arXiv:2303.03861v1 [math.GR] 7 Mar 2023

限制属于给定半群的（线性）变换半群

MOSAROF SARKAR 和 SHUBH N. SINGH

Abstract. 设 $T(X)$ 分别表示集合 X（向量空间 V）上的所有变换（线性变换）组成的半群。对于 X 的子集 Y，以及 $T(Y)$ 的子半群 $\mathbb{S}(Y)$，考虑子半群 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X) = \{f \in T(X): f_{\restriction Y} \in \mathbb{S}(Y)\}$，它是 $T(X)$ 的子半群，其中 $f_{\restriction Y} \in T(Y)$ 在 Y 上与 f 一致。我们给出 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 成为正则半群[逆半群]的新刻画。对于 V 的子空间 W，以及 $L(W)$ 的子半群 $\mathbb{S}(W)$，我们定义一个类似的子半群 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \{f \in L(V): f_{\restriction W} \in \mathbb{S}(W)\}$，它是 $L(V)$ 的子半群。我们描述 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 中的正则元，并确定 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时为正则半群 [逆半群、完全正则半群]。若 $\mathbb{S}(Y)$ 分别包含 $T(Y)$ 的单位元，或 $\mathbb{S}(W)$ 包含 $L(W)$ 的单位元，我们便描述 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 或 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 中的单位正则元，并确定 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 或 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时为单位正则半群。

1. Introduction

对于给定的集合 X，用 $T(X)$ 表示由所有从 X 到其自身的变换在复合运算下构成的半群。过去数十年来，人们对半群 $T(X)$ 及其各种子半群进行了广泛研究，因为每个半群都可以嵌入某个集合 Z 上的 $T(Z)$ 中（参见 [5, 定理 1.1.2]）。

最近，Janusz Konieczny [6] 引入了 $T(X)$ 的子半群 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$，其定义如下：

$$T_{\mathbb{S}(Y)}(X) = \{f \in T(X): f_{\restriction Y} \in \mathbb{S}(Y)\},$$

其中，Y 是 X 的子集，$\mathbb{S}(Y)$ 是 $T(Y)$ 的子半群，而 $f_{\restriction Y}: Y \to Y$ 是在 Y 上与 f 一致的变换。在此，Janusz Konieczny 描述了 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 中的正则元，并确定了 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 何时是正则半群、何时是逆半群。作者 [6, 13] 还确定了 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 何时是完全正则半群。Janusz Konieczny [6] 刻画了 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 上的格林关系，条件是 $\mathbb{S}(Y)$ 含有 I_Y 在 Y 上的恒等变换。若 $Y = \varnothing$，则显然 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X) = T(X)$。对于 $Y \neq \varnothing$，在若干特定的 $T(Y)$ 子半群 $\mathbb{S}(Y)$ 上，半群 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 也已得到研究（例如参见 [4, 7, 9, 14, 15, 16]）。

给定域上的向量空间 V，记 $L(V)$ 为由从 V 到其自身的所有线性变换在复合运算下构成的半群。受子半群 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 的构造启发，我们在此通过以下方式定义 $T(X)$ 的一个类似子半群 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$：

$$L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \{f \in L(V): f_{\restriction W} \in \mathbb{S}(W)\},$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20M17, 20M20, 15A03, 15A04。*Key words and phrases.* 变换半群；正则元和单位正则元；正则半群；单位正则半群；完全正则半群；逆半群。

其中 W 是 V 的子空间，$\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群，而 $f_{\restriction W}\colon W \to W$ 是与 f 在 W 上一致的线性变换。半群 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 在以下意义上概括了 $L(V)$ 和 $\mathbb{S}(W)$：若 W 是 V 的零子空间，则 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) = L(V)$；若 $W = V$，则 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \mathbb{S}(W)$。半群 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 还是子半群 $\overline{L}(V,W) = \{f \in L(V)\colon Wf \subseteq W\}$ of$L(V)$ 的推广，因为 $L_{L(W)}(V) = \overline{L}(V,W)$。半群 $\overline{L}(V,W)$ 已有多位作者研究（例如参见 [1, 8, 12]）。

本文旨在研究半群 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 和 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。本文组织如下。第2节给出全文所使用的定义和记号。在第3节中，我们给出 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 的正则性的一种新刻画。接着，我们给出 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 成为逆半群的一种新刻画。如果 $\mathbb{S}(Y)$ 包含 $T(Y)$ 的单位元，那么我们刻画 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 中的单位正则元，并确定 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 何时为单位正则半群。在第4节中，我们刻画 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 中的正则元，并确定 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时为正则半群。接着，如果 $\mathbb{S}(W)$ 包含 $L(W)$ 的单位元，那么我们刻画 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 中的单位正则元，并确定 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时为单位正则半群。我们还确定 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时为逆半群，以及 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时为完全正则半群。

2. 预备知识与记号

我们用并置表示函数复合，并按从左到右的顺序复合函数。设 $f\colon A \to B$ 是一个映射。我们用 xf 表示 $x \in A$ 在 f 下的像，用 $R(f)$ 表示 f 的像集。对于 B 的任意子集 C，令 $Cf^{-1} = \{x \in A\colon xf \in C\}$。若 $C = \{z\}$，则将 Cf^{-1} 简写为 zf^{-1}。f 的核是 A 上的一个等价关系 $\ker(f)$，定义为 $\ker(f) = \{(x,y) \in A \times A\colon xf = yf\}$。

设 A 是任意集合。集合 A 上的等价关系 ρ 的横截集是 A 的一个子集，其中每个 ρ-等价类恰好包含一个元素。我们用 T_f 表示 $\ker(f)$ 的任意横截集。我们用 $|A|$ 表示 A 的基数，用 I_A 表示 A 上的恒等映射；对于任意集合 B，用 $A \setminus B$ 表示 A 中不属于 B 的元素所组成的集合。记 $\Omega(A)$（分别为 $\mathrm{Sym}(A)$）为在复合运算下由从 A 到自身的所有满射（分别为双射）构成的半群（分别为群）。

设 $f\colon A \to A$ 是一个映射。我们用 $D(f)$ 表示集合 $A \setminus R(f)$。将 f 限制到其定义域的任意子集 B 上，所得映射为 $f_{|B}\colon B \to A$，其定义为对所有 $x \in B$，$x(f_{|B}) = xf$。若 C 是 f 的陪域的一个子集，且 $Af \subseteq C$，则将 f 余限制到 C 上，所得映射是从 A 到 C 、并在 A 上与 f 一致的映射。若 $Bf \subseteq B$，我们用 $f_{\restriction B}$ 表示映射 $f_{|B}$ 到 B 的余限制。

设 S 是一个半群，且 $a \in S$。若存在 $b \in S$ 使得 $aba = a$，则称 a 为 S 中的正则元。我们用 $\mathrm{reg}(S)$ 表示 S 中所有正则元构成的集合。若 $\mathrm{reg}(S) = S$，则称 S 为正则半群。若对每个 $x \in S$，都存在唯一的 $y \in S$ 使得 $xyx = x$ 且 $yxy = y$，则称半群 S 为逆半群。等价地，若 S 是正则半群，且其幂等元彼此交换（参见 [5, 定理 5.1.1]），则称 S 为逆半群。若 S 的每个元素都属于 S 的某个子群，则称 S 为完全正则半群。我们用 $E(S)$ 表示 S 的幂等元构成的集合。

设 S 是一个含单位元的半群。用 $U(S)$ 表示 S 中所有单位构成的集合。若存在 $u \in U(S)$ 使得 $aua = a$，则称元素 $a \in S$ 为单位正则元。

