arXiv:2303.03858v1 [eess.SP] 7 Mar 2023

研究论文

用于识别具有不连续非线性的机械系统的切换高斯过程潜在力模型

Luca Marino[1]* 和 Alice Cicirello[1]

[1]代尔夫特理工大学土木工程与地球科学学院，Stevinweg 1，2628 CN Delft，荷兰。*通讯作者。电子邮箱：l.marino-1@tudelft.nl

关键词 **s:**基于物理的机器学习；非线性系统辨识；摩擦力；粘滑；灰箱模型 del

摘要

本文提出一种方法，用于识别可近似为单自由度模型的机械系统中的不连续、非光滑非线性力，例如摩擦接触产生的非线性力。为处理这些非线性因素在动态响应中引起的剧烈变化和多种运动状态，我们将部分已知的基于物理的模型与系统对已知输入力的响应含噪测量相结合，构建切换高斯过程潜在力模型（GPLFM）。在这一灰箱框架中，使用多个高斯过程对不同运动状态下的未知非线性力进行建模，并通过重置模型生成不连续性。通过针对切换线性动力系统的滤波与平滑技术，推断系统状态、非线性力和状态转变。我们将所提出的切换 GPLFM 应用于仿真的干摩擦振子，以及由带有黄铜与钢接触的单层框架组成的实验装置。对于以下情况，模型在识别非线性不连续摩擦力方面均取得了出色的结果：(i) 接触处法向载荷幅值变化；(ii) 测量噪声水平变化；(iii) 数据集中的样本数量变化。此外，利用辨识出的状态、摩擦力和运动状态序列，评估了：(1) 不确定的系统参数；(2) 摩擦力与速度的关系；(3) 静摩擦力。正确识别不连续非线性力并量化其预测中剩余的不确定性，有助于构建准确的正向模型，从而预测系统对不同输入力的响应。

影响声明

识别摩擦接头产生的非线性力，对于理解和预测工程结构的非线性行为至关重要。然而，大多数识别方法无法处理这些非线性因素在系统响应中引入的急剧变化和多种运动状态。本文提出的方法将系统的部分已知基于物理的模型与其响应的含噪测量相结合，构建切换高斯过程（GP）潜在力模型；其中，多个高斯过程用于对不同运动状态下的非线性力进行建模，并通过重置模型产生不连续性。运动状态转变和不连续性与非线性力一同以贝叶斯方式推断，并可用于构建能够进行可靠预测的正向模型。

1. 引言

本文聚焦于结构动力学中的一项关键挑战：当系统的基于物理的模型不完整，且只能获得其动态响应的含噪测量时，如何识别复杂机械系统结构接头处产生的不连续非线性力。随着公差要求日益严格、对更高性能的普遍需求不断提升，在结构设计和分析中正确考虑摩擦接头引入的非线性变得愈发重要。摩擦会产生剧烈或非光滑现象，例如粘滑运动和振动冲击；即使在低振幅振动条件下，这些现象也无法通过等效线性技术加以描述（Butlin等人，2015）。具体而言，本文提出了一种方法，用于识别机械系统中由干摩擦引起的此类不连续、非光滑非线性。

结构动力学中的非线性带来了诸多挑战，包括需要先进的数学模型和求解技术，以及缺乏针对非线性结构实验测试的通用方法（Wang 等，2018）。非线性系统辨识在协调数值预测与实验研究方面发挥着基础性作用（Kerschen 等，2006）。事实上，它能够从实验数据中提取有关非线性结构行为的信息，并因此预测这些系统对不同输入的响应。近年来，人们已发展出多种技术，用于检测（Worden 和 Tomlinson，2001）、定位（Wang 等，2018）、表征（Ondra 等，2017）和量化（Carella 和 Ewins，2011）非线性；关于这一主题的详尽综述，参见（Kerschen 等，2006；Ewins 等，2015；Noël 和 Kerschen，2017）。然而，大多数非线性系统辨识方法都难以处理不连续且非光滑的非线性，例如机械系统中的干摩擦所引入的非线性。

处理平滑非线性的一个非常有前景的方法是高斯过程潜在力模型（GPLFM）。Alvarez 等人（2009）首次提出GPLFM，用于根据机械系统响应的含噪观测值识别驱动二阶动力系统的未知输入力。潜在驱动力被建模为具有平稳核的零均值时间高斯过程（GP），并利用系统的控制方程（即领域知识）结合响应测量值更新GP先验。尽管该方法优于纯数据驱动方法，但其计算成本较高，因为相对于数据点数量 T，GP回归的计算复杂度为$O(T^3)$。为克服这一局限，Hartikainen 和 Särkkä（2012）将问题重新表述为增广状态空间模型，将系统的控制方程与GP潜在力的状态空间表示相结合，其推导见Hartikainen 和 Särkkä（2010）。在该表述下，可以使用卡尔曼滤波器（Kalman，1960）和Rauch-Tung-Striebel（RTS）平滑器（Rauch 等人，1965）进行序贯推断，从而显著降低计算负担。近年来，多位作者探索了GPLFM在机械系统中的应用。具体而言，该方法已应用于线性单自由度（SDOF）（Rogers 等人，2018）和多自由度（MDOF）机械系统（Nayek 等人，2019；Rogers等人，2020），以及具有已知非线性的非线性系统（Rogers等人，2020），以执行输入-状态联合估计。在Rogers等人（2018；2020）的研究中，GPLFM还用于推断系统的不确定物理参数。近年来的实验研究中还可以找到GPLFM用于输入-状态联合辨识的更多应用（Petersen 等人，2022；Zou 等人，2022；Bilbao 等人，2022；Zou 等人，2022）。最后，在Rogers and Friis (2022)中，GPLFM被应用于具有已知驱动力的机械系统的非线性识别。对于单自由度Duffing振子，通过将非线性恢复力建模为GP潜在力，对系统参数、潜在状态和非线性恢复力进行了联合估计。在该方法中，还通过使用多项式拟合推断出的估计值，重构了非线性力的函数形式

曲线，其阶数通过贝叶斯信息准则（Schwarz，1978）确定。GPLFMs的一个局限是，单个GP潜在力通常无法对时间序列中的剧烈变化进行建模，例如由不连续非线性或切换驱动力产生的变化，也无法处理在不同运动状态下运行的系统响应。人们已经提出了不同的方法，用于识别由一系列潜在力驱动的系统。例如，Alvarez 等人 推断了未知的切换时刻以及高斯过程超参数。然而，该方法需要预先知道切换点的数量。Hartikainen 和 Särkkä （2012）通过将GPLFM表述为切换线性动力系统克服了这一局限，其中潜在驱动力模型的转变由离散时间马尔可夫模型控制。然而，使用切换潜在力模型识别非线性系统目前仍未得到探索。

本文提出了一种切换 GPLFM，用于识别在已知驱动力激励下的单自由度（SDOF）机械系统中的不连续非线性力及其潜在状态。该方法基于在潜在非线性恢复力模型中引入切换高斯过程潜在力模型框架（Hartikainen 和 Särkkä，2012；Rogers 和 Friis，2022），从而能够：（i）采用不同的高斯过程对不同运动状态下作用的非线性力进行建模（例如，干摩擦振子在滑动和黏着响应期间）；（ii）采用重置模型在潜在非线性力中生成不连续性。此外，本文还开发了一种方法，可根据所识别的潜在状态和不连续非线性力估计系统中不确定的物理参数，即质量、黏性阻尼和刚度。最后，提出了一套程序，用于表征非线性摩擦力对滑动速度的函数依赖关系，并确定静摩擦力。这使得能够评估摩擦力-速度关系及静摩擦力数值，二者均是表征摩擦定律的稳健特征（Cabboi 等人，2022）。

本文的组织结构如下。第2节介绍切换 GPLFM 的数学形式及其实现。第3节将所提出的方法应用于一个在随机相位多正弦激励下的单自由度干摩擦振子的数值案例研究。随后，第4节介绍一项实验案例研究，其中对受简谐基底激励的单层框架的粘滑响应进行非线性系统辨识。最后，第5节的结论进一步讨论了研究结果。

2. 切换高斯过程潜在力模型的数学形式 del

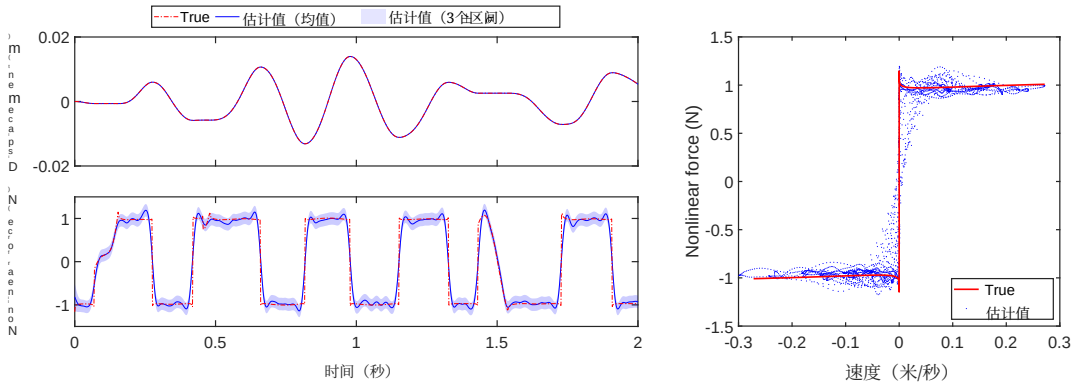
考虑一个质量为 m、黏性阻尼系数为 c、刚度为 k，并受动态载荷 $u(t)$激励的非线性单自由度系统。该系统的控制方程可表示为：

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz + f(z, \dot{z}) = u(t) \tag{1}$$

其中 $f(z, \dot{z})$ 是质量块位移和速度的一个通用未知非线性函数。识别这一非线性项，包括确定其最可能的函数形式和参数，对于构建准确的系统正向模型至关重要；该模型应能够预测系统对任意输入力的响应。如果已知驱动力 $u(t)$作用下系统响应的一组含噪测量值，则可采用 Rogers 和 Friis (2022) 提出的方法，通过 GPLFM 识别非线性力。在这种情况下，潜在力模型将非线性函数建模为时间上的零均值高斯过程，并采用平稳核 κ：

$$f(z, \dot{z}) \sim \mathcal{GP}\left(0, \kappa(t, t')\right) \tag{2}$$

这种非线性系统辨识方法的性能完全取决于高斯过程重构非线性力的能力。GPLFM 面临的一个特别棘手的问题是



(a) (b)

图 **1.** 干摩擦振子中非线性恢复力识别示例（模型参数如第 *3* 节所述），对应于 $f_s = 500\ Hz$ 和信噪比 $= 80\ dB$：位移与非线性摩擦力的时间演化（***a***）以及摩擦力与速度的关系（***b***）。

识别时间演化呈现不连续性或剧烈变化的非线性力。例如，图1展示了 GPLFM 在识别干摩擦振子中的非线性力时的性能。该振子受到已知的随机相位多正弦激励，并可获得质量块位移的含噪测量。在这个系统中，正如第3节所详细介绍的，摩擦力始终阻碍接触部件之间的滑动运动；当滑动速度的符号改变时，非线性力便会出现不连续性。由图1a 可见，高斯过程往往会平滑已识别非线性力中的剧烈变化。因此，在辨识过程中，有关不连续性的信息会丢失。图1b 所示的非线性摩擦力-速度点估计也体现了这一点。此外，由图1a 可见，在系统粘滑响应所呈现的粘着与滑动阶段交替过程中，摩擦力表现出显著不同的模式。如果使用单个潜在力对非线性摩擦力建模，GPLFM 的性能还会进一步受到影响。

2.1. 概率模型

本文引入一种切换高斯过程潜在力模型，以识别具有不连续性和/或会在动态响应中产生不同运动状态的复杂非线性。该潜在力模型可按以下形式表述为切换线性动态系统：

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, u_{t-1}, s_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t|A(s_t)\mathbf{x}_{t-1} + B(s_t)u_{t-1}, Q(s_t)) & \text{(3a)} \\ p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t, u_t, s_t) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t|C(s_t)\mathbf{x}_t + D(s_t)u_t, R(s_t)) & \text{(3b)} \end{cases}$$

其中 s_t 是切换变量，表示时刻 t处激活的潜在力模型。对于每个模型，上述方程对应于增广线性高斯状态空间模型（LGSSM）的转移模型和观测模型；该模型通过耦合系统和潜在力的状态空间表示得到，详见第 2.2 节。

这一表述的实现秉承了 Hartikainen 和 Särkkä （2012）所提出方法的理念，用于识别这样的动力系统：不同的潜在力可以在不同且可能相互重叠的时间区间内作为输入。所提出的切换潜在力模型与 Hartikainen 和 Särkkä 的模型主要区别在于引入了已知输入项，从而能够使用 GP 潜在

