arXiv:2303.03863v2 [math.NT] 6 Oct 2024

伴随 Shimura 簇上典范 ℓ-阿代局部系统的相容性

CHRISTIAN KLEVDAL 和 STEFAN PATRIKIS

Abstract. 对于处于超刚性情形且具有整水平子群K_0的 Shimura 簇（G, X），我们证明，与数域点 $y \in \mathrm{Sh}_{K_0}(G,X)(F)$相关联的 ℓ-阿代表示典范族，

$$\left\{\rho_{y,\ell}\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)\right\}_\ell,$$

构成一个 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)$-表示的相容系统：存在整数 $N(y)$，使得对所有 ℓ, $\rho_{y,\ell}$ 在 $N(y)\ell$之外非分歧；并且对所有 $\ell \neq \ell'$ 和 $v \nmid N(y)\ell\ell'$，$\rho_{y,\ell}(\mathrm{Frob}_v)$与$\rho_{y,\ell'}(\mathrm{Frob}_v)$的共轭类的半单部分（在$\mathbb{Q}$上有理且）相等。我们由连通志村簇 $\mathrm{Sh}_{K_0}(G,X)$ 上取值于典范 $G(\mathbb{Q}_\ell)$的局部系统的一个更强相容性结果推出这一结论。我们的定理尤其适用于非阿贝尔型志村簇，并且代表了非阿贝尔型中首批此类与ℓ 无关的结果。

1. Introduction

设 X 为定义在 $\mathbb{C}$上的一个光滑拟射影簇， G为一个连通约化群，并考虑一个表示

$$\rho\colon \Gamma := \pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}), x) \to G(\mathbb{C}).$$

自然会问，在什么条件下 ρ 能够来自定义在 X上的一个簇族的上同调，例如在如下意义下：对于每个表示 $r\colon G \to$ 一般线性群$_n$，都存在一个光滑射影簇族 $f\colon W \to U$，定义在某个（扎里斯基）开子集 $U \subset X$ 上，使得 $r \circ \rho|_{\pi_1(U)}$ 同构于局部系统 $\oplus_s R^s f_* \mathbb{C}$的一个子商。Carlos Simpson 的一个猜想预言了这样一组充分条件，使得此类 ρ能够以这种方式来自上同调。为简单起见，设 $\rho(\Gamma) \cap G^{\mathrm{der}}(\mathbb{C})$ 在 $G^{\mathrm{der}}(\mathbb{C})$ 中扎里斯基稠密。假设 ρ 满足：

- ab(ρ) 的像，其中 ab 是投影 $G \xrightarrow{\mathrm{ab}} G/G_{\mathrm{der}}$，是有限的；
- ρ 沿着严格正规交叉除子紧化 $\overline{X} \supset X$ 的边界分支 D_i 具有拟幺幂局部单值，其中 $\overline{X} \setminus X = \cup_{i=1}^a D_i$；
- 且 ρ 是 G-刚性的，其含义是它定义了表示模空间中的一个孤立点 $\rho'\colon \pi_1(X,x) \to G(\mathbb{C})$，满足 $\det(\rho') = \det(\rho)$；并且，记 γ_i为 $\pi_1(X,x)$ 中沿 D_i的局部单值变换的一个生成元，则 $\rho'(\gamma_i)$ 与 $\rho(\gamma_i)$ 共轭。[1]

我们感谢 Jacob Tsimerman 就其中部分内容展开讨论。我们感谢匿名审稿人提供了非常有帮助的报告。S.P. 获美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2120325 和 DMS-1752313。C.K. 获三星科学技术基金会资助，项目编号为 SSTF-BA2001-02。[1]将这一最后的共轭条件替换为以下要求： $\rho'(\gamma_i)$ 属于包含 $\rho(\gamma_i)$ 的某个固定闭共轭类并，那么这个模空间可以利用几何不变量理论构造；关于更一般的表述，参见 [KP22，§4], 其中几何不变量理论构造见同上引文中的注4.10。

于是辛普森猜想 ρ 来自上同调。相比刚性条件，通常更容易采用上同调刚性这一条件，即

$$\ker(H^1(\pi_1(X,x),\rho(\mathfrak{g}^{\mathrm{der}}))\to\bigoplus_{i=1}^{a}H^1(\langle\gamma_i\rangle,\rho(\mathfrak{g}^{\mathrm{der}}))=0.$$

在此，我们将 $\rho(\mathfrak{g}^{\mathrm{der}})$ 记作 ρ 与李代数 $\mathfrak{g}^{\mathrm{der}}$ 上的伴随作用的复合。这个核是一个切空间，而上同调刚性意味着 ρ 是模空间中的一个光滑孤立点。

上同调刚性条件的一种特别强的形式源自 Margulis 的超刚性定理；在本文中，我们将这些结果应用于非阿贝尔型志村簇的算术，得到一项新的应用。设 (G,X) 是一个志村数据，并为简便起见，假设 G^{ad} 是 $\mathbb{Q}$-单的，且 $Z_G(\mathbb{Q})\subset Z_G(\mathbb{A}_f)$ 是离散的。最后，也是关键的一点，假设 $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}})\geq 2$。设 $\Gamma\subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 是一个算术子群；对我们而言，它将作为连通志村簇 $\Gamma\backslash X^+$ 的基本群出现。于是 Margulis 已证明（[Mar91]），对于任意有理表示 $G\to\mathrm{GL}(V)$，群 $H^1(\Gamma,V)$ 消失；特别取 $V=\rho(\mathfrak{g}^{\mathrm{der}})$，对于 $\rho\colon\ \Gamma\to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 这一包含映射，表示 ρ 是（强） G-上同调刚性的。取 $V=\mathbb{Q}$ 为平凡表示，我们看到 $\mathrm{ab}(\rho)$ 具有有限阶；进一步可以验证（见 [LS13，第 6.1] 节），沿适当的环面紧化的边界分支，ρ 具有拟幺正（甚至幺正）的局部单值。因而，Simpson 的猜想将意味着 ρ 来源于上同调；在这一特殊情形下，该猜想实质上就是 Deligne 关于一般志村簇（带有理权同态）是动机模空间的梦想。

我们不解决这个问题。在缺少动机本身的情况下，我们研究（应当是）它们的 ℓ-进实现，并证明它们构成相容系统的 ℓ-进伽罗瓦表示。为使这一点更精确，我们陈述主要结果的一个弱形式：

定理 1.1（见推论 3.12）。继续沿用上述假设：(G,X) 是一个志村数据，具有 G^{ad} $\mathbb{Q}$-单的、$Z_G(\mathbb{Q})\subset Z_G(\mathbb{A}_f)$ 离散，且 $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}})\geq 2$。设 $K_0\subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个整洁紧开子群，并设 Sh_{K_0} 是志村簇 $\mathrm{Sh}_{K_0}(G,X)(\mathbb{C})=G(\mathbb{Q})\backslash(X\times G(\mathbb{A}_f))/K_0$ 在反身域 $E(G,X)$ 上的典范模型。

设 F 是一个数域，且 $y\in\mathrm{Sh}_{K_0}(F)$ 是一个 F-有理点。对于每个 ℓ，都可与 y 典范地关联一个表示 $\rho_{y,\ell}\colon$ 伽罗瓦群$(\overline{\mathbb{Q}}/F)\to G(\mathbb{Q}_\ell)$，并且投影$\rho^{\mathrm{ad}}_{y,\ell}\colon$ 伽罗瓦群$(\overline{\mathbb{Q}}/F)\to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)$ 按照以下意义构成相容系统：对于每个 y，存在 $N(y)\in\mathbb{Z}$，使得对于所有 ℓ 以及 F 的有限处 $v\nmid N(y)\ell$，

- $\rho_{\mathrm{ad}y,\ell}$ 在 v 处非分歧；
- 而 $\rho_{\mathrm{ad}y,\ell}(\mathrm{Frob}_v)$ 所对应的半单共轭类属于 $[G_{\mathrm{ad}}/\!\!/G_{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q})$，且与 ℓ 无关。

注 1.2. (1) 此处 $[G^{\mathrm{ad}}/\!\!/G^{\mathrm{ad}}]$ 表示 GIT 商，其中 G^{ad} 通过共轭作用于自身；对于代数闭域 k，映射 $G^{\mathrm{ad}}(k)\to[G^{\mathrm{ad}}/\!\!/G^{\mathrm{ad}}](k)$ 在目标与其中的半单共轭类集合之间诱导出一个双射

$G^{\mathrm{ad}}(k)$。注意，定理的结论并未断言 $\rho_{y,\ell}^{\mathrm{ad}}(\mathrm{Frob}_v)$ 共轭于 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 中的某个元素。

(2) 必须投影到 G^{ad} 才能确立 ℓ 之间的独立性，这是我们论证的局限；在陈述定理1.3后，我们会在概述证明时进一步讨论这一点。

所有非阿贝尔型志村簇都满足定理中的伴随实秩条件。它们分为四类： E_6 型； E_7 型；“混合”型 D_n （为简便起见，G^{ad} 是一个 $\mathbb{Q}$-单群，其李代数 $G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ 同时含有 $\mathfrak{so}(2, 2n-2)$ 两种类型的单因子；文献中称为 $D_n^{\mathbb{R}}$ 型）；以及 $\mathfrak{so}^*$ 型（$2n$），称为 $D_n^{\mathbb{H}}$ 型；还有一种情形，即 $G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ 纯属 $D_n^{\mathbb{H}}$ 型，但 G^{der} 是单连通的。定理 1.1 针对前三种情形中任意选取的 G ，给出了首批此类 ℓ-进相容性结果；在第四种情形下，当 G^{der} 是单连通的，或（在 D_{2n} 型中）是 G^{ad} 的一个双覆盖且并非 SO_{4n} 的形式时，我们的定理给出了新的结果（关键在于，尽管我们只证明了 G^{ad} 中的相容性，层结构 K_0 仍可诱导出 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 的一个算术但非同余子群。按照 [Del79，定义 2.1.6] 的记号，对于任何与 G^{ad} 同源、且能给出阿贝尔型连通志村簇的 G_1 ，该子群都不是拓扑 $\tau(G_1)$ 下的开子群：参见 [Del79，定理 2.7.20]）。

(4) 当 $(G, X) = (\mathrm{GSp}_{2n}, \mathcal{H}_n^{\pm})$ 是西格尔志村数据时（对于 $n > 1$，它满足定理的假设），表示 $\rho_{y,\ell}$ 在模空间解释下恰好是点 y 所对应阿贝尔簇的 ℓ-进塔特模。更一般地，对于霍奇型志村簇，已有比定理 1.1 更强的结果。我们特别引用 Kisin-Zhou 近期的工作（[KZ21]；另见 [Com19], [Kis17]），他们证明，对于定义在 F 上、在有理素数 v 处具有良约化的任意阿贝尔簇 A （且 $v \nmid 2$）以及 A，半单共轭类 $\rho_{A,\ell}(\mathrm{Frob}_v)$ 在芒福德-泰特群中不依赖于 ℓ （可能需要将 F 替换为有限扩张）。他们通过构造某些霍奇型志村簇的典范整模型来证明这一点，这些模型在特殊纤维上配备了 Kottwitz-Rapoport 分层；值得注意的是，这允许群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ （其中 p 是定理 1.1 中某个 v 下方的有理素数）在 p 处仅为准分裂，且级别为非常特殊抛物子群。后一条件意味着普通轨稠密；Kisin-Zhou 还证明了一个 Serre-Tate 型提升结果，即特殊纤维普通轨上的点可提升为特殊（CM）点。这便在稠密开普通轨上得到了相容性；再通过精心选取同时经过普通轨和 Kottwitz-Rapoport 分层中连续分层上的点的曲线（利用贝尔蒂尼定理），函数域朗兰兹对应便可推出整个特殊纤维上的独立于 ℓ 性质。当然，这类方法高度依赖数十年来发展起来的阿贝尔型志村簇典范整模型的深厚理论；对于我们的主要定理所涉及的一般情形，我们无法运用此类整模型技术。

(5) 定理$\rho_{y,\ell}$ 中的表示1.1 由 Liu-Zhu 的德拉姆刚性定理（[LZ17]）已知是 de Rham 的；该定理将志村簇上任一点的 de Rham 性质归约为单个点（每个几何连通分支各取一个点）所对应的性质。对于特殊点，这一点很容易。建立

在 $v|\ell$ 处的相容性（对于 v，当它们是适当的良约化素数时）也是与俄亥俄州立大学博士生 Jake Huryn 和 Kiran Kedlaya 正在进行的工作。关于这些伽罗瓦表示已知的晶体性质，另见注 1.4 。

(6) 特别地，我们获得了丰富的来源，可构造定义在数域上的 E_6 和 E_7 伽罗瓦表示相容系统；应用希尔伯特不可约性定理（针对定理 1.3），我们可以确保其中许多系统具有扎里斯基稠密像，至少对某些 ℓ 如此。每种情形下，此前都曾构造过一类 E_6（$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$）或 E_7（$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$）值伽罗瓦表示的相容系统，具体而言，[BCE+18]（针对 E_6，运用伽罗瓦变形理论和潜在自守性定理）以及 [Yun14]（针对E_7，运用在 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上构造刚性海克特征层的方法）。我们的表示因霍奇理论原因而不同于 [BCE+18] 和 [Yun14] 所构造的表示，且属于更高维的族；但在我们的情形下，我们无法控制可能出现的数域 F。

定理 1.1 可由特化我们的主定理得到；该主定理确立了（连通）志村簇上典范 ℓ-进局部系统的相容性性质。考虑定理 1.1 中的志村数据 (G,X) 和整洁层结构 K_0 。对于每个紧开子群 $K \subset K_0$，我们有典范模型的态射 $\mathrm{Sh}_K \to \mathrm{Sh}_{K_0}$，其定义在 $E(G,X)$ 上，并令 $\mathrm{Sh}_K = G(\mathbb{Q}_+)\backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f)$ 。$\mathrm{Sh}_{K_0} = \varprojlim_K \mathrm{Sh}_K$ 为其极限；于是，对于 X^+ 的一个连通分支的选取，有 $\mathrm{Sh}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f))$ ( ) (( ))。固定一个基点$s \in \mathrm{Sh}(\mathbb{C})$，它在所有有限层级上诱导基点 sK；令 $S_{K_0,s}$ 为 Sh_{K_0} 中包含 sK_0 的连通分支，它在某个有限扩张 $E_{K_0,s}$ 上几何连通，该有限扩张是 $E(G,X)$ 的有限扩张。由基点的选取可典范地得到一个同态 $\pi_1(S_{K_0,s},s) \to K_0$，并通过投影，对每个 ℓ 诱导表示

$$\rho_{K_0,s,\ell}\colon \pi_1(S_{K_0,s},s) \to G(\mathbb{Q}_\ell).$$

(参见§3.1 了解该构造的详细信息。）这些是我们研究其相容性的典范 ℓ-进局部系统。我们的主要定理可直接推出定理1.1，其内容如下：

定理 1.3（参见定理 3.10）。继续假设定理*1.1*中关于(G,X)和 K_0 的条件。固定一个基点 $s \in \mathrm{Sh}(\mathbb{C})$，并令 ρ_ℓ: $\pi_1(S_{K_0,s},s) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)$表示同态$\rho_{K_0,s,\ell}$的伴随投影。

于是存在一个整数 N和一个整模型$\mathcal{S}_{K_0,s} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E_{K_0,s}}[1/N])$，使得：

(1) 对所有 ℓ，ρ_ℓ 均可延拓为（即经由其因子化为）一个同态

$$\pi_1(\mathcal{S}_{K_0,s}[1/\ell],s) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell).$$

(2) 对所有 ℓ 和 ℓ'，以及所有闭点$x \in \mathcal{S}_{K_0,s}[1/(\ell\ell')]$，，$\rho_\ell(\mathrm{Frob}_x)$和 $\rho_{\ell'}(\mathrm{Frob}_x)$的相关半单共轭类（它们分别是 $[G^{\mathrm{ad}}/\!\!/G^{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q}_\ell)$和 $[G^{\mathrm{ad}}/\!\!/G^{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q}_{\ell'})$的元素）均为 $\mathbb{Q}$-有理的，且等于$[G^{\mathrm{ad}}/\!\!/G^{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q})$中的同一个元素。

注记 1.4。(1) 对于一个数域 F，元素 $y \in \mathrm{Sh}_{K_0}(F)$ 由某个元素$y \in \mathcal{S}_{K_0,s}(\mathcal{O}_F[1/N(y)])$ 诱导，其中某个整数 $N(y)$（可被 N整除）。将定理 1.3 拉回到 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F[1/N(y)]$，我们得到定理 1.1。

(2) 整模型的构造是“柔性的”，即通过将 $S_{K_0,s}$ 的光滑紧化展开得到，其边界是严格正规交叉除子。这对于使用温和特化映射的论证（如 §2）以及涉及特殊点的论证已经足够，因为在 [PST+21，定理 4.1] 中证明了，对于这样的模型，所有特殊点都是$\overline{\mathbb{Z}}[1/N]$-整的（对于某个 N，且该 与特殊点无关）。

(3) 根据 [PST+21，定理 5.1] (实质上依赖于 Esnault 和 Groechenig 在同上引文中的附录)，存在一个数域 E' 使得对几乎所有 ℓ 这些局部系统限制到 E'_v 时，对于 $v|\ell$都是晶体的。

