，显然高于当前实验可实现的数值。

7 ABC系统

如图 3所示，对于由三个不同组分粒子构成的情况，最有趣的情形是其中一个粒子明显轻于另外两个粒子。在这种情况下，如果将轻粒子与另外两个粒子之间的相互作用调节到使 $a_{\rm tw} = \infty$ 在两种情况下都成立，那么 Efimov 条件便得到满足；此外，Efimov 态之间的能量间隔也相对较小。

为说明这一点，我们选择 ^{7}锂-^{39}钾-^{87}铷系统。上一节详细介绍了用于描述 ^{7}锂-^{87}铷二聚体的相互作用。下面将介绍所需的另一种相互作用，即^{7}锂-^{39}钾势。

7.1 ^{7}锂-^{39}钾二聚体

确定 ^{7}Li-^{39}K势所需的三维费什巴赫共振详情取自参考文献[19]。具体而言，文中给出了以下共振信息：$B_0 = 319$ G、$\Delta B = 30$ G、$a_{\rm open} = 89a_0$ 和$\delta_\mu = 1.5\mu_B$。此外，根据文中给出的C_6 范德瓦耳斯系数值，我们得到范德瓦耳斯长度 $R_{\rm vdW} = 42.1a_0$，并将其用作方势阱的半径。

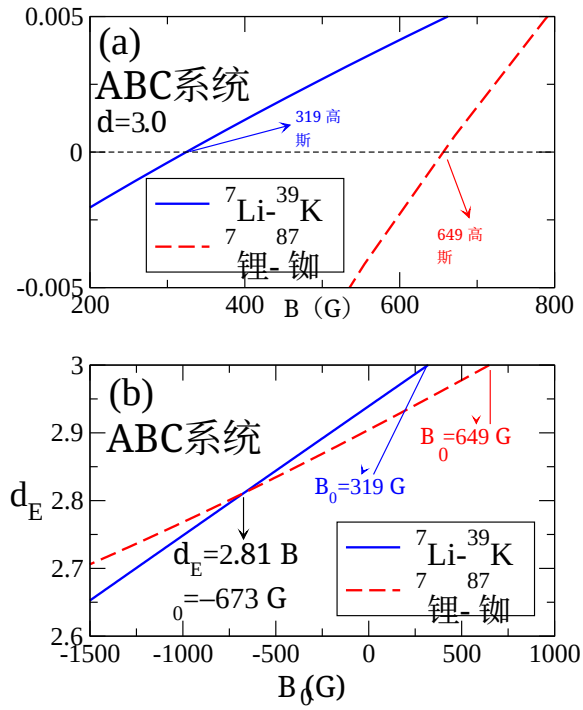


图 5 与图 4 中的相同，分别表示 ^{7}Li-^{39}K（实线）和 ^{7}Li-^{87}Rb（虚线）二聚体。

根据这些数值，我们得到 $\delta_\mu B_0 = 0.032$ K；与前面的情况一样，我们选择 $E^* = 5$ K。这个 E^* 值与上面给出的数值一起代入式（49），得到 $a_{\rm closed}$ =1.71a_0。

对于另外两个势，我们调节 V_o和 V_c，使其重现所需的 $a_{\rm open}$ 和 $a_{\rm closed}$值。随后取 $V_o = 17.072$K 和 $V_c = 17.040$K。这两个强度产生了一个 ^{7}Li-^{39}K二聚体，其中约有 15 个束缚态。当与耦合强度V_{co} = 2.505K结合时，我们得到 $a_{\rm tw} = \infty$ 的双分量散射长度，适用于 $d = 3$。

对于另外两个势，我们在表 1 的最后一行列出了这种相互作用的详细信息。

7.2 费什巴赫共振位置的维数依赖性

现在我们按照 ABB情形的处理方法，在图 5a 中展示式（44）的分母随磁场 B 的变化情况，所用的是上述为 ^{7}锂-^{39}钾二聚体描述的势，以及 $d = 3$。我们还展示了该分母对于 ^{7}锂-^{87}铷