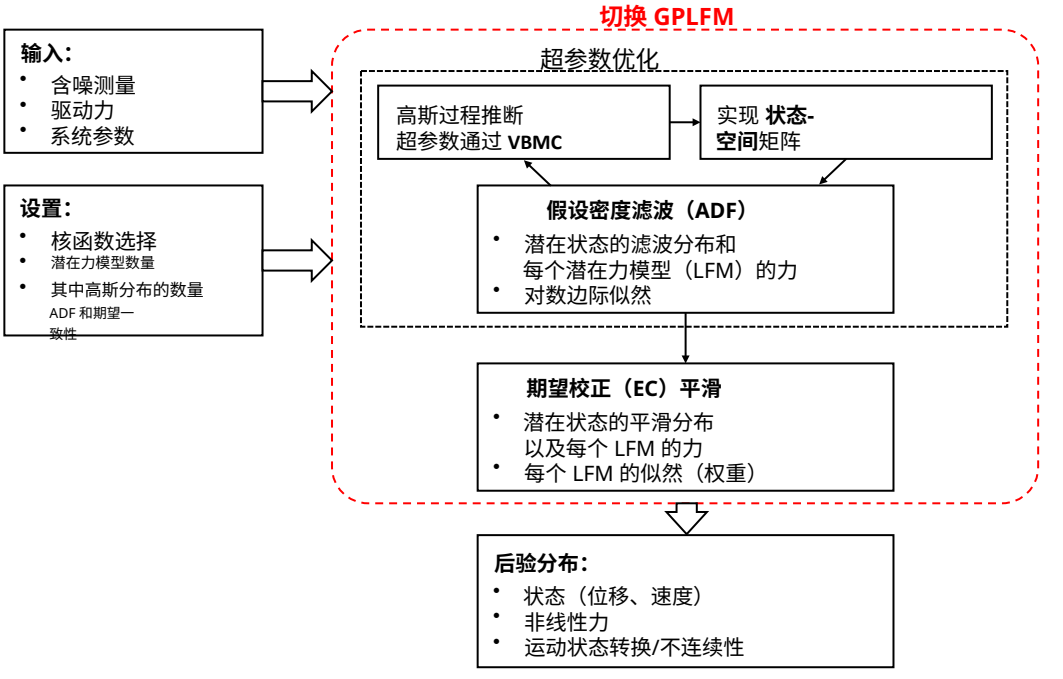


图 *2.* 切换 *GPLFM* 的示意图。

力来对作用于系统中的未知非线性力进行建模。在切换高斯过程潜在力模型框架中，可以引入不同的动力学模型，以描述不同时间步长下潜在状态和非线性力的演化，从而能够使用不同的控制方程处理不同的运动状态。以干摩擦振子为例，所提出的方法允许定义不同的方程，以描述系统在滑动和黏着阶段的行为。然而，为了使潜在非线性力能够在不同状态之间转变时，或在速度符号相反的两个滑动阶段之间出现不连续性，还必须在切换线性动力系统表述中加入重置模型。正如 Hartikainen 和 Särkkä （2012）所提出的，该模型将潜在力分量重置为具有适当选定协方差的零均值高斯先验，同时保持系统的输出状态不变。

在切换 GPLFM 表述中，方程（3）中的 SLDS 通常与如下形式的离散时间马尔可夫模型相耦合： $p(s_t|s_{t-1})$ ，因此还可以对不同潜在力模型之间的转变进行概率推断。如果考虑 S 个不同的模型，其中第 S个模型作为重置模型运行，则该马尔可夫模型可写为：

$$p(s_t|s_{t-1}) = \begin{cases} \rho, & \text{if } s_t = s_{t-1} \neq S \\ 1-\rho, & \text{if } s_t = S \text{ and } s_{t-1} \neq S \\ \dfrac{1}{S-1}, & \text{if } s_t \neq S \text{ and } s_{t-1} = S \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

结合 $0 < \rho < 1$。方程（4）可作如下解释：如果某个（非重置）模型在时刻 $t-1$处于激活状态，则该模型在随后的时刻 t仍保持激活状态的概率为 ρ；否则，将转变为重置模型。此外，如果重置模型在时刻 $t-1$处于激活状态，则在接下来的一个时间步长中将转变为任意一个

其他模型，且各模型的概率相等。ρ 的数值必须由用户选择，通常介于 0.9 和 1 之间（例如，参见 Barber （2006）；Hartikainen 和 Särkkä（2012））。

总而言之，切换 GPLFM 能够在非线性系统辨识过程中考虑三种不同的不确定性来源：

- **非线性力模型不确定性**。 通过对每种运动状态下的未知非线性力进行建模，来应对对方程（1）中非线性项函数形式缺乏了解的问题：将其表示为具有平稳核的零均值时间高斯过程，再利用可用的响应测量值以及基于物理的模型所确定的非线性力与响应之间的关系，以贝叶斯方式对其进行更新。
- **测量不确定性**。 与标准GPLFM一样，这里假设测量噪声服从协方差为 R 的高斯分布；不同的潜在力模型可以采用不同的协方差矩阵。这里假设测量噪声服从零均值高斯分布，但该过程也可以考虑测量偏差；更多详情参见 Barber (2006）。在所提出的方法中，测量噪声协方差与高斯过程超参数一并进行推断（见第2.4节）。

- **状态转变不确定性**。 该方法的主要优势之一是能够推断不同潜在力模型之间未知的切换，从而识别运动状态转变和不连续性。关于状态转变的先验知识由方程（4）中引入的马尔可夫模型表示，并结合响应测量值、潜在状态和力进行更新。

所提出方法的实现过程示意如图 2所示。为根据方程（3）构建切换线性动态系统，首先需要按照第 2.2 节介绍的步骤，推导系统和高斯过程潜在力的状态空间表达式。随后，可基于如此定义的概率模型进行推断，从而获得最优高斯过程超参数，以及潜在状态和非线性力的后验分布，同时识别时间演化过程中发生的运动状态序列及不连续性。第 2.3 节将对此进行说明。

2.2. 状态空间表达式

假设在方程（1）中，非线性项由一组 $S-1$ 个潜在力表示。根据切换 GPLFM 的表达式，每个时间步长可以有一个或多个此类力处于激活状态。每个潜在力均可表示为零均值时间高斯过程，并采用平稳核，如方程（2）所示。正如 Hartikainen 和 Särkkä (2010）所证明的，这些高斯过程可以表示为线性高斯状态空间模型。为简化起见，考虑单个潜在力 f，其状态空间表示可写为：

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = A_{c,f}\,\mathbf{f}(t) + L_{c,f}\,w(t) \tag{5}$$

其中，向量 $\mathbf{f} = \left[f, \dot{f}, \ldots, f^{(\beta-1)}\right]$ 通过取潜在力及其导数构造而成，并且：

$$A_{c,f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & -a_{\beta-2} & -a_{\beta-1} \end{bmatrix}, \qquad L_{c,f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

按照Hartikainen 和 Särkkä (2010)中所述的步骤，可以指定系数 a_0、.....、$a_{\beta-1}$、白噪声过程 $w(t)$的谱密度 q 以及向量 β 的维数$\mathbf{f}$，使潜在力 f 对应于具有所需协方差函数的高斯过程先验。Matérn 协方差函数尤其适用于此实现，因为它们具有

解析稳　　状态空间表示。这类函数的一般形式可写为　　s:

$$\kappa(t,t') = \sigma_f^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\nu}}{l} |t-t'| \right)^{\nu} \mathcal{K}_\nu \left(\frac{\sqrt{2\nu}}{l} |t-t'| \right) \tag{7}$$

其中 $\mathcal{K}_\nu$ 和 Γ 分别为修正贝塞尔函数和伽马函数。σ_f 和 l 是两个超参数，第一个控制函数的幅值，第二个控制时间变化的长度尺度。平滑度参数 ν 可用于选择协方差函数的平滑程度，其范围从指数协方差（$\nu = 1/2$）到平方指数（$\nu \to \infty$）协方差。不同协方差函数的状态空间表示也已被推导出来，包括周期核和准周期核（Solin andSärkkä，2014）以及一些非平稳核（Benavoli and Zaffalon，2016）。本文中，不失一般性，将使用指数协方差函数（对应于 Matérn 1/2）。在这种情况下，公式（5）可化简为：

$$\dot{u}(t) = -\frac{1}{l} u(t) + w(t) \tag{8}$$

其中白噪声 w 的谱密度等于$2\sigma_f^2/l$。

GPFLM 的状态空间表示可以按照 Hartikainen 和 Särkkä （2012）的建议，将公式（5）给出的零均值时间高斯过程的状态空间表达式，与动力系统的状态空间表达式相耦合；后者可由公式（1）推导得到：

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A_{c,s}\mathbf{z}(t) + B_{c,s}\left(u(t) - f(z,\dot{z})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \left(u(t) - f(z,\dot{z})\right) \tag{9}$$

引入增广状态向量 $\mathbf{x} = \left[\mathbf{z}^\top \mathbf{f}^\top\right]^\top$，将公式（5）和（9）耦合后，可得到增广状态空间模型：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_c\mathbf{x}(t) + B_c u(t) + L_c w(t) \tag{10}$$

其中：

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{c,s} & B_{c,f} \\ \mathbf{0} & A_{c,f} \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} B_{c,s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad L_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L_{c,f} \end{bmatrix} \tag{11}$$

具体而言，矩阵 $B_{c,\ f}$可通过在矩阵 $-B_{c,\ s}$中添加 $\beta - 1$ 列零向量得到。上述随机微分方程（SDE）最终可以转换为如下形式的离散时间动力学模型：

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} + Bu_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}, \qquad \mathbf{w}_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q) \tag{12}$$

其中，状态转移矩阵表示为 $A = \exp_m(A_c\Delta t)$，其中 Δt 为固定的时间步长，且 $B = A^{-1}(A_c - I)B_c$。离散模型中过程噪声的协方差矩阵可写为：

$$Q = \int_0^{\Delta t} \exp_m(A_c(\Delta t - \tau)) L_c q L_c^\top \exp_m(A_c(\Delta t - \tau))^\top \mathrm{d}\tau \tag{13}$$

其中 q 连续模型中过程噪声的谱密度。方程（13）的一种更实用的实现方式是：

$$Q = P_\infty - AP_\infty A^\top \tag{14}$$

其中 P_∞ 是描述状态向量 $\mathbf{z}$协方差时间演化的随机微分方程（SDE）的稳态解，可通过求解李雅普诺夫方程得到（Särkkä and Solin，2019）：

$$A_c P_\infty + P_\infty A_c^\top + L_c q L_c^T = 0 \tag{15}$$

Fin此外，方程（12）中的转移模型与观测模型相耦合 ：

$$\mathbf{y}_t = C\mathbf{x}_t + Du_t + \mathbf{v}_t, \qquad \mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R) \tag{16}$$

以恢复完整的线性高斯状态空间模型。在上述方程中，$\mathbf{y}$ 为观测向量，C 和 D 为观测矩阵，$R = \sigma_n^2$ 为测量噪声的方差。观测矩阵的选择取决于用于进行测量的传感器类型：若测量位移，则矩阵为 $C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \ldots 0\end{bmatrix}$ 和 $D = 0$；而对于加速度，则为$C = \begin{bmatrix}-k/m & -c/m & -1/m & 0 \ldots 0\end{bmatrix}$ 和 $D = 1/m$。

为简化起见，方程（12）和（16）中的线性高斯状态空间模型是参照标准GPLFM情形构建的；当$S = 1$时，该情形可由方程（3）中更一般的表述获得。当考虑更多潜在力模型时，推导GPLFM状态空间模型的过程基本相同。事实上，线性高斯状态空间模型的所有矩阵均可按照上述方法针对每个潜在力确定。一般而言，并不要求各潜在力采用相同类型的核函数，这意味着这些矩阵在不同模型中的维数可以不同。此外，不仅潜在力，而且系统的控制方程也可随 s_t的不同而变化；这将在3.2小节中更详细地说明。最后，为引入潜在力中的不连续性而必需的重置模型，可通过将状态转移矩阵表述为 $A(S) = \text{blkdiag}\left(\exp_m(A_{c,s}\Delta t), \mathbf{0}\right)$，并将过程噪声的协方差矩阵表述为 $Q(S) = \text{blkdiag}(P_\infty - A_s P_\infty A_s^\top, P_0)$来实现，其中 P_0为潜在力所选取的先验协方差。

2.3. 潜在状态与非线性力的推断

由于时间复杂度呈指数增长（Bar-Shalom等人，2001；Lerner，2002），对方程（3）和（4）中建立的切换线性动态系统进行精确推断在计算上不可行。因此，只能以近似形式推断滤波后验分布和平滑后验分布。

本文将采用Barber（2006）提出的方法进行近似推断。该方法将每个模型$s - t$的状态滤波分布和平滑分布分别近似为由 I 个分量和 J 个分量构成的高斯混合。用户可根据计算预算选择混合分量的数量，通常该数量远小于 S^t，后者是时刻 t精确后验分布中的高斯分量数。