备注 1.5。本文于 2023 年 3 月首次投稿后不久，Bakker、Shankar 和 Tsimerman 发布了一篇出色的论文（[BST24]），证明了非阿贝尔型志村簇在除有限多个素数外存在典范整模型，并给出了若干应用。他们的模型是“软”整模型，这也是我们仿照 [PST+21] 所采用的模型；与我们的定理 1.3 一样，其坏素数集并未明确给出。他们的一些结果依赖于本文的结果。随着整模型的延拓性质得到确立，我们自然会思考：对于描述模 p 点的 Langlands-Rapoport 猜想，哪些群论近似有望实现（背景见 [Kis17, §3]；同上引文的主定理证明了阿贝尔型情形）？粗略地说，该猜想将模 p 点（在远离 p 处取无限层级、在 p 处取超特殊层级）分解为若干集合 $\mathrm{Sh}^{K_p}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \bigsqcup_{[\phi]} S(\phi)$，这些集合 $S(\phi)$ 具有群论性质，并与定义在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的“假” G-动机相关联；严格而言，这种对象被描述为拟动机伽罗瓦 gerbe 的一种适当表示（见 [Kis17, §3.1]）。研究该猜想的一项中间步骤是分析 Kottwitz 三元组（见 [Kis17, §4.3]），它们可以与参数 ϕ 相关联；或者，如 Kottwitz 的工作（[Kot92a], [Kot90], [Kot92b]）所示，也可直接用于处理构造自守伽罗瓦表示的应用。定理 1.3 是将 Kottwitz 三元组与 $\mathrm{Sh}^{K_p}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 中元素相关联的第一步：至少在 $G = G^{\mathrm{ad}}$ 的情况下，它给出所需的 $(\gamma_\ell)_{\ell\neq p} \in G(\mathbb{A}_f^p)$，并给出 $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ 的一个弱版本，而它必须与每个 γ_ℓ 具有相同的 $G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$-共轭类（我们只能得到一个 $\mathbb{Q}$-有理共轭类，因此仍面临稳定共轭障碍）。我们预计，备注 1.2 第 (5) 部分提及的后续工作将得到 Kottwitz 的 γ_p；未来我们计划继续分析这一问题。一个密切相关的问题（从 [Kis17] 的论证中可见）是将模 p 点提升为特征零下的特殊点：对于 μ-普通轨，[BST24，定理 9.7] 利用定理 1.3 证明了这种提升是可能的。

我们现在概述通往定理 1.3 的思路。在定理的第一部分中，基于一般的分歧论证（利用这些表示是几何不可约的），每个 ρ_ℓ 除了有限多个坏纤维之外都有良约化。为了证明坏纤维可以取为与 ℓ 无关，我们对有限域上的光滑簇使用伴随对应（德利涅猜想和德林费尔德定理）：简言之，若 ρ_ℓ 在 v-纤维 $\mathcal{S}_v$ 上具有良约化，而 $\mathcal{S}_{K_0,s}$ 的某个 $\rho_{\ell'}$ 没有（对于 $v \nmid N\ell\ell'$），那么我们考虑 $\rho_\ell|_{\mathcal{S}_v}$ 的 ℓ'-进伴随表示 $\rho_{v,\ell\rightsquigarrow\ell'}$。它沿边界除子温和分歧，并可沿温和特化映射拉回，得到 $\pi_1(S_{K_0,s}\otimes\mathbb{C}, s)$ 的一个表示，因而也得到拓扑基本群 $\Gamma = \pi_1^{\mathrm{top}}(S_{K_0,s}(\mathbb{C}), s)$ 的一个表示。后一个群是高秩李群中的算术群，因此马古利斯超刚性定理适用。我们所用的精确形式依赖于目标 G^{ad} 是一个伴随群，但它保证了强

结论：任意两个同态 $\rho_1, \rho_2\colon \Gamma \to G^{\mathrm{ad}}(\Omega)$，只要其扎里斯基稠密像的目标是任意一个特征零代数闭域 Ω，就满足 $\rho_1 = \tau(\rho_2)$，其中 τ 是 G^{ad}_{Ω} 的一个自同构。（见定义 2.2，我们在其中抽象出这一概念；另见命题3.3，我们在其中验证马古利斯的结果蕴含该性质在我们的情形下成立。）此时我们可以推出（见命题 2.3），坏纤维集合与 ℓ 无关，并且对于所有好纤维 v，$\rho_{\ell'}|_{\mathcal{S}_v} = \tau(\rho_{v,\ell\rightsquigarrow\ell'})$，也就是说，沿着 $\mathcal{S}_v$ ρ_ℓ 和 $\rho_{\ell'}$ 的表示至少是伴随表示，相差一个自同构 τ；该自同构可能取决于 v、ℓ 和 ℓ'，其属于 G^{ad}

$\mathbb{Q}_\ell$ 。这

论证的一部分在§2中以抽象形式呈现。[2] 我们注意到，这些论证受到 Esnault-Groechenig 关于（上同调）刚性表示的 Simpson整性猜想的先前工作启发（[EG18]），该工作针对 $G = \mathrm{GL}_n$ 情形；随后我们在（[KP22]）中将其推广到一般的 G。

我们在§3开头将§2的结果专门应用于刚性Shimura簇的情形，随后面临证明这些自同构 τ 是内自同构的问题。注意，群G^{ad} 将是某个标量限制 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G^s)$，其中 G^s/F 是一个绝对单群（并且在志村簇的情形中，F 是全实的）。因此，在代数闭域 Ω 上，$G^{\mathrm{ad}}_{\Omega} \cong \prod_{\sigma\colon F\to\Omega} G^s_\sigma$除单因子的任何 Dynkin图自同构外，还将有许多由置换产生的外自同构。若我们预先知道定理 1.1——局部系统在特化到“水平”截面后相容（与垂直纤维 $\mathcal{S}_v$ 相对）——那么便可推出定理 1.3；事实上，[Dri12]已在极大一般性下证明了这一点。我们预先仅了解来自 Sh_{K_0}的特殊点的水平截面，并通过审慎选择特殊点来证明所有这样的 τ 都是内自同构。粗略地说，在固定某个有理素数 p 之上的 v 后，选择一个特殊点 $y\colon \mathcal{O}_C[1/N(y)] \to \mathcal{S}_{K_0,s}$，其中 $C \subset \mathbb{C}$为某个数域，$N(y)$为整数，使得 v 上的某个 Frobenius 元处于非常一般的位置。更准确地说，我们安排使得：

- C 在 p 上非分歧，且 $p \nmid N(y)$；
- y 的芒福德-泰特群 $T_y \subset G$ 是一个环面，其像 $T_{\mathrm{ad}y}$ 在 G_{ad} 中不可约（不包含真 $\mathbb{Q}$-子环面）；
- 对于 C 上方的一个赋值 w，特化 $\rho_{\ell,y}(\mathrm{Frob}_w)$ 具有无限阶。

如定理 3.10 的证明中所解释的，这些性质连同已知的 $\rho_{\ell,y}$ 与 $\rho_{\ell',y}$ 的相容性，足以迫使 τ 为内的。构造这样的特殊点依赖于四个要素：

- 关于特殊点上伽罗瓦作用的初等计算（它刻画了典范模型）；
- 我们所使用的模型对所有特殊点都具有一致可整性这一事实，已由[PST+21，定理 41]；

[2]尽管可以证明更一般的结论（参见注 3.14），但应审稿人在此抽象讨论中的建议，对于本节的一些结果，我们将范围限制在取值于伴随群的局部系统：归根结底，我们无法对非伴随的伽罗瓦表示证明主定理，而 §2 中的论证也因此避免了无助益的复杂性。

- 将 Prasad 和 Rapinchuk 的一项结果（[PR01，定理 1]）推广（该结果依赖于的弱逼近以及极大环面的簇的有理性），从而构造出许多 T_y 具有所需局部性质的不可约环面；

- Kisin-Madapusi Pera-Shin（[KPS15]）的工作的一项应用，用于安排一种正性，从而确保 $\rho_{\ell,\ y}(\mathrm{Frob}_w)$ 具有无限阶。

这些论证的细节见 §3。

1.1. 记号。对于概形 X 的一点 x，我们将 $\kappa(x)$ 写作 x 处的剩余域。对于概形 x 以及两个 S-概形 $X \to S$ 和 $T \to S$，我们将 X_T 写作 $X \times_S T$ 的基变换。当 $T = \mathrm{Spec}(R)$ 为仿射概形时，我们简单地将 X_R 写作 X_T。当 $S = \mathrm{Spec}(A)$ 也为仿射概形时，我们有时将该基变换写作 $X \otimes_A R$。

对于概形 X 及其上的一个几何点 $\bar{s}$，我们将 $\pi_1(X, \bar{s})$ 写作 étale 基本群。当 X 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型概形、$x \in X$ 是一个闭点时，我们将 Frob_x 写作 $\pi_1(X, \bar{s})$ 中几何 Frobenius 元在 x 处所对应的共轭类的任一代表。当 X 进一步为正则概形，并且存在一个正则紧化，其边界为正规交叉除子 D 时，我们将 $\pi_1^t(X, \bar{s})$ 写作 X ([GM06]) 的温和基本群（沿 D）。关于紧化选择的独立性以及温和性的若干等价概念，参见 [KS10，定理 4.4]。

我们用 $\mathbb{A}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 的阿代尔环，用 $\mathbb{A}_f$ 表示有限阿代尔。对于域 F 及其可分代数闭包 F^{sep}，我们用 Γ_F表示 $\mathrm{Gal}(F^{\text{分离}}/F)$。当 F已作为子域给定于 $\mathbb{C}$中时，我们总是取 $F^{\mathrm{sep}} = \overline{F}$ 为 F 在 $\mathbb{C}$中的代数闭包。对于数域 F，我们用 $\mathrm{rec}_F\colon \mathbb{A}_F^\times \to \Gamma_F^{\mathrm{ab}}$表示整体类域论中的互反同态，并将其规范化为把一致化子映到几何 Frobenius。

全文中，G 均表示定义在 $\mathbb{Q}$上的连通约化群。我们用 G^{ad} 表示伴随群，用 G^{der} 表示导出群；对于 G 中的极大环面 T，我们也会不严格地用 T^{ad}和 T^{der} 分别表示 T在 G^{ad} 和 $T \cap G^{\mathrm{der}}$中的像。我们用 $G(\mathbb{R})^+$表示单位元的连通分支，用 $G(\mathbb{Q})_+$ 表示 $G(\mathbb{Q})$中投影到 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$的子群。对于域的有限可分扩张 L/K 以及定义在 L上的仿射代数群 H，我们用 $\mathrm{Res}_{L/K}(H)$表示 H到 K 的韦伊限制。对于定义在 K 上的代数群 H 和 $h \in H(K)$，我们用 $\mathrm{inn}(h)$表示由 h 对 H所作的自同构，即 $\mathrm{inn}(h)(x) = hxh^{-1}$。我们用 $X_\bullet(H)$ $X^\bullet(H)$表示（相对于所选的 K代数闭包的）余特征群和特征群。

2. Abstract arguments: toward compatible systems associated to superrigid representations

引理 2.1. 设 Π 为一个仿射群，Π' 为一个闭正规子群，H 为定义在 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的伴随代数群。假设 $\rho\colon \Pi' \to H(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是一个连续同态，其像在 H 中扎里斯基稠密，并且对所有 $x \in \Pi$，由 $\rho^x(h) = \rho(xhx^{-1})$ 给出的同态 $\rho^x\colon \Pi' \to H(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 与 ρ 共轭于 $H(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，也就是说，存在 $h_x \in H(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 使得 $\rho^x = h_x \rho h_x^{-1}$。那么 h_x 唯一，且 ρ 有唯一的同态扩张 $\rho\colon \Pi \to H(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$；此扩张对所有 $x \in \Pi$ 满足 $\rho(x) = h_x$。

证明. H 中 ρ 的中心化子是平凡的，因此对每个 $x \in \Pi$， h_x 都由此唯一确定。对于 $x \in \Pi'$， $h_x = \rho(x)$，所以赋值 $x \mapsto h_x$ 可扩张为 ρ。它在 Π 上定义了一个同态，因为 h_x 唯一且 $\rho^{xy} = (\rho^x)^y$。□

设 $F \subset \mathbb{C}$ 为一个数域，设 X_F 为 F上的有限型光滑几何连通概形，并设 $\bar{x} \in X_F(\overline{\mathbb{Q}})$ 为一个几何点。存在一个开（稠密）浸入 $_X_F \subset X_F$到 F 上的光滑射影簇 X_F 中，且 $D_F = X_F \setminus X_F$还是一个严格正交叉除子。对某个 $N \in \mathbb{Z}$，四元组（X_F、X_F、D_F、$\bar{x}$）延拓为 $\mathcal{O}_F[1/N]$上的数据（X、X、D、$\bar{x}$），其中 $X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F[1/N])$ 是具有几何连通纤维的光滑射影概形， $D = X \setminus X$ 是一个相对严格正交叉除子，并且$\bar{x} \in X$（$\overline{\mathbb{Z}}[1/N]$）。我们还可以将 $\bar{x}$ 视为流形 X^{an} 上的一点 $x := X(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$。

定义2.2。设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的一个伴随约化群，且 Γ 是一个离散群。若对于任意特征零代数闭域 Ω 以及任意两个具有扎里斯基稠密像的同态 $\rho_1, \rho_2 \colon \Gamma \to G(\Omega)$，都存在一个自同构 $\tau \in \mathrm{Aut}(G_\Omega)$ 使得 $\rho_1 = \tau(\rho_2)$，则称 Γ 是 G-超刚性的。

在本节余下部分中，我们假设 **2** G 是定义在 $\mathbb{Q}$上的一个伴随群，并且 $\Gamma := \pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}, x)$ 的基本群 X^{an} 是 G-超刚性的。

设 $\rho \colon \Gamma \to G(\mathbb{C})$ 是一个具有扎里斯基稠密像的同态。则[EG18], [KP22] 的论证（我们在命题 2.3 中使用其一个变体）表明， ρ 是整的，即对于某个数域 $L \subset \overline{\mathbb{Q}}$，它共轭于一个取值于 $G(\mathcal{O}_L)$ 的表示。对于 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的每个赋值 λ，我们得到 ρ 的唯一连续延拓 $\Gamma \to \pi_1(X_{\mathbb{C}}, \bar{x}) \to G(\overline{\mathbb{Z}}_\lambda)$，或者等价地，得到$\rho_{\lambda,\overline{\mathbb{Q}}} \colon \pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{x}) \to G(\overline{\mathbb{Z}}_\lambda)$。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ 在 $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{x})$ 上的外作用诱导了对连续、扎里斯基稠密同态 $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{x}) \to G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$ 的共轭类集合的一个作用；由 G-超刚性，该集合是有限群 $\mathrm{Out}(G_{\overline{\mathbb{Q}}_\lambda})$ 下的一个托orsor。因此，存在一个（由引理 2.1 必然唯一的）$\rho_{\lambda,\overline{\mathbb{Q}}}$ 到 $\pi_1(X_{F(\lambda)}, \bar{x})$ 的连续延拓 $\rho_{\lambda,F(\lambda)}$，其中$F(\lambda)$ 是 $\rho_{\lambda,\overline{\mathbb{Q}}}$ 的共轭类的稳定子的不变域。

命题 2.3。假设对 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的所有有限处 λ， $F(\lambda) = F$，并记 $\rho_\lambda = \rho_{\lambda,F} \colon \pi_1(X_F, \bar{x}) \to G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$。那么存在一个整数 N'，使得

(1) 对于 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的每个有限处 λ，表示 ρ_λ 唯一延拓为（即通过其因子分解为）一个同态

$$\pi_1(X_{\mathcal{O}_F[1/N'\ell]}, \bar{x}) \to G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$$

其中 ℓ 是位于 λ 之下的有理素数。

(2) 对于 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的任意两个有限处 λ、λ'，它们分别位于有理素数 ℓ、ℓ' 之上，并且对于 $\mathcal{O}_F[1/(N'\ell\ell')$ 的所有素数 $v]$,，存在一个 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_{\lambda'}}$ 的自同构 $\tau = \tau(\lambda, \lambda', v)$，使得 $\rho_{\lambda,v}$ 和 $\tau(\rho_{\lambda',v})$ 是伴随表示，其中 $\rho_{\lambda,v}$、$\rho_{\lambda',v}$ 是 ρ_λ、$\rho_{\lambda'}$ 到 $\pi_1(X_{\kappa(v)}, \bar{x}_v)$ 的限制表示。

证明。设 $R \colon G_{\overline{\mathbb{Q}}} \to$ 一般线性群$_{n,\overline{\mathbb{Q}}}$ 是一个忠实不可约表示。对每个λ 处于$\overline{\mathbb{Q}}$的有限处，复合映射 $R \circ \rho_\lambda$ 是一个秩为 n 的局部系统，定义在 X_F上，因此根据 [Pet20，命题 6。1] 它（从而 ρ_λ）唯一地经由以下映射分解

$\pi_1(X_{\mathcal{O}_F[1/N_\lambda]}, \bar{x})$，其中某个整数 N_λ 取决于 λ；我们可以假设 λ 下方的有理素数整除每个 N_λ。
(1) 的内容是 N_λ 可以独立于 λ选取；我们将证明 $N' = \gcd_\lambda(N_\lambda)$ 可行（对 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的所有有限处编索引）。