情形，其曲线已绘于图 4a 中。与零轴的每次交点都对应于不同的 B 值，这些值会产生 $a_{\mathrm{tw}} = \infty$，从而形成费什巴赫共振。这些交点可以在图中插图所示的放大图里清楚看到。同样，正如预期，交点对应于用于构造这些势的 $B_0 = 319$ G(^{7}锂-^{39}钾) 和 $B_0 = 649$G (^{7}锂-^{87}铷) 值（见表 1）。

现在我们可以研究费什巴赫共振的位置如何随维数 d 变化，并找出使 ^{7}Li-^{39}K 和 ^{7}Li-^{87}Rb 二聚体中都产生费什巴赫共振的不同 (B_0, d_E) 值。特别是，检查是否能找到一个 (B_0, d_E) 值，使两个系统同时发生共振。

这如图 5b 所示，该图与图 4b 相同，^{7}Li-^{39}K 和 ^{7}Li-^{87}Rb 二聚体的情况除外。我们再次看到两条曲线相交，因此确定了一个维数 $d_E = 2.81$ 和一个磁场 $B_0 = -673$G，使得$a_{\mathrm{tw}} = \infty$ 两个系统同时满足这一条件。 B_0 的值为负，意味着磁场的投影方向与开放和闭合二体通道的磁矩差方向相反。因此，满足 Efimov条件。对于 $d = 2.81$这些质量比，并假设 ^{39}K 与 ^{87}Rb 之间的散射长度较小，相邻两个 Efimov态之间的能量尺度因子约为 330。由式（1），我们得到该维数对应于$b_{ho}/r_0 = 2.17$，这再次代表了相当强的囚禁，频率范围为兆赫。

8 总结与结论

d方法是一种有效描述受外场压缩系统的方式，其中维数 d 可以取非整数值。在压缩过程中，两个粒子之间的有效相互作用会发生改变；如果二体系统在三维中不束缚，那么必然存在某个时刻，二体束缚能等于零（散射长度无限大）。描述这种压缩情形的等效维数，就是我们所称的临界维数 d_E。

另一种同样能够改变有效二体相互作用的方法是使系统处于静磁场的作用下。磁场与粒子磁矩的耦合尤其能够使所谓的 Feshbach 共振得以出现；这些共振出现在磁场的某个特定值 B_0 处，同时对应于无限大的二体散射长度。

在这项工作中，我们结合了这两种不同的方法，以探究能否同时调节非对称三体系统中涉及的两种不同相互作用。这样便可以构造 AB 和 BB 二体势的散射长度均为无限大的 ABB 三体系统。对于由两个相同的轻粒子和一个重粒子组成的系统，相邻 Efimov 态之间的能量尺度因子因此会降低许多个数量级。即使对于由三个不同粒子组成的 ABC 系统，也可以调节 AB 势和 AC 势，从而构造一系列 Efimov态；当粒子 A 的质量远小于另外两个粒子的质量时，这些态之间的能量间隔相当小。

我们通过解析方法研究了 Feshbach共振随维数变化的情况，假设二体系统中的问题为双分量问题，即只有一个开放通道和一个闭合通道参与，并假设二体势为方势阱。由此，我们推导出了开放通道和闭合通道波函数的解析表达式，并据此得到了相移的解析表达式。通过将相移按能量的幂次展开，我们得到了散射长度和有效程的解析表达式。对双分量散射长度进行详细分析后，我们提取出了由所有 (B_0, d_E) 点构成的曲线；在磁场值为 B_0、维数为 d_E 时，这些点对应的二体散射长度均为无穷大。

所有这些解析表达式均已用于研究两个不同三体系统中涉及的二体势： ^{87}Rb-^{7}Li-^{7}Li，这是一个包含两个轻粒子和一个重粒子的 ABB 系统实例；以及 ^{7}Li-^{39}K-^{87}Rb，这是一个其中一个粒子比另外两个轻得多的 ABC系统实例。