我们用 ureg(S) 表示 S 中所有单位正则元构成的集合。若 ureg(S) $= S$，则称 S 为单位正则半群。

设 V 是域上的向量空间。我们用 0 表示 V 的零向量。 V 的子空间 $\{0\}$ 和 V 称为平凡子空间。对于 V 的子集 T 所张成的子空间，我们记作 $\langle T\rangle$。对于 V 的任意子空间 U ，我们用 dim(U) 和 codim(U) 分别表示 U 的维数和商空间 V/U 的维数。设 $f \in L(V)$。用 $N(f)$ 表示 f 的零空间 $\{v \in V\colon vf = 0\}$。我们用 nullity(f)（分别地，corank(f)）表示 dim($N(f)$)（分别地，dim($V/R(f)$)）；若向量空间 V 和 U 同构，则记作 $V \approx U$。我们用 Aut(V) 表示由 V 的所有自同构在复合运算下构成的群。记号 Ω(V) 可视为集合 X 上满射变换的半群 Ω(X) 的线性版本。

关于半群理论和线性代数中未定义的定义和记号，我们也分别请读者参阅 [5] 和 [11] 。

3. The semigroup $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$

本节中，我们给出 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 正则性的一个新刻画。接下来，我们给出 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 为逆半群的一个新刻画。若$I_Y \in \mathbb{S}(Y)$，我们将描述 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 中的单位正则元，并确定$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 何时为单位正则半群。本节中，我们始终假设 Y是 X 的非空子集，且 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $T(Y)$ 的子半群。

我们从下面的命题开始，该命题给出了$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 为正则半群的一个充分条件。

命题 3.1. 若 $\mathbb{S}(Y)$ 是 Sym(Y) 的子群，则 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的。

证明. 设 $f \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。则 $f_{\restriction Y} \in \mathbb{S}(Y)$。若 $\mathbb{S}(Y)$ 是 Sym(Y) 的子群，则显然 $f_{\restriction Y} \in$ reg($\mathbb{S}(Y)$) 且 $R(f_{\restriction Y}) = R(f) \cap Y$。因此，由 $[6, \text{Theorem 2.2 (1)}],$, 有 $f \in$reg({v17}(X)), 故 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的。□

下述辅助引理在后文中也会用到。

引理 3.2. 设 S 是群 G 的子半群。那么，当且仅当 S 是正则的时， S 是 G 的子群。

Janusz Konieczny $[6, \text{定理 2.2(2)}]$ 刻画了 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 的正则性。下述定理给出了 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 正则性的一种新刻画。

定理 3.3. 设 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $T(Y)$ 的子半群。那么，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的，当且仅当以下条件之一成立:

(i) $\mathbb{S}(Y)$ 是 Sym(Y) 的子群。

(ii) $\mathbb{S}(Y)$ 是正则的，并且 $Y = X$。

证明. 假设 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的。由命题 3.1 可知，(i) 可能成立。现在假设 (i) 不成立。

由于 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的，根据命题 2.1]以及正则半群的任何同态像都是正则的这一事实（参见引理 2.4.4]），可得 $\mathbb{S}(Y)$ 是正则的。

为证明 $Y = X$，反设 $Y \neq X$。注意到 $|Y| \geq 2$，因为 $\mathbb{S}(Y)$ 不是对称群 Sym(Y) 的子群。现在我们断言 $\mathbb{S}(Y) \setminus \Omega(Y) \neq \varnothing$。反设 $\mathbb{S}(Y) \setminus \Omega(Y) = \varnothing$。于是 $\mathbb{S}(Y) \subseteq \Omega(Y)$。由于 $\mathbb{S}(Y)$

是正则的，我们看到 $\mathbb{S}(Y) \subseteq \mathrm{Sym}(Y)$，因此由引理 3.2 可知 $\mathbb{S}(Y)$ 是对称群 $\mathrm{Sym}(Y)$ 的子群。这与 (i) 不成立的假设矛盾。因此，$\mathbb{S}(Y) \setminus \Omega(Y) \neq \varnothing$。取 $\alpha \in \mathbb{S}(Y)$ 使得 $\alpha \notin \Omega(Y)$。固定 $y_0 \in Y \setminus R(\alpha)$，并定义 $f \in T(X)$ 如下：

$$xf = \begin{cases} x\alpha & \text{if } x \in Y, \\ y_0 & \text{if } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

显然 $f \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。然而，我们看到 $R(f) \cap Y \neq R(f_{\restriction_Y})$。因此，根据 [6, 定理 2.2(1)], , $f \notin \mathrm{reg}(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$，这与 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 的正则性矛盾。因此 $Y = X$。

对于逆向，首先假设 (i) 成立。则根据命题 3.1，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的。接下来，假设 (ii) 成立。由于 $Y = X$，我们有 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X) = \mathbb{S}(Y)$，因此根据假设，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的。□

Janusz Konieczny [6, 定理 2.3] 确定了 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 何时为逆半群。以下定理为 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是逆半群提供了一种新的刻画。

定理 3.4。设 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $T(Y)$ 的子半群。那么，当且仅当 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是逆半群时，

(i) $\mathbb{S}(Y)$ 是逆半群；(ii) $Y = X$ 或 $|X| = 2$。

证明。假设 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是逆半群。由 [6,命题2.1] 以及逆半群的任意同态像都是逆半群这一事实可知，(i) 成立（参见 [5, 定理 5.1.4]）。

为证明 (ii)，注意到若 $Y = X$，则 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X) = \mathbb{S}(Y)$。因此，$Y = X$ 是一种可能的情形。假设 $Y \neq X$。首先，我们断言 $|X \setminus Y| = 1$。反设存在不同的 $x_1, x_2 \in X \setminus Y$。取 $\alpha \in E(\mathbb{S}(Y))$，并定义 $f, g \in T(X)$ 为

$$xf = \begin{cases} x\alpha & \text{if } x \in Y, \\ x_1 & \text{if } x \in X \setminus Y \end{cases} \qquad \text{and} \qquad xg = \begin{cases} x\alpha & \text{if } x \in Y, \\ x_2 & \text{if } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

直接验证可得 $f, g \in E(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$。然而，我们注意到 $x_1(fg) \neq x_1(gf)$，因此 $fg \neq gf$。这导致矛盾，因为 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是一个逆半群。因此 $|X \setminus Y| = 1$。记 $X \setminus Y = \{z\}$。

接下来，我们声称 $|Y| = 1$。反设 $|Y| \geq 2$。令$\beta \in E(\mathbb{S}(Y))$。需要考虑两种情况。
情况 1：$|R(\beta)| = 1$。记 $R(\beta) = \{y_1\}$。由于 $|Y| \geq 2$，存在 $y_2 \in Y$ 使得 $y_2 \neq y_1$。定义 $h \in T(X)$ 为

$$xh = \begin{cases} x\beta & \text{if } x \in Y, \\ y_2 & \text{if } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

显然 $h \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。然而，我们看到 $R(\beta) \neq Y \cap R(h)$。因此，根据 [6, 定理 2.2 (1)], , $h \notin \mathrm{reg}(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$，所以 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 不是正则的。这导致矛盾，因为 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是一个逆半群。

情形 2：$|R(\beta)| \geq 2$。选取互不相同的 y_1、$y_2 \in R(\beta)$。定义 f、$g \in T(X)$ 为

$$xf = \begin{cases} x\beta & \text{if } x \in Y, \\ y_1 & \text{if } x \in X \setminus Y \end{cases} \qquad \text{and} \qquad xg = \begin{cases} x\beta & \text{if } x \in Y, \\ y_2 & \text{if } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

不难验证，$f, g \in E(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$。然而，我们看到 $z(fg) \neq z(gf)$，因此 $fg \neq gf$。这导致矛盾，因为 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是一个逆半群。

因此，在这两种情况下，我们都会得到矛盾。故 $|Y| = 1$。由于 $|X \setminus Y| = 1$，我们得出结论：$|X| = 2$。

反过来，假设给定条件成立。若 $Y = X$，则 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X) = \mathbb{S}(Y)$，因此根据 (i)，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是一个逆半群。假设 $Y \neq X$。那么根据 (ii)，我们有 $|X| = 2$，继而 Y 是单元素集。因此，$\mathbb{S}(Y)$ 是 $\mathrm{Sym}(Y)$ 的一个子群，故根据定理 3.3，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的。此外，由于 $|X| = 2$ 和 $|Y| = 1$，显然 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 恰有两个彼此可交换的幂等元。因此，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是一个逆半群。□