固定 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上方一个位于有理素数 ℓ 之上的有限处 λ。我们假设 p 是一个不整除 $N'\ell$ 但整除 N_λ 的素数。
设 F 上方一个位于 p 之上的赋值为 v。由于 $p \nmid N'$，存在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的一个赋值 λ'，使得 $p \nmid N_{\lambda'}$（因此 $\lambda' \nmid p$）。于是我们可以将 $\rho_{\lambda',\, v}$ 定义为 $\rho_{\lambda'}|_{\pi_1(X_{\kappa(v)},\, \bar{x}_v)}$ 的限制，并将 $\rho_{\lambda',\, \bar{v}}$ 定义为其进一步限制到 $\pi_1(X_{\overline{\kappa(v)}}, \bar{x}_v)$。
温和特化映射 sp 由有限 étale（温和）覆盖上的拉回诱导

$$\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{x}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_{\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{(v)}}, \bar{x}) \xleftarrow{\sim} \pi_1^t(X_{\overline{\kappa(v)}}, \bar{x}_v), \tag{1}$$

其中 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{(v)}$ 是局部环 $\mathcal{O}_{(v)}$ 的严格亨泽尔化：$= \mathcal{O}_{F,\, v}$（局部化，而非完备化）。[3] 由于 $\rho_{\lambda'}$ 经由 $\pi_1(X_{\mathcal{O}_{(v)}}, \bar{x})$ 因子化，我们由 $\rho_{\lambda',\, \overline{\mathbb{Q}}}$的相应性质可推得，$\rho_{\lambda',\, \bar{v}}$（以及因此 $\rho_{\lambda',\, v}$）的像在 G 中扎里斯基稠密。
根据 [Dri18], $\rho_{\lambda',v}$ 有一个 λ-伴随（事实上，结合 [Dri12] 和 [Chi04] 即可，无需 [Dri18] 为处理非连通单值群所用的精细论证），我们将其记为 $\rho_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,v}$。由于 $\rho_{\lambda',v}$ 是温和的，结合 [KS10, 命题 4.2] 与（[Del73, 定理 9.8]），如 [EG18, 定理 1.1] 所述，伴随 $\rho_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,v}$ 也温和。

限制 $\rho_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,\bar{v}}$：$\pi_1^t(X_{\overline{\kappa(v)}}, \bar{x}_v) \to G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$ 随后可沿温和特化映射拉回，得到一个同态

$$\rho^{\mathrm{top}}_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,\bar{v}} \colon \Gamma \to \pi_1(X_{\mathbb{C}}, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{x}) \xrightarrow{\mathrm{sp}} \pi_1^t(X_{\overline{\kappa(v)}}, \bar{x}_v) \xrightarrow{\rho_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,\bar{v}}} G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda),$$

它也具有扎里斯基稠密像（这归结为 $\rho_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,\bar{v}}$ 具有扎里斯基稠密像；对于 $\rho_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,v}$，这是由 [Dri18] 得出的；对于 $\rho_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,\bar{v}}$，则因为其像的扎里斯基闭包是正规子群 $H \subset G$，因此是 G 的单因子之积（因为 G 是伴随群），而由单个 Frobenius 元生成的子群在 G/H 中稠密；这就迫使 $H = G$ 成立）。由于 Γ 是 G-超刚性的，对某个 $\tau \in \mathrm{Aut}(G_{\overline{\mathbb{Q}}_\lambda})$，有 $\rho^{\mathrm{top}}_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,\bar{v}} = \tau(\rho)$（此处我们也不严谨地用 ρ 表示复合映射 $\Gamma \xrightarrow{\rho} G(\mathcal{O}_L) \subset G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$）。我们推得（对任意 $v|p$），$\rho_{\lambda,\overline{\mathbb{Q}}}$ 也经过 $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{x}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X_{\overline{\kappa(v)}}, \bar{x}_v)$ 分解，因为 $\rho = \tau^{-1}(\rho^{\mathrm{top}}_{\lambda'\rightsquigarrow\lambda,\bar{v}})$ 确实如此。

设 $X' = X_{\mathcal{O}_F[1/N_\lambda^{(p)}]}$，其中 $N_\lambda^{(p)}$ 表示 N_λ 中与 p 互素部分。现在我们证明 ρ_λ 可扩张到 X'（我们采用一种变体，借鉴了 [Pet20 命题 6.1] 利用几何可约性的做法）。考虑任意态射 φ: $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L[1/S_\varphi]) \to X'$，其中 L 是一个数域，S_φ 是 L 中与 p 上方的赋值点不相交的有限个赋值点，并且满足 $\varphi^{-1}(X_{\mathcal{O}_F[1/N_\lambda]}) \neq \emptyset$。对于 $w|p$ 的一个赋值点以及 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的一个赋值点 $\overline{w}|w$ 的选取（从而也确定 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{L,\, (w)} \subset \overline{\mathbb{Q}}$），$\varphi$ 诱导出一般纤维和特殊纤维

[3] 注意，由于 $\mathcal{O}_{(v)}$ 具有（一般）特征零，且 D 的连通分支是平坦的，故 $\mathrm{F\acute{E}t}^t(X_{\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{(v)}}) = \mathrm{F\acute{E}t}(X_{\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{(v)}})$。特化映射见 [sga71，第 X], 节；对于在具有可分闭剩余域的完备离散赋值环上光滑的概形，满射驯分特化见 [LO10，推论 A.12] 在我们所使用的情形中，（满射）温和特化映射的存在性对专家而言是众所周知的；关于这一设定的论述可见于本文最初的 arXiv 版本 [KP23，第 §2] 节。

基点以及一个特化同态 sp_φ: $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{\varphi}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X_{\overline{\kappa(w)}}, \bar{\varphi}_w)$。我们用 $\rho_{\lambda,\varphi}$ 表示由 ρ_λ 和 φ 诱导的 $\pi_1(X_{\mathcal{O}_F[1/N_\lambda]}, \bar{\varphi})$ 的表示（在内自同构意义下唯一）。接着我们断言 $\rho_{\lambda,\varphi}(I_{\bar{w}}) = 1$，其中 $I_{\bar{w}}$ 是通过截面 φ 得到的像。关键在于 sp_φ 是 $I_{\bar{w}}$-等变的（正如 Litt 的证明 [定理 1.1.3] 中所指出的，该处讨论的是素数到 p 的特化这一类似情形）。目标上的作用是平凡的，并且由于 $\rho_{\lambda,\varphi}|_{X_{\overline{\mathbb{Q}}}}$ 经由 sp_φ 分解（与此前对 $\bar{x}$ 的处理相同），我们得出 $\rho_{\lambda,\varphi}(I_{\bar{w}})$ 与 $\rho_{\lambda,\varphi}(\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{\varphi}))$ 可交换。后者在 G 中扎里斯基稠密，因此 $\rho_{\lambda,\varphi}(I_{\bar{w}}) = 1$。更本质地说，这表明与 $\rho_{\lambda,\varphi}$ 相关联的光滑层 $\mathcal{F}$（在 G 的一个固定忠实表示中），从而也与 ρ_λ 相关联，其拉回 $\varphi^*(\mathcal{F})$ 在 $w \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L[1/S_\varphi])$ 处非分歧（这一结论与基点的变化无关）。

为完成证明，我们使用 [Dri12，推论 5。2]。假设 ρ_λ 不能延拓到 X'。由同上引文，存在一个闭点 $z \in X' \setminus X = \sqcup_{v|p} X_{\kappa(v)}$ 和一个秩 1 子空间 $V \subset T_z(X')$，满足：

(⋆) 对于上述任意 φ，若 $\varphi(w) = z$ 且切映射的像

$$T_w(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L[1/S_\varphi]) \to T_z(X')$$

为 $V \otimes_{\kappa(z)} \kappa(w)$，则 $\varphi^*(\mathcal{F})$（$\varphi^{-1}(X_{\mathcal{O}_F[1/N_\lambda]})$ 上的一个光滑层）在 w 处分歧 .

与 [Dri12 的引理 5 证明中一样，3], 适当形式的希尔伯特不可约性（同上引文的定理 2.15 给出了更强的结果）表明，存在一个 φ 满足（⋆）中的假设。不过，我们已经证明，在我们的情形下，任何这样的 φ 在 w 处均非分歧，矛盾。因此我们得出 ρ_λ 延拓到 X'。

（2）刚才给出的论证告诉我们更多：$\tau(\rho^{\mathrm{top}}_{\lambda\ \bar{v},\ }) = \rho^{\mathrm{top}}_{\lambda' \rightsquigarrow \lambda,\ \bar{v}}$，因而 $\tau(\rho_{\lambda,\ \bar{v}}) = \rho_{\lambda' \rightsquigarrow \lambda,\ \bar{v}}$，所以引理 2.1 推出 $\tau(\rho_{\lambda,\ v}) = \rho_{\lambda' \rightsquigarrow \lambda,\ v}$，因为它们是相应 $\pi_1(X_{\overline{\kappa(v)}}, \bar{x}_v)$ 表示的扩张，且必然唯一。□

备注 2.4。在我们关于志村簇的应用中，将有一个超刚性 ρ，其假设 $F(\lambda)$ 独立于 λ 可由典范模型理论推出。我们预期，只要 Γ 是 G-超刚性的，$F(\lambda)$ 就可以独立于 λ 取值。事实上，命题 2.3 之前的算术下降适用于任意 G-上同调刚性的局部系统 ρ，只要其具有拟幺幂单值性、局部单值变换以及（为简便起见）扎里斯基稠密像（局部单值变换的处理方式见 [EG18]）；并且，如果对满足与 ρ 相同假设的有限多个局部系统分别得到的域 $F(\lambda)$ 独立于 λ，那么命题 2.3 第（1）部分的证明仍然成立。

注 2.5. 由于 G 是连通约化的，且所有 ρ_λ、v 都有扎里斯基稠密像，因此伴随性质实际上等价于：对于一个密度为一的闭点集合 $y \in |X_{\kappa(v)}|$，ρ_λ、$v(F_y)$ 和 $\tau(\rho_{\lambda'},v)(F_y)$ 的半单部分均与 $G(\overline{\mathbb{Q}})$ 中的元素共轭，进而定义相同的 $G(\overline{\mathbb{Q}})$-共轭类。（关于这一等价性——若不对单值群加以限制，一般而言该结论并不成立——参见 [BHKT19，命题 6.4]。严格来说，我们必须将同上引文中针对曲线情形的结果推广到高维情形，并使用 $X_{\kappa(v)}$ 的切博塔廖夫密度定理。）

注 2.6。遗憾的是，这个论证似乎无法找出哪怕一个 v 使得 $\rho_{\lambda,v}$ 和 $\rho_{\lambda',v}$ 是伴随表示。不过，它确实说明（在第 (2) 部分的设定下），固定

λ和 λ'后，我们可以将 $\mathcal{O}_F[1/N'\ell\ell']$的素点划分为若干集合 $\{\Delta_\tau\}_{\tau\in \mathrm{Out}(G^{\mathrm{ad}})}$，使得对于 $v\in\Delta_\tau$， ρ_λ，$_v$和 $\tau(\rho_{\lambda'},_v)$ 是伴随表示。由于 Out(G) 是有限的，某个集合 Δ_τ具有正的上密度。如果我们知道 ρ_λ 有某个 λ'-伴随表示 $\rho_{\lambda\rightsquigarrow\lambda'}$，实际上便可推出 $\rho_{\lambda\rightsquigarrow\lambda'}\cong\tau(\rho_{\lambda'})$（此处 $\cong$表示 G-共轭）。事实上，这可由对 [Raj98] 结果的适当推广得出（其应用中关键地利用了像的 Zariski 稠密性）。当然，我们预期这对 $\tau=$id 也成立!

在应用于志村簇时，我们将利用额外的知识来控制自同构 τ：当限制到由特殊点提供的 X 的某些水平截面时， ρ_λ 和 $\rho_{\lambda'}$ 是相容的。在本节余下部分，我们将相关论证抽象化。

假设 2.7。 继续采用命题 2.3 的设定。令 λ、λ' 为 $\overline{\mathbb{Q}}$上方位于有理素数 ℓ、ℓ'之上的有限处。固定 v的一个素数 $\mathcal{O}_F[1/(N'\ell\ell')]$,，并假设存在一点 $y\in X(\mathcal{O}_{C_y}[1/N_y])$，其中 C_y/F是一个有限扩张，且 N_y是 N'的某个倍数，并且不被 v整除，且满足以下条件:

（1）特化 $\rho_{\lambda,y}$： $\pi_1(C_y)\to G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$ 与 $\rho_{\lambda',y}$： $\pi_1(C_y)\to G(\overline{\mathbb{Q}}_{\lambda'})$ 在 C_y 上方的任意赋值 v_y 处均相容。由于按构造它们在这样的 v_y 处是非分歧的，这一条件意味着 $\rho_{\lambda,y}$(Frob$_{v_y}$) 和 $\rho_{\lambda',y}$(Frob$_{v_y}$) 的半单部分 t_{λ,v_y} 与 t_{λ',v_y} 的共轭类分别定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上，并且在 $G(\overline{\mathbb{Q}})$ 中定义了相同的共轭类。我们将这一共同的底层半单共轭类记为 $[t_{v_y}]\in[G/\!\!/G](\overline{\mathbb{Q}})$，它是 GIT 商 $[G/\!\!/G]$的一个闭点。

(2) 元素 $t_{\lambda,v_y}\in G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$ 不被 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\lambda}$ 的任何在外自同构群 Out($G_{\overline{\mathbb{Q}}_\lambda}$) 中具有非平凡像的自同构固定。□

命题 2.8. 对于 $\mathcal{O}_F[1/(N'\ell\ell')]$ 的每个素数 v，若假设 2.7 对 v 成立，则 $\pi_1(X_{\kappa(v)},\bar{x}_v)$ 的表示 $\rho_{\lambda,v}$ 和 $\rho_{\lambda',v}$ 是伴随表示。

证明. 根据命题 2.3，存在 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_{\lambda'}}$ 的一个自同构 τ，使得 ρ_λ、$_v$ 和 $\tau(\rho_{\lambda'},_v)$ 是伴随表示。Aut(G) 对 G 的作用唯一地通过 Out(G) 对 $[G/\!\!/G]$ 的一个作用分解，使得对于任意代数闭域 Ω、$\sigma\in$Aut(G_Ω) 和 $g\in G(\Omega)$，我们有$[\sigma g]=\bar{\sigma}[g]$，其中 σ 是 $\bar{\sigma}$ 在 Out(G_Ω) 中的像。将此与假设 2.7 的第 (1) 部分结合，我们看到

$$[t_{v_y}]=[\rho_{\lambda,v}(\mathrm{Frob}_{v_y})]=\bar{\tau}[\rho_{\lambda',v}(\mathrm{Frob}_{v_y})]=\bar{\tau}[t_{v_y}],\tag{2}$$

对于 $\bar{\tau}$ τ 在 Out($G_{\overline{\mathbb{Q}}_{\lambda'}}$) 中的像 $\cong$ Out($G_{\overline{\mathbb{Q}}}$)。

令 $\tilde{\tau}\in$ Aut($G_{\overline{\mathbb{Q}}}$) 诱导出 $\bar{\tau}$，并令 $t_{v_y}\in G(\overline{\mathbb{Q}})$ 为 $G\to[G/\!\!/G]$ 在 $[t_{v_y}]$上方的纤维中的一个半单元素； t_{v_y} 在 $G(\overline{\mathbb{Q}})$-共轭意义下是良定义的。由于 $\tilde{\tau}(t_{v_y})$ 和 t_{v_y} 均为半单元素，且位于 $[t_{v_y}]$ （等式 (2) ）上方，故存在 $g\in G(\overline{\mathbb{Q}})$ 使得 (inn(g) $\circ\tilde{\tau}$)(t_{v_y}) $=t_{v_y}$。现在根据构造，$t_{\lambda,v_y}=$inn(h_λ)t_{v_y}，其中某个 $h_\lambda\in G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$，因此 t_{λ,v_y} 在自同构 inn($h_\lambda g$)$\tilde{\tau}$ inn(h_λ^{-1}) 作用下保持不变，该自同构属于 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\lambda}$。于是根据假设 2.7 的第 (2) 部分， $\tilde{\tau}$ 在 Out($G_{\overline{\mathbb{Q}}}$)($\overline{\mathbb{Q}}$) $\xrightarrow{\sim}$ Out($G_{\overline{\mathbb{Q}}_\lambda}$)($\overline{\mathbb{Q}}_\lambda$) 中的像是平凡的。

□

3. The case of Shimura varieties

3.1. 典范模型与局部系统。设 (G, X) 为一个志村数据。对于任意整洁紧开子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$，记 $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ 为复志村簇，其中 $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f))/K$，并且 $\mathrm{Sh}(G,X) = \varprojlim_K \mathrm{Sh}_K(G,X)$ 表示对所有紧开子群取极限。为简单起见，我们假设 $Z_G(\mathbb{Q})$ 在 $Z_G(\mathbb{A}_f)$ 中是离散的；这对伽罗瓦表示的研究并未造成任何实质性的普遍性损失，因为当 G 是 X 上的一般穆福德-泰特群时，该条件自动成立：见 [UY13，附录]。由此可得，$\mathrm{Sh}(G,X)(\mathbb{C})$ 与 $G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)$ 相同；我们将由有序对 (x,a) 表示的元素 $\in X \times G(\mathbb{A}_f)$ 记作 $[x,a]$，并令 $[x,a]_K$ 表示其在 $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f))/K$ 中的像。

