arXiv:2303.03867v1 [math.CT] 7 Mar 2023

广义自动机范畴的完备性

GuidoBoccali ！意大利都灵，都灵大学
AndreaLaretto ！爱沙尼亚塔林，塔林理工大学**FoscoLoregian** ！爱沙尼亚塔林，塔林理工大学**StefanoLuneia** ！意大利博洛尼亚，博洛尼亚大学

摘要

我们给出了一个简洁的证明，证明 F-自动机范畴是完备且余完备的。通常，输入为 I、输出为O、定义确定性自动机的映射跨度 $E \leftarrow E \otimes I \rightarrow O$（其中输入和输出取自幺半范畴（$\mathcal{K}$ $\otimes$））被替换为一个跨度 $E \leftarrow FE \rightarrow O$，其对应于一般范畴 $\mathcal{K}$上的一般自函子$F\colon$ $\mathcal{K}$ $\rightarrow\mathcal{K}$。这类自动机有“米利”和“Moore”两种形式，分别构成范畴 F-Mly 和 F-Mre；这些范畴可表示为 Cat 中的严格 2-拉回，并且只要 F是左伴随， F-Mly 和 F-Mre 就具有 $\mathcal{K}$所具有的所有极限和余极限。我们使用 Agda 证明助手和库 `agda-categories` 对主要结果进行了形式化。

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 自动机扩展；计算理论 → 无限对象上的自动机；计算理论 → 形式语言与自动机理论；计算理论 → 形式体系

关键词与短语 确定性自动机、Moore 机、Mealy 机器、余代数、余完备范畴。

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs.CVIT.2016.23

资助 F. Loregian 得到了欧洲科学基金会资助的爱沙尼亚 IT 学院研究措施（项目 2014-2020.4.05.19-0001）的支持。

致谢 致 *René*，因为要读懂你，总得费些心思。

1 引言

在范畴论环境中，确定性自动机最直接的表示之一（参见 [1, 4, 5]）是由一组态射构成的跨度 $E \leftarrow E \times I \rightarrow O$：左侧的腿给出自动机在当前状态 E 和输入 I下的后继状态概念，右侧的腿则根据相同的数据给出输出 O。根据输出态射是同时依赖当前状态和输入，还是仅依赖状态，我们可以分别讨论米利自动机和 Moore 自动机。这种“范畴中的自动机”视角自然地体现了这样一种思想：范畴的态射可以被诠释为对过程／顺序操作的一般抽象。

上述确定性自动机的概念可以推广到任意幺半范畴；在其中，诸如最小化、双模拟和幂集构造等各种经典自动机概念，都可以像专著 [5] 中那样得到等价的重构和研究。

在 [1, 6], 自动机中，将情形推广到不再从状态与输入的幺半积 $E \otimes I$ 取跨度，而是考虑针对一般自函子 $F\colon\mathcal{K}$ $\rightarrow \mathcal{K}$ 的跨度 $E \leftarrow FE \rightarrow O$，从而抽象出环境结构，使自动机能够推进到“下一个”状态并给出输出。

© Guido Boccali、Andrea Laretto、Fosco Loregian 和 Stefano Luneia；依据知识共享许可协议 CC-BY 4.0 授权
第42届重要主题会议（CVIT 2016）。编辑：John Q. Open 和 Joan R. Access；第23号文章；第 23:1–23:12 页 莱布尼茨国际信息学论文集 Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，Dagstuhl 出版社，德

只需稍加努力，便可得到一个一般定理：当幺半范畴 $(\mathcal{K}, \otimes)$ 中的米利自动机范畴 $\mathrm{Mly}_{\mathcal{K}}(I, O)$ 和 Moore 自动机范畴 $\mathrm{Mre}_{\mathcal{K}}(I, O)$ 满足 $\mathcal{K}$ 本身完备且余完备时，它们也完备且余完备。参见 [5, 第 11], 章。不过，其中给出的证明略显临时拼凑，也没有解释为何有限积和终对象往往如此复杂。

只需再掌握一点范畴论工具，就可以对这类情形下极限的形态作出一些一般性考察：余极限和连通极限可以按照它们在 $\mathcal{K}$ 中的计算方式来计算（这是某个函子创建 它们这一事实的推论，参见 [10]），而积（尤其是空积，即终对象）的形态则与 $\mathcal{K}$中给出的形态大不相同。造成这种情况的深层原因在于，这样一个终对象（我们将其称为 O_∞）恰好是某个特定自函子的终余代数；对于 Moore 和 Mealy 自动机，该自函子分别为 $A \mapsto O \times RA$和 $A \mapsto RO \times RA$。$\mathrm{Mly}_{\mathcal{K}}(I, O)$ 中终对象 O_∞ 的复杂形态，则可由 Adamek 定理解释：该定理将终对象 O_∞ 描述为 $\mathcal{K}$中的逆极限。