下面的引理将用于接下来的两个结果。

引理 3.5. 设 $f \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。那么存在 X 的一个子集 T，使得 T 和 $T \cap Y$ 分别是 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction_Y})$ 的横截集。

证明. 注意到，对所有 $x \in R(f_{\restriction_Y})$，都有 $xf^{-1} \cap Y \neq \varnothing$。因此，对每个 $x \in R(f_{\restriction_Y})$，固定 $x' \in xf^{-1} \cap Y$，并令 $T_1 = \{x' \colon x \in R(f_{\restriction_Y})\}$。根据 T_1 的构造，显然 T_1 是 $\ker(f_{\restriction_Y})$ 的横截集。现在考虑 $R(f) \setminus R(f_{\restriction_Y})$。分两种情况。

情况 1：$R(f) \setminus R(f_{\restriction_Y}) = \varnothing$。取 $T = T_1$。显然 $T \cap Y = T_1$。因此，T 和 $T \cap Y$ 分别是 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction_Y})$ 的横截集。

情形 2：$R(f) \setminus R(f_{\restriction_Y}) \neq \varnothing$。显然，对于所有 $x \in R(f) \setminus R(f_{\restriction_Y})$，$xf^{-1} \neq \varnothing$。因此，对每个 $x \in R(f) \setminus R(f_{\restriction_Y})$，固定 $x'' \in xf^{-1}$，并令 $T = T_1 \cup \{x'' \colon x \in R(f) \setminus R(f_{\restriction_Y})\}$。容易验证，$T$ 是 $\ker(f)$ 的一个横截集。现在我们看到，$T_1 = T \cap Y$。因此，T 和 $T \cap Y$ 分别是 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction_Y})$ 的横截集。□

若 $I_Y \in \mathbb{S}(Y)$，则显然 $I_X \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。下述定理刻画了当 $I_Y \in \mathbb{S}(Y)$ 时，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 中的单位正则元。

定理 3.6。设 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $T(Y)$ 的一个子半群，且 $I_Y \in \mathbb{S}(Y)$，并设 $f \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。那么 $f \in \mathrm{ureg}(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$ 当且仅当

(i) $f_{\restriction_Y} \in \mathrm{ureg}(\mathbb{S}(Y))$; (ii) $R(f) \cap Y = R(f_{\restriction_Y})$; (iii) $|C(f) \setminus C(f_{\restriction_Y})| = |D(f) \setminus D(f_{\restriction_Y})|$，其中 $C(f) = X \setminus T_f$ 且 $C(f_{\restriction_Y}) = Y \setminus T_{(f_{\restriction_Y})}$ 对于 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction_Y})$ 的某些横截集 T_f 和 $T_{(f_{\restriction_Y})}$ 分别成立，且满足 $Y \cap T_f = T_{(f_{\restriction_Y})}$。

证明。假设 $f \in \mathrm{ureg}(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$。那么存在 $g \in U(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$ 使得 $fgf = f$。由此可得 $g_{\restriction_Y} \in U(\mathbb{S}(Y))$ 且 $f_{\restriction_Y} g_{\restriction_Y} f_{\restriction_Y} = f_{\restriction_Y}$，因此 $f_{\restriction_Y} \in \mathrm{ureg}(\mathbb{S}(Y))$。于是 (i) 成立。

为证明 (ii) 和 (iii)，注意到 $T_{T(Y)}(X)$ 是由 $\overline{T}(X, Y) = \{f \in T(X)$ 在复合运算下构成的半群：$Yf \subseteq Y\}$。由于 $f \in \mathrm{ureg}(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$ 且 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X) \subseteq T_{T(Y)}(X)$，因此有 $f \in \mathrm{ureg}(\overline{T}(X, Y))$。于是 (ii) 和 (iii) 可直接由[12, 定理 4.2]推出。

反过来，设 f 满足 (i)–(iii)。由 (i)，存在 $g_0 \in U(\mathbb{S}(Y))$ 使得 $f_{\restriction Y} g_0 f_{\restriction Y} = f_{\restriction Y}$。

现在，我们注意到 $R(f)\backslash Y \neq \varnothing$ 当且仅当 $T_f \backslash Y \neq \varnothing$。如果 $R(f)\backslash Y \neq \varnothing$，那么我们证明 g_1：由 $xg_1 = x'$ 定义的 $R(f) \setminus Y \to T_f \setminus Y$（其中 $x' \in T_f \cap xf^{-1}$）是双射。显然，g_1 是单射，因为对于不同的 x_1、$x_2 \in R(f)$，有 $x_1 f^{-1} \cap x_2 f^{-1} = \varnothing$。为证明 g_1 是满射，任取 $x \in T_f \setminus Y$ 并写成 $z = xf$。显然 $z \in R(f)$。由 (ii)，注意到 $R(f) \cap Y = R(f_{\restriction Y})$。因此，由于 $T_{(f_{\restriction Y})} = Y \cap T_f$，我们有 $z \in R(f) \setminus Y$。此外，我们看到 $zg_1 = x$，因此 g_1 是满射。

由 (iii)，存在一个双射 $g_2 \colon D(f) \setminus D(f_{\restriction Y}) \to C(f) \setminus C(f_{\restriction Y})$。注意，$X = Y \cup \big(R(f) \setminus Y\big) \cup \big(D(f) \setminus D(f_{\restriction Y})\big)$，并且 $X = Y \cup \big(T_f \setminus Y\big) \cup \big(C(f) \setminus C(f_{\restriction Y})\big)$。定义 $g \in T(X)$ 如下：

$$xg = \begin{cases} xg_0 & \text{if } x \in Y, \\ xg_1 & \text{if } x \in R(f) \setminus Y, \\ xg_2 & \text{if } x \in D(f) \setminus D(f_{\restriction Y}). \end{cases}$$

容易验证，g是双射，$g \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$，且 $fgf = f$。因此，$f \in \operatorname{ureg}(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$。□

下面的命题给出了使 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 成为单位正则的一个充分条件。

命题 3.7. 若 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $\operatorname{Sym}(Y)$ 的一个子群，且 $X \setminus Y$ 有限，则 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是单位正则的。

证明。设 $f \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。于是 $f_{\restriction Y} \in \mathbb{S}(Y)$。由于 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $\operatorname{Sym}(Y)$ 的子群，显然 $f_{\restriction Y} \in \operatorname{ureg}(\mathbb{S}(Y))$ 且 $R(f) \cap Y = R(f_{\restriction Y})$。因此 f 满足定理 3.6 的条件 (i) 和 (ii)。

由引理 3.5，取 T_f 和 $T_{(f_{\restriction Y})}$ 分别为 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction Y})$ 的横截集，使得 $T_f \cap Y = T_{(f_{\restriction Y})}$。由于 $f_{\restriction Y} \in \mathbb{S}(Y)$ 和 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $\operatorname{Sym}(Y)$ 的子群，我们有 $T_{(f_{\restriction Y})} = Y = R(f_{\restriction Y})$。因此 $Y \subseteq T_f$ 和 $Y \subseteq R(f)$。由于$X \setminus Y$是有限的，可知 $T_f \setminus Y$和 $R(f) \setminus Y$均为有限的。

断言 $|T_f \setminus Y| = |R(f) \setminus Y|$。注意，$R(f) \setminus Y \neq \varnothing$ 当且仅当 $T_f \setminus Y \neq \varnothing$。若 $R(f) \setminus Y \neq \varnothing$，则我们证明 α：由 $x\alpha = x'$ 定义的 $R(f) \setminus Y \to T_f \setminus Y$ 是双射，其中 $x' \in T_f \cap xf^{-1}$。显然，α 是单射，因为对于互不相同的 x_1、$x_2 \in R$，有 $x_1 f^{-1} \cap x_2 f^{-1} = \varnothing$（$f$）。为证明 α 是满射，任取$x \in T_f \setminus Y$ 并写作 $z = xf$。显然，$z \in R(f)$。由于 $R(f) \cap Y = R(f_{\restriction Y})$ 且 $T_{(f_{\restriction Y})} = Y \cap T_f$，因此可得 $z \in R(f) \setminus Y$。此外，我们看到 $z\alpha = x$，所以 α 是满射。因此，$|T_f \setminus Y| = |R(f) \setminus Y|$。