在Barber的方法中，通过假设密度滤波（ADF）（Alspach 和 Sorenson，1972）计算滤波分布。时刻 t 的 ADF 结果为以下高斯混合：

$$p(\mathbf{x}_t|s_t, \mathbf{y}_{1:t}, u_{1:t}) \cong \sum_{i=1}^{I} \mathcal{W}_t(i,s) \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}_t|\boldsymbol{\mu}_{t|t}(i,s), P_{t|t}(i,s)) \tag{17}$$

模型的状态 s_t 以及模型概率 $p(s_t|\mathbf{y}_{1:t}, u_{1:t})$ 的近似表达式。ADF 的每一步都需要运行 IS^2 个 Kalman 滤波器。类似地，通过实施期望一致性（EC）算法可获得平滑分布，从而得到以下高斯混合：

$$p(\mathbf{x}_t|s_t, \mathbf{y}_{1:T}, u_{1:T}) \cong \sum_{j=1}^{J} \widetilde{\mathcal{W}}_t(j,s) \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}_t|\boldsymbol{\mu}_{t|T}(j,s), P_{t|T}(j,s)) \tag{18}$$

以及 $p(s_t|\mathbf{y}_{1:T}, u_{1:T})$ 的近似表达式。EC算法在每个时间步长都会执行 IJS^2 RTS平滑器，因此计算成本高于ADF。尽管如此，值得一提的是，边际似然 $p(\mathbf{y}_{1:T})$ 的计算是在ADF算法中完成的，而该边际似然是估计潜在函数最优超参数所必需的。ADF和EC实现的详细说明见 Barber (2006)。

*2.4. GP*超参数推断

切换潜在力模型的性能不仅受GP潜在力所用核函数选择的影响，也受系统参数和高斯过程超参数选择的影响。关于不确定系统参数的估计方法将在第 3.6 小节中介绍，下面将讨论如何确定GPLFM中超参数的最优值。

选择核函数最优超参数的一种常见方法是采用最大似然估计（例如，Ghahramani和Hinton(1996)；Nayek等人(2019)）。然而，用于确定似然函数最大值的算法并不能保证找到全局最大值（Petersen等人，2022），也无法提供参数后验分布的信息。因此，多年来人们提出了不同的方法。Zou等人(2022)和Bilbao等人(2022)通过最小化测量值的经验分布与观测状态上的模型高斯先验之间的海灵格距离，来确定最优超参数；但这种方法仅适用于响应分布能够由高斯分布良好近似的情况。最后，Rogers等人(2018；2020；2022)使用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）恢复参数的完整后验分布。事实上，尽管计算开销更大，MCMC的优势在于能够保证收敛到真实后验分布（Gelman等人，2013）。

本文将使用由 Acerbi （2018；2020）开发的变分贝叶斯蒙特卡罗（VBMC）方法进行超参数推断。VBMC 将变分推断与主动采样贝叶斯求积相结合，以执行近似贝叶斯推断，与 MCMC 相比可降低计算成本。关于 VBMC 方法的详细介绍，请参阅 Acerbi （2018；2020）的论文。VBMC 需要迭代计算 SLDS 的边际似然，该边际似然作为 ADF 的副产品获得。因此，如图 2所示，每次迭代都需要使用当前超参数数值构建线性高斯状态空间模型矩阵，并应用 ADF。最终，将 VBMC 计算得到的后验分布的均值作为最优超参数，并通过 ADF 和 EC 对潜在状态及非线性力进行推断。

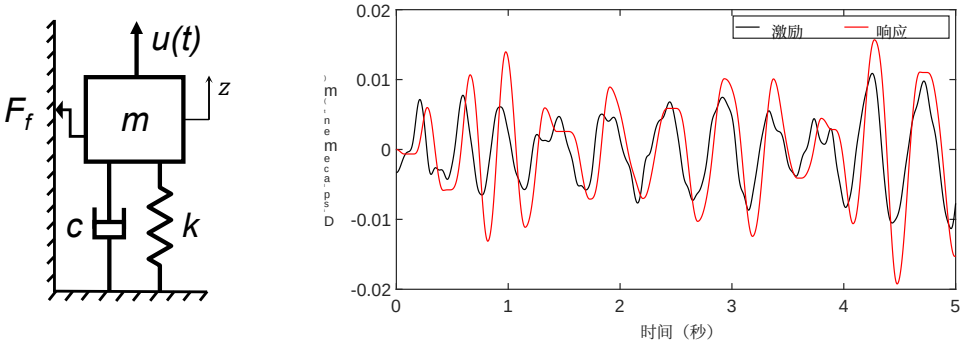
3. 数值案例研究：干摩擦振子

识别机械系统中接触产生的摩擦力是工程领域的一项重要挑战。事实上，从实验数据中提取的信息对于开发和更新摩擦模型，以及预测这些系统的动态行为至关重要。本节介绍将切换 GPLFM 应用于识别仿真干摩擦振子中的非线性摩擦力。具体而言，本文展示了所提出的方法不仅能够识别摩擦力的时间演化，还可用于：（i）估计系统的物理参数；（ii）重建摩擦力-速度关系；（iii）估计摩擦力的静态值。估计得到的系统参数和重建的摩擦模型可用于预测系统对指定输入力的响应。

3.1. 仿真系统

考虑质量为 $m = 1$ kg、黏性阻尼系数为 $c = 5$ Nsm^{-1} 、刚度为 $k = 500$ Nm^{-1} 的单自由度系统，如图3a所示。质量块与固定在地面上的墙壁之间存在摩擦接触，该接触由速率相关摩擦定律描述，且驱动力 $u(t)$ 直接作用于质量块。该系统的控制方程可表示为：

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz + F_f(z, \dot{z}) = u(t) \tag{19}$$



(a) (b)

图*3.* 质量-弹簧-阻尼器系统，其中质量块与固定于地面的墙壁之间存在摩擦接触（***a***），以及该系统对随机相位多正弦激励的模拟响应（红色；黑色曲线为激励除以刚度）（***b***）。

具体而言，采用Dieterich-Ruina 定律(Dieterich，1979；Rice 和 Ben-Zion，1996），其稳态形式采用Cabboi 等人(2022）提出的表述形式：

$$F_f(z,\dot{z}) = \begin{cases} \left[F_* + a\ln\left(\frac{|\dot{z}|+\varepsilon}{V_*}\right) + b\ln\left(c + \frac{V_*}{|\dot{z}|+\varepsilon}\right)\right]\mathrm{sgn}(\dot{z}), & \text{if } \dot{z} \neq 0 \\ u(t) - kz, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{20}$$

已用于对摩擦力进行建模。Dieterich-Ruina 定律的参数取值列于表 1。驱动力 $u(t)$ 是随机相位多正弦信号，其振幅根据 JONSWAP 谱生成（Hasselmann 等，1973；Vazirizade，2019）：

$$S(\omega) = 320\left(\frac{H_s}{T_p^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^5}\exp\left(-1.25\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^4\right) \cdot 3.3^{\exp\left(\frac{1}{2\sigma_p^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)\right)} \tag{21}$$

频率范围为 $\omega = (0.02 : 0.02 : 100)$ Hz，参数如表 2所示。得到的输入力如图 3b 所示。

假设可以获得质量块位移的含噪测量值，并将其作为 GPLFM 中的实验观测值。为获得这些合成测量值，使用由 Marino and Cicirello (2022) 开发的事件驱动变步长Runge-Kutta (4,5)算法，对系统的动态响应进行仿真，仿真时间从初始时刻 $t = 0$ 到指定的终止时间 $t = t_f$。仿真中，质量块位置和速度的初始条件均设为零。随后，按照固定步长时间向量，使用线性插值对所得位移（如图 3b 所示）进行重采样；该时间向量的时间步长由所选采样频率 f_s 确定，为 $\Delta t = 1/f_s$。最后，根据选定的信噪比（SNR），在所得位移数值中加入人工白噪声。

在本节余下部分，首先在小节 3.2 中研究所提出的切换GPLFM方法的性能，并将其与标准潜在恢复力模型进行比较，假设给定的一组 t_f、 f_s 以及信噪比数值，并且系统的物理参数已知。随后在小节 3.3 中提出一种参数估计方法，同时在小节 3.4 中研究切换 GPLFM 在不同噪声水平、观测时长和采样频率下的性能。

表 **1.** 稳态 *Dieterich-Ruina* 定律的选定参数。

F_* (N)	a	b	c	V_* (m/s)	ε (m/s)
1	0.07	0.09	0.022	0.003	10^{-6}

表 **2.** *JONSWAP* 谱的选定参数。

H_s (m)	T_p (s)	ω_p (Hz)	σ_p $(\omega < \omega_p)$	σ_p $(\omega \geq \omega_p)$
10	0.5	$2\pi/T_p$	0.07	0.09

3.2. 干摩擦振子的概率模型

为了将所提出的切换 GPLFM 方法应用于上述数值案例研究，通过考虑三种不同的潜在力模型（$S = 3$）实现了一个概率模型。

• 首先引入一个模型，用于描述系统在 滑动 阶段的动态演化。该模型的实现方式详见第 2.2节，其中将滑动摩擦力建模为具有指数核函数的零均值高斯过程。

• 第二个模型旨在描述系统在 粘着 阶段的行为。在这种情况下，系统的响应仅由恒定位移和零速度表征，而摩擦力与位移及激励函数的关系如方程（20b）所述。关于粘着行为的这些物理知识可用于确定预测密度，如下所示：

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}, u_{t-1}, i_{t-1}, s_{t-1}, s_t = 2) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t|\boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(i_{t-1}, s_{t-1}), P_{t|t-1}(i_{t-1}, s_{t-1})) \tag{22}$$

其中：

$$\boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(i_{t-1}, s_{t-1}) = \left[\mathbb{E}(z_{t-1|t-1}(i_{t-1}, s_{t-1})), 0, u_{t-1} - k \cdot \mathbb{E}(z_{t-1|t-1}(i_{t-1}, s_{t-1}))\right]^\top \tag{23}$$

以及 $P_{t|t-1}(i_{t-1},\ s_{t-1}) = P_{t-1|t-1}(i_{t-1},\ s_{t-1})$。若考虑不同于 Matérn 1/2 的核函数，可在 $\boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(i_{t-1},\ s_{t-1})$ 末尾添加零，以获得所需的维数。值得注意的是，方程（22）中的预测密度可直接按当前形式进行滤波和平滑，无需为粘着模型定义矩阵 $A(s_t)$ 和 $B(s_t)$。

• 第三个模型是重置模型，其实现方式如小节2.2所述，将潜在力的先验协方差设为 $P_0 = 0$。05。激活时，该模型会将潜在摩擦力重置为零（协方差为 P_0 ），同时保持位移和速度不变。如方程（4）所述，该模型只能在单个时间步长内保持激活，因此，重置前后摩擦力的数值不会直接相互影响。这使得摩擦力可以出现不连续性，无论是在粘着阶段与滑动阶段之间，还是在两个速度方向不同的滑动阶段之间。

最后，模型转变由方程（4）中引入的马尔可夫模型控制，其中 ρ设为 0.92。

3.3. 已知系统参数时的潜在状态与非线性力推断

首先，针对上述系统在 $t_f = 5$s 和 $f_s = 500$ Hz 下的模拟动态响应进行了非线性力识别。使用 Matlab 的 AWGN 函数，设置 SNR = 80，在质量块位移中加入人工白噪声。由此产生的白噪声标准差为 7。8623×10^{-3} mm，对应的方差为$\sigma_n^2 = 6。1815 \times 10^{-5}\text{mm}^2$。

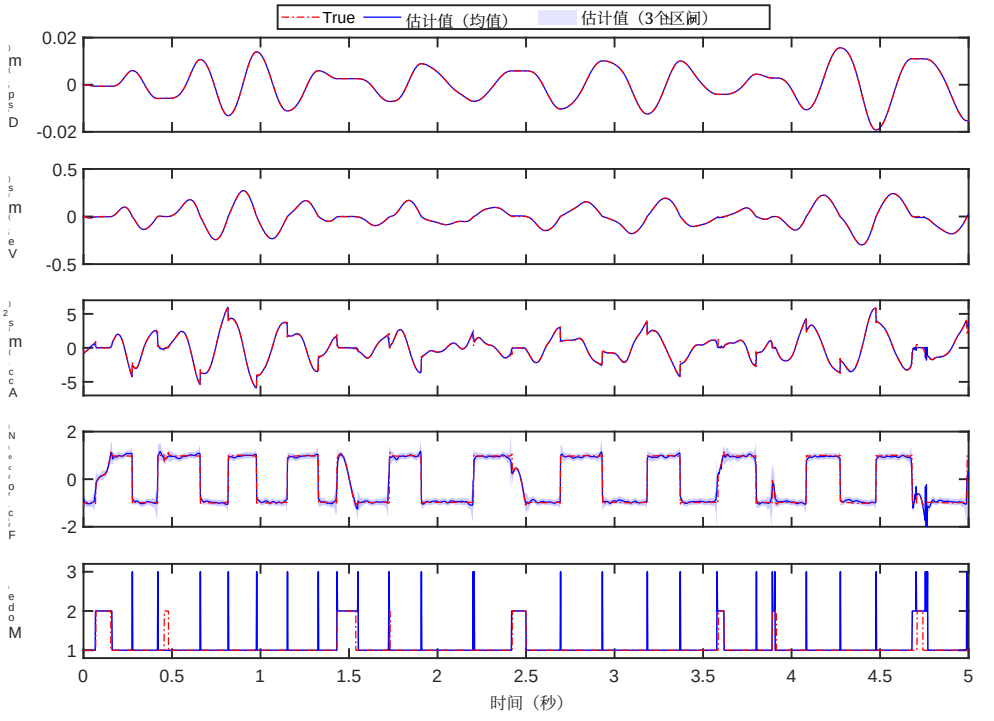


图*4.* 切换 *GPLFM (I = J = 3)* 推断的潜在状态、加速度、非线性摩擦力和模型序列与真实值的对比。模型 *1*、*2* 和 *3* 分别代表滑动、粘着和重置模型。