利用现有的实验信息，我们在三维中构造了 ^{87}Rb-^{7}Li、 ^{7}Li-^{7}Li 和 ^{7}Li-^{39}K 势。借助所得的势参数，我们随后使用推导出的散射长度解析表达式，并针对每种相互作用构造了 (B_0, d_E) 曲线，该曲线给出了所有对应于二体散射长度无穷大的 (B_0, d_E) 参数对。随后我们发现， ^{87}Rb-^{7}Li 势和 ^{7}Li-^{7}Li 势对应的曲线在某个特定的 (B_0, d_E) 点相交。对于这些磁场和维数， ^{87}Rb-^{7}Li 与 ^{7}Li-^{7}Li 的散射长度均为无穷大，连续两个 Efimov 态之间的能量尺度因子降低了多个数量级，达到约 317。 ^{7}Li-^{39}K-^{87}Rb 系统也会出现同样的情况。 ^{87}Rb-^{7}Li 势和 ^{7}Li-^{39}K 势对应的 (B_0, d_E) 曲线也在某个特定的 (B_0, d_E) 点相交，因此在该磁场和维数下，Efimov 条件得以满足，Efimov 态之间的间隔缩小至约 330 倍。

本工作所选取的三聚体以及对原子间势的粗略估计，导致所需的囚禁频率相较于当前可获得的实验值过高。然而，这一事实并不否定我们的主要结论，即通过静态磁场，在对系统进行压缩并调节费什巴赫共振之后，原则上可以同时调节两个不同的二体势。如今，这一方法可能仅限于那些在非常弱的囚禁强度下即可实现该效果的系统，但最终达到高得多的频率始终是有可能的。

我们的结果为在原则上并非展现这一现象的理想候选者的三体系统中构造 Efimov 态打开了大门，例如由两个全同粒子和一个重粒子组成的系统，甚至由三个不同粒子组成的系统。

总之，数值讨论基于短程粒子间方势阱。然而，Efimov物理是一种长距离现象，其出现和性质独立于所采用的短程势。因此，我们强调，我们的结论具有普适性，可用以下长程整体性质来描述：散射长度和有效程。结果同样具有普适性，也就是说，它们适用于物理学或化学任何子领域中的所有二体和三体系统。

未来涉及外部变形压缩势的少体研究有许多显而易见的发展方向，这些研究可以利用等效的 d-方法在非整数维度下进行。可能有必要对具体选定的实验系统开展更精确的计算。此外，扩展计算也将很有意义，例如研究与 Efimov物理相关的费什巴赫共振形状和三体复合率。

致谢。本研究部分由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 PGC2018-093636-B-I00 提供支持，并由 “ 欧洲区域发展基金：建设欧洲的一种方式”提供支持。我们感谢 Jan Arlt 提供实验信息。

作者贡献

两位作者对讨论和解析计算的贡献相同。EG 完成了数值计算。

数据可用性声明 本稿件没有相关数据。

附录 A 在盒半径处匹配，$x = 1$。

方程（15）和（32）中的解，以及方程（16）和（33）中的解，在势阱内外的对数导数必须在盒半径处相等， $x = 1$。该条件导出以下两个方程：

$$i\kappa_c \frac{h_\ell^{(+)\prime}(i\kappa_c)}{h_\ell^{(+)}(i\kappa_c)} = \frac{(D_+^2 - a_-)C_+ D_+ j_\ell'(D_+) + a_{co} D_- C_- j_\ell'(D_-)}{(D_+^2 - a_-)C_+ j_\ell(D_+) + a_{co} C_- j_\ell(D_-)}, \tag{A1}$$

$$k_o\frac{\cos\delta j'_\ell(k_o)-\sin\delta\eta'_\ell(k_o)}{\cos\delta j_\ell(k_o)-\sin\delta\eta_\ell(k_o)}= \frac{(D_-^2-a_+)C_-D_-j'_\ell(D_-)+a_{co}D_+C_+j'_\ell(D_+)}{(D_-^2-a_+)C_-j_\ell(D_-)+a_{co}C_+j_\ell(D_+)}, \tag{A2}$$

