arXiv:2303.03850v1 [math.GT] 7 Mar 2023

射影平面上莫尔斯函数的拓扑结构

Svitlana Bilun、Alexandr Prishlyak、Serhii Stas 和 Alina Vlasenko

2023年3月8日

摘要

为研究射影平面上莫尔斯函数的拓扑结构，我们使用 Reeb 图。我们描述其性质，并证明它是 $\mathbb{R}P^2$ 上简单莫尔斯函数的完备拓扑不变量。我们证明了 Reeb 图数量的递推公式，其中每个图具有给定数量的鞍点（顶点）。

2000年数学主题分类：58K05，37D15。关键词和短语：莫尔斯函数、莫尔斯-斯梅尔流、梯度流、Reeb 图。

引言

在Kronrod [13] 和Reeb [39], 的论文中，引入了一种不变量（Reeb图），用于描述二维流形上函数的拓扑性质。对于闭定向二维流形上的简单Morse函数，它是纤维保持等价下的完备拓扑不变量。如果在顶点集合上指定一个线性序，那么它就成为拓扑等价下的完备拓扑不变量。对于不可定向二维流形 [16], 以及带边界流形 [11, 12], ，则需要额外信息来构造完备拓扑不变量。对于非紧流形 [28], ，Reeb图可能是一个非豪斯多夫空间，这给研究它带来了额外困难。如果函数不是简单的，那么除了Reeb图之外，还需要关于每个临界水平集邻域内函数结构的信息 [5]。

指定莫尔斯函数拓扑结构的另一种方式，是使用在奇异点处具有给定函数值的莫尔斯–斯梅尔向量场 [16, 41]。因此，莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑分类与函数的分类密切相关。

闭曲面上光滑函数的拓扑性质也在 [26, 12, 11, 28, 25, 中进行了研究；带边界的曲面见 36, 16, 50, 51, 47, 42, 2, 40], ，闭三维流形见 [10, 12] 。

关于闭2维流形上流的分类，我们推荐参阅 [14, 17, 18, 23, 37, 1, 20, 38, 43, 49, 22, 21, 14, 35] ；关于带边界流形上的分类，推荐参阅 [15, 38, 20, 31, 33, 35] 。三维流形上流的拓扑性质在 [46, 48, 29, 27, 32, 30, 34, 19, 8, 4, 3] 中进行了研究。

图的主要不变量 及其在曲面中的嵌入可见于 [23, 7, 45, 52, 9, 6]。

射影平面的拓扑性质在许多几何教材中都有介绍，但我们还建议 [44].

本文的主要目的是研究射影平面上简单Morse函数的Reeb图的拓扑性质，并统计临界点数固定时这类图的数量。

1 RP^2上的莫尔斯函数

设 M 为光滑闭二维流形， $f : M \to R$ 为光滑函数。

若在某些局部坐标x_1, x_2 下，矩阵 $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$ 是非退化的，则称临界点 $x \in M$ 为非退化临界点。在二维流形上，非退化临界点有 3 种类型：局部极小值、鞍点和局部极大值。

若光滑函数 $f : M \to R$ 的所有临界点均非退化，则称其为莫尔斯函数。若莫尔斯函数的所有临界点都位于不同水平集上，则称其为简单， $f(p) \neq f(q)$，若 $p \neq q$。

莫尔斯函数的水平线 $f^{-1}(y)$ 的一个分支称为纤维。

如果存在一个从曲面到其自身的同胚，将一个函数的纤维映射到另一个函数的纤维，并将局部极小值映射到局部极小值，则称这两个莫尔斯函数纤维等价。

根据函数递增的方向对边进行定向的商空间 $M/\sim$ 称为 Reeb图，其中 $f\colon M\to R$ 是一个莫尔斯函数， $x_1\sim x_2$ 当且仅当 x_1 和 x_2 属于同一个纤维。Reeb图在有向图同构意义下考虑。Reeb图的例子如图1、2所示。

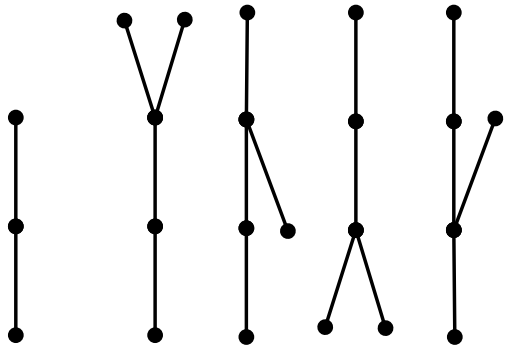

图1：具有一个鞍点的1个 Reeb图和具有两个鞍点的4个 Reeb图

可定向曲面上的两个简单Morse函数纤维等价，当且仅当它们的 Reeb图同构（[1], 定理2.4，第71页）。在不可定向曲面上，存在更多具有相同 Reeb图但彼此不纤维等价的函数。因此，需要额外的不变量来分类莫尔斯函数。但对于射影平面，我们有如下结果