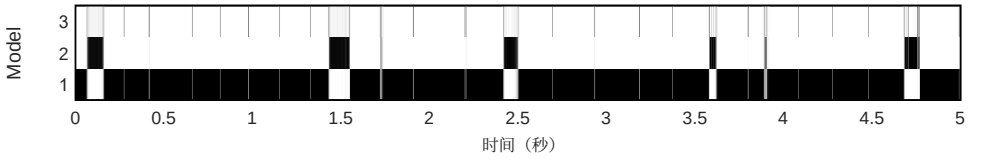


图*5.* 切换 *GPLFM (I = J = 3)* 估计的模型概率。模型 *1*、*2* 和 *3* 分别代表滑动、粘着和重置模型。

表*3.* 数值案例研究中使用的高斯过程超参数先验分布。

σ_f^2 (N^2)	l (s)	σ_n^2 (毫米^2)
N（20，100）	N（20，100）	N（2×10^{-5}，10^{-10}）

在此示例中，假设系统参数先验已知，并将其设为本节开头所示的真实值。使用 VBMC 推断超参数的后验分布σ_f^2，l和σ_n^2，其指定的先验分布见表 3。如第 2.3 小节所述，此处的对数似然函数是 ADF 的副产品。将最优高斯过程超参数估计为其后验分布的均值后，通过实施 ADF 和期望一致性（EC）推断潜在状态和非线性恢复力。此处将滤波和平滑过程中的高斯混合分量数设为

$I = J = 3$。估计的位移、速度和摩擦力如图4所示，其中还可以观察到它们与真实值的对比。通过评估归一化均方误差（NMSE），可以量化推断分布的均值与真实值之间的一致性，其定义如下：

$$\mathrm{NMSE}[g] = \frac{1}{T\sigma_g^2}\sum_{t=1}^{T}(g_t - \mathbb{E}(\hat{g}_t))^2 \tag{24}$$

其中，g_t和 $\mathbb{E}(\hat{g}_t)$分别表示某一量 g 在时间步长 t处的真实值和估计均值，σ_g^2 是 g 的方差，T 是数据点的数量。根据上述定义，当真实函数与估计函数完全拟合时，该数值为零；而当 $\mathbb{E}(\hat{g}_t)$在每个点都等于真实值的均值时，该数值为1。表4中位移和速度的NMSE评分非常低，证实了它们与真实值具有极好的一致性。非线性力识别的NMSE评分为$[F_f]$ =1.95%，通常被认为是非常好的结果。此外，由状态和摩擦力线性组合确定的加速度也与真实值高度一致（$\mathrm{NMSE}[\ddot{z}] = 0.46\%$），尽管其时间演化中存在不连续性。最后，在图4的底部框架中可以看到，大多数不连续性和状态转变都被切换 GPLFM 中的模型转变准确捕捉到。在观测时间窗口内发生的七次停止中，只有第二次未被捕捉到；不过可以注意到，该粘着阶段尤其短暂，并未显著影响摩擦力的数值。同样，每当滑动阶段之间发生不连续性时，都可以观察到与重置模型激活相对应的尖峰。需要注意的是，切换 GPLFM 框架允许更多潜在力模型同时处于激活状态，因此图4中的蓝线仅表示每个时间步长占主导地位的模型。模型概率的完整图示则见图5。在此可以看到，重置模型也会在滑动和黏着阶段之间的转变过程中被激活，尽管其概率并不总是超过粘着模型的概率。

表*4*。 标准 *GPLFM* 和切换 *GPLFM* 在高斯混合分量数量变化时的潜在状态、加速度和摩擦力识别误差分数及最优超参数。测量噪声方差的真实值为 $\sigma_n^2 = 6$。$182 \times 10^{-11} m^2$。

	归一化均方误差[z] (‰)	归一化均方误差[$\dot{z}$] (%)	归一化均方误差[$\ddot{z}$] (%)	归一化均方误差[F_f] (%)	归一化均方方差[F_f] (%)	$\hat{\sigma}_f^2$ (N^2)	$\hat{l}$ (s)	$\hat{\sigma}_n^2$ (10^{-11}米^2)
标准	0.0107	0.0024	0.7665	**3.2705**	**2.8473**	3.6567	0.4169	7.188
切换（$I = J = 3$）	0.0111	0.0223	0.4561	**1.9507**	**0.5393**	10.19	27.02	6.531
切换（$I = J = 5$）	0.0114	0.0198	0.3863	**1.6552**	**0.4722**	4.373	52.77	7.218
切换（$I = J = 7$）	0.0119	0.0200	0.3886	**1.6627**	**0.5097**	1.051	51.51	6.948
切换（$I = J = 9$）	0.0115	0.0188	0.4754	**2.0348**	**0.6963**	3.860	73.93	7.079

3.4. 标准与切换高斯过程潜在力模型的比较

本小节将针对不同数量的高斯混合分量，研究切换 GPLFM 在潜在状态和非线性力辨识方面的性能。为简便起见，ADF 和期望一致性 ($I = J$) 使用相同数量的高斯分布，尽管 Barber Barber (2006) 提出的期望一致性实现也允许平滑分布中使用较少数量的高斯分布（$J < I$）。对于 $S = 1$，$I = 1$，标准 GPLFM 可简单地视为切换 GPLFM 的一种特殊情况，

并将 $J = 1$ 作为参考情形。在此情况下，ADF 和期望一致性将分别自动简化为卡尔曼滤波和Rauch-Tung-Striebel平滑器。

采用标准和切换 GPLFM（含 3、5、7 和 9 个高斯分量）得到的潜在状态和非线性力识别误差列于表4中，同时给出了最优高斯过程超参数。在各项误差指标中，引入了归一化均值方差（NMV）指标，定义如下：

$$\mathrm{NMV}[g] = \frac{1}{T\sigma_g^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{V}(\hat{g}_t) \tag{25}$$

根据此定义，如果预测函数在每个点的方差均为零，则该指标的值为零；而 NMV 为 1 则表示预测函数在每个时间步的方差 t 等于真实值的总体方差。识别出的非线性力也展示于图6中，并在时域内与真实摩擦力进行了图形对比；右侧放大了观测时间窗口的一小段，以展示不同 GPLFM 方法在不连续处的表现。

图6a 显示，采用标准 GPLFM 得到的真实摩擦力与识别出的摩擦力总体上吻合良好。尽管单个潜在力无法捕捉不连续性，但均值预测与真实值相当接近，识别误差为 $\mathrm{NMSE}[F_f] = 3。27\%$。另一方面可以看出，均值预测周围的置信界仍然相当宽（$\mathrm{NMV}[F_f] = 2。85\%$）。表4 中列出的最优超参数表明，推断出的摩擦力与真实摩擦力之所以吻合良好，是因为核函数的长度尺度超参数有所减小。事实上，较小的 l 值允许潜在函数更快地变化，从而增强其适应摩擦力急剧变化的能力。因此，这在一定程度上弥补了单个高斯过程潜在力无法建模不连续性和不同运动状态（即滑动和黏着阶段）的不足。然而，较短的长度尺度也伴有众所周知的缺点，例如模型复杂度增加，以及过拟合倾向更加明显，尤其是在输入含噪时（Rasmussen和Williams，2006；Beckers，2021）。

在图6剩余的帧中，可以观察到，引入粘着和复位模型后，能够捕捉摩擦力中大多数不连续性以及不同运动状态之间的转变。这使非线性力识别性能显著提升：如表4所示，摩擦力对应的归一化均方误差评分降至1。95%（考虑三个高斯分量时），而在 $I = J = 5$时甚至降至 $I = J = 7$。不过，进一步增加分量数量似乎并不能带来更多改善，且观察到归一化均方误差上升至高于 $I = J = 7$。这一趋势的一种可能解释是，随着高斯分布数量增加，运动状态之间的一些转变变得愈发不规则（例如，$t \cong 2。4\mathrm{s}$处的转变）。这一结果也反映在NMV评分中；不过，与标准 GPLFM 相比，摩擦力的标准差整体显著更小。最后，观察最优超参数可见，引入切换 GPLFM 后得到的长度尺度显著大于标准潜在恢复力模型得到的数值；同时，无论高斯分量数量如何，测量噪声估计整体表现良好。

3.5. 非线性摩擦力表征

在前面的小节中，将切换 GPLFM 应用于干摩擦振子的模拟响应，从而识别出了非线性摩擦力的时间演化、状态以及状态转变。高斯过程潜在力模型的优势之一在于，无需对潜在非线性力的函数形式作出特定假设。在本案例研究中，通过施加停止时具有恒定位移和零速度这一条件，在粘着状态的实现中考虑了基本的物理约束。然而，并未对

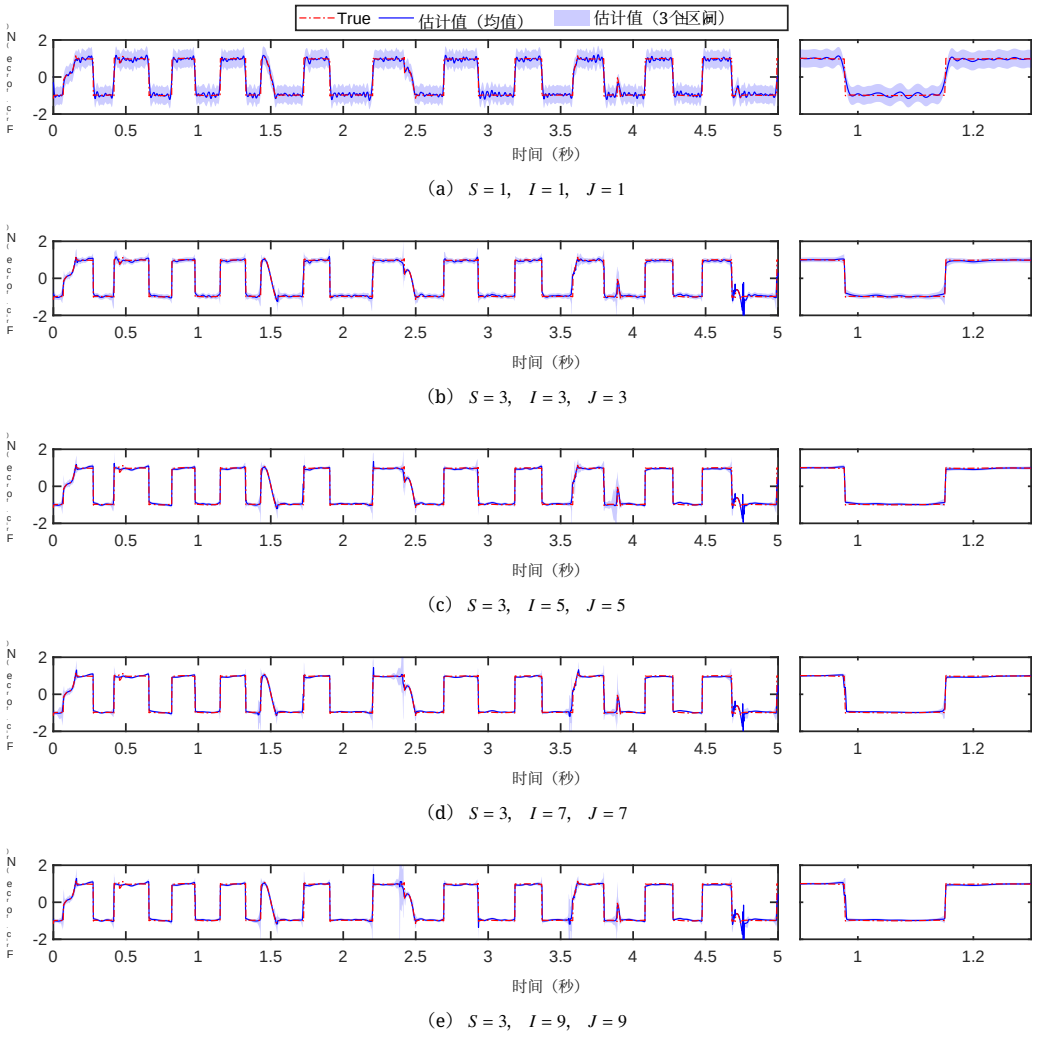
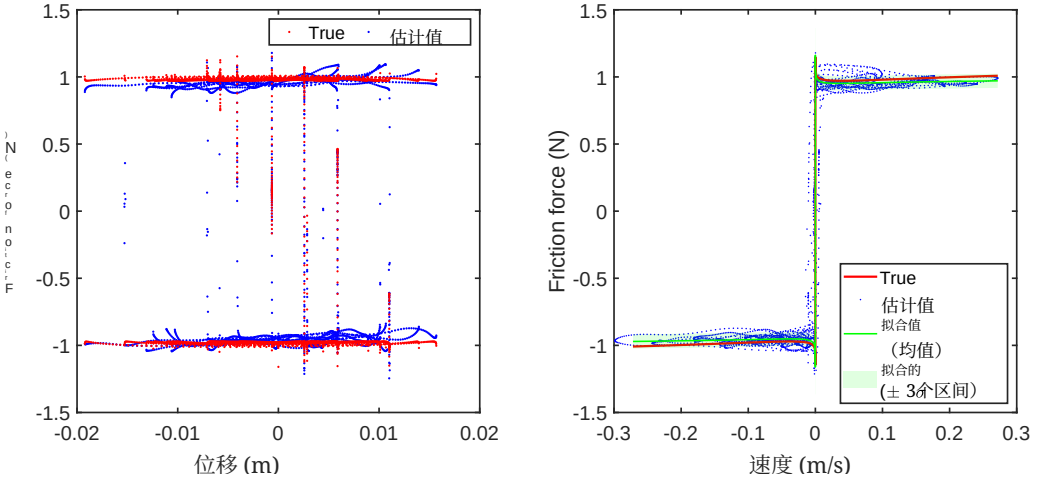