其中，撇号表示相应汉克尔函数或贝塞尔函数对完整坐标的导数。两个方程都包含方程（29）中归一化常数之比， C_+ 和 C_-。方程（A1）可用于确定

$$\frac{C_+}{C_-}=\frac{a_{co}}{(a_--D_+^2)}\frac{j_\ell(D_-)}{j_\ell(D_+)}\frac{i\kappa_c\frac{h_\ell^{(+)\prime}(i\kappa_c)}{h_\ell^{(+)}(i\kappa_c)}-D_-\frac{j'_\ell(D_-)}{j_\ell(D_-)}}{i\kappa_c\frac{h_\ell^{(+)\prime}(i\kappa_c)}{h_\ell^{(+)}(i\kappa_c)}-D_+\frac{j'_\ell(D_+)}{j_\ell(D_+)}}, \tag{A3}$$

利用方程（D29），可化简为

$$\frac{C_+}{C_-}=F_1\frac{a_{co}}{(a_--D_+^2)}\frac{j_\ell(D_-)}{j_\ell(D_+)}, \tag{A4}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned}F_1&=\frac{D_-\frac{j_{\ell+1}(D_-)}{j_\ell(D_-)}-i\kappa_c\frac{h_{\ell+1}^{(+)}(i\kappa_c)}{h_\ell^{(+)}(i\kappa_c)}}{D_+\frac{j_{\ell+1}(D_+)}{j_\ell(D_+)}-i\kappa_c\frac{h_{\ell+1}^{(+)}(i\kappa_c)}{h_\ell^{(+)}(i\kappa_c)}}\\&=\frac{D_-\frac{j_{\ell+1}(D_-)}{j_\ell(D_-)}-\kappa_c\frac{K_{\ell+\frac{3}{2}}(\kappa_c)}{K_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa_c)}}{D_+\frac{j_{\ell+1}(D_+)}{j_\ell(D_+)}-\kappa_c\frac{K_{\ell+\frac{3}{2}}(\kappa_c)}{K_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa_c)}},\end{aligned} \tag{A5}$$

并且使用了方程（D31）中的关系。

现在，我们可以从方程（A2）中提取相移并求得

$$\cot\delta=\frac{\eta_\ell(k_o)}{j_\ell(k_o)}\frac{F_2-k_o\frac{\eta'_\ell(k_o)}{\eta_\ell(k_o)}}{F_2-k_o\frac{j'_\ell(k_o)}{j_\ell(k_o)}}, \tag{A6}$$

其中

$$F_2=\frac{(D_-^2-a_+)D_-j'_\ell(D_-)+\frac{C_+}{C_-}a_{co}D_+j'_\ell(D_+)}{(D_-^2-a_+)j_\ell(D_-)+\frac{C_+}{C_-}a_{co}j_\ell(D_+)}. \tag{A7}$$

利用公式（A4），并再次利用公式（D29），我们重新表述公式（A6）和（A7），最后写为：

$$\cot\delta=\frac{\eta_\ell(k_o)}{j_\ell(k_o)}\frac{F_2-k_o\frac{\eta_{\ell+1}(k_o)}{\eta_\ell(k_o)}}{F_2-k_o\frac{j_{\ell+1}(k_o)}{j_\ell(k_o)}}, \tag{A8}$$