本文表明，在底层范畴 K 满足同样的完备性假设时，只需要求自函子 F 存在右伴随 R，即可得到 F-自动机的完备性。我们给出的证明采用了一种简洁的论证：将每个 $\mathrm{Mly}_{\mathcal{K}}(I, O)$ 和 $\mathrm{Mre}_{\mathcal{K}}(I, O)$ 纳入 Cat 中的严格 2-拉回，并根据创建极限的函子的稳定性推出结果。

本文结构。本短文安排如下：

- 首先（第 2 节）介绍本文将采用的术语和研究的结构：取值于幺半范畴（$\mathcal{K}, \otimes$）的自动机范畴（分为两类：“米利”机器，其中考虑跨度 $E \leftarrow E \otimes I \rightarrow O$；以及“Moore”机器，其中考虑的是对 $E \leftarrow E \otimes I, E \rightarrow O$）和 F-自动机范畴，其中 F 是 $\mathcal{K}$ 上的自函子（可能不带幺半结构）。如今，“米利”自动机被称为“确定性自动机”，但由于有时需要区分这两类图表，我们仍沿用较早的术语。接着（定理 3.6），为了证明自动机范畴中存在形状为 $\mathcal{J}$ 的余极限/极限，假设满足以下两个条件： $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ 是伴随 $F \overset{\epsilon}{\underset{\eta}{}} R$ 中的左伴随；并且基范畴 $\mathcal{K}$ 中存在形状为 $\mathcal{J}$ 的余极限/极限。最后（第 3.1 小节），讨论如何将文献 [11, 12] 中阐述的“行为作为伴随”观点推广到 F-机器。
  ⊣
-

与 Mealy/Moore 机器的情形类似，其中 $F = \quad \otimes I$，离散 极限（如果F-Mly 和 F-Mre 存在）往往具有与 $\mathcal{K}$ 中截然不同的形状。

满足前述假设的自函子有许多例子，可以通过将 F 视为伴随$L \dashv G \dashv U$的余单子 LG（即其底层自函子）来得到，因为在这种情况下 $LG \dashv UG$：凝聚拓扑斯的形状平坦伴随和平坦尖锐伴随 [8, 9], ，环态射对应的基变换伴随 $\mathrm{Lan}_f \dashv f^* \dashv \mathrm{Ran}_f$ ，或更一般地，表示论中的 G-模、任一本质几何态射，或任一拓扑函子 $V : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ [3, 命题 7.3。7] 其全忠实的左伴随和右伴随 $L \dashv V \dashv R$ 会导出一个余模态 LV，它是某个模态 RV的左伴随。

[1] 在 [2], 中也有一段几乎完全相同的简短引言；本文是与之平行提交的稿件。尽管两篇稿件有关联，但本质上彼此独立；重复这一内容是为了确保自包含性。

我们得到的结果并不特别令人意外；然而，我们未能找到讨论 F-Mly F-Mre 的余完备性/完备性性质，或讨论 [11, 12]中阐述的“行为作为伴随”定理的类似结果的参考文献；在 $F = \quad \otimes I$ 的情形下，余完备性 / 完备性结果只能通过繁琐的临时论证得出（参见 [5, 第 11]章），而在定理 3.6 中，我们提供了一种简洁、综合的方法，从一般原理推导出这两个结果：首先在命题 3.5 中，将 F-Mly 和 F-Mre 描述为 Cat 中适当的拉回。

我们使用 Agda 证明助手和库 `agda-categories`对主要结果进行了形式化：每当定义或陈述附有 Agda 代码时，我们都会在其开头旁边添加一个小型 Agda 标志（），并直接链接到形式化文件。完整的开发内容可在 `https://github.com/iwilare/categorical-automata`查阅。

2 自动机与 F-自动机

本节篇幅简短，唯一目的是确定记号；关于这一主题的经典综合参考文献包括 [1, 5]；尤其是，[1, 第 III 章] 完全专门研究本文所称的 F-Moore 自动机，这类自动机还可能配备一个“初始化”态射。