注意，$D(f) = (X \setminus Y) \setminus (R(f) \setminus Y)$。记 $C(f) = X \setminus T_f$和 $C(f_{\restriction Y}) = Y \setminus T_{(f_{\restriction Y})}$。显然，$C(f) = (X \setminus Y) \setminus (T_f \setminus Y)$。由于 $X \setminus Y$、$T_f \setminus Y$ 和$R(f) \setminus Y$均为有限的，且 $|T_f \setminus Y| = |R(f) \setminus Y|$，我们得到

$$|C(f)| = |X \setminus Y| - |T_f \setminus Y| = |X \setminus Y| - |R(f) \setminus Y| = |(X \setminus Y) \setminus \big(R(f) \setminus Y\big)| = D(f).$$

由于 $f_{\restriction Y}$是 Y上的双射，我们有 $C(f_{\restriction Y}) = \varnothing$ 且 $D(f_{\restriction Y}) = \varnothing$。因此$|C(f) \setminus C(f_{\restriction Y})| = |C(f)| = |D(f)| = |D(f) \setminus D(f_{\restriction Y})|$。于是 f也满足定理 3.6 的条件 (iii)，因此根据定理 3.6，$f \in \operatorname{ureg}(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$。所以，由于 f 是任意的，我们得出 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是一个单位正则半群。

□

下一个定理给出了在 $I_Y \in \mathbb{S}(Y)$ 的情况下， $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 为单位正则半群的充要条件。

定理 3.8. 设 $\mathbb{S}(Y)$ 是 $T(Y)$ 的一个子半群，且满足 $I_Y \in \mathbb{S}(Y)$。那么，$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是单位正则的，当且仅当以下条件之一成立：

(i) $\mathbb{S}(Y)$ 是 Sym(Y) 的一个子群，且 $X \setminus Y$ 有限。

(ii) $\mathbb{S}(Y)$ 是单位正则的，且 $Y = X$。

证明. 假设 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是单位正则的。由命题 3.7 可知，(i) 可能成立。我们假设 (i) 不成立。

由于 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是单位正则的，根据 $[6,$ 命题 2.1$]$ 以及单位正则半群的任意同态像仍是单位正则半群这一事实（参见 $[3,$ 命题 2.7$]$），可得 $\mathbb{S}(Y)$ 是单位正则的。

为证明 $Y = X$，反设 $Y \neq X$。首先，我们断言 $\mathbb{S}(Y)$ 不是 Sym(Y) 的子群。反设 $\mathbb{S}(Y)$ 是 Sym(Y) 的子群。接下来我们断言 $X \setminus Y$是有限的。反设$X \setminus Y$是无限的。于是存在 α: $X \setminus Y \to X \setminus Y$，它是单射但不是满射。定义 $f \in T(X)$ 如下

$$xf = \begin{cases} x & \text{if } x \in Y, \\ x\alpha & \text{if } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

显然， $f_{\restriction Y} = I_Y$和 $f \in T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$。此外，我们看到 f是单射。因此， Y和 X 分别是 ker$(f_{\restriction Y})$ 和 ker(f) 的唯一横截集。因此$C(f) = X \setminus T_f = \varnothing$且 $C(f_{\restriction Y}) = Y \setminus T_{(f_{\restriction Y})}$ $= \varnothing$，所以 $|C(f) \setminus C(f_{\restriction Y})| = 0$。注意， $f_{\restriction Y}$ 是满射，但 f 不是满射。因此 $D(f_{\restriction Y})$ $= \varnothing$ ，但$D(f) \neq \varnothing$，所以 $|D(f) \setminus D(f_{\restriction Y})| \neq 0$。因此， f不满足定理 3.6(iii)，故根据定理 3.6， $f \notin$ ureg$(T_{\mathbb{S}(Y)}(X))$，这与$T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$的幺正则性矛盾。因此， $X \setminus Y$是有限的，进而 (i) 成立。这与 (i) 不成立的假设矛盾。因此， $\mathbb{S}(Y)$ 不是 Sym(Y) 的子群。于是，由于 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是正则的，根据定理 3.3，我们有 $Y = X$ 。

反过来，首先假设 (i) 成立。根据命题 3.7， $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是单位正则的。接着，假设 (ii) 成立。由于 $Y = X$，我们有 $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ $=\mathbb{S}(X)$，因此根据假设， $T_{\mathbb{S}(Y)}(X)$ 是一个单位正则半群。□

4. The semigroup $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$

本节刻画 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 中的正则元，并确定 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时是正则半群。若 $I_W \in \mathbb{S}(W)$，则我们刻画 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 中的单位正则元，并确定 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时是单位正则半群。我们还将确定 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时是完全正则半群，以及 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时是逆半群。本节中，我们始终假设 W 是 V 的子空间，且 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群。我们先介绍以下命题。

命题 4.1. 设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群。那么，由 $f\varphi = f_{\restriction W}$ 定义的 φ: $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ $\to \mathbb{S}(W)$ 是一个满同态。此外，如果 $I_V \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$，那么 $(I_V)\varphi = I_W$。

证明。注意，对于所有 $f, g \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$，$(fg)_{\restriction W} = f_{\restriction W} g_{\restriction W}$。显然， φ: $L_{\mathbb{S}(W)}(V) \to \mathbb{S}(W)$ 是一个同态，因为

$$(fg)\varphi = (fg)_{\restriction W} = f_{\restriction W} g_{\restriction W} = (f\varphi)(g\varphi)$$

对于所有 $f,g \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。为证明 φ 是满射，取 $\alpha \in \mathbb{S}(W)$。将 α 扩张为一个线性算子，记为 f，作用于 V。于是可得 $f\varphi = f_{\restriction W} = \alpha$，因此 φ 是满射。故 φ 是一个满同态。此外，若 $I_V \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$，则显然 $(I_V)\varphi = I_W$。□

下一个定理给出了 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 中正则元的刻画。

定理 4.2. 设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群，且 $f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。那么$f \in \mathrm{reg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$ 当且仅当

(i) $f_{\restriction W} \in \mathrm{reg}(\mathbb{S}(W))$; (ii) $R(f) \cap W = R(f_{\restriction W})$】【。

证明。假设 $f \in \mathrm{reg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$。那么存在 $g \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$，使得 $fgf = f$。由此可得 $g_{\restriction W} \in \mathbb{S}(W)$ 和 $f_{\restriction W} g_{\restriction W} f_{\restriction W} = f_{\restriction W}$，因此 $f_{\restriction W} \in \mathrm{reg}(\mathbb{S}(W))$。于是 (i) 成立。为证明 (ii)，注意到 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) \subseteq L_{L(W)}(V)$ 且$L_{L(W)}(V) = \overline{L}(V,W)$。由于 $f \in \mathrm{reg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$，我们有 $f \in \mathrm{reg}(\overline{L}(V,W))$，故由 [8, 命题 3.1] 可得 (ii) 成立。

反之，设 f 满足给定条件。由 (i)，存在 $\alpha \in \mathbb{S}(W)$ 使得 $f_{\restriction W}\alpha f_{\restriction W} = f_{\restriction W}$。现在，令 B_1 为 $R(f) \cap W$ 的一组基。将 B_1 扩充为 $B_1 \cup B_2$ 和 $B_1 \cup B_3$ 的基，分别对应于 W 和 $R(f)$，其中 $B_2 \subseteq W \setminus \langle B_1 \rangle$ 且 $B_3 \subseteq R(f) \setminus \langle B_1 \rangle$。于是，$B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 是 $W + R(f)$ 的一组基。将 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 扩充为 $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ 的一组基，其中 V，且 $B_4 \subseteq V \setminus (W + R(f))$。由于 $B_3 \subseteq R(f)$，对于所有 $v \in B_3$，都有 $vf^{-1} \neq \varnothing$。因此，对于每个 $v \in B_3$，选取 $v' \in vf^{-1}$。定义 $h \in L(V)$ 如下：

$$vh = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ v' & \text{if } v \in B_3, \\ 0 & \text{if } v \in B_4. \end{cases}$$