令 $E = E(G,X)$ 为 (G,X) 的反身域。典范模型理论（[Del79],[Mil83]）构造出一个逆系统 $(\mathrm{Sh}_K)_K$，其指标取遍 $G(\mathbb{A}_f)$ 的（整洁）紧开子群，并配备右 $G(\mathbb{A}_f)$- 作用；该逆系统由定义在 E 上的光滑拟射影簇组成，满足：(1) $(\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}))_K$ 连同其 $G(\mathbb{A}_f)$-作用，与 $(\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}))_K$ 连同其$G(\mathbb{A}_f)$-作用同构，并且 (2) 对每个特殊对 $(T_x, x) \subset (G,X)$ 和 $a \in G(\mathbb{A}_f)$，$[x,a]_K \in \mathrm{Sh}_K(E(x)^{\mathrm{ab}})$ 和

$$\sigma[x,a]_K = [x, r_x(\alpha)a]_K \tag{3}$$

当互反映射 $\mathrm{rec}_{E(x)}: \mathbb{A}^\times_{E(x)} \to \Gamma^{\mathrm{ab}}_{E(x)}$ 满足 $\mathrm{rec}_{E(x)}(\alpha) = \sigma$ 时。下面解释一下记号：

- 根据定义，x 是一个同态 $h_x\colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$，它经由某个 $\mathbb{Q}$-环面 $T_x \subset G$分解为$T_{x,\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}$。
- 沿 $\mathbb{G}_m \xrightarrow{z \mapsto (z,1)} \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ 限制$h_{x,\mathbb{C}}$ 得到定义在 $\mathbb{C}$上的相伴余特征 $\mu_x \in X_*(T_x)$，其定义域为数域 $E(x) \subset \mathbb{C}$。
- 同态 r_x 如[Mil05，定义 12.8]所述：我们取典范映射 $\mathrm{Res}_{E(x)/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \mathrm{Res}_{E(x)/\mathbb{Q}}(\mu_x) \longrightarrow \mathrm{Res}_{E(x)/\mathbb{Q}}(T_x \otimes E(x)) \xrightarrow{N_E(\mathrm{Res}_{x/\mathbb{Q}} T_x)}$，在 $\mathbb{A}$-点上取值后，再投影到 $T_x(\mathbb{A}_f)$，从而定义 $r_x\colon \mathbb{A}^\times_{E(x)} \to T_x(\mathbb{A}_f)$。

注意，对于任意有限扩张 $E'/E(x)$，我们可以将 μ_x 视为定义在 E'上，然后同样可以定义同态$r_{x,E'}$：$\mathbb{A}^\times_{E'} \to T_x(\mathbb{A}_f)$；[Del79，公式 2.2.2.1] 记录了相容性$r_{x,E'} = r_x \circ N_{E'/E}(x)$。对于 $\sigma \in \Gamma_{E'}$，我们于是看到（利用全局互反映射的范数相容性），以$r_{x,E'}$ 代替 r_x，并以满足 $\mathrm{rec}_{E'}(\alpha') = \sigma$ 的 $\alpha' \in \mathbb{A}^\times_{E'}$ 代替 α时，公式（3）成立。

约定 3.1。我们最终会以刚才描述的更灵活形式使用方程（3），并且会滥用记号，将 $r_x(\alpha')$ 写作 $r_{x,E'}(\alpha')$，当$\alpha' \in \mathbb{A}^\times_{E'}$（例如参见引理 3.2 的陈述）。

现在我们固定一个整洁紧开子群 $K_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$。按照 [CK16，§4], 我们回顾在 Sh_{K_0} 的几何连通分支上构造典范 K_0-值局部系统的方法。固定一点 $s \in \mathrm{Sh}(\mathbb{C})$，其像对于每个 K 均为 $sK \in \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$，并令 $S_{K,s}$ 为包含 sK 的 Sh_K 的几何连通分支；它定义在 E 的某个有限阿贝尔扩张 $E_{K,s}$ 上。特别地，对于任意开正规子群 $K \subset K_0$，我们有以下以 K_0/K 为群（作用于右侧）的（非连通）伽罗瓦覆盖的笛卡尔方块

在右侧）：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Sh}_K & \longleftarrow & \mathrm{Sh}_K \otimes_E E_{K_0,s} & \hookleftarrow & \mathrm{Sh}_K \times_{\mathrm{Sh}_{K_0}} S_{K_0,s} & \hookleftarrow & \widetilde{S}_{K,s} \\
\downarrow{\scriptstyle K_0/K} & & \downarrow{\scriptstyle K_0/K} & & \downarrow{\scriptstyle K_0/K} & \swarrow & \\
\mathrm{Sh}_{K_0} & \longleftarrow & \mathrm{Sh}_{K_0} \otimes_E E_{K_0,s} & \hookleftarrow & S_{K_0,s} & &
\end{array}$$

其中 $S_{K,s}$ 按定义是 Sh 的连通分支 $\widetilde{K} \otimes_E E_{K_0,s}$ 包含 sK。竖直映射是群为 K_0/K 的伽罗瓦覆盖这一事实，K_0 整洁且 $Z_G(\mathbb{Q})$ 在 $Z_G(\mathbb{A}_f$ 中离散这一假设[UY13，引理 2.1]。为简化记号，在基本群的记号中，对于这些几何点中的任意一个，我们都简记为 $\bar{s}$ sK。~ 因此，由连通基点伽罗瓦覆盖 $(S_{K,s}, \bar{s}) \to (S_{K_0,s}, \bar{s})$ 可得一个典范满射

$$\pi_1(S_{K_0,s}, \bar{s}) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{S}_{K,s}/S_{K_0,s})^{\mathrm{op}} \subset K_0/K.$$

我们来准确回顾其运作方式，因为我们希望计算这些同态在′特殊点上的限制。令 $F_{\bar{s}}$: FEt$_{S_{K_0,s}} \to$ Sets 为范畴中有限 ′étale 覆盖的纤维函子，其基点为 $\bar{s}$，底空间为 $S_{K_0,s}$；因此，$\pi_1(S_{K_0,s}, \bar{s})$ 按定义是仿射群 Aut($F_{\bar{s}}$)。选取一组代表元，按偏序集 I 编号，分别对应每个连通伽罗瓦覆盖 $(S_i \to S_{K_0,s})_{i\in I}$ 的同构类，并固定元素 $\bar{s}_i \in F_{\bar{s}}(S_i)$；对于所有 $i \geq i'$，存在唯一的态射 $f_{ii'}$: $S_i \to S_{i'}$，它在 $S_{K_0,s}$ 之上且将 $\bar{s}_i$ 映到 $\bar{s}_{i'}$。这些数据诱导出一个函子同构

$$F_{\bar{s}}(\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{colim}_I \mathrm{Hom}_{\mathrm{F\acute{E}t}_{S_{K_0,s}}}(S_i, \bullet),$$

并且 $A = \lim_I$Aut($S_i/S_{K_0,s}$)（自同构在每个 S_i 的左侧作用）典范地作用于该余极限的右侧，因此我们得到一个同态 $A^{\mathrm{op}} \to$ Aut($F_{\bar{s}}$)，它是~一个同构。特别地，在我们的情形中，我们取 $S_{K,s}$ 作为 S_i 中的覆盖，并始终为这些覆盖选取基点 $\gamma_i = \bar{s}K$，从而得到满射 π_1 $(S_{K_0,s}, \bar{s}) \to$~Aut$(S_{K,s}/S_{K_0,s})^{\mathrm{op}}$；通过上述图表，该满射典范地包含于 K_0/K 中。

对所有这类 $K \subset K_0$ 取极限，我们得到表示

$$\rho_{K_0,s}\colon \pi_1(S_{K_0,s}, \bar{s}) \to K_0$$

以及其投影 $\rho_{K_0,s,\ell}$ 到 $K_{0,\ell}$ 在 $G(\mathbb{Q}_\ell)$ 中的像。

现在我们说明，典范模型的基本性质（3）如何决定这些局部系统在特殊点处的特化。设 $s = [x, a] \in$ Sh($\mathbb{C}$) 是一个特殊点，其含义是：霍奇结构 h_x 的芒福德-泰特群：$\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ 对应于 $x \in X$，是一个环面 T_x。像 $sK_0 \in S_{K_0,s}$ 定义在 $E(x)$ 的一个阿贝尔扩张 $E(sK_0)$ 中，该扩张包含于 $\overline{\mathbb{Q}}$ 内；对于相应的 $\overline{\mathbb{Q}}$- 值或 $\mathbb{C}$- 值几何点中的任一个，我们记为 $\bar{s}$。下述引理直接由上面给出的 $\rho_{K_0,s}$ 的定义得到：

引理 3.2. 设 $s = [x, a] \in$ Sh($\mathbb{C}$) 是如上所述的特殊点。那么，沿着特化 π_1(Spec($E(sK_0)$) $\bar{s}$) $\to \pi_1$($S_{K_0,s}, \bar{s}$) 映射 $\sigma \in \Gamma^{\mathrm{ab}}_{E(sK_0)}$ 的 $\rho_{K_0,s}$ 的限制，是唯一的 $k_0(\sigma) \in K_0$，使得存在满足 $qx = x$ 和 $qak_0(\sigma) = r_x(\alpha)a$ 的 $q \in G(\mathbb{Q})_+$；这里 $\alpha \in \mathbb{A}_E^\times$ ($_{sK_0}$) 仍是任意满足 rec$^{E(sK_0)}(\alpha) = \sigma$ 的幂零（并注意约定 3.1）。

证明. 设如上所述的 K 是 K_0 的有限指数正规子群。那么，对任意 for any$\sigma \in \Gamma^{\mathrm{ab}}_{E(sK_0)}$, $\sigma[x,a]_K = [x,a]_K k_0(\sigma)$ 对唯一的 $k_0(\sigma) \in K_0/K$ 成立。根据构造，类 $k_0(\sigma)K$ 是 $\rho_{K_0,s}(\sigma)$ 模 K 的像。于是，利用（见公式（3）及其后的讨论）等式 $\sigma[x,a]_K = [x, r_x(\alpha)a]_K$ 即可得到该引理；这里我们按约定 3.1 采用了宽松的记号写法，写作 r_x 而不是 $r_x \circ N_{E(sK_0)/E}(x) = r_{x,E(sK_0)}$。□

3.2. 整模型。在本节中，我们还假设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的连通约化群，其伴随群 G^{ad} 是 $\mathbb{Q}$-单的，且实秩 $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}})$ 至少为 2。由于（G, X）是一个志村数据，存在一个全实域 F 以及一个定义在 F 上的绝对单伴随群 G^s，使得$G^{\mathrm{ad}} \cong \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G^s)$（[Del79, 2.3.4(a)]）。我们固定 X的一个连通分支 X^+。对于任意紧开子群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$，令 $\mathcal{C}_K$为 $G(\mathbb{A}_f)$中双陪集空间$G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$的一组代表元。于是，复流形 $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f))/K$是局部对称空间的不交并（[Mil05, 引理 5.13]）：

$$G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f))/K = G(\mathbb{Q})_+\backslash(X^+ \times G(\mathbb{A}_f))/K = \bigsqcup_{g \in \mathcal{C}_K} \Gamma_g \backslash X^+, \tag{4}$$

其中，该映射将 $x \in \Gamma_g\backslash X^+$ 映到 $[x,g]_K$。

我们将运用马古利斯超刚性定理，检验定义 2.2 中的判据是否适用于这些局部对称空间的基本群，即各个 Γ_g 在 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 中的像。

命题 3.3。设 K 是 $G(\mathbb{A}_f)$ 的一个整洁紧开子群，并设 Γ 是 $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ 的一个连通分支的基本群。那么 Γ 是 G^{ad}-超刚性的（定义见 2.2）。

证明。注意，Γ（上文某个同余子群的伴随像）是 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$（[PR94]）的一个算术子群。令 Ω 为任意特征零代数闭域，并设 $\rho_1, \rho_2\colon \Gamma \to G^{\mathrm{ad}}(\Omega)$ 是两个具有扎里斯基稠密像的同态。由于 $G^{\mathrm{ad}}(\Omega) \cong \prod_{\sigma\colon F \to \Omega} G^s_\sigma(\Omega)$，其中 G^s_σ 表示沿 σ 到 Ω 的基变换，因此对每个 $\sigma\colon F \to \Omega$，我们得到一对同态 $\rho_{i,\sigma}\colon \Gamma \to G^s_\sigma(\Omega)$，其像扎里斯基稠密。现在我们将应用 [Mar91, 定理 VIII.3.4(a)]：由于同上引文的表述中有大量记号，我们将说明我们的设置如何符合 Margulis 超刚性定理的条件：

> 域 K 在我们的情形中是 $\mathbb{Q}$，连通的（几乎）K-单非交换 K- 群 G 是我们的 G ad，K 的赋值有限集 S 是 $\{\infty\}$；由于 $G\mathrm{ad}_{\mathbb{R}}$ 不是各向异性的，（S-）算术子群 $\Gamma \subset G\mathrm{ad}(\mathbb{Q})$ 属于 [Mar91, §VIII.3] 开头定义的集合 $\Omega_\emptyset$。

- 绝对单伴随群 H 是我们的 G^s_σ（我们针对 σ 的每一种选择分别应用定理），而域 l 是我们的 Ω。

那么，根据 [Mar91，定理 VIII.3.4(a)]，存在一个域扩张 $\Omega' \supset \Omega$（$\Omega' = l'$ 为同上引文中的记号），并且对于 $i = 1$、2 以及每个 σ，存在一个满射 $\eta_{i,\sigma}\colon G^{\mathrm{ad}}_{\Omega'} \to G^s_{\sigma,\Omega'}$

Ω 上的代数群[4]，使得 $\rho_{i,\sigma} = \eta_{i,\sigma}|_\Gamma$；此处我们沿着 $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}) \subset G^{\mathrm{ad}}(\Omega')$ 限制 $\eta_{i,\sigma}$。因此，每个 ρ_i 都由一个乘积给出

$$\eta_i \colon G^{\mathrm{ad}}_{\Omega'} \xrightarrow{\prod_{\sigma\colon F\to\Omega}\eta_{i,\sigma}} \prod_{\sigma\colon F\to\Omega} G^{s}_{\sigma,\Omega'} \cong G^{\mathrm{ad}}_{\Omega'}.$$

由于每个 ρ_i 在 $G^{\mathrm{ad}}_{\Omega'}$中都有扎里斯基稠密像，因此每个 η_i 都必须是同构。于是，对于某个自同构 τ，有 $\eta_1 = \tau(\eta_2)$，尤其是 $\rho_1 = \tau(\rho_2)$。剩下的问题是将 τ 下降为 G^{ad}_{Ω}的一个自同构。对于这一步下降（而非命题的结论！），我们可以假设 τ 是内自同构，因为 $\mathrm{Out}(G^{\mathrm{ad}}_{\Omega'})$ 的代表元已经存在于 $\mathrm{Aut}(G^{\mathrm{ad}}_{\Omega})$ 中。因此，我们可以假设对于某个 $g \in G^{\mathrm{ad}}(\Omega')$，有 $\rho_1 = g\rho_2 g^{-1}$。对于任意 $\zeta \in \mathrm{Aut}(\Omega'/\Omega)$，对每个 i，都有 $\zeta(\rho_i) = \rho_i$，故对所有 $x \in \Gamma$，

$$\zeta(g)\rho_2(x)\zeta(g)^{-1} = g\rho_2(x)g^{-1},$$

这意味着 $g^{-1}\zeta(g)$ 与 ρ_2 对易，因此（由扎里斯基稠密性以及 G^{ad} 是伴随群可知）$g = \zeta(g)$。最后我们推得 g 仍属于 $G^{\mathrm{ad}}(\Omega)$，因此验证了 Γ 的 G^{ad}-超刚性。□

注记 3.4。由$'$/所产生的扩张 Ω [Mar91，定理 VIII.3.4(a)]并非有限扩张，除非 $\Omega = \mathbb{C}$，因此这一论证的最后一步至关重要。

在本节余下部分中，我们固定一个整洁紧开子群 $K_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$。接下来，我们固定 $\mathrm{Sh}_{K_0}(G, X)$ 的一个适当整模型。由于我们采用的设定较为一般，我们只能通过扩张论证，以较为“柔性”的方式构造整模型。我们选择的整模型与 §2 中的设定相呼应，并将利用 [PST+21 定理 4.1] 中考察的此类模型的特殊性质。更确切地说，令 $E = E(G, X)$ 为 (G, X) 的反身域。那么，同上引文表明，存在一个整数$N \geq 1$，使得 $\mathrm{Sh}_{K_0}(G, X)$ 存在一个在 $\mathcal{O}_E[1/N]$ 上的整模型 $\mathcal{S}_{K_0}$，且 $\mathrm{Sh}_{K_0}(G, X)(\overline{\mathbb{Q}})$ 的每个特殊点都可扩张为 $\mathcal{S}_{K_0}(\overline{\mathbb{Z}}[1/N])$ 的一个元素；这可视为“复乘阿贝尔簇处处具有潜在良约化”这一断言的弱类比（这提示我们或许可以取 $N = 1$）。与 §2 的抽象设定一样（参见定义 2.2 之前的讨论），模型 $\mathcal{S}_{K_0}$ 是 $\overline{\mathcal{S}}_{K_0}$ 上一个光滑射影概形中相对严格正交叉除子的补集，其中 $\overline{\mathcal{S}}_{K_0}$ 定义在 $\mathcal{O}_E[1/N]$ 上。