2.1 米利与 Moore 自动机

在整个小节中，我们固定一个幺半范畴（$\mathcal{K}$ $\otimes$，1）。

▶ **定义 2.1**（米利机）。（）输入对象为 I、输出对象为 O 的 K 中的 Mealy 机 由三元组 (E, d, s) 组成，其中 E 是 K 的一个对象，d、s 是跨度中的态射

$$\mathfrak{e} := \left(E \xleftarrow{d} E \otimes I \xrightarrow{s} O \right) \tag{2.1}$$

▶ 注记 2.2（Mealy 机范畴）。固定输入和输出I，O的 Mealy 机器构成一个范畴，若将 *Mealy* 机态射 $f : (E, d, s) \to (T, d', s')$ 定义为一个态射 $f : E \to T$，且满足 $\mathcal{K}$ 中的条件

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{d} & E \otimes I & \xrightarrow{s} & O \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes I} & & \| \\ T & \xleftarrow[d']{} & T \otimes I & \xrightarrow[s']{} & O \end{array} \tag{2.2}$$

显然，复合和恒等态射都在$\mathcal{K}$中进行。

输入和输出为 I，O 的 Mealy 机范畴记作 Mly$_{\mathcal{K}}(I, O)$。

▶ **定义 2.3**（Moore 机）。（）输入对象为 I、输出对象为 O 的 K 中的 Moore 机 是一个图表

$$\mathfrak{m} := \left(E \xleftarrow{d} E \otimes I \;;\; E \xrightarrow{s} O \right) \tag{2.3}$$

▶ 注记 2.4（Moore 机范畴）。固定输入和输出的 Moore 机I，O构成一个范畴，若我们将 Moore 机的态射 f定义为满足以下条件的态射 $f : E \to T$ in $\mathcal{K}$: $(E, d, s) \to (T, d', s')$

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{d} & E \otimes I \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes I} \\ T & \xleftarrow{d'} & T \otimes I \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & O \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ T & \xrightarrow[s']{} & O \end{array} \tag{2.4}$$

2.2 F-米利和 F-Moore 自动机

F-机器 的概念源自将 (2.1) 中的张量 $E \otimes I$ 替换为泛自函子 $F : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 在对象 $E \in \mathcal{K}$ 上的作用 FE，使得 Mealy/Moore 机恰好是一个 $(\otimes I)$-Mealy/Moore 机；参见 [6, ff. 2.1.3°], 或专著 [1]的第三章。这个自然的想法抽象出了使机器能够前进到“下一个”状态并给出输出的结构，并由此引出以下两个定义（这里我们不 要求 $\mathcal{K}$ 是幺半范畴）。

▶ **定义 2.5** (**F-米利机器**)。( ) 令 $O \in \mathcal{K}$ 为一个固定对象。范畴 F-Mly$/O$（或简称 F-Mly，当对象 O 显然时）中 F输出为 O 的 -米利机器，其对象为三元组 (E, d, s)，其中 $E \in K$ 是一个对象，且 s, d 是 K 中构成如下跨度的态射

$$E \xleftarrow{d} FE \xrightarrow{s} O \tag{2.5}$$

一个 F-米利机器之间的态射 $f : (E, d, s) \to (T, d', s')$ 由 K 中的一个态射 $f : E \to T$构成，且满足

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{d} & FE & \xrightarrow{s} & O \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} & & \| \\ T & \xleftarrow[d']{} & FT & \xrightarrow[s']{} & O \end{array} \tag{2.6}$$

不出所料，我们可以用同样的方式将定义 2.3 推广到一般自函子 $F : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$的情形。

▶ **定义 2.6** (**F-Moore 机**)。( ) 令 $O \in K$ 为一个固定对象。范畴 F-Mre$/O$ 中 F输出为 O 的 -*Moore* 机，其对象为三元组 (E, d, s)，其中 $E \in K$ 是一个对象，且 s, d 是 K 中一对态射

$$E \xleftarrow{d} FE \ ; \ E \xrightarrow{s} O \tag{2.7}$$

F-*Moore* 机 $f : (E, d, s) \to (T, d', s')$ 的一个态射 由 K 中的态射 $f : E \to T$构成，使得

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{d} & FE \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ T & \xleftarrow[d']{} & FT \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & O \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ T & \xrightarrow[s']{} & O \end{array} \tag{2.8}$$