其中，代入公式（ C_+/C_-中A4的表达式，并利用公式（21）和（D29），我们将 F_2 重新定义为：

$$F_2=\frac{D_-\frac{j_{\ell+1}(D_-)}{j_\ell(D_-)}+F_1\frac{a_{co}^2}{(D_-^2-a_+)^2}D_+\frac{j_{\ell+1}(D_+)}{j_\ell(D_+)}}{1+F_1\frac{a_{co}^2}{(D_-^2-a_+)^2}}, \tag{A9}$$

其与式（A5）共同给出了相移的最终解析公式。

请注意，在无耦合的情况下， $a_{co}=0$，有 $F_2=\sqrt{a_-}j_{\ell+1}\left(\sqrt{a_-}\right)/j_\ell\left(\sqrt{a_-}\right)$，且式（A8）化简为文献 [20]的式（20）。

附录B 相移的低能展开

进入相移表达式，即式（A8）的量为 $D_\pm$ 和 $a_\pm$，并以各种组合形式出现。相关表达式见式（9）、（18）、（19）、（25）和（26）。以下用基本相互作用量表示的缩写很有用

$$b_0=\sqrt{(a_+-a_-)^2+4a_{co}^2}, \tag{B10}$$

$$b_1=S_c^2+S_o^2-\frac{2\mu R_0^2E^*}{\hbar^2}=(a_++a_-)^{(E=0)}, \tag{B11}$$

$$D_\pm^{(E=0)}\equiv D_\pm^{(0)}=\sqrt{(b_1\pm b_0)/2}, \tag{B12}$$

$$\kappa_c^{(E=0)}\equiv\kappa_c^{(0)}=\sqrt{\frac{2\mu R_0^2E^*}{\hbar^2}}, \tag{B13}$$

$$a_+^{(E=0)}\equiv a_+^{(0)}=S_c^2-\kappa_c^{(0)2}. \tag{B14}$$

式（A8）中的表达式在低能下可化简为 [21]

$$\frac{\eta_\ell(k_o)}{j_\ell(k_o)}\to-\frac{[(2\ell+1)!!]^2}{(2\ell+1)k_o^{2\ell+1}}\left(1+\frac{(2\ell+1)k_o^2}{(2\ell-1)(2\ell+3)}\right), \tag{B15}$$

$$k_o\frac{\eta_{\ell+1}(k_o)}{\eta_\ell(k_o)}\to(2\ell+1)\left(1-\frac{k_o^2}{(2\ell-1)(2\ell+1)}\right), \tag{B16}$$

and

$$k_o\frac{j_{\ell+1}(k_o)}{j_\ell(k_o)}\to\frac{k_o^2}{2\ell+3}. \tag{B17}$$

接下来要在有限值附近展开的函数是 F_1、 F_2，以及各种贝塞尔函数的比值。采用显而易见的记号，我们

可以写成

$$F_1 \to F_1^{(E=0)} + E\left.\frac{\partial F_1}{\partial E}\right|_{E=0} \equiv F_1^{(0)} + EF_1'^{(0)}\,, \tag{B18}$$

$$F_2 \to F_2^{(E=0)} + E\left.\frac{\partial F_2}{\partial E}\right|_{E=0} \equiv F_2^{(0)} + EF_2'^{(0)}\,, \tag{B19}$$

其中，对于方程（A5）和（A9），我们明确有

$$F_1^{(E=0)} \equiv F_1^{(0)} = \frac{D_-^{(0)}\frac{j_{\ell+1}(D_-^{(0)})}{j_\ell(D_-^{(0)})} - \kappa_c^{(0)}\frac{K^{(+)}_{\ell+3/2}(\kappa_c^{(0)})}{K_{\ell+1/2}(\kappa_c^{(0)})}}{D_+^{(0)}\frac{j_{\ell+1}(D_+^{(0)})}{j_\ell(D_+^{(0)})} - \kappa_c^{(0)}\frac{K^{(+)}_{\ell+3/2}(\kappa_c^{(0)})}{K^{(+)}_{\ell+1/2}(\kappa_c^{(0)})}}\,. \tag{B20}$$

and

$$F_2^{(E=0)} \equiv F_2^{(0)} = \tag{B21}$$
$$\frac{D_-^{(0)}\frac{j_{\ell+1}(D_-^{(0)})}{j_\ell(D_-^{(0)})} + F_1^{(0)}\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}D_+^{(0)}\frac{j_{\ell+1}(D_+^{(0)})}{j_\ell(D_+^{(0)})}}{1+F_1^{(0)}\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}}\,.$$