对于 $\pi_0(\mathrm{Sh}_{K_0}(\mathbb{C}))$ 中的每个元素，我们固定一个特殊点 $s \in \mathrm{Sh}(\mathbb{C})$，其像 $sK_0 \in \mathrm{Sh}_{K_0}(\mathbb{C})$ 属于给定的连通分支。按照第 3.1 节的记法，我们将其记为 $S_{K_0,s}$，这是定义在反身域的某个有限（阿贝尔）扩张 $E_{K_0,s}$ of E 上的光滑几何连通簇。今后我们只考虑这个连通志村簇。于是，我们的整模型 $\mathcal{S}_{K_0}$ 确定了 $S_{K_0,s}$ 的一个整模型 $\mathcal{S}_{K_0,s}$：闭包 $\mathcal{S}_{K_0,s} := S_{K_0,s} \cap \mathcal{S}_{K_0}$ 在 $\mathcal{O}_{E(K_0,s)}$ 上泛点光滑，因此增大 N 后，我们可以假设 $\mathcal{S}_{K_0,s}$ 在 $\mathcal{O}_{E_{K_0,s}}[1/N]$ 上光滑，并且 s 扩张为 $\mathcal{S}_{K_0,s}(\overline{\mathbb{Z}}[1/N])$ 的一个元素。对于每个 ℓ，我们都有典范表示

$$\rho_{K_0,s,\ell}\colon \pi_1(S_{K_0,s}, \bar{s}) \to K_{0,\ell} \subset G(\mathbb{Q}_\ell)$$

[4]在同上引文中，基变换到 $l' = \Omega'$ 时，也要求证明给出一个嵌入 $K \to l'$，在那里记作 σ；当然，当 $K = \mathbb{Q}$ 时并无选择。此外还需注意，严格来说，对于每个 $\rho_{i,\sigma}$ 我们都会构造 Ω' 的一个扩张，但我们只需将 Ω' 取为某个更大的域中这些扩张的复合域即可。

如第3.1节所述，其在特殊点 sK_0 处的特化由引理3.2描述。我们希望结合命题3.3，将第 2 节的结果应用于这些 ℓ-进表示，但首先必须说明拓扑基本群表示与 ´étale 基本群表示之间的相容性。

我们将基点 $s = [x, a]$ 记作某个 $x \in X^+$ 和 $a \in G(\mathbb{A}_f)$，并可从 $G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K_0$ 的代表元 $\mathcal{C}_{K_0}$ 中选取。复流形 S_{K_0}，$_s(\mathbb{C})$ 于是典范地同一于 $\Gamma_a\backslash X^+$（见公式 (4)），而 $\pi_1^{\mathrm{top}}(S_{K_0}, {}_s(\mathbb{C}), \bar{s})$（利用 $x \in X^+$）则与伴随像 $\Gamma := \Gamma_a^{\mathrm{ad}} \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 同一：前者是 Aut（$(X^+, x)/(\Gamma_a\backslash X^+, \bar{s})$）^{op}，它通过（右！）作用 $y \mapsto \gamma^{-1}(y)$ $(\gamma \in \Gamma, \ y \in X^+)$ 与 Γ 同一。[5] 利用公式 (4) 中的同一关系，我们可以计算复合同态

$$\Gamma \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{top}}(S_{K_0,s}(\mathbb{C}), \bar{s}) \to \pi_1(S_{K_0,s}, \bar{s}) \to K_0$$

只需检查其模任意正规开子群 $K \subset K_0$ 的像：由于 $[\gamma^{-1}x, a]_K = [x, \gamma a]_K = [x, a]_K \cdot (a^{-1}\gamma a)$，$\gamma \in \Gamma$ 在复合映射下映至 $a^{-1}\gamma a \in K_0$。特别地，图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathrm{top}}(S_{K_0,s}, \bar{s}) & \longrightarrow & G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a^{-1}(\bullet)a} \\ \pi_1(S_{K_0,s}, \bar{s}) & \xrightarrow[\rho^{\mathrm{ad}}_{K_0,s,\ell}]{} & G^{\mathrm{ad}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{array}$$

交换，其中上方的箭头由包含映射 $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 诱导。

现在，由于 G 是非紧型的，Borel 稠密性定理（[PR94，定理 4。10]）表明，算术子群 $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 是扎里斯基稠密的。由命题 3.3 以及这一 Zariski 稠密性，§2 的结果适用于 $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$（即同上引文中的“$\rho$”）。具体而言，我们可以应用命题 2.3 的第 (1) 部分（注意，同上引文中的所有域“$F(\lambda)$”都等于$E_{K_0,\ s}$），从而得出：如有必要，扩大 N 后，对所有 ℓ，$\rho_{K_0,\ s,\ \ell}$ 的伴随投影可延拓为一个同态

$$\rho^{\mathrm{ad}}_{K_0,s,\ell} \colon \pi_1(\mathcal{S}_{K_0,s}[1/\ell], \bar{s}) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell).$$

（我们不改变记号，但新的 N 就是命题 N' 中记作 2.3 的对象。）为简化记号，鉴于 K_0 和 s是固定的，且我们只研究 G^{ad}-值同态，在本文余下部分中，我们将其简记为

$$\rho_\ell = \rho^{\mathrm{ad}}_{K_0,s,\ell}, \qquad \rho_{\ell,v} = \rho^{\mathrm{ad}}_{K_0,s,\ell}|_{(\mathcal{S}_{K_0,s})_{\kappa(v)}}, \tag{5}$$

v Spec $\mathcal{O}_{E_{K_0}}$的一个闭点，s。

推论 3.5。对于每一对素数 ℓ和 ℓ'，以及$\mathcal{O}_{E_{K_0,\ s}}[1/(N\ell\ell')]$的每个素数 v，存在 $\tau = \tau(\ell, \ell', v) \in \mathrm{Aut}(G^{\mathrm{ad}}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}})$，使得 $\rho_{\ell,\ v}$和 $\tau(\rho_{\ell',\ v})$ 是伴随表示。

证明。 这可由命题 2.3 的第 (2) 部分得出。 □

[5]事实上，$\Gamma_a \to \Gamma$ 是一个同构，因为 $Z_G(\mathbb{Q})$ 在 $Z_G(\mathbb{A}_f)$ 中是离散的，并且 K 是紧的且 nea t.

3.3. 特殊点的构造。 我们现在的任务是利用命题 τ 中的自同构是内自同构，这要借助推论，使用命题 2.8。为了使用同上引文，我们需要证明素数 v 满足假设 2.7 。我们的方法是利用精心选取的特殊点所给出的$\mathcal{S}_{K_0,\ s}$ 的水平截面来“打破对称性”。

为了在 $\mathrm{Sh}_{K_0}(G,X)$ 上构造所需的特殊点，我们需要在 G中构造具有良好性质的环面。回顾一下，若代数环面 T 上的域 k 被称为不可约的，是指它不包含真子环面（在 k上定义），或者等价地说，伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(k/k)$ 在 $\mathbb{Q}$-线性化的特征群 $X^\bullet(T)_{\mathbb{Q}}$ 上的表示 ρ_T 是不可约的。下面的引理是 [PR01 中定理 1], 的一个变体，后者处理绝对单情形；我们感谢审稿人指出了早期版本论证中缺失的一处解释。我们通过改写同上引文中的论证来补充这一点，但也可以改用 [Gey78，引理 3.4]。

引理 3.6。设 $H=\prod_{i\in I}H_i$ 是 $\mathbb{Q}$上的一个伴随代数群，其中 H_i's 是 H的（伴随） $\mathbb{Q}$-单因子。设 S 是 $\mathbb{Q}$的有限个赋值点，并且对每个 $v\in S$ 固定一个极大环面 $T_v\subset H_{\mathbb{Q}_v}$ 以及一个开子群 $K_v\subset H(\mathbb{Q}_v)$。那么存在一个极大环面 $T\subset H$ ，使得：

(1) 将 $T=\prod_{i\in I}T_i$ 分解为各个 T_i 后，其中每个 T_i 都是 H_i 中的极大环面，而每个 T_i 都是不可约的。

(2) 对所有 $v\in S$， $T_{\mathbb{Q}_v}$ 都与 T_v 共轭于 K_v。

证明。由于 H 、每个 T_v 以及 K_v 都按指标集 I 正则分解为乘积，显然只需分别对每个 $\mathbb{Q}$-单因子 H_i 证明该引理。因此，我们可以并且确实假设 H 是 $\mathbb{Q}$-单的。令 Tori_H 表示 H 中极大环面的簇。根据 Chevalley 的定理（[Vos98，§2.4 定理 1]），Tori_H 是 $\mathbb{Q}$-有理的。由此得到函数域 $\mathbb{Q}(\mathrm{Tori}_H)$ 上的一般环面（见 [Vos98，§2.4.1]） $\mathcal{T}$。令 $k/\mathbb{Q}(\mathrm{Tori}_H)$ 表示其分裂域；那么 Voskresenskii 已证明（[Vos98，§2.4.2 定理 2]），伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q}(\mathrm{Tori}_H))$ 通过在 $X^\bullet(\mathcal{T})$ 上的作用同构于 $W(H,\mathcal{T})\rtimes A_0\subset\mathrm{Aut}(\Phi(H,\mathcal{T}))$，其中 A_0 表示伽罗瓦群的 $*$-作用的像。注意，Tori_H 是满足弱逼近性质的有理簇（[PR94，命题 7.3]）。由前一性质和希尔伯特不可约性可得一个 $T_0\in\mathrm{Tori}_H(\mathbb{Q})$，使得 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 在 $X^\bullet(T_0)$ 上的作用的像为 $W(H,T_0)\rtimes A_0$。

PR01 定理 1(i) 的论证找到了一个有限集 S' ，由与S 不相交的有限处组成，使得任何满足以下条件的 $T\in$ 环面$_H(\mathbb{Q})$：对于所有 $v\in S'$， $T_{\mathbb{Q}_v}$ 都与T_0在 $H(\mathbb{Q}_v)$-共轭；均满足：对于 $g_0\in H(\overline{\mathbb{Q}})$，若 $\mathrm{inn}(g_0)(T)=T_0$，从而诱导同构 $X^\bullet(T)\simeq X^\bullet(T_0)$ 和 $\mathrm{Aut}(X^\bullet(T))\simeq\mathrm{Aut}(X^\bullet(T_0))$，则 $\mathrm{inn}(g_0)(\rho_T(\Gamma_{\mathbb{Q}}))=\rho_{T_0}(\Gamma_{\mathbb{Q}})$（见同上引文中的等式 (2)）。论证的这一部分只用到$\rho_{T_0}(\Gamma_{\mathbb{Q}})$包含整个韦伊群这一事实；但根据 T_0的选取，我们还可推出 $\rho_T(\Gamma_{\mathbb{Q}})=W(H,T)\rtimes A_0$。

现在，任何这样的 T 都是不可约的。事实上，存在一个有限扩张 $F/\mathbb{Q}$ ，以及定义在 F 上的绝对单伴随群 H^s ，使得 $H\cong\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(H^s)$，因此 T具有如下形式：$\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(T^s)$，其中 T^s 是 H^s的某个极大环面。因此， $X^\bullet(T)$作为阿贝尔群同构于 $\bigoplus_{\sigma:\ F\to\overline{\mathbb{Q}}}X^\bullet(T^s_\sigma)$，其中 $\rho_T(\Gamma_{\mathbb{Q}})$等于 $(\prod_\sigma W(H^s_\sigma,T^s_\sigma))\rtimes A_0$。由于每个 $W(H^s_\sigma,T^s_\sigma)$ 都在 $X^\bullet(T^s_\sigma)_{\mathbb{Q}}$ 上不可约地作用，且 A_0在因子集合上传递作用（因为 H本身是$\mathbb{Q}$-单的），所以 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 在 $X^\bullet(T)_{\mathbb{Q}}$ 上的作用不可约，证毕。

我们按照 [PR01, 定理 1(ii)] 中的方法，利用环面$_H$的弱逼近性质，找出 $T \in$环面$_H(\mathbb{Q}) \cap \prod_{S \cup S'} U_v$，使得对所有 $v \in S'$， $U_v =$inn$(H(\mathbb{Q}_v))(T_{0,\mathbb{Q}_v})$；并且对所有 $v \in S$， U_v 都是包含于 inn$(K_v)(T_v)$ 中的任意开子集（根据 [PR94, 命题 3.3 及其推论]，这类轨道是开集）。现在显然，引理的结论对 T成立。

□

我们继续构造特殊点。在给定 v的情况下，我们将构造一个特殊点 $x \in X$，使其满足若干要求，其中包括 μ_x在下降到 $\overline{\mathbb{Q}}$ 并基变换到 $\overline{\mathbb{Q}}_p$之后，相对于一个 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群为正。下面的论证将我们所需的一些额外特征纳入[KPS15，命题 1.2 的论证中。5]（该论证受到 [LR87，第 5 节的启发12]）。在本文余下部分，我们记$G^{\mathrm{ad}} = \prod_{i \in I} G_i$ 为将 G^{ad} 分解为 $\mathbb{Q}$-单群所得的分解。

命题 3.7。继续考虑固定的连通分支 $X^+ \subset X$。取一个素数 p，使得 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 非分歧，并取一个嵌入 ι_p: $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$。那么我们可以找到一个极大环面 $T' \subset G$和一个特殊子数据（T'， x'）$\subset$（G， X），使得：

(1) $x' \in X^+$。（2）将 T' 在 G^{ad} 中的像（T'）$^{\mathrm{ad}} = \prod_i T'_i$分解为极大环面 $T'_i \subset G_i$ 时，每个 T'_i 都不可约。（3）对于所有 $i \neq j$， T'_i 与 T'_j 不同构。（4） $T'_{\mathbb{Q}_p}$ 是非分歧的。（5） x' 的 Hodge 余特征 μ' 下降到 $\overline{\mathbb{Q}}$ 后，再沿 ι_p 扩张，定义了 $T'_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ 的一个余特征；相对于包含 $T'_{\mathbb{Q}_p}$ 的 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群 $G_{\mathbb{Q}_p}$，该余特征为正。

证明。任取 $x_\infty \in X^+$，对应于 h_∞: $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$。选取一个包含 h_∞ 的像的极大环面 $T_\infty \subset G_{\mathbb{R}}$。 $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ 中的像 T^{ad}_∞ 是各向异性的，因为 inn$(h_\infty(i))$ 是 $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ 的 Cartan对合。令 h_∞ 的 Hodge 余特征为 $\mu_\infty \in X_\bullet(T_\infty)$。 μ_∞ 的 $G(\mathbb{C})$-共轭类与 x_∞ 无关（也与 X^+ 的选取无关），记作$\mu_{X,\infty}$；它定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上，并确定唯一的 $G(\overline{\mathbb{Q}})$-共轭类 μ_X，其元素为余特征$\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}} \to G_{\overline{\mathbb{Q}}}$。对于任意有理素数 p'，固定一个嵌入 $\iota_{p'}$: $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_{p'}$（在 $p' = p$ 的情形下取给定的 ι_p），它诱导分解群 $\Gamma_{\mathbb{Q}_{p'}} \to \Gamma_{\mathbb{Q}}$ 的一个包含映射；对于$p' = p$，该嵌入从 μ_X 诱导出一个 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ 的余特征的 $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$-共轭类 $\mu_{X,p}$。

由于 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 是非分歧的， $G_{\mathbb{Q}_p}$ 可延拓为 $\mathbb{Z}_p$ 上的约化群概形 $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$。因此存在一个 $\mathbb{Q}_p$-有理的 Borel 子群 $B_p \subset G_{\mathbb{Q}_p}$，其中包含一个非分歧极大环面$T_p \subset B_p \subset G_{\mathbb{Q}_p}$。我们令 $\mu_p \in X_\bullet(T_p)$ 表示 $\mu_{X,\,p}$ 的 B_p-正代表元。

对于 I 中每一对不同元素组成的无序对 $i \neq j$，选择不同的素数 p_i、$_j \neq p$，以及极大环面 T_i、$_{p_i}$、$_j \subset (G_i)_{\mathbb{Q}_{p_i}}$、$_j$ 和 T_j、$_{p_i}$、$_j \subset (G_j)_{\mathbb{Q}_{p_i}}$、$_j$，使它们作为 $\mathbb{Q}_{p_i}$、$_j$-环面时不同构。（我们可以选择所有 p_i、$_j$，使得 G 在 $\mathbb{Q}_{p_i}$、$_j$ 上分裂；此时 $(G_i)_{\mathbb{Q}_{p_i}}$、$_j$ 包含一个分裂极大环面，并且（根据 [PR94, 定理 6.21]）包含一个各向异性极大环面。如果 $(G_i)_{\mathbb{Q}_{p_i}}$、$_j$ 与 $(G_j)_{\mathbb{Q}_{p_i}}$、$_j$ 中极大环面的同构类不同，显然

如此即可；否则，我们可以在其中一个取分裂环面，在另一个取各向异性环面。) 对于 $k \neq i,\ j$，令 $T_{k,\ p_{i,\ j}} \subset (G_k)^{\mathbb{Q}_{p_{i,\ j}}}$ 为任意一个极大环面。根据引理 3.6，存在一个极大环面 $T \subset G$ (严格来说，是将引理 G 应用于 3.6 所得结果在G^{ad}中的原像)，使得：