▶ 注 2.7（机器概念的相互定义性）。到目前为止引入的所有机器概念都是可以相互定义的，前提是允许幺半群基底 $\mathcal{K}$ 发生变化（参见 [6, 及后续命题 30]）：显然，Mealy 机是一个 F- 机器，其中 $F : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 是函子 $\otimes I : E \mapsto E \otimes I$；一个 F- 机器由自函子范畴中的 Mealy 机组成：事实上，F-机器恰好是形如 $E \leftarrow F \circ E \to O$ 的 Mealy 机，其中E, O 是作用于 $\mathcal{K}$ 中对象的常值自函子，而 F 是输入对象：更准确地说，F-机器的范畴包含于范畴 Mly$^{([\mathcal{K},\mathcal{K}],\circ)}(F, c_O)$ 中，其中 c_O 是作用于 $O \in \mathcal{K}$ 的常值函子，并且是由那些三元组 (E, d, s) 构成的子范畴，其中 E 是常值自函子。

3 F-米利与 F-Moore 中的完备性与行为

我们想要推广到 F-机器的第一个结果，是这样一个众所周知的事实：以 Mealy 机器为例，如果 $(\mathcal{K}, \otimes)$ 具有可数余积，且每个 $I \otimes$ 都保持这些余积，那么跨度 (2.1) 可以“扩展”为一个跨度

$$E \xleftarrow{d^+} E \otimes I^+ \xrightarrow{s^+} O \tag{3.1}$$

其中，d^+，s^+ 可由组成部分 d_n，s_n 归纳定义：$E \otimes I^{\otimes n} \to E$，$O$。

在相同假设下，每个 Moore 机 (2.3) 都可以“扩展”为一个跨度

$$E \xleftarrow{d^*} E \otimes I^* \xrightarrow{s^*} O \tag{3.2}$$

其中，d^*，s^* 可由组成部分 d_n，s_n 归纳定义：$E \otimes I^{\otimes n} \to E$，$O$。[2]

▶ 注 3.1. 对于 Mealy 机器，对象 I^+ 对应于输入对象 I上的自由半群；而对于 Moore 机器，则需要考虑自由幺半群I^*：这反映了一种直观理解，即在后一种情况下，即使没有任何先前的输入，也可以提供输出。注意，Moore 机的扩展会产生从同一对象 $E \otimes I^*$出发的一个态射跨度，也就是说，这是一台接受空字符串作为输入的 Mealy 机。

在 F-米利机器范畴中也可以进行类似的构造，利用 F-代数映射 $d\colon FE \to E$生成迭代 $E \xleftarrow{d_n} F^n E \xrightarrow{s_n} O$:

从现在起，设 F 是一个范畴$\mathcal{K}$ 上的自函子，且它有一个右伴随 R。这类例子自然出现在给定伴随三元组 $L \dashv G \dashv R$ 的情形中，因为我们可以得到伴随 $LG \dashv RG$ 和 $GL \dashv GR$:

- 每个环同态 $f\colon A \to B$ 都会在 A 模和 B模范畴之间诱导一个伴随函子三元组；类似地，每个幺半群同态 $f\colon M \to N$ 都会诱导一个“基变换”函子$f^*\colon N\text{-Set} \to M\text{-Set}$；每个拓扑斯之间的本质几何态射$\mathcal{E} \leftrightarrows \mathcal{F}$，即每个伴随三元组$f_! \dashv f^* \dashv f_*$；每个拓扑函子 $V\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ [3, 命题 7.3.7] 及其完全忠实的左、右伴随 $L \dashv V \dashv R$（这会产生一个余模态 LV，它是一个模态 RV的左伴随）。

▶ **构造 3.2**（F-机器的动力学）。( ) 对于任意给定的 F-米利机器

$$E \xleftarrow{d} FE \xrightarrow{s} O \tag{3.3}$$

我们归纳地定义态射族 $s_n\colon F^n E \to O$，将其定义为复合

$$\begin{cases} s_1 &= FE \xrightarrow{s} O \\ s_2 &= FFE \xrightarrow{Fd} FE \xrightarrow{s} O \\ s_n &= F^n E \xrightarrow{F^{n-1}d} F^{n-1}E \to \cdots \xrightarrow{FFd} FFE \xrightarrow{Fd} FE \xrightarrow{s} O \end{cases} \tag{3.4}$$

[2] 假设 $\mathcal{K}$ 中存在可数余积，则 I 上的自由幺半群 I^* 是对象 $\sum_{n\geq 0} I^n$；I 上的自由半群I^+ 是对象 $\sum_{\geq 1} I^n$；显然，若 1 是 $\otimes$的幺半群单位元，则有 $I^* \cong 1 + I^+$，且这两个对象满足“递归方程” $I^+ \cong I \otimes I^+$ 和 $I^* \cong 1 + I \otimes I^*$。