导数 $F_1'^{(0)}$ 和 $F'(0)$ 2 都涉及球贝塞尔函数或汉克尔函数之比的导数的组合，其形式为 $f_a(z) = \frac{j_{a+1}(z)}{j_a(z)}$，其中 z 为 $D_\pm$，而 $g_a(z) = \frac{h_{a+1}^{(+)}(z)}{h_a^{(+)}(z)}$，且$z = i\kappa_c$。这些项的导数 $f_a'(z)$ 和 $g_a'(z)$ 通过使用方程 (D32) 求得，其中还必须代入 z 的导数，即

$$\frac{\partial D_\pm}{\partial E} = \frac{\mu R_0^2}{D_\pm \hbar^2}\,,\ \frac{\partial(i\kappa_c)}{\partial E} = \frac{\mu R_0^2}{i\kappa_c\hbar^2}\,. \tag{B22}$$

还要注意到 $(D_-^2 - a_+)$ 与 E 无关，因此很容易得到导数为

$$\frac{F_2'^{(0)}}{F_2^{(0)}} = -\frac{F_1'^{(0)}a_{co}^2/(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}{1+F_1^{(0)}a_{co}^2/(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2} \tag{B23}$$
$$+\frac{f_\ell'(D_-^{(0)}) + \frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}\left(F_1^{(0)}f_\ell'(D_+^{(0)}) + F_1'^{(0)}f_\ell(D_+^{(0)})\right)}{f_\ell(D_-^{(0)}) + F_1^{(0)}f_\ell(D_+^{(0)})\frac{a_{co}^2}{(D_-^{(0)2}-a_+^{(0)})^2}}\,,$$

and

$$\frac{F_1'^{(0)}}{F_1^{(0)}} = \frac{f_\ell'(D_-^{(0)}) - g_\ell'(i\kappa_c^{(0)})}{f_\ell(D_-^{(0)}) - g_\ell(i\kappa_c^{(0)})}$$
$$-\frac{f_\ell'(D_+^{(0)}) - g_\ell'(i\kappa_c^{(0)})}{f_\ell(D_+^{(0)}) - g_\ell(i\kappa_c^{(0)})}\,. \tag{B24}$$

将相移按能量展开至二阶，得到

$$\frac{(2\ell+1)}{[(2\ell+1)!!]^2}k_o^{2\ell+1}\cot\delta \simeq -\left(1+\frac{(2\ell+1)k_o^2}{(2\ell-1)(2\ell+3)}\right)$$
$$\times\left(\frac{F_2^{(0)} - (2\ell+1) + E(F_2'^{(0)} + \frac{k_o^2}{E}\frac{1}{2\ell-1})}{F_2^{(0)} + E(F_2'^{(0)} - \frac{k_o^2}{E}\frac{1}{2\ell+3})}\right), \tag{B25}$$

可改写为

$$\frac{(2\ell+1)}{[(2\ell+1)!!]^2}k_o^{2\ell+1}\cot\delta \simeq -\left(1-\frac{2\ell+1}{F_2^{(0)}}\right) \tag{B26}$$
$$-E\,\frac{2\ell+1}{F_2^{(0)}}\left[\frac{F_2'^{(0)}}{F_2^{(0)}} - \frac{k_o^2}{E}\frac{1}{2\ell+3}\left(1+\frac{1}{F_2^{(0)}} - \frac{F_2^{(0)}}{2\ell-1}\right)\right],$$