不难验证，$h \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 和 $fhf = f$。因此 $f \in \mathrm{reg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$。□

下面的命题给出了 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 正则的一个充分条件。

命题 4.3. 若 $\mathbb{S}(W)$ 是 $\mathrm{Aut}(W)$ 的一个子群，则 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的。

证明. 设 $f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。则 $f_{\restriction W} \in \mathbb{S}(W)$。若 $\mathbb{S}(W)$ 是 $\mathrm{Aut}(W)$ 的一个子群，则显然有 $f_{\restriction W} \in \mathrm{reg}(\mathbb{S}(W))$，且 $R(f_{\restriction W}) = W = R(f) \cap W$。因此，由定理 4.2 可得 $f \in \mathrm{reg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$。于是 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的。□

下面的定理给出了 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 正则的一个充要条件。

定理 4.4. 设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的一个子半群。那么，$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的，当且仅当下列条件之一成立：

(i) $\mathbb{S}(W)$ 是 $\mathrm{Aut}(W)$ 的子群。

(ii) $\mathbb{S}(W)$ 是正则的，且 $W = V$。

证明。假设 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的。由命题 4.3 可知，(i) 可能成立。假设 (i) 不成立。

由于 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的，根据命题 4.1 以及正则半群的任意同态像都是正则的这一事实，可知 $\mathbb{S}(W)$ 是正则的（参见 [5,引理 2.4.4]）。

为证明 $W = V$，反设 $W \neq V$。注意到 $W \neq \{0\}$，因为 $\mathbb{S}(W)$ 不是 Aut(W) 的子群。现在我们断言， $\mathbb{S}(W) \setminus \Omega(W) \neq \varnothing$。反设 $\mathbb{S}(W) \setminus \Omega(W) = \varnothing$。那么 $\mathbb{S}(W) \subseteq \Omega(W)$。由于 $\mathbb{S}(W)$ 是正则的，我们直接得到 $\mathbb{S}(W) \subseteq$ Aut(W)。由引理 3.2 可知， $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子群，这与假设 (i) 不成立矛盾。因此 $\mathbb{S}(W) \setminus \Omega(W) \neq \varnothing$。于是我们选取 $\alpha \in \mathbb{S}(W)$，使得 $\alpha \notin \Omega(W)$。显然$W \setminus R(\alpha) \neq \varnothing$。令 B_1 为 $R(\alpha)$ 的一组基。将 B_1 扩充为 W的一组基 $B_1 \cup B_2$，其中 $B_2 \subseteq W \setminus R(\alpha)$。接着，将 $B_1 \cup B_2$ 扩充为 V的一组基 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$，其中$B_3 \subseteq V \setminus W$。固定 $v_0 \in B_2$，并定义 $f \in L(V)$ 如下

$$vf = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ v_0 & \text{if } v \in B_3. \end{cases}$$

显然 $f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。然而，我们看到 $R(f_{\restriction W}) = R(\alpha)$ 且 $R(f) \cap W = \langle R(\alpha) \cup \{v_0\}\rangle$，因此 $R(f) \cap W \neq R(f_{\restriction W})$。由此，根据定理 4.2， $f \notin \mathrm{reg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$，这与 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的正则性矛盾。因此 $W = V$。

反过来，首先假设 (i) 成立。根据命题 4.3， $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的。接下来，假设 (ii) 成立。由于 $W = V$，我们有$L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \mathbb{S}(V)$，因此根据假设，$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的。□

下面的引理将在接下来的两个结果中用到。

引理 4.5. 设 $f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。则存在 V 的一个子空间 U，使得 U 和 $U \cap W$ 分别是 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction W})$ 的横截集。

证明. 设 B_1 是 $R(f_{\restriction W})$ 的一组基。若 $B_1 \neq \varnothing$，则可见对所有 $u \in B_1$ 都有 $uf^{-1} \cap W \neq \varnothing$。因此，对每个 $u \in B_1$，固定 $u' \in uf^{-1} \cap W$，并令 $C_1 = \{u' \colon u \in B_1\}$。若 $B_1 = \varnothing$，则取 $C_1 = \varnothing$。

无论哪种情况，我们都断言 $U_1 = \langle C_1 \rangle$ 是 $\ker(f_{\restriction W})$ 的一个横截集。若 $C_1 = \varnothing$，则 $U_1 = \{0\}$，于是结论成立。假设 $C_1 \neq \varnothing$，并令 $w \in R(f_{\restriction W})$。由于$B_1$是 $R(f_{\restriction W})$ 的一组基，因此对某些 $u_1, \ldots, u_m \in B_1$，有 $w = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m$，其中 $m \geq 0$。考虑 $w' = c_1u_1' + \cdots + c_mu_m' \in U_1$，其中 $u_1', \ldots, u_m' \in C_1$。注意到 $w'f = w$，因此 $w' \in wf^{-1} \cap U_1$。回想一下， C_1 是 U_1 的一组基。因此，根据 C_1 的构造可知， $wf^{-1} \cap U_1 = \{w'\}$。于是，由于$w \in R(f_{\restriction W})$是任意的， V 的子空间 U_1 是 $\ker(f_{\restriction W})$ 的一个横截集。现在考虑 $R(f) \setminus R(f_{\restriction W})$。有两种情况。

情况 1：假设 $R(f) \setminus R(f_{\restriction W}) = \varnothing$。取 $U = U_1$。显然 $U \cap W = U_1$。因此，U 和 $U \cap W$ 分别是 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction W})$ 的横截集。

情况 2：假设 $R(f) \setminus R(f_{\restriction W}) \neq \varnothing$。将 B_1 扩充为 $R(f)$ 的一组基 $B_1 \cup B_2$，其中 $B_2 \subseteq R(f) \setminus R(f_{\restriction W})$。注意，对于所有 $v \in B_2$， $B_2 \neq \varnothing$ 和 $vf^{-1} \neq \varnothing$。因此，对每个 $v \in B_2$，固定 $\bar{v} \in vf^{-1}$。记 $C = C_1 \cup \{\bar{v} \in vf^{-1} \mid v \in B_2\}$，并令 $U = \langle C \rangle$。显然， $U \cap W = U_1$，所以 $U \cap W$ 是 $\ker(f_{\restriction W})$ 的一个横截集。现在只需证明 U 是 $\ker(f)$ 的一个横截集。为此，取 $w \in R(f)$。由于 $B_1 \cup B_2$ 是 $R(f)$ 的一组基，因此对某些 u_1、.....、$u_m \in B_1$ 和 v_1、.....、$v_n \in B_2$，有 $w = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m + d_1v_1 + \cdots + d_nv_n$，其中 m、$n \geq 0$。令 $w' = c_1u_1' +$

$\cdots + c_mu_m' + d_1\bar{v}_1 + \cdots + d_n\bar{v}_n \in U$，其中 u_1'、. . .、u_m'、$\bar{v}_1$、. . .、$\bar{v}_n \in C$。注意到 $w'f = w$，因此 $w' \in wf^{-1} \cap U$。回想一下， C是 U的一个基。因此，根据 C的构造，我们可知 $wf^{-1} \cap U = \{w'\}$。于是，由于 $w \in R(f)$是任意的， U这个 V的子空间是 $\ker(f)$ 的一个横截集。□

一般而言，注意到 I_V 不是 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$的一个元素。不过，如果 $I_W \in \mathbb{S}(W)$，那么显然 $I_V \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。下述定理给出了当 $I_W \in \mathbb{S}(W)$ 时， $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$中单位正则元的刻画。