图*6*。 标准和切换 *GPLFM* 在 *ADF* 和期望一致性中采用不同数量的高斯分量时推断出的非线性摩擦力（$I = J$），与真实值对比。

滑动条件下摩擦力对位移和速度的依赖关系作出假设。本文将说明，如何利用识别出的摩擦力和状态，以及推断出的黏滑状态转换，重构潜在的摩擦定律。该定律与系统参数的准确估计（见第 3.6 节）相结合，可用于构建稳健的正向模型，以预测干摩擦振子在不同输入下的响应。摩擦模型的重构包括确定：(i) 滑动条件下摩擦力与速度之间的关系；以及 (ii) 静摩擦力的数值。下文将介绍这两个步骤。

摩擦力-速度关系，或更一般地说，滑动摩擦模型的表征，可以通过拟合潜在力-潜在状态估计值来简单完成。拟合可以采用多种不同方法；例如，可以通过最小化最小二乘误差来估计现有摩擦模型的参数，也可以考虑黑箱方法，例如神经网络或另一种高斯过程。例如，在 Rogers 和 Friis(2022中，标准GPLFM被

用于识别Duffing振子时，非线性项通过使用贝叶斯信息准则来确定非线性力-位移关系最可能的多项式阶数，从而进行表征。本文选择使用式（$I = J = 5$）中介绍的稳态 Dieterich-Ruina 定律，拟合切换GPLFM（20a）推断出的非线性力-速度估计值。之所以作此选择，是因为该摩擦模型具有灵活性：通过改变参数，它既能描述实验测试中通常观察到的速度弱化行为，也能描述速度强化行为（Cabboi 等人，2022）；显然，也可以考虑其他定律或函数。通过最小化最小二乘误差，确定了参数 a、 b、 c 和 F_* 的最优数值，而 V_* 和ε 则设为表1中报告的数值。



(a) (b)

图*7.* 非线性摩擦力与质量块位移（***a***）及速度（***b***）的关系：模拟值（红色）与推断值（蓝色）的比较。（***b***）中还展示了拟合的摩擦力-速度曲线（绿色）。

虽然上述拟合流程也可应用于标准GPLFM的估计结果，但切换 GPLFM提供的状态转变信息还使静摩擦力的估计成为可能。事实上，众所周知，从粘着状态转变为滑动状态时，摩擦力的瞬时绝对值恰好等于静摩擦力（参见 Cabboi 等人（2022）以了解相关参考文献）。因此，按照图4所示的模型序列，可以将这些状态转变时对应的潜在力绝对值用作静摩擦力的估计值。为完成这一流程，计算这些估计值的均值和标准差，如图 8所示。估计的静摩擦力 $\hat{} F_s$可通过施加 F_f（z,0）$= \hat{} F_s$，将其纳入拟合的摩擦模型方程（20a）中。由此可得约束条件：

$$b = a + \frac{\hat{F}_s - F_*}{\ln(V_*) - \ln(\varepsilon)} \tag{26}$$

仅保留 a、 c 和 F_* 作为拟合模型的独立参数。图 8 展示了估计的静摩擦力及其置信界与数值模拟中选取的真实值之间的比较。可以看出，报告的 $I = J = 5$这些数值非常接近真实值，且真实值完全落在置信界范围内。值得强调的是，该方法的准确性很大程度上取决于观测到的停止次数；在连续滑动运动中，无法对静摩擦力数值作出任何预测。

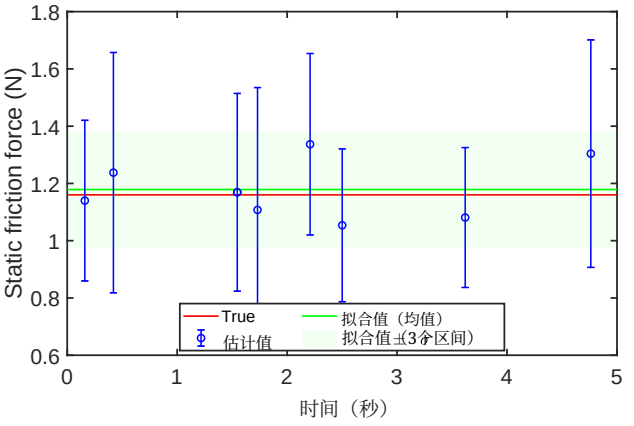


图*8.* 基于切换 *GPLFM* 结果对静摩擦力的估计。

3.6. 参数估计

在前述分析中，假设系统的质量、黏性阻尼系数和弹簧刚度已知。然而，在实验环境中，这些物理参数的数值往往并不完全确定。在将 GPLFM 应用于机械系统的若干研究中（例如，Rogers等人(2020；2022），研究者采用 MCMC 等抽样方法，在估计高斯过程超参数的同时推断不确定的系统参数。这种方法还需要为这些参数提供先验分布，通常根据工程和物理知识来设定。尽管如此，正如Rogers 和 Friis (2022）所指出的，潜在非线性力的存在可能会使参数估计产生偏差。例如，Duffing型非线性的存在可能导致线性刚度估计值不准确。反过来，不准确的参数估计值也会影响识别出的非线性力。

对于干摩擦振子，已有研究观察到，即使提供了信息丰富的先验分布，在应用标准 GPLFM 或切换 GPLFM 时，使用 VBMC 进行参数推断也无法得到准确的估计值。因此可以得出结论：在这种情况下，进行参数推断并没有实际优势，还不如直接采用基于工程经验的初始猜测值。下文将介绍一种修正这些初始猜测值的方法，该方法基于推断得到的潜在力以及对系统的物理知识。

设 m、 c、 k 表示系统参数的真实值，$\hat{m}$、$\hat{c}$、 $\hat{k}$ 表示初始猜测值，则：

$$m = \hat{m} + \Delta m \qquad c = \hat{c} + \Delta c \qquad k = \hat{k} + \Delta k \tag{27}$$

将方程（27）代入方程（19）可见，使用错误的参数值会在系统的控制方程中引入额外的线性力：

$$\hat{m}\ddot{z} + \hat{c}\dot{z} + \hat{k}z + \underbrace{F_f + \Delta m \cdot \ddot{z} + \Delta c \cdot \dot{z} + \Delta k \cdot z}_{F_L} = u(t) \tag{28}$$

因此，如果将不正确的初始猜测值作为系统参数，并据此推断潜在状态 z、 $\dot{z}$ 和潜在力 F_L，那么这些附加力将与非线性摩擦力一起，成为潜在力的一部分。在应用 GPLFM 时未被直接推断的加速度 $\ddot{z}$，可以根据上式求得：

$$\ddot{z} = \frac{1}{\hat{m}}\left(u(t) - \hat{k}z - \hat{c}\dot{z} - F_L\right) \tag{29}$$

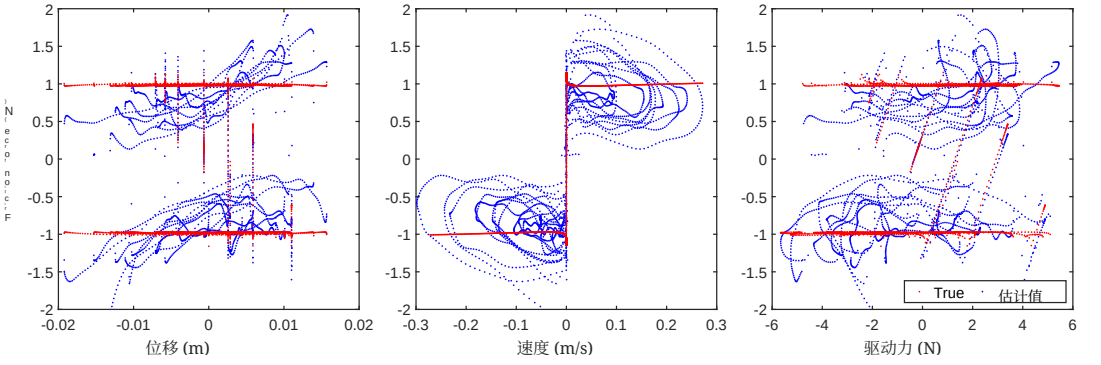


图 ***9.*** 非线性摩擦力与位移（***a***）、速度（***b***）和驱动力（***c***）的关系：真实值（红色）与使用错误物理参数推断出的数值（蓝色）的对比。

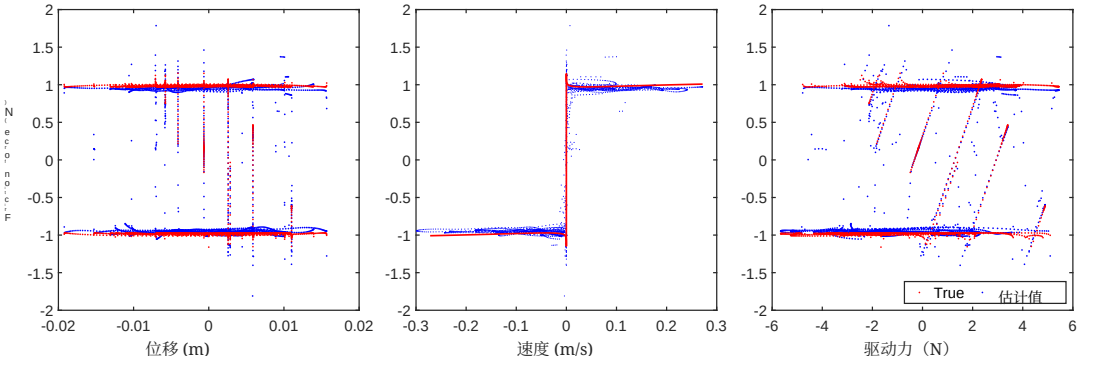


图 ***10.*** 非线性摩擦力与位移（***a***）、速度（***b***）和驱动力（***c***）的关系：真实值（红色）与使用修正值物理参数推断出的数值（蓝色）的对比。

代入方程 式（29）代入潜在力 F_L 的表达式并重新整理，可得 hat:

$$F_L = \left(\frac{\hat{m}}{\hat{m}+\Delta m}\right) F_f + \left(\frac{\hat{m}}{\hat{m}+\Delta m}\Delta k - \frac{\Delta m}{\hat{m}+\Delta m}\hat{k}\right) z + \left(\frac{\hat{m}}{\hat{m}+\Delta m}\Delta c - \frac{\Delta m}{\hat{m}+\Delta m}\hat{c}\right) \dot{z} + \left(\frac{\Delta m}{\hat{m}+\Delta m}\right) u \quad (30)$$

上述方程突出说明了，错误的物理参数会使推断潜在力与推断状态及已知激励函数之间产生线性依赖。特别值得注意的是，如果质量 ($\Delta m = 0$) 的估计是正确的，那么黏性阻尼和刚度误差将分别仅在潜在力-速度和潜在力-位移之间引入额外的线性趋势。不同的是，质量误差项的存在不仅会改变这些线性趋势，还会引入对激励函数的依赖，并对摩擦力产生缩放效应。

通过考虑不正确的ˆ参数 $\hat{m}$、$\hat{c}$ 以及 k，推断出了干摩擦振子的潜在状态和力，相关结果见表 5。潜在力估计值与位移、速度和激励函数之间的关系分别如图 9所示。从图中可以观察到上述线性趋势，同时，由于存在显著的质量误差，潜在力模式总体上也发生了变化。为量化线性依赖关系