其中，对于 ℓ 的非整数值，因子 $(2\ell+1)!!$ 应替换为 $\Gamma(2\ell+2)/(2^\ell\Gamma(\ell+1))$。

附录 C 双分量有效程

与散射长度的处理相同，在比较公式（35）和公式（36）后，我们得到：

$$\frac{R_{\rm eff}}{R_0} = \frac{\hbar^2}{\mu R_0^2}\left(\frac{a_{\rm tw}}{R_0}\right)^{2\ell} \tag{C27}$$
$$\times\frac{1}{F_2^{(0)}}\left[\frac{k_o^2}{E}\frac{1}{2\ell+3}\left(1+\frac{1}{F_2^{(0)}} - \frac{F_2^{(0)}}{2\ell-1}\right) - \frac{F_2'^{(0)}}{F_2^{(0)}}\right].$$

如果我们假设相对 s波（$\ell = 0$），经过一些处理后，(简化为有效作用范围

ing use of Eqs. (B23) and (B24), and tedious algebra, we can see that Eq.(C2 to the known analytic form of the effec for the square-well potential [22]:

$$\frac{R_{\rm eff}}{R_0} = 1 + \frac{3\tan S_o - 3S_o - S_o^3}{3S_o(S_o - \tan S_o)^2}. \tag{C28}$$

利用方程（B21）、（39）、（40）和（41），我们可以用 $a_{\rm open}$ 和 $a_{\rm closed}$表示有效程，见方程（C27），尽管所得表达式肯定比方程（42）中给出的散射长度表达式复杂得多。

附录D 一些有用的贝塞尔函数性质

这里汇总了本文推导所得表达式时所用的贝塞尔函数之间的关系。这些关系摘自 [21]。

下文中，B_ℓ 表示正则球贝塞尔函数 j_ℓ、非正则球贝塞尔函数 η_ℓ，或汉克尔函数 $h_\ell^{(\pm)} = j_\ell \pm i\eta_\ell$。$B_\ell(z)$ 的导数为：

$$z\frac{dB_\ell(z)}{dz} = \ell B_\ell(z) - zB_{\ell+1}(z). \tag{D29}$$

汉克尔函数 $h_\ell^{(+)}(i\kappa_c)$ 与第三类修正贝塞尔函数 $K_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa_c)$ 的关系为：

$$h_\ell^{(+)}(i\kappa_c) \propto \frac{1}{\sqrt{\kappa_c}} e^{-i\frac{\pi}{2}\ell} K_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa_c), \tag{D30}$$

由此可写为：

$$i\kappa_c \frac{h_{\ell+1}^{(+)}(i\kappa_c)}{h_\ell^{(+)}(i\kappa_c)} = \kappa_c \frac{K_{\ell+\frac{3}{2}}(\kappa_c)}{K_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa_c)}. \tag{D31}$$

$f_a(z) = z\frac{B_{a+1}}{B_a}$ 的导数为：

$$\frac{\partial f_a(z)}{\partial z} = z + z\left(\frac{B_{a+1}}{B_a}\right)^2 - (2a+1)\frac{B_{a+1}}{B_a}. \tag{D32}$$

参考文献

[1] Inouye,S., Andrews, M.R., Stenger, J., Mies- ner, H.-J., Stamper-Kurn, D.M., Ketterle, W.：玻色–爱因斯坦凝聚态中 Feshbach 共振的观测。《自然》**392**, 151 (1998)。https://doi.org/10.1038/32354[2] Chin, C., Grimm, R., Julienne, P., Tiesinga, E.：超冷气体中的 Feshbach 共振。Rev. Mod. Phys.**82**, 1225 (2010)。https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.1225[3] Efimov, V.：三体系统中共振二体力产生的能级。Phys. Lett. B**33**, 563 (1970)。https://doi.org/10.1016/0370-2693(70)90349-7