定理 4.6. 设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群，满足 $I_W \in \mathbb{S}(W)$，并设 $f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。那么 $f \in \mathrm{ureg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$ 当且仅当

(i) $f_{\restriction W} \in \mathrm{ureg}(\mathbb{S}(W))$; (ii) $R(f) \cap W = R(f_{\restriction W})$; (iii) 对某个子空间 T_f（属于 V），$\mathrm{codim}(W + T_f) = \mathrm{codim}(W + R(f))$，且$T_f$和 $W \cap T_f$分别是 $\ker(f)$ 和 $\ker(f_{\restriction W})$ 的横截集。

证明. 假设 $f \in \mathrm{ureg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$。那么存在 $g \in U(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$，使得 $fgf = f$。这直接给出 $g_{\restriction W} \in U(\mathbb{S}(W))$ 和 $f_{\restriction W} g_{\restriction W} f_{\restriction W} = f_{\restriction W}$，因此 $f_{\restriction W} \in \mathrm{ureg}(\mathbb{S}(W))$。故 (i) 成立。

为证明 (ii) 和 (iii)，注意到 $L_{L(W)}(V) = \overline{L}(V, W)$。由于 $f \in \mathrm{ureg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$ 且 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) \subseteq L_{L(W)}(V)$，因此 $f \in \mathrm{ureg}(\overline{L}(V, W))$。于是，(ii) 和 (iii) 由 [12, 定理 5.6] 直接推出。

反过来，假设 f 满足 (i)–(iii)。由 (i)，存在 $g_0 \in U(\mathbb{S}(W))$ 使得 $f_{\restriction W} g_0 f_{\restriction W} = f_{\restriction W}$。现在，设 B_1 是 $R(f) \cap W$ 的一组基。分别将 B_1 扩充为 W 和 $R(f)$ 的基 $B_1 \cup B_2$ 和 $B_1 \cup B_3$，其中 $B_2 \subseteq W \setminus \langle B_1 \rangle$ 和$B_3 \subseteq R(f) \setminus \langle B_1 \rangle$。于是， $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 是 $W + R(f)$ 的一组基。将 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 扩充为 V 的一组基 $B := B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$，其中 $B_4 \subseteq V \setminus (W + R(f))$。

令 $C_1 = B_1 g_0$ 和 $C_2 = B_2 g_0$。由于 $B_1 \cup B_2$ 是 W 的基，且 g_0 是 W 的自同构，因此可知 $C_1 \cup C_2$ 也是 W 的基（参见 [11, 定理 2.4(3)]）。

根据 (iii)，由于 T_f 是 V 的子空间，且是 $\ker(f)$ 的横截集，我们看到，将 $f_{|_{T_f}}$ 余限制到 $R(f)$ 上所得的映射是一个同构。将此余限制映射的逆映射记为 g_1。显然， $g_1 \colon R(f) \to T_f$ 是一个同构。令 $C_1' = B_1 g_1$ 和 $C_3 = B_3 g_1$。由于 $B_1 \cup B_3$ 是 $R(f)$ 的基，且 $g_1 \colon R(f) \to T_f$ 是一个同构，因此可知 $C_1' \cup C_3$ 是 T_f 的基（参见 [11, 定理 2.4(3)]）。

设 $W \cap T_f = T_{(f_{\restriction W})}$。由 (ii) 可知，显然 C_1' 是子空间 $T_{(f_{\restriction W})}$ of W 的基，因此 $C_1' \subseteq \langle C_1 \cup C_2 \rangle$。所以 $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ 是 $W + T_f$ 的基。将 $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ 扩充为基 $C := C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ for V，其中 $C_4 \subseteq V \setminus (W + T_f)$。由于 $\mathrm{codim}(W + R(f)) = \mathrm{codim}(W + T_f)$，我们得到 $|B_4| = |C_4|$。因此存在一个双射 $g_2 \colon B_4 \to C_4$。定义 $g \in L(V)$ 为

$$vg = \begin{cases} vg_0 & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ vg_1 & \text{if } v \in B_3, \\ vg_2 & \text{if } v \in B_4. \end{cases}$$

容易验证 g 是双射， $g \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$，且 $fgf = f$。因此 $f \in \mathrm{ureg}(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$。□

若 $I_W \in \mathbb{S}(W)$，则以下命题给出了使 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 成为单位正则的充分条件。

命题 4.7. 设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群，且 $I_W \in \mathbb{S}(W)$。若 $\mathbb{S}(W)$ 是 $\mathrm{Aut}(W)$ 的子群，且 $\mathrm{codim}(W)$ 有限，则 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是单位正则的。

证明. 设 $f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。则 $f_{\restriction W} \in \mathbb{S}(W)$。由于 $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子群，因此我们有 $f_{\restriction W} \in$Aut(W)。所以定理 4.6 的 (i) 和 (ii) 显然都成立。

现在，根据引理 4.5，取 T_f 为 V 的一个子空间，使得 T_f 和 $T_f \cap W$ 分别是 ker(f) 和 ker($f_{\restriction W}$) 的横截集。注意，$f\colon\ T_f \to R(f)$ 是一个同构，且 $Wf = W$。由引理 5.2],，我们因此有 dim(T_f/W) =dim($R(f)/W$)。由于 $f_{\restriction W} \in$ Aut(W)，我们只需有 $W \subseteq T_f$ 和 $W \subseteq R(f)$。于是 $W + T_f = T_f$，$W + R(f) = R(f)$，并且 T_f/W 和 $R(f)/W$ 都是 V/W 的子空间。因此我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{codim}(W + T_f) &= \operatorname{codim}(T_f) \\
&= \dim(V/T_f) \\
&= \dim((V/W)/(T_f/W)) \\
&= \dim(V/W) - \dim(T_f/W) && (\text{since } \operatorname{codim}(W) < \infty) \\
&= \dim(V/W) - \dim(R(f)/W) \\
&= \dim((V/W)/(R(f)/W)) && (\text{since } \operatorname{codim}(W) < \infty) \\
&= \dim(V/R(f)) \\
&= \operatorname{codim}(R(f)) \\
&= \operatorname{codim}(W + R(f)),
\end{aligned}$$

因此 f 满足定理 4.6(iii)。由定理 4.6，$f \in$ ureg($L_{\mathbb{S}(W)}(V)$)。因此，由于 f 是任意的，半群 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是单位正则的。□

若 $I_W \in \mathbb{S}(W)$，则以下定理刻画了 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 何时为单位正则。

定理 4.8. 设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群，且 $I_W \in \mathbb{S}(W)$。那么，$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是单位正则的，当且仅当以下条件之一成立：

(i) $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子群，且 codim(W) 有限。(ii) $\mathbb{S}$ (W) 是单位正则的，且 $W = V$。

证明。假设 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是单位正则的。由命题 4.7 可知，(i) 可能成立。现在假设 (i) 不成立。

由于 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是单位正则的，由命题 4.1 以及任意单位正则半群的同态像都是单位正则半群这一事实可知，$\mathbb{S}(W)$ 是单位正则的（参见 [3, 命题 2.7]）。

为证明 $W = V$，反设 $W \neq V$。那么我们断言，$\mathbb{S}(W)$ 不是 Aut(W) 的子群。反设 $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子群。那么我们进一步断言，codim(W) 是有限的。反设 codim(W) 是无限的。那么存在一个线性映射 $\psi\colon\ V/W \to V/W$，它是单射但不是满射。取 W 的一组基 B_1。将 B_1 扩充为 V 的一组基 $B_1 \cup B_2$，其中 $B_2 \subseteq V \setminus \langle B_1 \rangle$。定义 $f \in L(V)$ 如下：

$$vf = \begin{cases} v & \text{if } v \in B_1, \\ v' & \text{if } v \in B_2, \text{ where } (v + W)\psi = v' + W. \end{cases}$$