T定理 1 射影平面上简单*Morse*函数的 *Reeb*图具有以下性质 *:*

1）该图是一棵树；*2*）该图有一个度为*2*的顶点，其余顶点的度为*1*或*3*；*3*）

只有度为*1*的顶点是汇点和源点。

证明。 1）如果该图不是树，那么它就含有一个环，而这对应于与环面或克莱因瓶作连通和，这意味着不可定向曲面的亏格大于或等于2，这是不可能的。

2）每个度为2的顶点对应一个不可定向原子（带一个孔的莫比乌斯带）。如果这样的顶点不止一个，那么曲面的亏格就会大于1。

3）汇点和源点对应函数的局部极值，而度为2和3的顶点对应鞍点。

定理2 $\mathbb{R}P^2$ 上的两个简单*Morse*函数纤维等价，当且仅当它们的*Reeb*图同构。

证明。考虑 Reeb图上与一个二价顶点对应的临界水平集的邻域 U 。沿梯度场的两条正则轨线切开后，它将呈现为图 3 所示的形式。除该邻域外，函数是定向曲面上的莫尔斯函数，因此其上的 Reeb图同构确定了函数在这些部分上的拓扑等价。接下来将这些同胚延拓到 U。为此，我们将 Y 分为两部分：一部分是领圈（边的邻域），另一部分是中心部分（领圈的补集）。如果所构造的拓扑等价在 Y 的每个边界分支上都保持方向，那么我们在中心部分定义恒等映射；如果在每个分支上都反转方向，则定义中心对称；如果在其中一条边上反转方向，则定义关于水平轴或垂直轴的轴对称。由于圆上的任何同胚都同伦于恒等映射或关于某条轴的对称映射，这些同伦便确定了领圈上函数的拓扑等价。根据构造，这三个映射（分别定义在领圈、中心部分以及 U 的补集上）在边缘处相互吻合，因此它们确定了所需的拓扑等价。