(1) 将 T在 G^{ad} 中的像 $T^{\mathrm{ad}} = \prod_i T_i$ 写成极大环面 $T_i \subset G_i$的乘积，其中每个 T_i 都不可约。(2) 对于 I中的每个无序对 $i \neq j$，$T_{\mathrm{ad}}{}^{\mathbb{Q}_{p_{i,\ j}}}$与 $\prod_k T_{k,\ p_{i,\ j}}$在 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_{p_{i,\ j}})$-共轭（因而特别同构）。(3) 对某个 $g_\infty \in G(\mathbb{R})^+$（解析拓扑下的单位元连通分支），$T_{\mathbb{R}} = \mathrm{inn}(g_\infty)T_\infty$；(4) 存在 $g_p \in G(\mathbb{Q}_p)$，使得 $\mathrm{inn}(g_p)(T_p) = T_{\mathbb{Q}_p}$。

现在，$\mathrm{inn}(g_p)\mu_p \in X_\bullet(T_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$相对于 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群 $\mathrm{inn}(g_p)B_p \subset G_{\mathbb{Q}_p}$是正的，并且唯一地下降为余特征 $\mu_T \in X_\bullet(T_{\overline{\mathbb{Q}}})$。扩张 $\mu_T \otimes \mathbb{C}$ 与 $\mu_{\mathbb{R}} := \mathrm{inn}(g_\infty)\mu_\infty$在 $G(\mathbb{C})$-共轭，因此这两个 $T_{\mathbb{C}}$-值余特征必定由某个 $n \in N_{G^{\mathrm{sc}}}(T_{\mathrm{sc}})(\mathbb{C})$共轭，其中该群是单连通覆盖 G^{sc} 中 T的原像 T_{sc} 的正规化子：$\mathrm{inn}(n)\mu_{\mathbb{R}} = \mu_T \otimes \mathbb{C}$。由于 $T^{\mathrm{sc}}_{\mathbb{R}}$是各向异性的，$n\bar{n}^{-1} \in T^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})$。[6] 令 $\alpha_\infty \in H^1(\mathbb{R}, T^{\mathrm{sc}})$表示将复共轭 c映到 $n\bar{n}^{-1}$的唯一上循环的类。根据 [KPS15，引理 1.2.1] 及其证明，存在一个类 $\alpha \in H^1(\mathbb{Q}, T^{\mathrm{sc}})$，使得

(1) $\alpha|_{\mathbb{R}} = \alpha_\infty$；(2) 对所有素数 p'，除一个辅助 $p_0 \notin \{p\} \cup \{p_{i,j}\}_{i,\ j}$ 外，$\alpha|_{\mathbb{Q}_{p'}} = 0$。

令 $i\colon\ T_{\mathrm{sc}} \to G^{\mathrm{sc}}$ 为包含映射。由 α_∞ 的构造以及 $H^1(\mathbb{Q}_{p_0}, G^{\mathrm{sc}})$ 的消失（[PR94，定理 6.4]）可知，类 $i(\alpha)$ 在所有局部处均为平凡。根据单连通群的 Hasse 原理（[PR94，定理 6.6]），$i(\alpha) = 0$，即存在 $g \in G^{\mathrm{sc}}(\overline{\mathbb{Q}})$，使得 $\sigma \mapsto g\sigma(g)^{-1} \in T^{\mathrm{sc}}(\overline{\mathbb{Q}})$ 是 α 的一个上循环代表元。

对所有素数 $p' \neq p_0$（包括 $p' = p$），$\alpha|_{\mathbb{Q}_{p'}} = 0$ 表明存在 $s_{p'} \in T^{\mathrm{sc}}(\overline{\mathbb{Q}}_{p'})$，使得对所有 $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{Q}_{p'}}$，$g\sigma(g)^{-1} = s_{p'}\sigma(s_{p'})^{-1}$，即 $s_{p'}^{-1}g$ 属于 $G^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_{p'})$。类似地，$\alpha|_{\mathbb{R}} = \alpha_\infty$ 意味着存在某个 $t \in T^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})$，使得 $g\bar{g}^{-1} = tn\bar{n}^{-1}\bar{t}^{-1}$，即 $g^{-1}tn \in G^{\mathrm{sc}}(\mathbb{R})$。

环面 $\mathrm{inn}(g)^{-1}T_{\overline{\mathbb{Q}}}$ 定义在 $\mathbb{Q}$ 上（因为 T 定义在 $g\sigma$上，且对所有g，$^{-1} \in T^{\mathrm{sc}}(\overline{\mathbb{Q}})$ $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$）；令 $T' \subset G$为 $\mathrm{inn}(\ \mathbb{Q})g$中底层的极大$^{-1}T_{\overline{\mathbb{Q}}}$-环面，并令 $\mu' = \mathrm{inn}(g)^{-1}\mu_T \in X_\bullet(T')$。于是 $\mathrm{inn}(\ n^{-1}t^{-1}g)\mu' = \mathrm{inn}(g_\infty)\mu_\infty$，因此（回忆 $g^{-1}tn \in G^{\mathrm{sc}}(\mathbb{R})$）$\mu'$ 与 $G^{\mathrm{sc}}(\mathbb{R})$属于同一个共轭类，进而与 $G(\mathbb{R})^+$-共轭类相同（对于任意定义在 μ_∞ 上的约化群，$\mathbb{R}$，$G^{\mathrm{sc}}(\mathbb{R})$是连通的）。也就是说，$\mu'$ 对应于 $\mathrm{inn}(\ x' =)g^{-1}tng_\infty$中的一个点$x_\infty$，它与 X^+ 属于 X 的同一个连通分支 x_∞。

[6]只需证明对于所有 $\chi \in X^\bullet(T^{\mathrm{sc}})$，$\chi(\bar{n}^{-1}t\bar{n}) = \chi(n^{-1}tn)$ 对所有 $t \in T^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})$ 均成立。由于 $T^{\mathrm{sc}}_{\mathbb{R}}$ 是各向异性的，复共轭c 在 $X^\bullet(T^{\mathrm{sc}})$ 上通过 -1 作用，因此

$$\chi(n^{-1}t^{-1}n) = (n\cdot\chi)^{-1}(t) = {}^c(n\cdot\chi)(t) = \overline{\chi(n^{-1}\bar{t}n)} = ({}^c\chi)(\bar{n}^{-1}t\bar{n}) = \chi(\bar{n}^{-1}t^{-1}\bar{n}).$$

我们现在检查 (T', x') 的其余要求。首先注意，对于所有 $p' \neq p_0$，我们有

$$T'_{\overline{\mathbb{Q}}_{p'}} = \mathrm{inn}(g^{-1})T_{\overline{\mathbb{Q}}_{p'}} = \mathrm{inn}(g_{\mathbb{Q}_{p'}}^{-1}s_{p'}^{-1})T_{\overline{\mathbb{Q}}_{p'}} = \mathrm{inn}(g_{\mathbb{Q}_{p'}}^{-1})T_{\overline{\mathbb{Q}}_{p'}},$$

对于 $g_{\mathbb{Q}_{p'}} = s_{p'}^{-1}g \in G^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_{p'})$（回忆 $s_{p'} \in T^{\mathrm{sc}}(\overline{\mathbb{Q}}_{p'})$）。因此，$\mathrm{inn}(g_{\mathbb{Q}_{p'}}^{-1})T_{\mathbb{Q}_{p'}}$ 和 $T'_{\mathbb{Q}_{p'}}$ 是 $\mathbb{Q}_{p'}$-子环面，它们属于 $G_{\mathbb{Q}_{p'}}$，且在 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_{p'}}$ 中相等，故它们在 $\mathbb{Q}_{p'}$ 上已经相等：$\mathrm{inn}(g_{\mathbb{Q}_{p'}}^{-1})T_{\mathbb{Q}_{p'}} = T'_{\mathbb{Q}_{p'}}$。特别地，这对 $p' = p$ 成立，因此 $T'_{\mathbb{Q}_p}$ 也是非分歧的（因为 $g_p \in G(\mathbb{Q}_p)$），并且我们看到 $\mu' = \mathrm{inn}(g^{-1})\mu_T = \mathrm{inn}(g_{\mathbb{Q}_p}^{-1})\mu_T = \mathrm{inn}(g_{\mathbb{Q}_p}^{-1}g_p)\mu_p$；因此，相对于包含 $T'_{\mathbb{Q}_p}$ 的 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群 $B' = \mathrm{inn}(g_{\mathbb{Q}_p}^{-1}g_p)B_p$，$\mu'$ 是正的。我们还得出，对于任意不同的 i、$j \in I$，$(T'_i)^{\mathbb{Q}_{p_i,j}}$ 同构于 $(T_i)^{\mathbb{Q}_{p_i,j}}$，因而不同构于 $(T_j)^{\mathbb{Q}_{p_i,j}} \cong (T'_j)^{\mathbb{Q}_{p_i,j}}$。特别地，当 i、j 不同时，T'_i 不同构于 T'_j。

现在只需验证每个 $\mathbb{Q}$-环面 T'_i 都是不可约的。我们已知，对于所有素数$p' \neq p_0$，$T_{\mathbb{Q}_{p'}}$和 $T'_{\mathbb{Q}_{p'}}$是 $G(\mathbb{Q}_{p'})$-共轭的。特别地，对于所有这样的 p'以及所有 $i \in I$，$(T'_i)^{\mathbb{Q}_{p'}}$与$(T_i)^{\mathbb{Q}_{p'}}$同构。因此，向量空间 $X^\bullet(T_i)_{\mathbb{Q}}$和 $X^\bullet(T'_i)_{\mathbb{Q}}$上的 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\mathbb{Q}$上的伽罗瓦表示 ρ_{T_i}、$\rho_{T'_i}$: $\Gamma_{\mathbb{Q}} \to$ 一般线性群$_{n_i}(\mathbb{Q})$（维数为某个 n_i）在限制到每个分解群 $\Gamma_{\mathbb{Q}_{p'}}$、$p' \neq p_0$后同构。根据布劳尔–内斯比特定理和切博塔廖夫密度定理，对于所有 i，ρ_{T_i} 和$\rho_{T'_i}$ 同构；[7] 因此，ρ_{T_i}的不可约性蕴含$\rho_{T'_i}$的不可约性。□

注 3.8。在西格尔模情形中，该命题中的条件 (4) 和 (5) 蕴含相关的复乘阿贝尔簇在 p 上方某个合适的赋值处是普通的。更一般地，根据 [BST24，命题 9.10],，它们蕴含特殊子数据 (T', x') 在 μBST24，定义 9.1] 的意义下是 μ- 普通的（推广了 [RR96] 中隐含、并在 [Wed99] 中明确给出的一个定义）。一般情形下 μ-普通轨非空性的证明（[BST24，定理 9.2]）依赖于一种与命题 3.2 的论证密切相关的方法，以构造满足条件 (1)、(4)、(5) 以及条件 (2) 的一个弱化版本的特殊点（即 T'_i的伽罗瓦群包含韦伊群，如 [CO12，命题 5.11]所述）。

接下来，我们将引理 3.2 的结论以我们的应用所需的形式作更明确的表述。

引理 3.9. 设 $(T_x, x) \subset (G, X)$ 是一个特殊子数据，且满足 $x \in X^+$；对于 $a \in G(\mathbb{A}_f)$，设 $s = [x, a] \in \mathrm{Sh}(\mathbb{C})$ 为相应的特殊点。设 v 是 $\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/N]$ 上方、位于有理素数 p 之上的一个素数，并假设：

(1) 将 $T_x^{\mathrm{ad}} = \prod_{i \in I} T_{x,i}$ 写成极大环面 $T_{x,i} \subset G_i$ 的乘积时，每个 $T_{x,i}$ 都是不可约的，并且对于所有 $i \neq j$, $T_{x,i}$ 都不同构于 $T_{x,j}$。

(2) $G_{\mathbb{Q}_p}$ 是非分歧的，$T_{x,\,\mathbb{Q}_p}$ 是非分歧的，并且当我们固定一个嵌入 ι: $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$，它诱导赋值 v，以及一个域嵌入的交换图时

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{Q}} & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \overline{\mathbb{Q}}_p \\ \cup & & \cup \\ E(sK_0) & \hookrightarrow & E(sK_0)_v, \end{array}$$

[7] 注意，Brauer-Nesbitt 表明，它们作为到 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ 的表示是同构的，而不仅仅是作为 $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$-表示同构。

$\mu_{x,\iota}$ 相对于包含 $T_{x,\mathbb{Q}_p}$ 的 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 的一个 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群是正的。（这里 $\mu_{x,\iota}$ 表示沿着 ι 将 μ_x 扩张到 $X_\bullet(T_{x,\overline{\mathbb{Q}}_p})$ 中的一个元素。）

(3) K_0 包含 $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p)$，且（$a_p$ 作为 $a\in G(\mathbb{A}_f)$ 的 p 连通分支）a_p 属于 $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p)$。

设 $\ell\neq p$ 是一个不同的素数。那么令 $\rho_{\ell,sK_0}=\rho_\ell|_{sK_0}$，元素 $\rho_{\ell,sK_0}(\mathrm{Frob}_v)$ 在 $G_i(\mathbb{Q}_\ell)$ 的每个连通分支上的投影都具有无限阶。

证明。 在此证明中，我们采用约定 3.1。根据定义，h_x 的芒福德-泰特群 M_x 包含于 T_x。对于所有 $i\in I$、$T_{x,i}$ 不含真 $\mathbb{Q}$ 子环面，并且（根据志村数据的定义）h_x 在每个 $G_{i,\mathbb{R}}$ 上的投影均非平凡。因此 M_x 满射到每个 $T_{x,i}$，故典范复合

$$X^\bullet(T_{x,i})\hookrightarrow X^\bullet(T_x^{\mathrm{ad}})\twoheadrightarrow X^\bullet(M_x^{\mathrm{ad}})$$

对每个 i 都是单射。由于 $\mathbb{Q}[\Gamma_{\mathbb{Q}}]$-模 $X^\bullet(T_{x,i})_{\mathbb{Q}}$ 不可约且两两不同构，$\bigoplus_i X^\bullet(T_{x,i})$ 通过典范映射的直和嵌入 $X^\bullet(M_x^{\mathrm{ad}})$（且据我们所知，它满射到该空间），因此 $M_x^{\mathrm{ad}}=T_{\mathrm{ad}x}$。由此，$M_x$ 包含 $T_x\cap G^{\mathrm{der}}$。

回顾引理 3.2（我们沿用其中的记号）：为计算伽罗瓦作用，我们将 $qx=x$, $qak_0(\sigma)=r_x(\alpha)a$ 记作由互反映射映到 $\sigma\in\Gamma^{\mathrm{ab}}_{E(sK_0)}$ 的 $\alpha\in\mathbb{A}_E^\times/(sK_0)$。[UY13] 的引理 2.2 以及上述关于 M_x 的观察表明，$q\in\mathrm{Cent}_G(M_x)(\mathbb{Q})=T_x(\mathbb{Q})$。因此 $r_x(\alpha)=q\cdot(ak_0(\sigma)a^{-1})\in T_x(\mathbb{Q})\cdot(aK_0a^{-1}\cap T_x(\mathbb{A}_f))$。[UY13 的引理 2.1] 的证明表明 $T_x(\mathbb{Q})\cap aK_0a^{-1}=\{1\}$，其中用到了 $T_x=\mathrm{Cent}_G(M_x)$，以及 K_0 是整洁的这一点。特别地，如上所述，分解 $r_x(\alpha)=qak_0(\sigma)a^{-1}$ 是唯一的（给定 α；选择另一个映到 σ 的 α 会改变 $q\in T_x(\mathbb{Q})$）。

根据整模型的定义 $\mathcal{S}_{K_0,s}$ 以及 [PST+21，定理 4。1]，$sK_0=[x,a]_{K_0}$ 延伸到 $\mathcal{S}_{K_0,s}(\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/N])$，[8]因此对于 $v\nmid N\ell$, ρ_{ℓ,sK_0} 在 v 处非分歧。对于映到 Frobenius 元 $\mathrm{Frob}_v\in\Gamma^{\mathrm{ab}}_{E(sK_0}$ 的一致化子 $\varpi_v\in E(sK_0)_v)$，我们有

$$r_x(\varpi_v)=qak_0(\mathrm{Frob}_v)a^{-1}$$

对于唯一的 $q\in T_x(\mathbb{Q})$。在 ℓ 连通分支中考察这个恒等式，我们看到

$$a_\ell^{-1}q^{-1}a_\ell=k_{0,\ell}(\mathrm{Frob}_v).\tag{6}$$

在 $v|p$ 的条件下，于 p 连通分支中考察这个恒等式，我们看到

$$q^{-1}N_{E(sK_0)_v/\mathbb{Q}_p}(\mu_x(\varpi_v)))=a_pk_{0,p}(\mathrm{Frob}_v)a_p^{-1}.\tag{7}$$

右端属于 $T_x(\mathbb{Q}_p)\cap a_pK_0$，即 $T_x(\mathbb{Q}_p)$ 的紧开子群 ${}_pa_p^{-1}$，特别地，对于所有余特征 $\chi\in X^\bullet(T_x)$，$\chi(q^{-1}N_{E(sK_0)/\mathbb{Q}_p}(\mu_x(\varpi_v)))$ 的 p-进赋值都是平凡的。对于每个 $i\in I$，我们将公式（7）投影到 G^{ad} 的 G_i 连通分支，并通过考察 p- 进赋值看到，$q\in T_x(\mathbb{Q})$ 在 $T_{x,i}(\mathbb{Q})$ 中的像具有无限阶——因此，根据公式（6），$k_{0,\ell}(\mathrm{Frob}_v)$ 在 $G_i(\mathbb{Q}_\ell)$ 中的像也具有无限阶——当且仅当对于 $(G_i,T_{x,i})$ 的某个根 χ（或 $T_{x,i}$, $\chi(N_{E(sK_0)_v/\mathbb{Q}_p}(\mu_x(\varpi_v))$ 的非平凡特征），其仅取决于 $\mu_x(\varpi_v)$ 到 G_i 的投影，具有非零的 p-进赋值。