[4]Huang, B., Sidorenkov, L.A., Grimm, R., Hutson, J.M.：观测到 Efimov 情景中的第二个三原子共振。Phys. Rev. Lett. 112, 190401 (2014)。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.190401[5] Tung, S.-K., Jim´enez-Garc´ıa, K., Johansen, J., Parker, C.V., Chin, C.：锂 ^{6}-Cs 混合物中 Efimov态的几何标度。Phys. Rev. Lett. 113, 240402 (2014)。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.240402[6] Garrido, E., Jensen, A.S.：外场诱导的非整数维度中的 Efimov效应。Phys. Lett. A 385, 126982 (2021年)。https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126982[7] Garrido,E., Jensen, A.S., Alvarez-Rodr´ıguez, R.：a d- 维空间中的少体量子方法。Phys. Lett. A 383, 2021 (2019)。https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.04.007[8]Nishida, Y., Tan, S.：费米子-费米子混合物中的限域诱导的Efimov共振。Phys. Rev. A 79, 060701 (2009)。https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.060701[9]Garrido, E., Jensen, A.S.：二体系统的因禁与d 维度中的计算。Phys. Rev. Research 1, 23009 (2019)。https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.023009

[10]Garrido, E., Jensen, A.S.: 三个相同玻色子：非整数维度及外场中的性质。《物理评论研究》**2**, 033261（2020年）。https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.033261

[11] Garrido, E., Jensen, A.S.: 限域后Efimov效应的蒸发。Few-body Syst. **62**, 25（2021年）。https://doi.org/10.1007/s00601-021-01613-4

[12]Lange, A.D., Pilch, K., Prantner, A., Ferlaino, F., Engeser, B., N¨agerl, H.-C., Grimm, R., Chin, C.: 通过测量Feshbach共振附近分子束缚能确定原子散射长度。Phys. Rev. A 79 , 013622

（2009年）。
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.013622

[13] Sørensen, P.K., Fedorov, D.V., Jensen, A.S.：双通道接触相互作用模型中费什巴赫共振附近的三体复合率。Few-body Syst. **54**，579（2013）。
https://doi.org/10.1007/s00601-012-0312-7

[14]Marcelis, B., van Kempen, E.G.M., Verhaar, B.J., Kokkelmans, S.J.J.M.F.：具有较大背景散射长度的Feshbach共振：与开放通道共振的相互作用。Phys. Rev. A **70**，012701（2004）。
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.012701[15] Nielsen, E., Fedorov, D.V., Jensen, A.S., Garrido, E.：具有短程相互作用的三体问题。Phys. Rep. **347**，373（2001）。
https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00107-1
[16] Garrido, E.：利用坐标空间处理束缚态和连续态的少体技术。Few-body Syst. **59**，17（2018）。
https://doi.org/10.1007/s00601-018-1354-2[17] Fedorov, D.V., Jensen, A.S.：零程势三体问题的正则化。J. Phys. A: Math. Gen. **34**，6003（2001）。
https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/30/311[18] Marzok, C., Deh, B., Zimmermann, C., Courteille, P.W., Tiemann, E., Vanne, Y.V., Saenz, A.：超冷 ^{7}锂和 ^{87}铷混合物中的Feshbach共振。Phys. Rev. A**79**，012717（2009）。
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.012717[19] Cui, Y., Deng, M., You, L., Gao, B., Tey, M.K.：超冷碱金属系统中的宽费什巴赫共振。Phys. Rev. A**98**，042708（2018）。
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.042708
[20] Christensen, E.R., Garrido, E., Jensen, A.S.：非整数几何中的两体连续态。Phys. Rev. A **105**，033308（2022）。
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.105.033308

[21] Abramowitz, M., Stegun, I.A.：《数学函数手册》。（Dover 出版社，纽约，1965），第437页[22] Duine, R.A., Stoof, H.T.C.：玻色气体中的原子-分子相干性。Phys. Rep. **396**，115（2004）。
https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.03.003