在假设 F 有右伴随 R的前提下，这等价于给出它们在通过复合获得的伴随 $F^n \dashv R^n$ 下对应的伴随态射 $\bar{s}_n : E \to R^n O$，其对象为 $n \geq 1$，并在 $F \overset{\epsilon}{\underset{\eta}{\dashv}} R$中迭代该结构。

这样的一个 s_n 被称为第 n 个跳映射。注意，所有第 n 个跳映射 $(s_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1})$ 所构成的族的数据，显然等价于一个类型为 $\bar{s}_\infty$ 的单一映射：$E \to \prod_{n\geq 1} R^n O$。

▶ 注 3.3。以类似的方式推理，对于一个 F-Moore 机，可以定义扩展 $s : E \to O$，$s \circ d : FE \to E \to O$，$s \circ d \circ Fd : FFE \to O$，等等。

这是迈向如下陈述的第一步，该陈述将在下文的定理 3.6 中得到证实和展开：

▷ 断言 4。定义 2.6 中的范畴 F-Mre 有一个载体为 $O_\infty = \prod_{n\geq 0} R^n O$ 的终对象 $\mathfrak{o} = (O_\infty, d_\infty, s_\infty)$；类似地，范畴 F-Mly 有一个载体为 $O_\infty = \prod_{n\geq 1} R^n O$ 的终对象。（注意积的索引发生了偏移，这是因为 Moore 机的跳映射以 $\mathbb{N}_{\geq 0}$ 为索引，而米利的则以 $\mathbb{N}_{\geq 1}$ 为索引。）

确定自动机范畴中是否存在终对象的“现代”方法，依赖于 [7] 中优雅的余代数方法；人们对这类完备性定理的兴趣，主要可以从两个方面来解释：

- 机器范畴中的终对象 O_∞ 往往“庞大而复杂”，这是因为它通常是为 $\mathcal{K}$ 适当定义的自函子的终余代数，因此 Adamek 定理将其表示为某个 op链的逆极限。余代数理论使我们能够定义不同 F-代数（或者，在我们的总体假设下，与之等价的 R-余代数）的状态之间的双模拟关系；对于标准的 Mealy/Moore 机器（即，当 $F = _ \otimes I$ 时），这一概念便还原为 [7, 第 3] 章所阐述的双模拟概念。

以下将这两个范畴刻画为 Cat 中拉回的普遍性质，使我们能够将整个完备性问题归结为计算一个终对象，从而证明定理 3.6。

▶**命题 3.5**。

cx1) 定义 *2.5* 中给出的 F-米利 范畴，即 F-米利机器，构成一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} F\text{-Mly} & \xrightarrow{U'} & (F_{/O}) \\ {\scriptstyle V'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \mathsf{Alg}(F) & \xrightarrow[U]{} & \mathcal{K} \end{array} \tag{3.5}$$

cx2) 定义 *2.6* 中给出的 F-米利 范畴，即 F-*Moore* 机，构成一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} F\text{-Mre} & \xrightarrow{U'} & (\mathcal{K}_{/O}) \\ {\scriptstyle V'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \mathsf{Alg}(F) & \xrightarrow[U]{} & \mathcal{K} \end{array} \tag{3.6}$$

证明。 直接检查两个拉回的定义即可。 ◀

作为这一刻画的推论，通过应用 [10, V.6, Ex. 3]，我们可以轻松证明以下完备性结果：

▶ **定理 3.6**（F-机器的极限与余极限）。( )

- 设范畴 K 存在形状为 J 的余极限；那么，F-Mre 和 F-Mly 存在形状为 J 的余极限，且可像在 K 中那样计算；等化子（更一般地说，所有连通极限）在 F-Mre 和 F-Mly中可
- 像在 K 中那样计算；若 K 存在可数积和拉回，则 F-Mre 和 F-Mly也存在任意有限基数的积（特别是终对象）。

定理 3.6 的证明。 值得展开说明 [10, V.6，练习 3], 的内容，这会大大简化论证：该定理断言，在范畴的任意严格拉回方块中

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{U'} & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle V'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow[U]{} & \mathcal{K} \end{array} \tag{3.7}$$