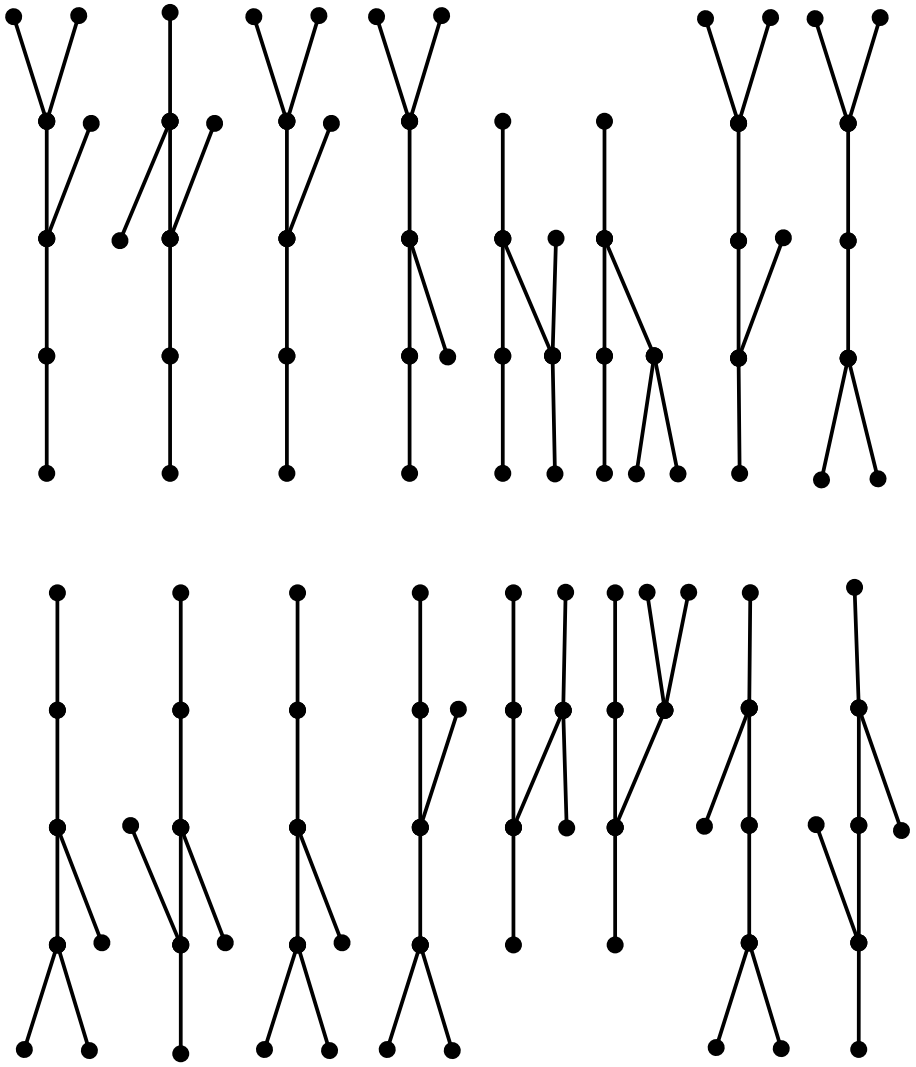

图 2： RP^2 上具有三个鞍点临界点的莫尔斯函数的 16 个 Reeb图

2 Reeb图的数量

为了求出射影平面上拓扑不等价的莫尔斯函数的数量，我们首先计算具有给定鞍点数的有根黎曼图的数量。

定理 *3 </style}*具有 k 个鞍点的根定向黎曼图的数量 K_k 可用以下递归公式计算：当 $k = 2n$ 为偶数时

$$K_{2n} = 3(K_0K_{2n-1} + K_1K_{2n-2} + \ldots + K_{n-1}K_n);$$

当 $k = 2n + 1$ 为奇数时

$$K_{2n+1} = 3(K_0K_{2n} + K_1K_{2n-1} + \ldots + K_{n-1}K_{n+1}) + \frac{3K_n^2 + K_n}{2}.$$

证明。 考虑距离根最近的鞍点。它是一个度数为 3 的顶点。从图中移除这个鞍点，得到三个连通分支。其中一个是连接该鞍点与根的一条边。其余两个分支可视为有根 Reeb 图，其中根是远端的鞍点。设第一个图的顶点数不少于第二个图。那么有以下三种情况：

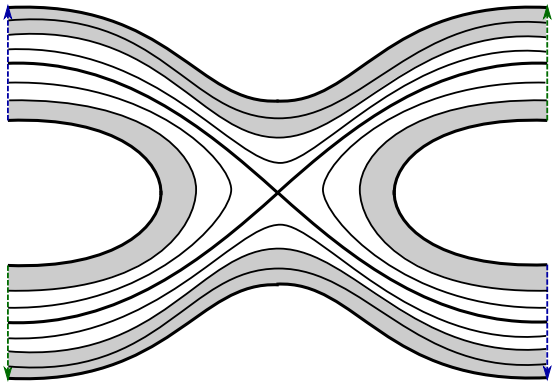

图3：临界水平集的一个邻域

1）两个图中，与根相接的边在原图中都朝上；2）第一个图中的这条边朝上，第二个图中的朝下；3）第二个图中的这条边朝上，而第一个图中的朝下。

在指定边向下定向的情况下，有根树上的方向也会反转。请注意，这两个图仅通过顶点总数这一条件相互关联，而顶点总数必须等于原图的顶点数。如果两个图的顶点数不同，那么它们就不同构。因此，具有这类子图的非同构原图总数等于非同构子图数量的乘积。由此得到第一个公式。如果第一个图的顶点数等于第二个图的顶点数，那么第二种和第三种情况重合，必须只计一次。此外，在第一种情况下，乘积中非同构的图被计算了两次，而同构的图只计算了一次。综合以上因素，我们得到第二个公式。

利用这些公式，我们得到如下初始值。
$K_0 = 1$
$K_1 = 2$
$K_2 = 6$
$K_3 = 25$
$K_4 = 111$
$K_5 = 540$
$K_6 = 2736$
$K_7 = 14396$
$K_8 = 77649$
$K_9 = 427608$
$K_{10} = 2392866$
$K_{11} = 13570386$
$K_{12} = 77815161$
$K_{13} = 450418536$
$K_{14} = 2628225684$