[8]注意，$\mathcal{S}_{K_0,s}(\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/N])=\mathcal{S}_{K_0,s}(E(sK_0))\cap\mathcal{S}_{K_0,s}(\overline{\mathbb{Z}}[1/N])$ 在 $\mathcal{S}_{K_0,s}(\overline{\mathbb{Q}})$ 中，之所以包含映射有意义，是因为 $\mathcal{S}_{K_0,s}$ 是分离的。事实上，对于任意有限伽罗瓦扩张 $L/E(sK_0)$，$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L[1/N])\to\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/N])$ 是自同构群 $\mathrm{Gal}(L/E(sK_0))$ 作用下的范畴商，因此$\mathcal{S}_{K_0,s}(\mathcal{O}_L[1/N])^{\mathrm{Gal}(L/E(sK_0))}=\mathcal{S}_{K_0,s}(\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/N])$。

现在我们将使用额外假设（2）和（3）。环面 $T_{x,\mathbb{Q}_p}$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 的一个非分歧扩张上分裂，因此 μ_x 定义在这样的扩张上，而 $E(x)/\mathbb{Q}$ 是 p 上的非分歧扩张。事实上， $E(sK_0)/E(x)$ 在 p 之上的所有素数处也都是非分歧的。确实，将典范模型刻画（公式（3））应用于 $\alpha \in \mathcal{O}_E^\times$ $(x)_v$（ $v|p$），可知一旦 $T_x(\mathbb{Q}_p)$ 的唯一最大有界（或紧）子群 $T_x(\mathbb{Q}_p)^0$ 包含于 $a_pK_0a_p^{-1}$ 中，惯性群 $I_{E(x)_v}$ 就固定 $sK_0 = [x,a]_{K_0}$。根据 [GH19，引理 A.5.2]， $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p) \cap T_x(\mathbb{Q}_p)$ 等于 $T_x(\mathbb{Q}_p)^0$，，因此在我们的假设下包含于 $a_pK_0a_p^{-1}$ 中。

对于前一段中的 p，我们可以取 $\varpi_v = p$ 为 $E(sK_0)_v$ 的一致化子，其中 $v|p$。为了证明 $k_{0,\ell}(\mathrm{Frob}_v)$ 在 $G_i(\mathbb{Q}_\ell)$ 中具有无限阶，我们计算

$$N_{E(sK_0)_v/\mathbb{Q}_p}(\mu_x(p)) = \prod_{\sigma\colon E(sK_0)_v \to \overline{\mathbb{Q}}_p} \sigma(\mu_x(p)) = \prod_{\sigma\colon E(sK_0)_v \to \overline{\mathbb{Q}}_p} {}^{\sigma}\mu_x(\sigma(p)) = \Big(\sum_{\sigma\colon E(sK_0)_v \to \overline{\mathbb{Q}}_p} {}^{\sigma}\mu_x\Big)(p).$$

（我们用 ${}^{\sigma}\mu_x$ 表示对余特征 μ_x 的作用，用 $\sigma(\mu_x(p))$ 表示对取值 $\mu_x(p)$ 的作用。）根据构造，$\mu_{x,\iota}$ 相对于 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 的一个 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群 B_x 是正的，因此它在 $T_{x,\iota}$ 中的投影相对于 B_x 的每个投影 $B_{x,\iota} \subset G_i$ （一个 $\mathbb{Q}_p$- 有理 Borel 子群）都是正的：注意，此处的 “ 正 ” 意指严格为正，因为 μ_x 在每个 G_i 中都非平凡。我们的嵌入 ι 诱导出上述乘积中的一个嵌入 σ，因此 $\sum_{\sigma\colon E(sK_0)_v \to \overline{\mathbb{Q}}_p} {}^{\sigma}\mu_x$ 的 G_i-投影相对于该 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群也为正 B_{x,ι_0}。特别地，对于某个 $B_{x,\iota}$-正根 $\chi \in X^\bullet(T_{x,\iota})$，存在 $\chi \circ \left(\sum_{\sigma\colon E(sK_0)_v \to \overline{\mathbb{Q}}_p} {}^{\sigma}\mu_x\right) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)$，对于某个 $n > 0$，它是 $z \mapsto z^n$，并且

$$\chi(N_{E(sK_0)_v/\mathbb{Q}_p}(\mu_x(p))) = p^n$$

具有正的 p-进赋值。我们得出结论，对于每个 i，$k_{0,\ell}(\mathrm{Frob}_v)$ 在 $G_i(\mathbb{Q}_\ell)$ 中的投影都具有无限阶。□

现在我们可以将这些要素整合起来，证明我们的主要定理：

定理 3.10. 设 (G,X) 是一个志村数据，使得 $Z_G(\mathbb{Q})$ 是 $Z_G(\mathbb{A}_f)$ 的离散子群。因此，对于每个整洁紧开子群 $K_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$ 以及 $s \in \mathrm{Sh}(G,X)(\mathbb{C})$，我们有典范的 ℓ-进局部系统

$$\rho_{K_0,s,\ell}\colon \pi_1(S_{K_0,s}, \bar{s}) \to K_{0,\ell}$$

定义于 §3.1，其伴随投影记作 ρ_ℓ。

假设：

$$(*)\ \textit{For every } \mathbb{Q}\textit{-simple factor } H \textit{ of } G^{\mathrm{ad}},\ \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(H_{\mathbb{R}}) \geq 2. \tag{8}$$

因此，如§3.2中所述，对于所有 ℓ， ρ_ℓ 延拓至整模型 $\mathcal{S}_{K_0,s}[1/\ell] \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E_{K_0,s}}[1/N\ell])$，

$$\rho_\ell\colon \pi_1(\mathcal{S}_{K_0,s}[1/\ell], \bar{s}) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell).$$

~那么存在一个整数 N，使得对于所有素数 ℓ， ℓ'、 ρ_ℓ 和 $\rho_{\ell'}$ 在$\mathcal{S}_{K_0,s}[1/N\ell\ell']$上是伴随表示~，其含义是：对于所有闭点$x \in \mathcal{S}_{K_0,s}[1/N\ell\ell']$， $\rho_\ell(\mathrm{Frob}_x)$和 $\rho_{\ell'}(\mathrm{Frob}_x)$的共轭类是 $\mathbb{Q}$-有理的，并且由 $[G^{\mathrm{ad}}/\!\!/G^{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q})$中的同一个元素表示。

证明。 G^{ad} 是若干个 $\mathbb{Q}$-单因子的乘积，只需对每个 $\mathbb{Q}$-单因子证明所述相容性。固定 $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K_0$的一组代表元 $\mathcal{C}\subset G(\mathbb{A}_f)$，并固定一个光滑约化模型$\underline{G}\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N_0])$，使得对于所有 $p\nmid N_0$， $G_{\mathbb{Q}_p}$ 是非分歧的。令 N_1 为所有素数 p 的乘积，其中对于有限个元素 $a\in\mathcal{C}$中的某一个， p-分量 a_p 不属于 $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p)$；令 N_2 为所有满足~的素数 p 的乘积，使得 K_0 不包含$\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p)$。最后设 $N=NN_0N_1N_2$。

固定一个连通分支 X^+ 的 X。每个 $a\in\mathcal{C}$ 随后如方程（4）所示，确定 Sh_{K_0} 的一个几何连通分支；对于每个此类分支的复几何点 $\bar{s}_a=[x_a,a](x_a\in X^+)$， 命题 3.3 及其后的讨论给出 $\mathcal{S}_{K_0}$上的局部系统 $\rho_{\ell\ s_a}[1/\ell]$。我们将在将其限制~到$\mathcal{S}_{K_0}$后$s_a[1/N\ell\ell']$检验所声称的相容性。改变基点会使 ρ_ℓ 共轭；在下一段中，我们将为每个连通分支指定方便的基点。

~固定 $\mathcal{O}_{E_{K_0,s}}[1/N\ell\ell']$ 上方的一个素数 v，其上方是某个有理素数 p；并固定一个嵌入 $\iota_p\colon\overline{\mathbb{Q}}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ ，它诱导 v，如引理 3.9 中所述。只需对每个这样的 v 分别证明，限制表示 $\rho_{\ell,v}$ 和 $\rho_{\ell',v}$ 到 $\mathcal{S}_{\kappa(v)}:=\mathcal{S}_{K_0,s}\times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E_{K_0,s}})}\mathrm{Spec}(\kappa(v))$ 后满足伴随性质。按命题 3.7 取一个特殊子数据 $(T_x,x)\subset(G,X)$，使得 $x\in X^+$,$T_x^{\mathrm{ad}}=\prod_{i\in I}T_{x,i}$ 是极大环面 $T_{x,i}\subset G_i$ 的乘积，其中 $T_{x,i}$ 都是不可约且彼此不同构的 $\mathbb{Q}$-环面；Hodge 余特征 $\mu_x\colon\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}}\to T_{x,\overline{\mathbb{Q}}}$（复余特征的典范 $\overline{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{C}$ 下降）定义了 $\mu_{x,\iota_p}\in X_\bullet(T_{x,\mathbb{Q}_p})$，它相对于包含非分歧环面 $T_{x,\mathbb{Q}_p}$ 的一个 $\mathbb{Q}_p$-有理 Borel 子群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 为正。现在指定基点 s_a 为 $\bar{s}=[x,a]\in\mathrm{Sh}(\mathbb{C})$，它也诱导 $sK_0\in\mathcal{S}_{K_0,s}(\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/N])$（整性见引理 3.9 的证明）。令 $w|v$ 为 $\mathcal{O}_{E(sK_0)}$ 上方的赋值 v，使得ι_p 也诱导 w，并考虑沿交换图中的映射 s_w 对局部系统 ρ_ℓ 的限制（左侧竖箭头由特化 sK_0 得到）

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(\kappa(w)) & & \longrightarrow & & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/\widetilde{N}\ell\ell']) \\
\downarrow & & \overset{s_w}{\searrow} & & \downarrow{\scriptstyle sK_0} \\
\mathcal{S}_{\kappa(w)} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{\kappa(v)} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{K_0,s}[1/\widetilde{N}\ell\ell'].
\end{array}$$

伽罗瓦表示$\rho_\ell|_{sK_0}$ 和 $\rho_{\ell'}|_{sK_0}$ 是相容的，这可通过方程（3）轻易证明：见方程（6）（经典例子见 [Ser98，§II.2.8]）。根据命题2.8，要证明$\rho_{\ell、v}$ 和$\rho_{\ell'、v}$ 的相容性，只需验证假设 2.7成立。鉴于限制到 sK_0后相容，这等价于检查$\rho_\ell|_{sK_0}(\mathrm{Frob}_w$不被$G^{\mathrm{ad}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ 的任何外自同构固定。

根据引理 3.9 以及我们的要求， $v\nmid\widetilde{N}\ell\ell'$，$\rho_\ell|_{sK_0}(\mathrm{Frob}_w)\in K_0\cap(a_\ell^{-1}T_{\mathrm{adx}}(\mathbb{Q}_\ell)a_\ell)$ 在每个 $G_i(\mathbb{Q}_\ell)$ 中都具有无限阶。定义表示 r_ℓ 为

$$r_\ell=a_\ell\rho_\ell|_{sK_0}a_\ell^{-1}\colon\pi_1(E(sK_0),\bar{s})\to T_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell).$$

注意，根据公式（6）（其中现在记作 w 的对象原记作 v）， $r_\ell(\mathrm{Frob}_w)$ 属于 $T_{\mathrm{adx}}(\mathbb{Q})$。如果 $r_\ell(\mathrm{Frob}_w)$ 被 $\tau(G^{\mathrm{ad}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell})$ 的某个自同构固定，那么 τ 也会逐点固定由 $r_\ell(\mathrm{Frob}_w)\in T_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ 生成的子群的 $\mathbb{Q}$-Zariski 闭包 $\overline{\langle r_\ell(\mathrm{Frob}_w)\rangle}^{\mathrm{Zar}}$。

在每个 G_i-投影中， $r_\ell(\mathrm{Frob}_w)$ 具有无限阶，因此 $\overline{\langle r_\ell(\mathrm{Frob}_w)\rangle}^{\mathrm{Zar}}$ 必须满射到每个不可约环面 T_x、$_{i\circ}$ [9] 按照引理 3.9 第一段中的论证，并利用环面 T_x、$_i$ 两两不同构，我们推得 $\overline{\langle r_\ell(\mathrm{Frob}_w)\rangle}^{\mathrm{Zar}}$ 等于 T_x^{ad}。因此， τ 是 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{ad}}$ 的一个自同构，并在 $T_{\overline{x}}^{\mathrm{ad}}$、$_{\mathbb{Q}_\ell}$ 上诱导恒等映射。于是它在根数据 $R(G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{ad}}, T_{\overline{x}}^{\mathrm{ad}}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上诱导恒等自同构；由约化群同构定理（[Con14，定理 1.3.15]），该自同构是由 $T_x^{\mathrm{ad}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中某个元素的共轭作用给出的。特别地， τ 是内自同构。立即可得， $\rho_\ell|_{sK_0}(\mathrm{Frob}_w)$ 同样不被 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{ad}}$ 的任何非平凡外自同构固定，因此我们验证了假设~2.7 的第二个假设，并由命题 2.8 得出，对于所有 $v \nmid N\ell\ell'$、 $\rho_\ell|_{\mathcal{S}_{\kappa(v)}}$ 和 $\rho_{\ell'}|_{\mathcal{S}_{\kappa(v)}}$ 都是伴随表示。

因此，对于每个 $v \nmid N$ 和闭点 $x \in \mathcal{S}_{\kappa(v)}$，我们得到一个半单共轭类 $\alpha_x \in [G^{\mathrm{ad}} /\!\!/ G^{\mathrm{ad}}](\overline{\mathbb{Q}})$，它由 $\rho_\ell(\mathrm{Frob}_x)$ 的共同底层半单类给出（只要 $\sim_\ell$ 不低于 v），并且（同样在 $v \nmid N\ell$ 时）对于任意嵌入 $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$，都有 α_x 属于 $[G^{\mathrm{ad}} /\!\!/ G^{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q}_\ell)$。由于 α_x 定义在 $\mathbb{Q}$ 的某个有限扩张 E 上，且对于几乎所有 ℓ，它在 ℓ 上方的分解群作用下保持不变，切博塔廖夫密度定理蕴含 α_x 属于 $[G^{\mathrm{ad}} /\!\!/ G^{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q})$。（这一有理性论证见 [KZ21，定理 6.1.4]。）□

注 3.11。或许有必要在此补充说明最后一个证明中关于 r_ℓ 的讨论。引理 3.9 的证明一直到公式（6）为止，对任意素数 $w' \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E(sK_0)}[1/N\ell])$ 都适用，从而表明对于所有这样的 w'， $r_\ell(\mathrm{Frob}_{w'}) \in T_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$（该引理的后续断言依赖于其他假设）。因此， r_ℓ 是一个阿贝尔 $\mathbb{Q}$-有理 ℓ-进表示，必然是 Hodge–Tate 的（可通过使用公式（7）直接计算，或由 Serre 和 Waldschmidt 的定理验证），其意义取自 Serre 理论（[Ser98]）。我们验证它来自一个（唯一的） $\mathbb{Q}$-代数表示 $r\colon \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{E(sK_0),\mathfrak{m}} \to T_x^{\mathrm{ad}}$，该表示属于 Serre 群 $\mathfrak{S}_{E(sK_0),\mathfrak{m}}$，对应于数域 $E(sK_0)$ 及某个模 $\mathfrak{m}$：这是 $\mathbb{Q}$ 群，记作 $S_{\mathfrak{m}}$，见 [Ser98, §II-2]，其中所引文献中的数域 K 即我们的 $E(sK_0)$。事实上，对于每个 $\mathbb{Q}$-有理表示 $s_V\colon T_x^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{Aut}(V)$（$V$ 为有限维 $\mathbb{Q}$-向量空间），都有一个相应的、模为 $\mathfrak{m}$ 的阿贝尔 ℓ-进 $\mathbb{Q}$-有理表示 $s_V \circ r_\ell$；根据 [Ser98, III.2.3 定理 2]，它来自唯一的同态 $\mathfrak{S} \to \mathrm{Aut}(V)$。我们得到一个张量函子 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(T\mathrm{ad}_x) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{S})$，其诱导出所需的同态 $r\colon \mathfrak{S} \to T_x^{\mathrm{ad}}$.[10]