若 U 创建、且 V 保持某个给定形状 $\mathcal{J}$ 的极限，则 U' 创建形状为 $\mathcal{J}$ 的极限。因此，得益于命题 3.5，所有连通极限（特别是等化子）都由函子 $U'\colon F\text{-Mly} \to (F_{/O})$ 在 F-Mealy 机器和 F-Moore 机器的范畴中创建，因此可像在 $(F_{/O})$ 中那样计算，也就是像在 $\mathcal{K}$ 中那样；[5, 第 4] 章详细讨论了 $(\otimes I)$-机器的情形，即经典 Mealy 机器，并以此证明以下结论：

- 假设 $\mathcal{K}$ 是余完备的，则所有余极限都可在 F-Mly 中计算，因为它们可在基 $\mathcal{K}$ 中计算；
- 假设 $\mathcal{K}$ 具有连通极限，则这些极限可在 F-Mly 中计算，因为它们可在基 $\mathcal{K}$ 中计算；

离散极限需要格外谨慎地处理：对于经典 Moore 机器（参见定义 2.3），终对象是函子 $A \mapsto A^I \times O$ 的终余代数（参见 [7, 2.3.5]）：直接应用 Adàmek 定理即可得到对象 $[I^*, O]$; 对于经典 Mealy 机器（参见定义 2.1），终对象是 $A \mapsto [I, O] \times [I, A]$ 的终余代数；同样，Adàmek 定理给出 $[I^+, O]$。

Adàmek 定理随后给出了 F-Mre 的终对象，即函子 $A \mapsto O \times RA$ 的终余代数，它就是断言 4 的 $O_{\infty,0}$；而 F-Mly 的终对象为 $O_{\infty,1}$，且对于 $A \mapsto RO \times RA$（在 F-Mly 中）也是如此。找到拉回和一个终对象后，所有离散极限都可以计算，但我们更倾向于提供一种更直接的论证来构造二元积。

回顾构造 3.2 中与 F-机器$\mathfrak{e} = (E,\ d,\ s)$ 相关的动力学映射的定义。

现在，我们的主张分为两部分：

to1) $\mathcal{K}$ 中的对象 $O_\infty := \prod_{n\geq 1} R^n O$ 带有一个 F-机器 $\mathfrak{o} = (O_\infty,\ d_\infty,\ s_\infty)$ 的典范结构，使得 $\mathfrak{o}$ 在 F-Mly 中是终对象；

to2) 给定 F-Mly 中的对象 $(E,\ d_E,\ s_E)$，、$(T,\ d_T,\ s_T)$，拉回

$$\begin{array}{ccc} P_\infty & \longrightarrow & T \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \bar{s}_{T,\infty}} \\ E & \xrightarrow[\bar{s}_{E,\infty}]{} & O_\infty \end{array} \tag{3.8}$$

是 F-机器结构的载体，该结构将 $\mathfrak{p} = (P_\infty,\ d_P,\ s_P)$ 表示为 F-Mly 中 $\mathfrak{e} = (E,\ d_E,\ s_E)$ $\mathfrak{f} = (T,\ d_T,\ s_T)$ 的积。

这样，范畴 F-Mly 就具有所有有限积；当给定无限多个对象（$\mathfrak{e}_i \mid i \in I$）时，只要基范畴中存在宽拉回，就很容易利用它们证明类似的结论。

注意，对象 P_∞ 也可以等价地刻画为由拉回 P_n 得到的单个宽拉回，其中 P_n 是 $\bar{s}_{E,\,n}$ 和 $\bar{s}_{T,\,n}$ 的拉回（或者更准确地说，是一个交，因为由相同拉回得到的每个 $P_n \to E \times T$ 都是单态射）：

$$\begin{array}{ccc} P_\infty & \longrightarrow & P_n \\ \downarrow & \iddots & \downarrow \\ P_m & \longrightarrow & E \times T \end{array} \tag{3.9}$$

在不同情况下，采用其中一种或另一种定义来证明 P_∞ 的泛性质会更方便。

为了证明 to1 中的第一个断言，我们必须在 O_∞ 上给出 F-机器结构，从而构造一个跨度

$$O_\infty \xleftarrow{d_\infty} FO_\infty \xrightarrow{s_\infty} O \tag{3.10}$$

一方面，s_∞ 是投影 $\pi_1 \colon O_\infty \to RO$（投影到第一个因子）的伴随映射；另一方面，$d_\infty$ 是删除第一个因子的投影的伴随映射，这得益于恒等 $RO_\infty \cong \prod_{n\geq 2} R^n O$；因此，具体而言，我们考虑以下图表：

$$O_\infty \xleftarrow{\epsilon_{O_\infty}} FRO_\infty \xleftarrow{F\pi_{\geq 2}} FO_\infty \xrightarrow{F\pi_1} FRO \xrightarrow{\epsilon_O} O \tag{3.11}$$