定理4 在 $\mathbb{R}P^2$ 上拓扑非等价的简单莫尔斯函数的数量 N_k 可由以下公式计算

$$N_k = K_0K_{k-1} + K_1K_{k-2} + \ldots + K_{k-1}K_0.$$

证明。 射影平面上简单Morse函数的Reeb图被一个度为2的顶点分割为两个有根定向Reeb图。因此，Reeb图的总数等于相应有根Reeb图数量乘积的总和。

利用它，我们得到
$N_1 = 1N_2 = 4$

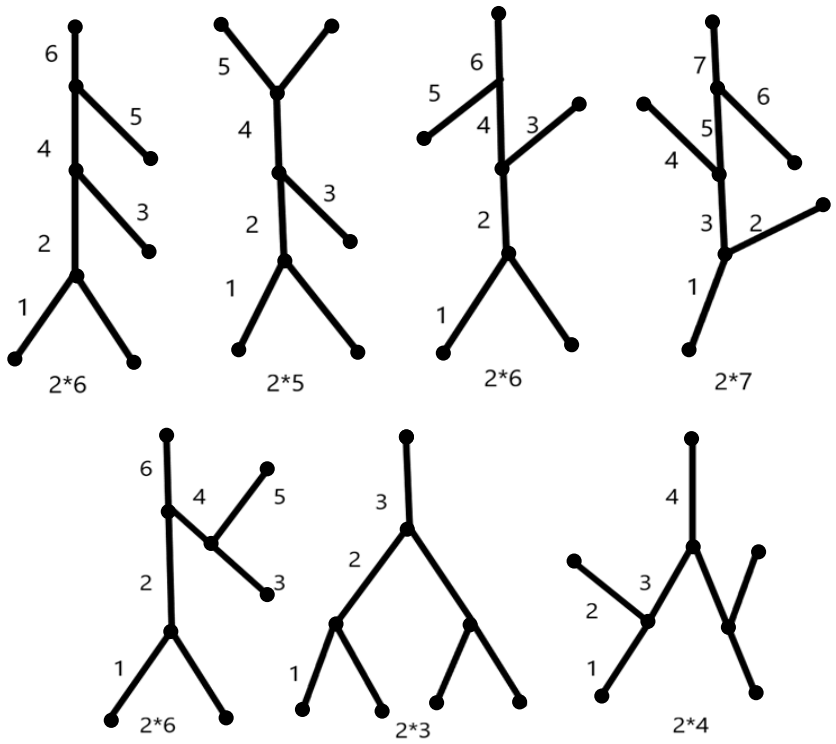

图 4: RP^2 上具有四个鞍点临界点的莫尔斯函数的 74 个 Reeb图 s

$N_3 = 16$
$N_4 = 74$
$N_5 = 358$
$N_6 = 1824$
$N_7 = 9589$
$N_8 = 51766$
$N_9 = 285035$
$N_{10} = 2178244$
$N_{11} = 9046744$
$N_{12} = 51876774$
$N_{13} = 300278112$
$N_{14} = 1752150456$
$N_{15} = 10295599780$
所有可能的含一个和两个鞍点的Reeb图见图1，含三个鞍点的见图2，含四条边的见图4。

结论

我们证明了Reeb图是 $\mathbb{R}P^2$上简单Morse函数的完备拓扑不变量。我们导出了一个递推公式，用于计算拓扑不等价函数的数量。给出了鞍点不超过15个（临界点31个）的函数的计算结果。我们希望所得结果能够推广到其他曲面。