表*5.* 干摩擦振子的物理参数 m、 c 和 k 的真实值、初始猜测值和修正值。初始猜测参数和修正参数的相对误差均以真实值为基准。

		初始猜测		修正值	
参数	真实值	数值	相对误差	数值	相对误差
质量 (kg)	1	1.2	20%	0.9550	0.50%
黏性阻尼 ($\mathrm{Nsm^{-1}}$)	5	6	20%	5.0643	1.29%
刚度 ($\mathrm{Nm^{-1}}$)	500	520	4%	500.70	0.14%

式（30）所表达的关系，潜在力可以用多维线性函数拟合，其系数可通过最小二乘误差法求得。为利用所有可用数据，可以利用摩擦力 F_f 以及相应潜在力 F_L关于原点（$z = 0$、 $\dot{z} = 0$、 $u = 0$）的对称性，将其正、负分支叠加，最终用线性函数拟合：

$$F_L = A_0 + A_1 z + A_2 \dot{z} + A_3 u \tag{31}$$

通过比较方程（30）和（31），可以将参数误差与计算得到的线性系数联系起来，如下所示：

$$\Delta k = \frac{A_1 + A_3 \hat{k}}{1 - A_3} \qquad \Delta c = \frac{A_2 + A_3 \hat{c}}{1 - A_3} \qquad \Delta m = \frac{A_3 \hat{m}}{1 - A_3} \tag{32}$$

最后，可将估计的参数误差加到初始猜测值中，如方程（27）所示，以求得系统的真实参数。干摩擦振子案例研究的修正参数估计值列于表 5。此时，可通过潜在力求得摩擦力：

$$F_f = \frac{1}{1 - A_3} (F_L - A_1 z - A_2 \dot{z} - A_3 u) \tag{33}$$

然而，值得注意的是，在修正系统参数后，最优 GP 超参数可能不同于最初通过 VBMC 估计的超参数。因此，根据可用的计算预算以及参数修正的重要性，最好重新推断最优超参数，从而得到潜在状态和非线性力。本文采用了后一种方法。推断得到的摩擦力分别绘制为位移、速度和驱动力的函数，如图10 所示，并且与真实值高度一致。如表5所示，修正值与真实值参数之间的残余相对误差均可忽略不计，尽管初始误差非常大。黏性阻尼系数是唯一残余误差超过 1% 的参数。尽管对于大多数应用而言，这一误差是可以接受的，但值得指出的是，这种轻微的高估与所采用的依赖速率的摩擦模型有关。事实上，如图10b 所示，所选用的 Dieterich-Ruina 摩擦定律呈现出随滑动速度增加而上升的趋势，该趋势已被识别为额外的黏性阻尼项。

3.7. 不同噪声水平、观测时长和采样频率下的性能分析

在前述小节中，通过考察一组具有特定测量噪声水平和固定样本数量的观测值，研究了将切换 GPLFM 应用于干摩擦振子时的非线性系统辨识性能。因此，本研究的进一步步骤是分析在考虑不同噪声水平、信号时长或采样频率时，所提出的方法表现如何。由此，将切换 GPLFM 应用于

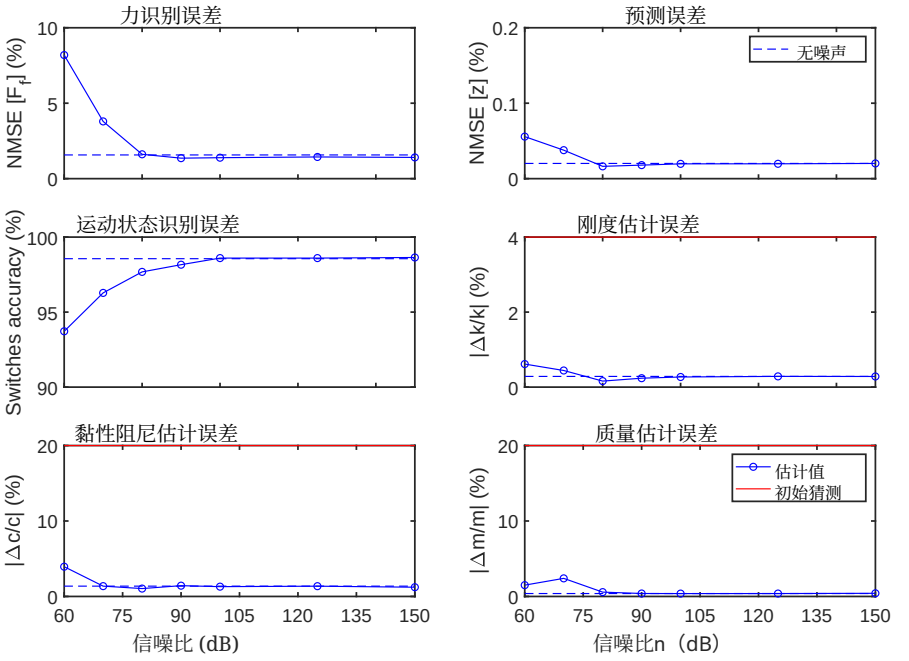


图 ***11.*** 将切换 *GPLFM*（$I = J = 3$）应用于干摩擦振子案例研究，在 $t_f = 5s$、 $f_s = 500\,Hz$ 条件下以及不同测量噪声水平下的非线性系统辨识性能。

表 ***6.*** 测量噪声的信噪比与标准差数值之间的换算关系。

信噪比（dB）	60	70	80	90	100	125	150
σ_n **(mm)**	0.0786	0.0249	$7。862 \times 10^{-3}$	2.486×10^{-3}	$7。862 \times 10^{-4}$	4.421×10^{-5}	$7。862 \times 10^{-3}$

本节研究的案例 σ_n中，改变 t_f 和 f_s，并假设系统参数的初始猜测如表5 所示，且选择 $I = J = 3$。考虑以下性能估计指标：

• 该非线性力识别误差被评估为所识别摩擦力相对于真实值的归一化均方误差（见公式（24））；

• 预测误差旨在评估通过考虑最佳拟合的 Dieterich-Ruina 摩擦定律和修正值参数估计所实现的正向模型的预测能力。其计算为由正向模型数值获得的质量块位移相对于真实值的归一化均方误差；

• 运动状态识别误差计算为真实运动状态与识别出的运动状态之间的相对误差。在每个时间步长，将最可能的潜在力模型视为活动模型；

• 参数估计误差是估计的物理参数与真实物理参数之间的相对误差。

在七种不同水平的测量噪声（信噪比 = [60, 70, 80, 90, 100, 125, 150] dB）以及无噪声测量（信噪比 = ∞）下，对切换 GPLFM 的性能进行了研究，同时将观测值的终止时间和采样频率分别设为 $t_f = 5$s 和

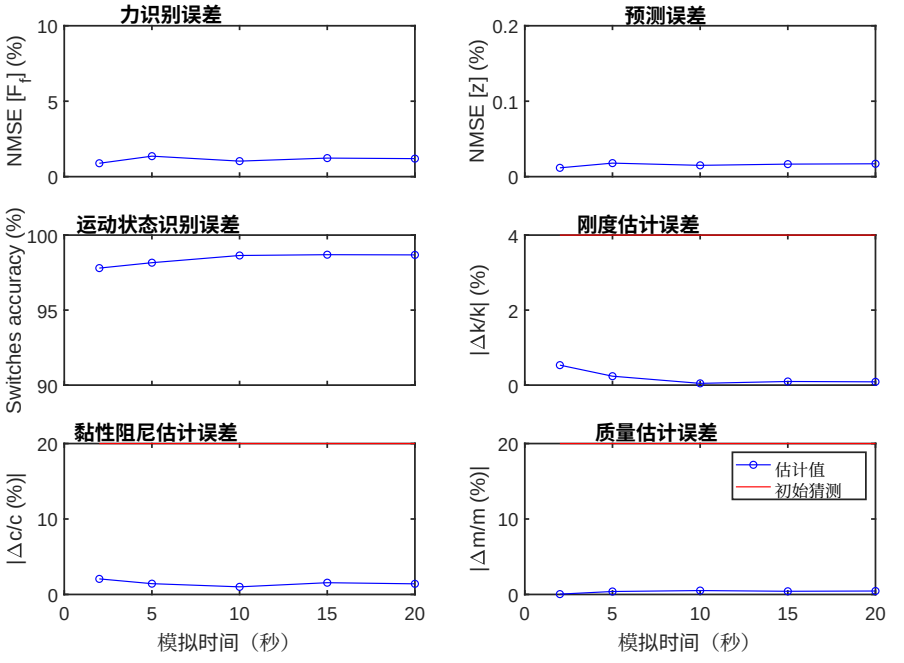


图 ***12.*** 切换 *GPLFM*（$I = J = 3$）应用于干摩擦振子案例研究时的非线性系统辨识性能，信噪比为 $= 80\ dB$、 $f_s = 500\ Hz$，仿真时长各异。

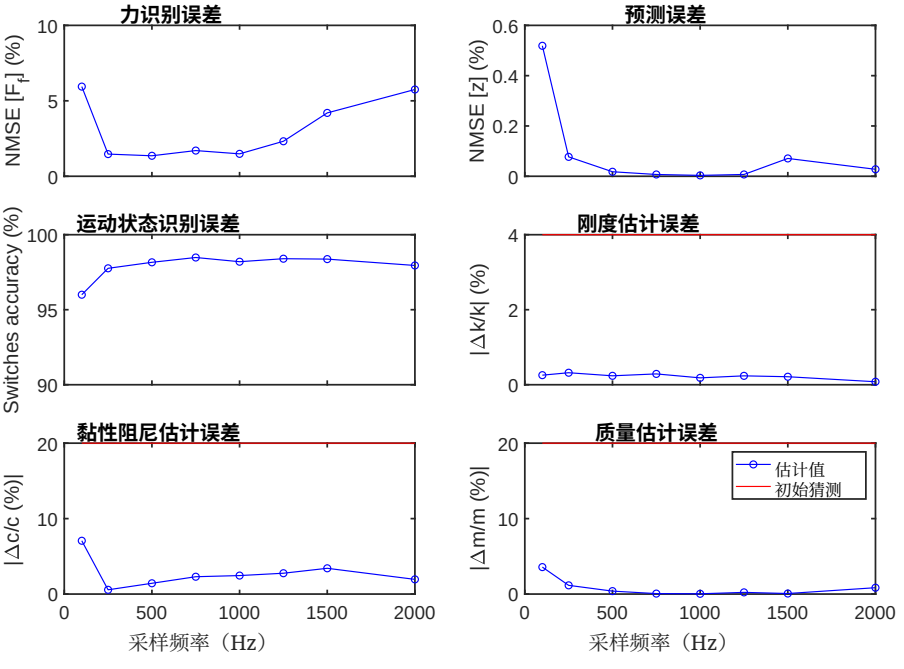


图 ***13.*** 切换 *GPLFM*（$I = J = 3$）应用于干摩擦振子案例研究时的非线性系统辨识性能，信噪比为 $= 80\,dB$、仿真时长为 $t_f = 5s$，采样频率各异。

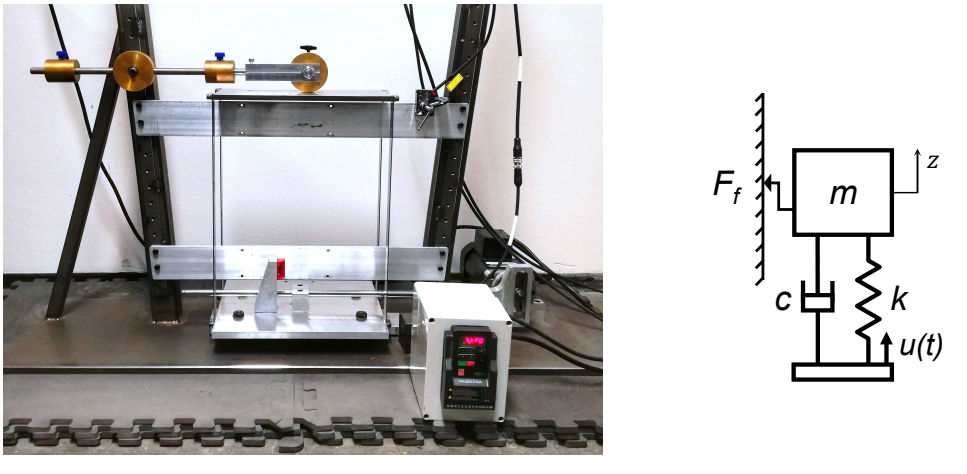
f_s = 500 Hz。相应的标准差数值 σ_n 列于表6中。误差指标绘制于图11中。从该图可以观察到，当信噪比等于或高于 80 dB 时，切换 GPLFM 对所有测量误差均表现出同样良好的性能。对于更高的噪声水平，主要影响表现为运动状态辨识精度下降，这也会导致较低的识别得分。尽管如此，当信噪比大于 60 dB 时，所有得分总体上仍保持在可接受的数值范围内。