为了证明第一个断言，我们考虑 F-Mly 的一个一般对象（$E,\ d,\ s$），即一个跨度

$$E \xleftarrow{d} FE \xrightarrow{s} O \tag{3.12}$$

并让我们构造一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} E & & \xleftarrow{\quad d \quad} & & FE & & \xrightarrow{\quad s \quad} & & O \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle Fu} & & & & \| \\ O_\infty & \xleftarrow{\epsilon_{O_\infty}} & FRO_\infty & \xleftarrow{F\pi_{\geq 2}} & FO_\infty & \xrightarrow{F\pi_1} & FRO & \xrightarrow{\epsilon_O} & O \end{array} \tag{3.13}$$

对于唯一的态射 $u \colon E \to O_\infty = \prod_{n\geq 1} R^n O$，我们令它恰好等于 $\bar{s}_{\infty\circ}$。现在通过图表追逐，可以非常直接地证明 u 使图表 (3.13) 交换，并且具有这一性质的态射是唯一的。

现在来证明 (3.8) 中拉回的顶点给出了 F-Mly 中 $(E,\ d_E,\ s_E)$，$(T,\ d_T,\ s_T)$ 的积；首先，我们按如下方式构造结构态射 $s_P,\ d_P$：

- 借助 P_∞ 的泛性质，从该交换图表中得到的虚线映射是d_P

$$\begin{array}{ccccc} FP_\infty & & \longrightarrow & & FE \\ & \overset{d_P}{\searrow} & & & \downarrow \\ & & P_\infty & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ FT & \longrightarrow & FO_\infty & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ & & T & \longrightarrow & O_\infty \end{array} \tag{3.14}$$

- s_P： $FP_\infty \to O$ 由（3.8）中对角映射 $P_\infty \to O_\infty$ 的伴随映射与投影 $\pi_1 : O_\infty \to RO$复合而得。

现在让我们考察对象的泛性质

$$P_\infty \xleftarrow{d_P} FP_\infty \xrightarrow{s_P} O \tag{3.15}$$

给定一个对象 $\mathfrak{z} = (Z,\ d_Z,\ s_Z)$，它属于 F-Mly，且有一个图表

$$\begin{array}{ccccc} O & = & O & = & O \\ {\scriptstyle s_E}\uparrow & & {\scriptstyle s_Z}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s_T} \\ FE & \xleftarrow[Fu]{} & FZ & \xrightarrow[Fv]{} & FT \\ {\scriptstyle d_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_Z} & & \downarrow{\scriptstyle d_T} \\ E & \xleftarrow[u]{} & Z & \xrightarrow[v]{} & T \end{array} \tag{3.16}$$

其各部分都交换。为了证明存在唯一的箭头 $[u, v] : Z \to P_\infty$

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & {\scriptstyle u}\swarrow & {\scriptstyle [u,v]}\downarrow & \searrow{\scriptstyle v} & \\ E & \xleftarrow[p_E]{} & P_\infty & \xrightarrow[p_T]{} & T \end{array} \tag{3.17}$$

我们可以如下论证，利用投影映射 $\pi_n : O_\infty \to R^n O$ 的联合单射性：首先证明每个方块

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & E \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{s}_{E,n}} \\ T & \xrightarrow[\bar{s}_{T,n}]{} & R^n O \end{array} \tag{3.18}$$

都是交换的，特别是其对角线等于 Z 的第 n 个跳映射；为此可以使用归纳法，证明方块两条边的复合与典范投影 $O_\infty \to R^n O$ 的复合，对于所有 $n \geq 1$ 都等于 $\bar{s}_{n,\ Z}$。由此我们推得存在映射

$$Z \xrightarrow{z_n} P_n \longrightarrow E \times T \tag{3.19}$$

（关于 P_n 的定义，参见 (3.9)）对每个 $n \geq 1$ 都成立。不过，现在 z_ns 的定义方式表明，每个这样的映射都与 $\langle u,\ v \rangle : Z \to E \times T$ 重合，因此 Z 必须经由因子分解通过 P_∞。现在我们要证明图表的交换性

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xleftarrow{d_Z} & FZ & \xrightarrow{s_Z} & O \\ {\scriptstyle [u,v]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F[u,v]} & & \| \\ P_\infty & \xleftarrow[d_P]{} & FP_\infty & \xrightarrow[s_P]{} & O \end{array} \tag{3.20}$$