参考文献

[1] O. Akchurin、S. Bilun和A. Prishlyak. 作为2维球面三角剖分1-骨架的三色图. arXiv.org, 2209.05737 [math.GT], 1-25, 2022年. doi: 10.48550/ARXIV.2209.05737.[2] S. Bilun和A. Prishlyak. 闭曲面上的闭莫尔斯1-形式. Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka, 2002年(8):77–81, 2002年.[3] S. Bilun和A. Prishlyak. 3维球面图示上具有两个鞍点的莫尔斯流的可视化. arXiv.org, 2209.12174 [math.GT], 1-29, 2022年. doi: 10.48550/ARXIV.2209.12174.[4] S. Bilun、A. Prishlyak和A. Prus. 3维流形边界上具有不动点的莫尔斯流. arXiv.org, 2209.04019 [math.GT], 1-16, 2022年. doi: 10.48550/arXiv.2209.04019.[5] A.V. Bolsinov和A.T. Fomenko. 可积哈密顿系统. 几何、拓扑、分类. CRC出版社旗下公司，博卡拉顿、伦敦、纽约、华盛顿哥伦比亚特区，2004年. 724页.[6] J. Gross和T. Tucker. 拓扑图论. Wiley，1987年.[7] F. Harary. 图论. Westview出版社，1969年.[8]Ch. Hatamian和A. Prishlyak. 亏格1和亏格2不可定向3维流形上的海加德图和最优莫尔斯流. Proc. Int. Geom. Cent., 13(3):33–48, 2020年. doi: 10.15673/tmgc.v13i3.1779.[9] P. Hilton和S. Wylie. 同调理论：代数拓扑导论. 剑桥大学出版社，1968年.[10] B. I. Hladysh和A. O. Pryshlyak. 曲面边界上具有非退化临界点的函数. 《乌克兰数学杂志》, 68(1):29–40, 2016年6月. doi: 10.1007/s11253-016-1206-5.[11] B.I. Hladysh和A.O. Prishlyak. 二维流形边界上具有孤立临界点的函数的拓扑. SIGMA. 对称性、可积性与几何：方法与应用, 13:050, 2017年. doi: 0.3842/SIGMA.2017.050.[12] B.I. Hladysh和A.O. Prishlyak. 具有边界的定向曲面上的简单Morse函数. 《数学物理、分析与几何杂志》, 15(3):354–368, 2019年. doi: 10.15407/mag15.03.354.[13] A.S. Kronrod. 两个变量的函数. 《俄罗斯数学综述》, 5:24–134, 1950年.[14] Z. Kybalko、A. Prishlyak和R. Shchurko. 闭曲面上最优莫尔斯流的轨道等价. Proc. Int. Geom. Cent., 11(1):12–26, 2018年. doi: 10.15673/tmgc.v11i1.916.[15] M. Losieva和A. Prishlyak. 二维圆盘边界上具有奇点的莫尔斯–斯梅尔流的拓扑. 国际几何中心论文集, 9(2):32–41, 2016年1月. doi: 10.15673/tmgc.v9i2.279.[16] D.P. Lychak和A.O. Prishlyak. 不可定向曲面上的莫尔斯函数和流. Methods of Functional Analysis and Topology, 15(03):251–258, 2009年.[17] A.A. Oshemkov和V.V. Sharko. 二维流形上莫尔斯-斯梅尔流的分类. 《数学文集》, 189(8):93–140, 1998年.[18] M.M. Peixoto. 关于2维流的分类. 动力系统（巴西萨尔瓦多巴伊亚大学研讨会论文集，1971年）, 389–419, 1973年.[19] A. Prishlyak. 莫尔斯-斯梅尔流的完全拓扑不变量与三维流形的把手分解. J. Math. Sci., 纽约, 144(5):4492–4499, 2007年. doi: 10.1007/s10958-007-0287-y.[20] A. Prishlyak和L. Di Beo. 博耶曲面中具有最少奇点数的流. 《国际几何中心论文集》, 15(1):32–49, 2022年. doi: 10.15673/tmgc.v15i1.2225.