在保持噪声水平和采样频率设置为信噪比= 80 dB 和 f_s = 500 Hz 不变的情况下，进一步开展了性能分析，同时将仿真时间在 2 至 20 秒之间变化。图12中报告的误差指标在不同观测时间下基本保持不变。因此可以推断，只要观测值之间的时间步长保持恒定，切换 GPLFM 就能在样本数量变化时提供稳定的性能。

最后一项研究通过将测量值的采样频率在 100 至 2000 Hz 之间变化来开展；这相当于将固定时间步长在 0.0005 至 0.01 s 之间变化。测量值的信噪比和时间跨度分别设为 90 dB 和 5 s。观察图13所示的结果得分，可以清楚地看出，采样频率对性能的影响大于仿真时间。当 f_s = 100 Hz 时，大多数受考察参数的误差都很大，这表明切换 GPLFM 在采样频率极低时无法取得良好表现；而当采样频率提高到 250 Hz 时，则可获得很好的得分。在所考察范围的另一端，值得注意的是，非线性力识别误差在高采样频率下显著增加，这表明应用 GPLFM 时可能会出现过采样问题。另一方面，预测、运动状态识别和参数估计误差似乎不受过采样影响。

4. 实验案例研究：带黄铜与钢接触的单层框架 t

通过研究一个实验案例，进一步考察切换潜在恢复力模型的适用性。该案例涉及一个受基座谐波激励的单层金属框架—
金属接触。目标是识别法向载荷作用下接触中产生的非线性摩擦力，并重建不同法向载荷幅值下的摩擦力-速度关系。



(a) (b)

图***14.*** 试验装置的照片（***a***）和机械模型（***b***）：带黄铜与钢接触的基座激励单层框架。

4.1. 试验台与机械模型

实验测试在图14a所示的试验台上进行，下面简要介绍该试验台。主体结构为一个单层框架，由两块金属板和四根双螺栓固定的薄金属杆组成。底板通过轴的往复运动受到激励，该轴通过苏格兰轭机构与电动机相连。由此产生近似简谐的基座激励，其驱动频率可通过选择电动机的转速来设定。顶板上放置了一块黄铜圆盘，以形成摩擦接触。圆盘安装在一个固定于外框架的配重系统上，因此可沿配重轴移动配重，以调节作用于顶板的法向力，进而调节摩擦力幅值。两块板的位移由激光位置传感器测量，从而在测试过程中获得输入和输出测量值。有关装置和测试流程的详细说明，参见MarinoandCicirello (2020)。

上述出版物表明，当考虑最高至少为 8 Hz 的驱动频率时，单层框架的动态行为可由图 14b 所示的单自由度质量-弹簧模型很好地再现。此外，Marino andCicirello 针对该结构动态响应获得的实验结果，与通过考虑库仑摩擦模型并采用解析和数值方法得到的理论结果吻合良好。由于库仑定律在滑动速度为零时会导致摩擦力发生不连续，因此可以合理地假设该单层框架表现为不连续非线性系统，从而成为所提方法的合适案例研究。

控制　　图 14b 所示机械系统的方程可写为　　：

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz + F_f(z,\dot{z}) = ku(t) + c\dot{u}(t) \tag{34}$$

其中 $u(t)$ 和 $\dot{u}(t)$ 分别为基座的位移和速度。不同于第 3节所研究的机械系统（其中已知的驱动力直接施加于质量块），方程（34）的输入项由两个项组成，二者均取决于通常未知的物理参数，并且还必须提供基座激励输入的导数。第 3.2节中实现的概率模型可以很容易地调整，以处理基座激励振子。具体而言：

- 在系统的状态空间模型中，输入向量将记为$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & \dot{u} \end{bmatrix}^\top$，而矩阵$B_{c,s}$ 将表示为：

$$B_{c,s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \tag{35}$$

- 在方程（23）中，潜在恢复力的预测均值中的项 u_{t-1} 将替换为 $ku_{t-1} + c\dot{u}_{t-1}$。

尽管基座激励的存在不会对切换潜在力模型的构建产生太大影响，但在估计物理参数和输入向量时可能会遇到困难。

第一个问题与质量的不可辨识性有关。事实上，将方程（34）改写为：

$$\ddot{z} = \frac{k}{m}u(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) - \frac{k}{m}z - \frac{c}{m}\dot{z} - \frac{1}{m}F_f(z,\dot{z}) \tag{36}$$

可以观察到，在等式右侧，除未知摩擦力外，所有项都乘以 k/m 或 c/m。因此，如果将质量值从其真实值 m 改为错误的估计值 $\hat{m}$，同时保持这些比值不变，那么对辨识状态和潜在力的唯一影响就是后者会按比例 $\hat{m}/m$缩放。显然，由于摩擦力的幅值未知，无法从辨识得到的潜在力确定这一缩放因子。总之，无论采用何种系统辨识方法，都无法根据基座位移和质量块位移识别基座激励系统的质量参数。在本文中，

该数值为 $m = 3。0799$ kg，并将其赋予该质量。该数值是在拆除配重系统（因此也移除了摩擦接触）后，对框架顶板进行锤击测试所得。随后，在 0-6 Hz 的频率范围内，采用最小二乘法将实验频率响应函数拟合为质量-弹簧-阻尼系统的频率响应函数，从而获得该系统的最优参数。由此得到的系统物理参数和模态参数列于表 7中，并与通过将辨识得到的潜在力拟合为线性函数而估计的参数进行比较：

$$F_L = A_0 + A_1(z - u) + A_2(\dot{z} - \dot{u}) \tag{37}$$

并通过添加 $\Delta k = A_1$ 和 $\Delta c = A_2$，按照小节 3.3中的步骤校正初始估计值。

将切换 GPLFM 应用于此实验案例研究时，还需注意一个问题：必须将基座位移和速度作为输入提供。然而，尽管基座激励的基频由用户选择，但激光传感器只能测得底板位移的含噪测量值。为恢复驱动函数 $u(t)$和 $\dot{u}(t)$，根据牛顿运动定律建立了以下状态空间模型：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_t \\ \dot{u}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t-1} \\ \dot{u}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} a_{t-1}, & a_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2) \quad (38a) \\ y_{u,t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ \dot{u}_t \end{bmatrix} + v_{u,t}, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2) \quad (38b) \end{cases}$$

假设存在未知的恒定加速度 a_t，并将其建模为方差为 σ_a^2 的零均值正态分布，且该加速度作用于时间步 t 和 $t + 1$之间。随后，采用 Kalman 滤波和 RTS 平滑，根据 VBMC 推断出的超参数最优值计算上述状态空间模型。值得一提的是，虽然在假设基座运动不受结构动态响应或摩擦力影响的情况下，可以方便地应用所提出的方法，但更一般的方法是将上述状态空间模型与潜在力模型的增广状态空间表示相耦合。

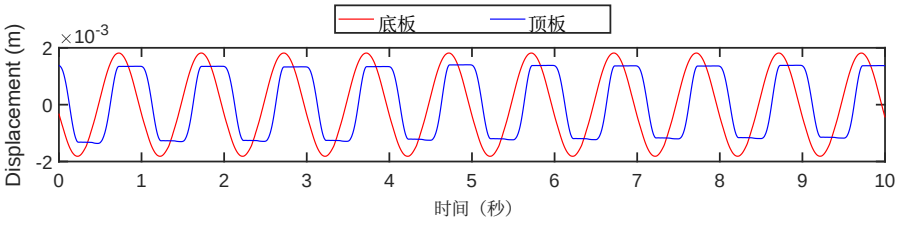


图 ***15.*** 单层框架在谐波激励下底板和顶板的测量位移。驱动频率设为 *1 Hz*，并对顶板施加 *5.5 N* 的法向载荷。

4.2. 推断与结果

通过将所提出的切换 GPLFM（$I = J = 3$）应用于实验数据，完成了非线性系统辨识；实验数据是在基频驱动频率为 1 Hz、法向力为 5.5 N 的条件下获取的。图 15所示的两块板的位移记录时长为 10s，采样频率为 250 Hz。

估计的物理参数和模态参数列于表7中。特别是，估计的刚度和固有频率与锤击测试获得的测量值非常一致，而

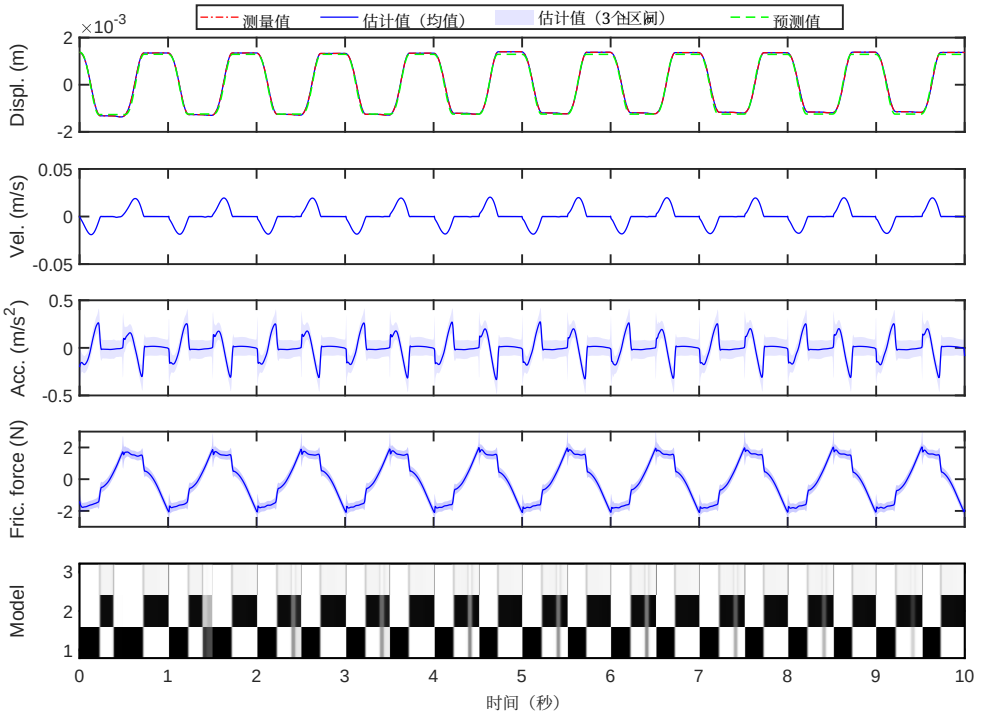


图**16**。 切换 *GPLFM* 推断出的潜在状态、加速度、非线性摩擦力和模型概率（$I = J = 3$）。模型*1*、*2*和*3*分别代表滑动、粘着和重置模型。

表**7**。 单层框架的物理参数和模态参数：锤击测试得到的估计值与初始猜测值，以及辨识过程中得到的修正值。

参数	锤击测试	初始猜测	修正值
质量 (kg)	3.0799		
黏性阻尼 (Nsm^{-1})	0.3004	5	0.6691
刚度 (Nm^{-1})	1197	1250	1191
固有频率 (Hz)	3.1374	3.2063	3.1298
模态阻尼比	0.0018	0.0403	0.0055

估计的黏性阻尼及相应的阻尼比略有高估。尽管如此，两种情况下的黏性阻尼数值均可忽略不计，这与Marino 和 Cicirello （2020）提出的结果一致。

图中给出了识别出的潜在状态和摩擦力16，以及模型概率序列。从图中可以看出，估计位移与实验观测值高度吻合，归一化均方误差为 4。889×10^{-6}。顶板位移呈现出相当规则的双止挡黏滑运动。如图16底部框架所示，切换潜在力模型通常能够很好地捕捉滑动和粘着阶段之间的转变。不过，在顶板运动于 $z < 0$ 处出现停止期间，后续滑动阶段开始之前可以观察到缓慢变化。这种特殊行为显然增加了识别运动状态的难度，导致与这些停止相对应的模型概率中出现灰色区域。识别出的摩擦力

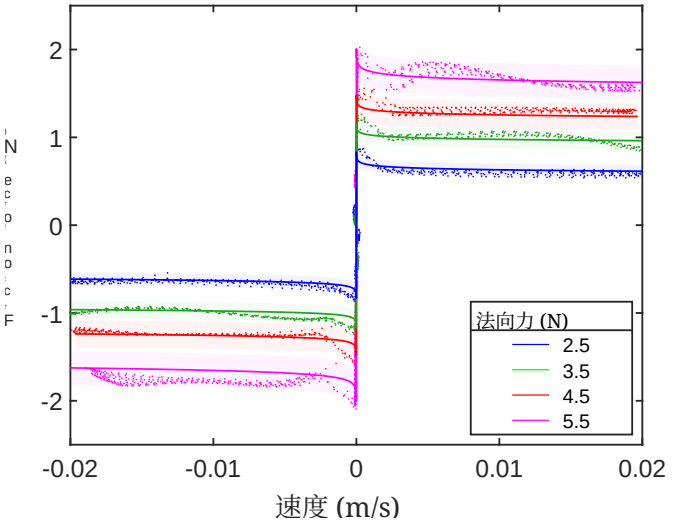


图 ***17.*** 不同施加法向载荷下的摩擦力-速度关系：点估计（圆点）、拟合的摩擦定律（实线）和 $\pm 3\sigma$ 置信区间（阴影区域）。

似乎未受到负向止挡较大不确定性的影响；事实上，每个粘着阶段都呈现出规则的模式。滑动摩擦力也总体呈现出规则的变化，在每个滑动阶段的振幅略有下降。图17中给出的潜在摩擦力-速度点估计（洋红色圆点）也显示了这一趋势。