容易看出，f 是单射但不是满射。因此，nullity(f) $\neq$corank(f)，所以根据 [12, 推论 5.7], $f \notin$ ureg($L(V)$)。显然，$f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 和 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) \subseteq L(V)$，由此可得 $f \notin$ ureg($L_{\mathbb{S}(W)}(V)$)，这与

$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的幺正则性。因此 codim(W) 有限，故 (i) 成立。这与 (i) 不成立的假设矛盾。因此， $\mathbb{S}(W)$ 不是 Aut(W) 的子群。于是，由于 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的，根据定理 4.4，我们有 $W = V$。

对于逆命题，首先假设 (i) 成立。根据命题 4.7， $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是单位正则的。接下来，假设 (ii) 成立。如果 $W = V$，那么 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \mathbb{S}(V)$，因此根据假设， $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是单位正则的。□

下面的定理给出了使 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 成为逆半群的充要条件。

定理 4.9。设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群。那么，当且仅当以下条件成立时， $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是逆半群：

(i) $\mathbb{S}(W)$ 是逆半群；(ii)
$W = V$或 dim$(V) = 1$。

证明。假设 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是逆半群。根据命题 4.1 以及任何逆半群的同态像都是逆半群这一事实（参见 [5, 定理 5.1。4]），(i) 成立。

情形 $W = V$ 可能成立，因为如果 $W = V$，则 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \mathbb{S}(W)$。假设 $W \neq V$。令 $\alpha \in E(\mathbb{S}(W))$。设 B_1 和 B_2 分别是 $N(\alpha)$ 和 $R(\alpha)$ 的基。于是 $W = N(\alpha) \oplus R(\alpha)$，因此 $B_1 \cup B_2$ 是 W 的基。将 $B_1 \cup B_2$ 扩充为 V 的一组基 $B := B_1 \cup B_2 \cup B_3$，其中 $B_3 \subseteq V \setminus W$。断言 $|B_3| = 1$。反设存在互不相同的 v_1、$v_2 \in B_3$。定义 f、$g \in L(V)$ 如下：

$$vf = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ v_1 & \text{if } v \in B_3 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad vg = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ v_2 & \text{if } v \in B_3. \end{cases}$$

显然 $f, g \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。由于 α 是幂等元，容易验证 f 和 g 都是幂等元。然而，我们有 $v_1(fg) \neq v_1(gf)$，因此 $fg \neq gf$。这导致矛盾，因为 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是一个逆半群。因此 $|B_3| = 1$，从而 codim$(W) = 1$。记 $B_3 = \{u\}$。

最后，我们证明 $W = \{0\}$。反设 $W \neq \{0\}$。需要考虑两种情况。

情况 1： $\alpha = I_W$。于是 $B_2 \neq \varnothing$。固定 $w \in B_2$，并定义 f、$g \in L(V)$ 如下：

$$vf = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ 0 & \text{if } v \in B_3 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad vg = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ w & \text{if } v \in B_3. \end{cases}$$

显然 f、$g \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。由于 α 是幂等元，容易验证 f 和 g 是幂等元。然而，我们有 $u(fg) \neq u(gf)$，因此 $fg \neq gf$。这导致矛盾，因为 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是逆半群。

情形 2： $\alpha \neq I_W$。于是 $B_1 \neq \varnothing$。固定 $w' \in B_1$，记 $w' + u = u'$。显然 $u' \neq u$ 和 $u' \in V \setminus W$。定义 f、$g \in L(V)$ 如下：

$$vf = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ u & \text{if } v \in B_3 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad vg = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1 \cup B_2, \\ u' & \text{if } v \in B_3. \end{cases}$$

显然， $f, g \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。由于 α是幂等元，容易验证 f和 g是幂等元。然而，我们有 $u(fg) = (uf)g = ug = u'$，且 $u(gf) = (ug)f = u'f = (w' + u)$ $f = w'f + uf = u$，因此 $fg \neq gf$。这导致矛盾，因为 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$是一个逆半群。

因此，两种情况下都会得到矛盾。于是 $W = \{0\}$。因此，由于余维$(W) = 1$，我们得出维数$(V) = 1$。

反之，假设给定条件成立。若 $W = V$，则 $L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \mathbb{S}(W)$，因此根据 (i)，$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是一个逆半群。假设 $W \neq V$。那么 $\dim(V) = 1$，因此得到 $W = \{0\}$。由此可知，$L_{\mathbb{S}(W)}(V) = L(V)$，所以 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是正则的（参见 [5, 第 63 页，习题 19]）。由于 $\dim(V) = 1$，我们还可以看到，$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 只有两个幂等元，即 V 上的单位元变换和零线性变换。由于这些幂等元可交换，我们得出 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是一个逆半群。□

下一个命题是定理 4.9 的推论，该定理确定了何时 $L(V)$ 是一个逆半群。

命题 4.10. $L(V)$ 是逆半群，当且仅当 $\dim(V) \leq 1$。

证明。设 $L(V)$ 是逆半群。若 $V = \{0\}$，结论显然。设 $V \neq \{0\}$。取 $W = \{0\}$。则 $L_{L(W)}(V) = L(V)$，因此由定理 4.9 可得 $\dim(V) = 1$ 。

反之，设 $\dim(V) \leq 1$。若 $\dim(V) = 0$，结论显然。设 $\dim(V) = 1$。取 $W = \{0\}$。则 $L_{L(W)}(V) = L(V)$，且 $L(W)$ 是逆半群。因此，由于 $\dim(V) = 1$，根据定理 4.9 可得 $L(V)$ 是逆半群。

□

下面的定理给出了 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 完全正则的充要条件。

定理 4.11. 设 $\mathbb{S}(W)$ 是 $L(W)$ 的子半群。那么，$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是完全正则半群，当且仅当 $\mathbb{S}(W)$ 是完全正则半群，且下列条件之一成立：

(i) $W = V$。(ii) $\operatorname{codim}(W) = 1$ 且 $\mathbb{S}(W)$ 是 $\operatorname{Aut}(W)$ 的子群。

证明. 假设 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是完全正则的。由命题 4.1 以及完全正则半群的任意同态像仍为完全正则半群这一事实可知，$\mathbb{S}(W)$ 是完全正则的（参见 [10, 引理 II.2.4]）。

情形 $W = V$ 可能成立，因为当 $W = V$ 时，$L_{\mathbb{S}(W)}(V) = \mathbb{S}(W)$。假设 $W \neq V$。首先，我们证明 $\operatorname{codim}(W) = 1$。设 B_1 是 W 的一组基。将 B_1 扩充为 V 的一组基 $B_1 \cup B_2$，其中 $B_2 \subseteq V \setminus W$。断言 $|B_2| = 1$。反设存在互不相同的 v_1、$v_2 \in B_2$。取 $\alpha \in \mathbb{S}(W)$，再固定 $w \in R(\alpha)$。定义 $f \in L(V)$ 如下：

$$vf = \begin{cases} v\alpha & \text{if } v \in B_1, \\ v_1 & \text{if } v = v_2, \\ w\alpha & \text{if } v = B_2 \setminus \{v_2\}. \end{cases}$$

显然 $f \in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。此外，我们有 $v_1, w \in R(f)$，且 $v_1 f = wf$。因此，$R(f)$ 不是 $\ker(f)$ 的横截集，所以 f不属于 $T(V)$ 的任何子群（参见 [2, 定理 2.10]）。于是 f不包含于 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的任何子群中，这与 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的完全正则性矛盾。因此 $|B_2| = 1$，从而 $\operatorname{codim}(W) = 1$。

最后，我们证明 $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子群。若 $W=\{0\}$，则显然成立。假设 $W\neq\{0\}$。令 $\beta\in\mathbb{S}(W)$。断言 β 是单射。反设，对于某些互不相同的 $w_1, w_2\in W$，有 $w_1\beta=w_2\beta$。回忆一下，$\mathbb{S}(W)$ 是完全正则的。因此，β 包含于 $\mathbb{S}(W)$ 的某个子群中，从而β包含于 $T(W)$ 的某个子群中。因此，$R(\beta)$ 是 ker(β) 的横截集（参见 [2, 定理 2.10]）。选取 $w_0\in R(\beta)$，使得 w_0 属于 ker(β)-类，且该类包含 w_1 和 w_2。不妨设 $w_0\neq w_1$。定义 $g\in L(V)$ 如下：

$$vg=\begin{cases}v\beta & \text{if } v\in B_1,\\ w_1 & \text{if } v\in B_2.\end{cases}$$