[21] A. Prishlyak 和 M. Loseva. 闭可定向曲面上具有集体动力学的最优流的拓扑. Proc. Int. Geom. Cent., 13(2):50–67, 2020年. doi: 10.15673/tmgc.v13i2.1731.[22] A. Prishlyak、A. Prus 和 S. Guraka. 球面上具有集体动力学的流. Proc. Int. Geom. Cent., 14(1):61–80, 2021年. doi: 10.15673/tmgc.v14i1.1902.[23] A.O. Prishlyak. 嵌入曲面中的图. 《俄罗斯数学综述》, 52(4):844, 1997年. doi: 10.1070/RM1997v052n04ABEH002074.[24] A.O. Prishlyak. 三维流形上莫尔斯函数的等价性. Methods of Func. Ann. and Topology, 5(3):49–53, 1999年.[25] A.O. Prishlyak. 取值于直线和圆的曲面上莫尔斯函数的共轭. 《乌克兰数学杂志》, 52(10):1623–1627, 2000年. doi: 10.1023/A:1010461319703.[26] A.O. Prishlyak. 四维流形上莫尔斯函数的共轭. 《俄罗斯数学综述》, 56(1):170– 171, 2001年. doi: 10.1070/RM2001v056n01ABEH000370.[27] A.O. Prishlyak. 三维流形上无闭轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场. 《数学札记》, 71(1):230–235, 2002年. doi: 10.1023/A:1013963315626.[28] A.O. Prishlyak. 平面上具有有限个奇点的莫尔斯函数. Meth. Funct. Anal. Topol, 8:75–78, 2002年.[29] A.O. Prishlyak. 三维流形上具有 beh2 的莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑等价. 《乌克兰数学杂志》, 54(4):603–612, 2002年.[30] A.O. Prishlyak. 闭曲面上具有孤立临界点的光滑函数的拓扑等价. 《拓扑学及其应用》, 119(3):257–267, 2002年. doi: 10.1016/S0166-8641(01)00077-3.[31] A.O. Prishlyak. 分层集上具有孤立不动点的流的指标和 .《数学物理、分析与几何杂志》 /《数学科学杂志》/,10(1):106–115, 2003年.[32] A.O. Prishlyak. 闭三维流形上的正则函数. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, 8:21–24, 2003年.[33]A.O. Prishlyak. 带边界的二维和三维流形上 m-场的拓扑分类. 《乌克兰数学杂志》, 55(6):966–973, 2003年.[34] A.O. Prishlyak. 莫尔斯–斯梅尔流的完全拓扑不变量与三维流形的把手分解. Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, 11(4):185–196, 2005年.[35] A.O. Prishlyak 和 M.B. Loseva. 曲面边界上具有奇点的最优莫尔斯–斯梅尔流. J. Math. Sci., 纽约, 243:279–286, 2019年. doi: 10.1007/s10958-019-04539-9.[36] A.O. Prishlyak 和 K.I. Mischenko. 带边界非紧曲面的分类. Methods of Functional Analysis and Topology, 13(01):62–66, 2007年.[37] A.O. Prishlyak 和 A.A. Prus. 带边界紧曲面上莫尔斯流的三色图. 《数学科学杂志》, 249(4):661–672, 2020年. doi: 10.1007/s10958-020-04964-1.[38] A. Prislyak 和 A. Prus. 带孔环面上的莫尔斯-斯梅尔流. Proc. Int. Geom. Cent., 10(1):47–58, 2017年. doi: 10.15673/tmgc.v1i10.549.[39] G. Reeb. 关于完全可积的 Pfaff 形式或数值函数的奇点. C.R.A.S. Paris, 222:847—849, 1946年.[40] V.V. Sharko. 流形上的函数：代数与拓扑方面. 《美国数学会数学专著译丛》第131卷. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993年。

[41] S. Smale. 关于梯度动力系统. 《数学年刊》, 74:199–206, 1961年.[42] С.В. Білун、А.О. Гагай、О.О. Ворончук 和 М.В. Лосєва. 闭曲面上闭莫尔斯1-形式的变形. 《国际几何中心论文集》, 6(4):52–56, 2013年.[43] В.М. Кузаконь、В.Ф. Кириченко 和 О.О. Пришляк. 光滑流形. 几何与拓扑方面. 《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》.—*2013.—97.—500* 页, 2013年.[44] С.Білун. О.Пришляк. 射影平面的几何与拓扑. 《数学世界》, 1:1–6, 2022年.[45] Л. С. Понтрягин. 组合拓扑学基础. 科学出版社, 1986年.[46]A.O. Пришляк. 三维流形上具有有限条奇异轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场. 《乌克兰国家科学院学报》, 6:43–47, 1998年.[47]A.O. Пришляк. 莫尔斯函数的共轭. 《现代数学若干问题》. 乌克兰科学院数学研究所，基辅, 1998 年 .[48] A.O. Пришляк. 三维流形上函数与莫尔斯 — 斯梅尔向量场的拓扑等价 . 《拓扑与几何》 . 《乌克兰数学大会论文集》, 第29–38页, 2001年.[49]A.O. Пришляк. 三维流形上无闭轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场. 《数学札记》, 71(2):254–260, 2002年.[50] О.О. Пришляк. 莫尔斯理论. 基辅大学, 2002年。

[51] О.О. Пришляк。《流形拓扑学》。基辅大学，2015年。

[52] У. Татт。《图论》。世界出版社，1988年。

基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学 Svitlana Bilun 电子邮箱：bilun@knu.ua *Orcid ID*：0000-0003-2925-5392 AlexandrPrishlyak 电子邮箱：prishlyak@knu.ua *Orcid ID*：0000-0002-7164-807X SerhiiStas 电子邮箱：stasserhiy380@gmail.com *Orcid ID*：0009-0006-1241-7497 Alina Vlasenko 电子邮箱：vlasenko aline@ukr.net *Orcid ID*：0009-0000-0213-959X_