摩擦力-速度估计采用公式（20a）中引入的稳态 Dieterich-Ruina 定律进行拟合；静摩擦力的数值按第 3.5 小节所述确定。在图 17 中可以观察到，摩擦力-速度曲线的两个分支均呈单调变化，其特征是随着滑动速度绝对值增大，摩擦力幅值减小。摩擦领域将这一特定模式称为斯特里贝克效应；由于识别出的参数 a 和 c 的数值非常小，Dieterich-Ruina 定律能够再现这一效应（另见 Cabboi 等人(2022）。

为评估切换 GPLFM 的预测能力，采用拟合的摩擦模型和估计的物理参数对系统动态响应进行了数值模拟（见表 7）。测量值与模拟得到的质量块位移高度吻合，这一点在图 16 的上方框架中也清晰可见；二者比较所得的 NMSE 得分为 0.4316%。

最后，本文提出的方法应用于不同法向力水平下获得的实验数据，法向力范围为 2.5 至 5.5 N。所得摩擦力-速度估计及相应的拟合摩擦定律见图17。可以观察到，在不同施加法向力下，摩擦力-速度曲线呈现相似的趋势。此外，各曲线间距近乎相等，这表明摩擦力幅值随法向力线性增加，符合预期。对于不同的 值，拟合摩擦模型的预测性能没有显著变化，整体保持稳定；在所观察的各个情况下，归一化均方误差评分均未超过 1%。

5. 结论

本文的研究表明，切换高斯过程潜在力模型可有效用于识别具有不连续非线性和/或

多种运动状态的复杂动力系统。通过利用系统对已知输入力的响应所对应的一组含噪观测值，GPLFM能够推断潜在状态和非线性力的时间历程，而无需预先了解后者的函数形式。然而，标准GPLFM采用单个高斯过程对潜在非线性力建模，因此难以处理不连续非线性力，例如摩擦接触所产生的力。本文通过引入切换 GPLFM 来解决这一识别问题：该模型可利用多个 GP 潜在力对不同运动状态下的非线性力进行建模，并通过假设密度滤波和期望校正平滑算法更新其先验分布。此外，潜在力模型中还加入了重置模型，以实现非线性力的不连续性。模型转变也通过切换线性动力系统的最新方法，以贝叶斯方式与潜在状态和非线性力一并推断。所提出的切换 GPLFM 应用于两个案例研究，包括一个模拟的干摩擦振子，以及一个由带有黄铜与钢接触的单层框架构成的实验装置。在这两种情况下，对于不同的（i）接触中的法向载荷幅值、（ii）测量噪声水平以及（iii）数据集中的样本数量，所识别出的非线性不连续摩擦力均取得了出色的结果。

与纯数据驱动方法相比，切换 GPLFM 可为非线性系统辨识带来多项优势。通过将含噪观测和部分已知的基于物理的模型嵌入概率模型中，可获得物理增强机器学习模型。该方法不仅能够识别时间序列中的不连续性，还能够将物理约束引入模型，例如干摩擦振子在粘着阶段所受的约束。因此，该方法具有很高的可解释性，因为它通过显式纳入大量源自物理与工程知识的信息，得到透明的预测结果。最重要的是，即使在数据集有限的情况下，所提出的切换 GPLFM 也能通过显式施加因果关系和基于物理的约束，提高其相对于外推和观测偏差的泛化性能。此外，可将所识别的不连续非线性力（例如，对于干摩擦问题所识别的摩擦力-速度曲线及静摩擦力值估计）用于在训练数据集中未包含的输入数据下的正向模型，以评估其与相应输出测量值之间的差异，从而轻易检测出在物理上不一致或不合理的预测。最重要的是，该方法具有可解释性，因为所得结果易于人类理解。结果可以用稳健的基于物理的特征来表述，例如摩擦力-速度关系，并且还包括对这些稳健特征中剩余不确定性以及系统状态预测中剩余不确定性的评估。

所提出的方法通常适用于分析仅包含一种非光滑非线性、且可用单自由度模型近似的工程系统。未来的工作将重点关注：（1）将当前的建模方法扩展至多自由度模型，尤其是不同质量块上可能同时发生接触和/或其他非线性的情况；（2）考虑更复杂的摩擦模型，这类模型的特征是依赖于更多状态变量（内部状态、温度等），和/或粘着状态下状态随时间演化。还值得一提的是，切换 GPLFM 需要引入多个潜在力模型并使用高斯混合。因此，与应用标准GPLFM相比，其计算成本更高。尽管如此，本文所展示的性能分析表明，少量高斯分量通常就足以显著提高不连续非线性力的辨识精度。

作者贡献。 概念构思：全体作者；数据整理：L.M.；调查研究：L.M.；方法学：L.M.；项目管理：A.C.；监督：A.C.；撰写初稿：L.M.；审阅与编辑：全体作者。所有作者均已批准最终提交的稿件。

竞争利益。 无。

数据可用性声明。本文所用的 MATLAB 代码和实验数据可在 GitHub 上获取：`\url{https://github.com/l-marino/switching-GPLFM/}`。**伦理标准**。本研究符合所有伦理准则，包括遵守研究所在国家的法律要求。**资金声明**。本研究未获得任何资助机构、商业部门或非营利部门的专项资助。

参考文献

Acerbi, L (2018) 变分贝叶斯蒙特卡洛。《神经信息处理系统进展》31, 8222–8232。Acerbi, L (2020) 含噪似然的变分贝叶斯蒙特卡洛。《神经信息处理系统进展》33, 8211–8222。Alspach, DL and Sorenson, HW (1972) 使用高斯和近似进行非线性贝叶斯估计。《IEEE 自动控制汇刊》17(4), 439–448。Alvarez, M, Luengo, D and Lawrence, ND (2009) 潜在力模型。《机器学习研究期刊》5, 9–16。Alvarez, M, Peters, J, Schoelkopf, B and Lawrence, ND (2010) 用于运动分段的切换潜在力模型。《神经信息处理系统进展》23, 55–63。Barber, D (2006) 切换线性动力系统平滑推断的期望校正。《机器学习研究期刊》7, 2515–2540。Bar-Shalom, Y, Li, X-R and Kirubarajan, T (2001) 面向跟踪与导航应用的估计。Wiley Interscience。Beckers, T (2021) 高斯过程模型导论。arXiv 预印本 arXiv:2102.05497。Benavoli, A and Zaffalon, M (2016) 非平稳高斯过程的状态空间表示。arXiv 预印本 arXiv:1601.01544。Bilbao, J, Lourens, E-M, Schulze, A and Ziegler, L (2022) 使用高斯过程潜在力模型对陆上风力涡轮机塔架进行虚拟传感。Data-Centric Engineering 3, e35。Butlin, T, Woodhouse, J and Champneys, AR (2015) 非线性结构动力学的全貌：导论。《皇家学会哲学汇刊 A 辑》373(2051), 20140400。Cabboi, A, Marino, L and Cicirello, A (2022) 阿蒙顿–库仑摩擦定律与 Dieterich–Ruina 摩擦定律对单自由度系统循环响应影响的比较研究。《欧洲力学杂志／A辑：固体》96, 104737。Carella, A and Ewins, D (2011) 根据测得的频率响应函数识别并量化工程应用中的结构非线性。《机械系统与信号处理》25, 1011–1027。Dieterich, JH (1979) 岩石摩擦建模：1. 实验结果与本构方程。《地球物理研究杂志：固体地球》84, 2161–2168。Gelman, A, Carlin, JB, Rubin, DB, Vehtari, A, Dunson DB and Stern, HS (2013)《贝叶斯数据分析》，第3版。CRC出版社。Ghahramani, Z and Hinton, GE (1996) 线性动力系统的参数估计。多伦多大学计算机科学系技术报告。Ewins, DJ, Weekes, B and Delli Carri, A (2015) 用于验证具有离散非线性的结构模型的模态测试。《皇家学会哲学汇刊 A 辑》373, 20140410。Hartikainen, J and Särkkä, S (2010) 时间高斯过程回归模型的卡尔曼滤波与平滑解。载于：IEEE 信号处理机器学习国际研讨会论文集，379–384。Hartikainen, J and Särkkä, S (2012) 潜在力模型的序贯推断。arXiv 预印本 arXiv:1202.3730。Hasselmann, K 等 (1973) 北海联合波浪计划 (JONSWAP) 期间风浪增长与涌浪衰减的测量。德国水文研究所刊物系列，德国水文研究所。Kalman, RE (1960) 线性滤波与预测问题的新方法。《基础工程学杂志》82(1), 35–45。Kerschen, G, Worden, K, Vakakis, AF and Golinval, J-C (2006) 结构动力学中非线性系统辨识的过去、现在与未来。《机械系统与信号处理》20, 505–592。Lerner, UN (2002) 用于复杂系统推理的混合贝叶斯网络。博士论文，斯坦福大学。Marino, L and Cicirello, A (2020) 对具有库仑摩擦的单自由度系统的实验研究。《非线性动力学》99, 1781–1799 Marino, L and Cicirello, A (2022) 库仑摩擦对阻尼质量–弹簧系统受迫振动的影响。《声学与振动杂志》535, 117085。Nayek, R, Chakraborty, S and Narasimhan, S (2019) 用于线性结构系统联合输入-状态估计的高斯过程潜在力模型。《机械系统与信号处理》128, 497–530。Noël, J-P and Kerschen, G (2017) 结构动力学中的非线性系统辨识：又十年的进展。《机械系统与信号处理》83, 2–35。Ondra, V, Sever, IA and Schwingshackl, CW (2017) 一种利用希尔伯特变换和神经网络检测与表征结构非线性的方法。《机械系统与信号处理》83, 210–227。Petersen, W, Oiseth, O and Lourens, E-M (2022) 利用物理信息高斯过程潜在力模型对大跨度悬索桥进行风荷载估计与虚拟传感。《机械系统与信号处理》170, 108742。

Rasmussen, CE and Williams, CKI (2006)《机器学习高斯过程》。麻省理工学院出版社。Rauch, HE, Tung, F and Striebel, T (1965) 线性动态系统的最大似然估计。AIAA期刊 3(8), 1445–1450。Rice, JR and Ben-Zion, Y (1996) 地震断层模型中的滑移复杂性。《美国国家科学院院刊》93(9), 3811–3818。Rogers, TJ, Worden, K, Manson, G, Tygesen, U and Cross, EJ (2018) 一种结合激励信号恢复的运行模态分析贝叶斯滤波方法。载于：ISMA 2018论文集，5181–5194。Rogers, TJ, Worden, K and Cross, EJ (2020) 关于高斯过程潜在力模型在联合输入-状态-参数估计中的应用：兼论贝叶斯运行识别。《机械系统与信号处理》140, 106580。Rogers, TJ, Worden, K and Cross, EJ (2020) 非线性系统的贝叶斯联合输入-状态估计。《振动》3(3), 281–303。Rogers, TJ and Friis, T (2022) 一种用于非线性系统辨识的潜在恢复力方法。《机械系统与信号处理》180, 109426。Särkkä, S and Solin, A (2019)《应用随机微分方程》。剑桥大学出版社。Schwarz, GE (1978) 模型维数的估计。《统计年刊》6(2), 461–464。Solin, A and Särkkä, S (2014) 周期协方差函数与状态空间模型之间的显式联系。载于：第17届人工智能与统计国际会议论文集 33, 904–912。Vazirizade, SM (2019) 用于时域海洋结构波浪载荷可靠性估计的智能集成方法。博士论文，亚利桑那大学。Wang, X, Khodaparast, HH, Shaw, AD and Friswell, MI (2018) 利用空间不完整测量数据定位结构动力学中的局部非线性。《机械系统与信号处理》99, 364–383。Worden, K and Tomlinson, G (2001)《结构动力学中的非线性：检测、识别与建模》。英国布里斯托尔：物理学会。Zou, J, Lourens, E-M and Cicirello, A (2022) 通过高斯过程潜在力模型对单桩式海上风力涡轮机的地基土应变响应进行虚拟传感。arXiv 预印本 arXiv:2207.05901。Zou, J, Lourens, E-M, Iliopoulos, A and Cicirello, A (2022) 用于单桩式海上风力涡轮机虚拟传感的高斯过程潜在力模型。《欧洲结构健康监测研讨会：EWSHM 2022》1, 290–298。