显然 $g\in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。然而，我们有 $w_0, w_1\in R(g)$ 和 $w_0g=w_1g$。因此，$R(g)$ 不是 ker(g) 的横截集，所以 g 不属于 $T(V)$ 的任何子群（参见 [2, 定理 2.10]）。于是，g 不包含于 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的任何子群中，这与 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的完全正则性相矛盾。因此，β 是单射的。此外，我们看到 β 是满射的，因为 β 是单射的，且 $R(\beta)$ 是 ker(β) 的横截集。因此，$\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子半群。于是，由于 $\mathbb{S}(W)$ 是完全正则的，根据引理 3.2，我们得出 $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子群。

反之，假设给定条件成立。如果 $W=V$，则 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)=\mathbb{S}(W)$，从而 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 是完全正则的。设 $W\neq V$。那么，根据 (ii)，codim(W) $=1$，且 $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的子群。取 W 的一组基 B。则 $B\cup\{x\}$ 是 V 的一组基，其中 $x\in V\setminus W$。对于 $z\in V$ 和 $\lambda\in\mathbb{S}(W)$，令 $\alpha_z^\lambda\in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 使得 $(\alpha_z^\lambda)_{\restriction W}=\lambda$ 且 $x\alpha_z^\lambda=z$。注意到 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)=\{\alpha_z^\lambda\colon\ z\in V \text{ 且 } \lambda\in\mathbb{S}(W)\}$，并且对于所有 $y\in W, z\in V$ 以及 $\lambda,\delta\in\mathbb{S}(W)$，

$$\alpha_x^\lambda\alpha_x^\delta=\alpha_x^{\lambda\delta}\quad\text{and}\quad\alpha_y^\lambda\alpha_z^\delta=\alpha_{y\delta}^{\lambda\delta}.$$

令 $f\in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。那么，对于某个 $y\in V$，有 $f=\alpha_y^\lambda$，且 $\lambda\in\mathbb{S}(W)$。需要考虑两种情形。

情况 1：$y\in W$。回想一下，$\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的一个子群。定义 $\varepsilon=\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}$ 和 $g=\alpha_{y\lambda^{-2}}^{\lambda^{-1}}$，其中 λ^{-1} 表示 λ 在 $\mathbb{S}(W)$ 中的逆元。显然，ε，$g\in L_{\mathbb{S}(W)}(V)$。此外，我们得到

$$\begin{aligned}
\varepsilon\varepsilon&=\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}=\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}=\varepsilon,\\
f\varepsilon&=\alpha_y^\lambda\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}=\alpha_y^\lambda=f,\\
\varepsilon f&=\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}\alpha_y^\lambda=\alpha_y^\lambda=f,\\
g\varepsilon&=\alpha_{y\lambda^{-2}}^{\lambda^{-1}}\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}=\alpha_{y\lambda^{-2}}^{\lambda^{-1}}=g,\\
\varepsilon g&=\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}\alpha_{y\lambda^{-2}}^{\lambda^{-1}}=\alpha_{y\lambda^{-2}}^{\lambda^{-1}}=g,\\
fg&=\alpha_y^\lambda\alpha_{y\lambda^{-2}}^{\lambda^{-1}}=\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}=\varepsilon,\\
gf&=\alpha_{y\lambda^{-2}}^{\lambda^{-1}}\alpha_y^\lambda=\alpha_{y\lambda^{-1}}^{I_W}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，由 $\{f,g\}$ 生成的 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的子半群 $\langle f、\ g\rangle$ 是 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$ 的一个子群。

情形 2：$y\in V\setminus W$。那么，由于 $\mathbb{S}(W)$ 是 Aut(W) 的一个子群，且 $\lambda\in\mathbb{S}(W)$，我们可知 f 是双射。因此 $f\in U(L_{\mathbb{S}(W)}(V))$。

因此，无论哪种情况，我们都可以看出，f 属于 $L_{\mathbb{S}(W)}(V)$的一个子群。因此，由于 f 是任意的，我们得出结论：$L_{\mathbb{S}(W)}(V)$是完全正则的。□

下一个命题是定理 4.11 的推论，该定理确定了$L(V)$何时是一个完全正则半群。

命题 4.12. $L(V)$ 是完全正则半群，当且仅当 $\dim(V) \leq 1$。

证明. 假设 $L(V)$ 是完全正则的。若 $V = \{0\}$，结论显然。设 $V \neq \{0\}$。取 $W = \{0\}$。则 $L_{L(W)}(V) = L(V)$，因此根据定理 4.11，$\operatorname{codim}(W) = 1$。于是 $\dim(V) = 1$。

反过来，假设 $\dim(V) \leq 1$。若 $\dim(V) = 0$，结论显然。设 $\dim(V) = 1$。取 $W = \{0\}$。显然，$L(W)$ 是一个群，$\operatorname{codim}(W) = 1$，且 $L_{L(W)}(V) = L(V)$。因此，根据定理 4.11，$L(V)$ 是完全正则半群。□

References

[1] Y. Chaiya. 具有不变子空间的线性变换半群上的自然偏序与有限性条件。 *Semigroup Forum*, 99: 579–590, 2019.[2] A. H. Clifford 和 G. B. Preston。 *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume I*。美国数学学会，数学调查丛书第 7 号，1961。[3] J. B. Hickey 和 M. V. Lawson。单位正则幺半群。 *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics* 127 1 127 143, 1997 , ( ): – . [4] P. Honyam 和 J. Sanwong。具有不变集的变换半群。 *Journal of the Korean Mathematical Society* 48 2 289 300, 2011 , ( ): – . [5] J. M. Howie。 *Fundamentals of Semigroup Theory Volume 12 of London Mathematical Society Monographs*。. 牛津大学出版社，纽约，。[6] J. Konieczny。限制属于给定半群的变换半群。*Semigroup Forum*, 104(1): 109–124, 2022. [7] K. D. Magill Jr. S(X) 的子半群。 *Mathematica Japonica*, 11: 109–115, 1966. [8] S. Nenthein 和 Y. Kemprasit。关于作为 $\mathcal{BQ}$-半群的变换半群。 *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2006: 1–10, 2006.[9] S. Nenthein、P. Youngkhong 和 Y. Kemprasit。一些变换半群的正则元 *Pure Mathematics and Applications*, 16(3): 307–314, 2005. [10] M. Petrich 和 N. R. Reilly。 *Completely Regular Semigroups*。约翰·威立父子出版公司，纽约，1999。[11] S. Roman。 *Advanced Linear Algebra*。 *volume 135 of Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，第 3 版，2008。[12] M. Sarkar 和 S. N. Singh。各种变换半群中的单位正则元和半平衡元。https://arXiv.org/abs/2106.08063v2。[13] M. Sarkar 和 S. N. Singh。关于《限制属于给定半群的变换半群》的评论。 *Semigroup Forum*, 104(3): 758–759, 2022. [14] M. Sarkar 和 S. N. Singh。具有不变集的某些变换半群。 *Asian-European Journal of Mathematics*, 15(11): 2250198, 2022. [15] L. Sun 和 J. Sun。具有不变集的自然有序变换半群札记。 *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 91(2): 264–267, 2015. [16] L. Sun 和 L. Wang。具有不变集的变换半群中的自然偏序。 *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 87(1): 94–107, 2013.

Department of Mathematics, Central University of South Bihar, Gaya, Bihar, India
Email address: mosarofsarkar@cusb.ac.in

Department of Mathematics, Central University of South Bihar, Gaya, Bihar, India
Email address: shubh@cub.ac.in