[9] 在这一论证中，我们用到了这样一个事实：$\overline{\langle r_\ell(\mathrm{Frob}_w)\rangle}^{\mathrm{Zar}}$ 是 G^{ad}（在 $\mathbb{Q}$ 上）的相应扎里斯基闭包，而它在 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的基变换是 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{ad}}$ 中的扎里斯基闭包。事实上，我们只知道 τ 是 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{ad}}$ 的一个自同构，因此首先得出结论： τ 保持 $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{ad}}$（在 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上）中子群 $\langle r_\ell(\mathrm{Frob}_w)\rangle$ 的扎里斯基闭包不变，然后再应用扎里斯基闭包的这一基变换性质。[10] 所引定理表明，存在 $V_{\mathbb{Q}_\ell}$ 上的一个 $\mathbb{Q}$-结构 V_0，使得 $s_V \circ r_\ell$ 来自一个同态 $\mathfrak{S} \to \mathrm{Aut}_{V_0}$；但可以验证， $V_0 = V$ 本身即可，并且一旦指定 $\mathbb{Q}$-结构，由此得到的 $\mathbb{Q}$-群同态便是唯一的。利用这一唯一性，我们得到一个张量函子。另一种方法是，下面给出一个更具体的论证来构造同态 r。我们先定义一个同态 $\mathfrak{S}_{\overline{\mathbb{Q}}} \to T\mathrm{ad}_{x,\overline{\mathbb{Q}}}$，方法是定义群同态 $X^\bullet(T_x^{\mathrm{ad}}) \to X^\bullet(\mathfrak{S})$ 如下。设 L 是一个伽罗瓦扩张于 $\mathbb{Q}$、并分裂 T_x^{ad} 的数域；任意 $\chi \in X^\bullet(T\mathrm{ad}_x)$ 都定义在 L 上，并且对于 L 的任意赋值 $\lambda|\ell$，我们有 $\chi_\lambda := \chi \circ r_\ell\colon \pi_1(E(sK_0)) \to L_\lambda^\times$，且满足对所有 $v \nmid \mathfrak{m}$，Frob_v 都映到 $L^\times$ 的一个元素。根据 Serre 理论（[Ser98，III.2.3–III.2.4]），存在唯一的特征 $r(\chi)\colon \mathfrak{S}_L \to \mathbb{G}_{m,L}$，使得 χ_λ 等于复合映射 $\pi_1(E(sK_0)) \xrightarrow{\varepsilon_\ell} \mathfrak{S}(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{r(\chi)} L_\lambda^\times$，其中 ε_ℓ 是 [Ser98，§II.2.3] 中的典范同态。显然，赋值 $\chi \mapsto r(\chi)$ 是一个群同态。因此我们得到 $r\colon \mathfrak{S}_L \to T\mathrm{ad}_{x,L}$，使得

对于我们指定的素数 w， $r(\varpi_w)$（ϖ_w 在 w 处的一致化子）是元素 $r_\ell(\mathrm{Frob}_w) \in T_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$，因此定理 3.10 中的论证表明 $r\colon \mathfrak{S} \to T_x^{\mathrm{ad}}$是满射。

推论 3.12。在定理 3.10 的设定下继续。设 $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ 是一个包含反身域 $E(G,X)$ 的数域，且 $y \in \mathrm{Sh}_{K_0}(F)$ 是一个 F-有理点。存在一个几何连通分支 $S_{K_0,s}$，如定理中所述，其定义域 $E_{K_0,s}$ 包含于 F 中，使得 y 属于 $S_{K_0,s}(F)$，因而属于 $\mathcal{S}_{K_0,s}(\mathcal{O}_F[1/N(y)]$，其中某个整数 $N(y)$可被定理 3.10 中的整数 N 整除。

对于所有 ℓ，我们考虑以下限制表示

$$\rho_{\ell,y}\colon \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F[1/(N(y)\ell)]), \bar{s}) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)$$

~沿着 y 对 ρ_ℓ 的限制表示。那么对于所有 F 的有限处 $v \nmid NN(y)\ell$， $\rho_{\ell,\ y}(\mathrm{Frob}_v)$ 的底层半单共轭类是 $\mathbb{Q}$-有理的，且作为 $[G^{\mathrm{ad}}/\!\!/G^{\mathrm{ad}}](\mathbb{Q})$ 的元素与 ℓ 无关。

证明。复合映射 $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{Spec}(F) \xrightarrow{y} \mathrm{Sh}_{K_0}$ 定义了 $\mathrm{Sh}_{K_0,\overline{\mathbb{Q}}}(\overline{\mathbb{Q}}) = \bigsqcup S_{K_0,s,\overline{\mathbb{Q}}}(\overline{\mathbb{Q}})$ 的一个元素，其中不交并取遍 $\pi_0(\mathrm{Sh}_{K_0,\overline{\mathbb{Q}}})$。因此， y 恰好与一个几何连通分支 $S_{K_0,s}$ 相交，且在 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ 下不变；由此可知， F 包含 $E_{K_0,s}$。推论的结论随即由定理 3.10 得出。□

备注 3.13。 对于任意素数 ℓ，我们可以找到 F和 $y \in \mathrm{Sh}_{K_0}(F)$，如推论 3.12 中所述，使得$\rho_{\ell,\ y}$ 在 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)$ 中具有扎里斯基稠密像，甚至是开像。这与 [Ser97，§10.6] 中的论证相同，可由希尔伯特不可约性和 Frattini 论证得出。我们尚未研究是否可以进一步证明预期的结论：对于所有 ℓ', $\rho_{\ell',\ y}$ 在$G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_{\ell'})$ 中也具有扎里斯基稠密像。

注 3.14. 在超刚性 Shimura 簇上证明 $G(\mathbb{Q}_\ell)$-局部系统相容性的基本障碍，源于 §2 中的抽象结果。在命题 2.3 中，沿用其记号，但如 §3 所示允许一般的 G，要证明 λ-进局部系统延拓至 $X_{\mathcal{O}_F[1/N'\ell]}$，且存在某个与 ℓ 无关的 N'，而不要求 G 是伴随的，主要困难在于下降到 X_F 的不唯一性：对于变化的 λ，任何给定的下降都可以被特征 $\pi_1(X_F) \to Z_G(\overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$ 扭曲（这些特征具有不同的分歧性质）。然而，在志村簇的情形下，要实现命题 2.3 第 (2) 部分的类似结论，还受到另外两方面的阻碍。首先，当我们在 v-纤维上取伴随表示，并通过温和特化拉回至拓扑基本群表示时，Margulis 超刚性只能给出较弱的结果：命题 3.3 中出现的自同构 τ 会起作用，但特征 $\Gamma \to Z_{G^{\mathrm{der}}}$ 也会起作用（见 [Mar91, 定理 VIII.3.4.(a)]），这进一步阻碍了对与伴随表示相关的拓扑基本群表示进行分析。其次，即使没有这一拓扑障碍，引理 2.1 中下降的唯一性（这使推论 3.5 能够在 $\kappa(v)$ 上成立，而不仅仅是在 $\mathbb{C}$ 上成立，或

对所有 ℓ， r_ℓ 都是复合映射

$$\pi_1(E(sK_0)) \xrightarrow{\varepsilon_\ell} \mathfrak{S}(\mathbb{Q}_\ell) \to \mathfrak{S}(L_\lambda) \xrightarrow{r} T_x^{\mathrm{ad}}(L_\lambda).$$

为证明 r 定义在 $\mathbb{Q}$上，我们注意到，对所有 ℓ 和 $\lambda|\ell$，在 L_λ-点上， r 将 $\mathfrak{S}(\mathbb{Q}_\ell)$映到$T_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)$：事实上， ε_ℓ 的像在 $\mathfrak{S}_{\mathbb{Q}_\ell}$（[Ser98，II.2.3，注]）中扎里斯基稠密，并且我们知道每个 r_ℓ都落在 $T_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_\ell)$中。这说明，对所有 ℓ、 λ， r都在伽罗瓦群$(L_\lambda/\mathbb{Q}_\ell)$作用下不变，因而（由切博塔廖夫定理） r在伽罗瓦群$(L/\mathbb{Q})$作用下不变。作为一个乘法型群态射，它定义在 $\mathbb{Q}$上。

$\overline{\kappa}(v)$）在此不再成立。在志村簇的情形下，我们可以证明典范局部系统在投影至 G/G^{der}（以及投影至 G^{ad}，根据定理 3.10），但总而言之，在 $Z_{G^{\mathrm{der}}}$ 方面仍有两个困难，阻碍了我们在G中建立相容性。尽管如此，在进行中的工作中，我们乐观地认为能够将我们的方法与 [BST24]的结果结合起来，以解决一般情形。

References

[Art69] M. Artin, 《完备局部环上的结构的代数逼近》, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.（1969）, 第 36 号, 23–58。MR 268188[BST24] Benjamin Bakker、Ananth N. Shankar 和 Jacob Tsimerman, 《例外志村簇的整规范模型》。arXiv 预印本 arXiv:2405.12392v1, 2024。[BCE+18] G. Boxer、F. Calegari、M. Emerton、B. Levin、K. Madapusi Pera 和 S. Patrikis, 《与例外群E_6相关的伽罗瓦表示相容族》, 即将发表于 Forum of Math. Sigma, arXiv:1805.09777（2018）。[BHKT19] Gebhard B¨ockle、Michael Harris、Chandrashekhar Khare 和 Jack A. Thorne, 《光滑射影曲线上的 $\hat{G}$-局部系统是潜在自守的》, Acta Math. 223（2019）, 第 1 号, 1–111。MR 4018263[CK16] Anna Cadoret 和 Arno Kret, 《志村簇上的伽罗瓦泛点》, Algebra Number Theory 10（2016）, 第 9 号, 1893–1934。MR 3576114[CO12] Ching-Li Chai 和 Frans Oort, 《与雅可比簇同源的阿贝尔簇》, Ann. of Math.（2）, 176(1):589–635, 2012。[Chi04] CheeWhye Chin, 《单值群的独立性》, J. Amer. Math. Soc. 17（2004）, 第 3 号, 723–747。MR 2053954 l Com[Johan M. Commelin, 《阿贝尔动机的 19]-进实现的相容性》, Ann. Inst. Fourier（Grenoble）69（2019）, 第 5 号, 2089–2120。MR 4018256 ℓCon[Brian Conrad, 《约化群概形》, Autour des sch14] emas en groupes, Panora- mas et Synth´eses `Panoramas and Syntheses [第 42–43 卷, Soci], et´e Math´ematique de France, 巴黎, 2014, 第 458 页。´Del[Pierre Deligne, 《l 函数函数方程的常数》, Mod- ular functions of one variable II, Springer, 1973, 第 501–597 页。73] Del ´《志村簇：模解释与规范模型的构造技术》, Automorphic forms, representations and [- functions（Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977）, 第 2 部分, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, 第 247–289 页。MR 546620 (81i:10032)79] ———, Dri´Vladimir Drinfeld, 《关于 Deligne 的一个猜想》, Mosc. Math. J. 12（2012）, 第 3 号, 515–542, 668。MR 3024821 ´Dri´《有限域上光滑簇基本群的 pro-半单完备化》, Adv. Math. 327（2018）, 708–788。MR 3762002

伴随 Shimura 簇上规范 ℓ-进局部系统的相容性 27[EG18] H´el`ene Esnault 和 Michael Groechenig，《上同调刚性局部系统与整性》，Selecta Math.（N.S.）24（2018），第 5 号，4279–4292。MR 3874695[GH19] RJ Getz 和 Heekyoung Hahn，《自守表示导论：以迹公式为视角》，gtm丛书，2019。[Gey78] Wulf-Dieter Geyer，《局部域交的伽罗瓦群》，Israel J. Math., 30(4):382–396，1978。[GM06] Alexandre Grothendieck 和 Jacob P Murre，《概形上具有正规交叉除子的形式邻域的温和基本群》，第 208 卷，Springer，2006。[KS10] Moritz Kerz 和 Alexander Schmidt，《算术几何中温和性的不同概念》，Mathematische Annalen 346（2010），第 3 号，641。[Kis17] Mark Kisin，《阿贝尔型志村簇上的模 p 点》，J. Amer. Math. Soc. 30（2017），第 3 号，819–914。MR 3630089[KPS15] Mark Kisin、K Madapusi Pera 和 Sug Woo Shin，《志村簇的 Honda-Tate 理论》，预印本（2015）。[KZ21] Mark Kisin 和 Rong Zhou，《关于附属于阿贝尔簇的弗罗贝尼乌斯共轭类的 ℓ 独立性》，2021。[KP22] Christian Klevdal 和 Stefan Patrikis，《 G-上同调刚性局部系统是整的》，Trans. Amer. Math. Soc. 375（2022），第 6 号，4153–4175。MR 4419055[KP23] Christian Klevdal 和 Stefan Patrikis，《志村簇上规范 ℓ-进局部系统的相容性》。arXiv 预印本 arXiv:2303.03863v1，2023。[Kot90] Robert E. Kott witz，《志村簇与 λ-进表示》。载于 Automor- phic forms, Shimura varieties, and L-functions，第 I 卷（Ann Arbor, MI，1988），Perspect. Math. 第 10 卷，第 161–209 页。Academic Press，Boston, MA，1990。[Kot92a]Robert E. Kottwitz，《与某些简单志村簇相关的 λ-进表示》，Invent. Math., 108(3):653–665，1992。[Kot92b] Robert E. Kottwitz，《有限域上某些志村簇的点》，J. Amer. Math. Soc., 5(2):373–444，1992。[LR87]R. P. Langlands 和 M. Rapoport，《志村簇与 Gerben》，J. Reine Angew. Math. 378（1987），113–220。MR 895287 ¨LS[Kai-Wen Lan 和 Junecue Suh，《一般 PEL 型西穆拉簇上扭自守层的消失定理》，Adv. Math. 242（2013），228–286。MR 305599513]LO[Max Lieblich 和 Martin Olsson，《10] etale 基本群的生成元与关系》，Pure Appl. Math. Q. 6（2010），第 1 号，特刊：纪念 John Tate，第 2 部分，209–243。MR 2591190 ´LZ[Ruochuan Liu 和 Xinwen Zhu，《17] -进局部系统的刚性与 Riemann-Hilbert 对应》，Invent. Math. 207（2017），第 1 号，291–343。MR 3592758

[Litt]Daniel Litt. 基本群的算术表示 II：有限性。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:1809.03524，2018年9月。[Mar91] Gregori A Margulis，《半单李群的离散子群》，第17卷，Springer Science & Business Media，1991年。[Mil83] J. S. Milne，《C 上自同构在志村簇及其特殊点上的作用》，《算术与几何》第一卷，Progr. Math.，第35卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1983年，第239–265页。MR 717596[Mil05] ———，《志村簇导论》，《调和分析、迹公式与志村簇》，Clay Math. Proc.，第4卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年，第265–378页。MR 2192012[Pet20] Alexander Petrov，几何不可约的 p-adic 局部系统经扭曲后为 de Rham，arXiv 预印本 arXiv:2012.13372（2020）。[PR94] Vladimir Platonov 和 Andrei Rapinchuk，《代数群与数论》，纯粹与应用数学丛书，第139卷，Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1994年，由 Rachel Rowen 从1991年俄文原著翻译。MR 1278263[PR01] Gopal Prasad 和 Andrei S. Rapinchuk，《半单群中的不可约环面》，Internat. Math. Res. Notices（2001），第23期，1229–1242页。MR 1866442[PST+21]Jonathan Pila、Ananth N Shankar、Jacob Tsimerman、H´el`ene Esnault 和 Michael Groechenig，《志村簇上的规范高度与 André–Oort 猜想》，arXiv 预印本 arXiv:2109.08788（2021）。\Raj[C. S. Rajan，《关于 98] -adic 表示的强重数一》，Internat. Math. Res. Notices（1998），第3期，161–172页。MR 1606395（99c:11064）lRR[M. Rapoport 和 M. Richartz，《关于带附加结构的 96] -等晶体的分类与特化》，Compositio Math.，103(2):153–181，1996年。 FSer[Jean-Pierre Serre，《Mordell-Weil 定理讲义》，第三版，Aspects of Mathematics，Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，1997年。Martin Brown 根据 Michel Waldschmidt 的笔记从法文翻译并编辑，附有 Brown 和 Serre 撰写的序言。MR 175719297] Ser[J-P. Serre，《阿贝尔 98] -adic 表示与椭圆曲线》，A K Peters Ltd.，韦尔斯利，马萨诸塞州，1998年。Willem Kuyk 和 John Labute 协助完成；为1968年原版的修订重印本。 ℓsga[《Etale 覆盖与基本群》，数学讲义，第224卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1971年，布瓦-马里代数几何研讨会 1960–1961（SGA 1），由 Alexandre Grothendieck 主持。增补 M. Raynaud 的两篇讲座。MR 035465171] Spi ´Mark Spivakovsky，《关于 D. Popescu定理（环同态的光滑化）的一种新证明》，J. Amer. Math. Soc. 12（1999），第2期，381–444页。MR 1647069´Sta´Stacks项目作者，《Stacks项目》，´，2023年。

[UY13] Emmanuel Ullmo 和 Andrei Yafaev，《Mumford-Tate 猜想与广义 Shafarevich 猜想》，Ann. Math. Qu´e. 37（2013），第2期，255–284页。MR 3117743[Vos98] V. E. Voskresenskiĭ，《代数群及其双有理不变量》，《数学专著译丛》，第179卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998年，由 Boris Kunyavski[Boris ̀E. Kunyavskiĭ] 从俄文手稿翻译。MR 1634406[Wed99] Torsten Wedhorn，《PEL 型志村簇良约化中的普通性》，Ann. Sci. ́École Norm. Sup. (4)，32(5):575–618，1999年。[Yun14] Zhiwei Yun，《具有例外伽罗瓦群的动机与逆伽罗瓦问题》，Invent. Math. 196（2014），第2期，267–337页。

Department of Mathematics, University of California San Diego, 9500 Gilman Drive, LaJolla, CA 92093, USA
电子邮箱地址：cklevdal@ucsd.edu

Department of Mathematics, The Ohio State University, 100 Math Tower, 231 West 18th Avenue, Columbus, OH 43210, USA
电子邮箱地址：patrikis.1@osu.edu