这可通过直接的图表追逐得出。

证明至此结束。 ◀

▶ 注 3.7。明确地说，$\mathfrak{o} = (O_\infty,\ d_\infty,\ s_\infty)$ 是终对象这一陈述，意味着对于任意其他 F-米利机器 $\mathfrak{e} = (E,\ d,\ s)$，都存在唯一的 $u_E : E \to O_\infty$，使得

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{d} & FE & \xrightarrow{s} & O \\ {\scriptstyle u_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Fu_E} & & \| \\ O_\infty & \xleftarrow[d_\infty]{} & FO_\infty & \xrightarrow[s_\infty]{} & O \end{array} \tag{3.21}$$

都是交换图；对于 F-Moore 自动机，也有类似的结论。

3.1 行为函子的伴随

在 [11, 12] 中，作者着重于在机器范畴与收集上述机器的 行为的范畴之间构造一个伴随。

如果遗忘函子 $U : \mathsf{Alg}(F) \to \mathcal{K}$具有左伴随 G，则称自函子 $F : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 是一个输入过程；简单来说，输入过程允许定义自由 F-代数。[3]

在 [11, 12] 中，作者着重于证明伴随的存在性

$$L : \mathsf{Beh}(F) \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathsf{Mach}(F) : E \tag{3.22}$$

其中，$\mathsf{Mach}(F)$ 是由拉回得到的范畴

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{Mach}(F) & & \longrightarrow & & \mathcal{K}^{\to} \times \mathcal{K}^{\to} \\ \downarrow & \lrcorner & & & \downarrow{\scriptstyle d_1 \times d_0} \\ \mathsf{Alg}(F) & \xrightarrow[U]{} & \mathcal{K} & \xrightarrow[\Delta]{} & \mathcal{K} \times \mathcal{K} \end{array} \tag{3.23}$$

Δ 是对角函子，而 $\mathsf{Beh}(F)$ 是定义在自由 F-代数函子 G 上的某个逗号范畴。

如此表述后，该陈述具有足够的概念性，可以推广到 F-米利和F-Moore 机（进而推广到所有这样的情形：自动机范畴可以通过 Cat 中良好函子的严格 2-拉回来表示——鉴于 (3.5)、(3.6)、(3.23)，这种情形相当常见）。

▶ **定理 3.8**。( ) 存在一个函子 $B :\ F\text{-}\mathsf{Mre} \to \mathsf{Alg}(F)_{/(O_\infty, d_\infty)}$，其余范畴为 F-代数的切片范畴，而 F-代数 (O_∞, d_∞) 由断言 *4* 确定。函子 B 具有一个左伴随 L。

证明。回忆一下，函子 $B\colon F\text{-}\mathsf{Mre}_O \to \mathsf{Alg}(F)_{/O_\infty}$ 在对象和态射上的定义如下：

$$\begin{array}{ccc} (E,d,s) & & E \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \mapsto & {\scriptstyle f}\downarrow \searrow^{u_E} \\ (T,d',s') & & T \nearrow_{u_T} \quad O_\infty \end{array} \tag{3.24}$$

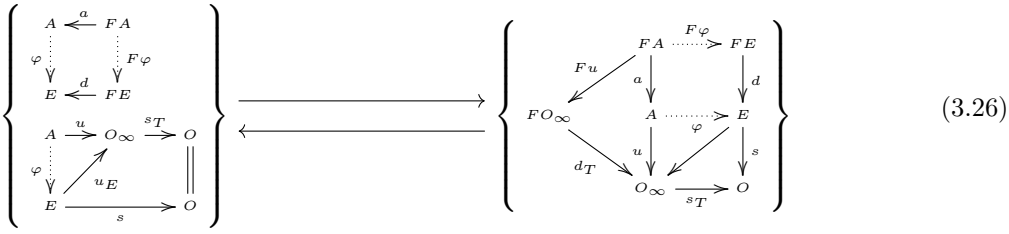
[3] 显然，这与要求 F 拥有伴随函子截然不同，而且这两个要求彼此独立：如果 F 是一个单子，那么它始终是一个输入过程，无论 F 是否在任一侧存在伴随函子。

$\mathsf{Alg}(F)_{/O_\infty}$ 的典型对象是一个元组 $((A,a)\ u)$，其中 $a\colon FA \to A$ 是一个带有其结构映射的 F-代数，而 $u\colon A \to O_\infty$ 是一个 F-代数同态，即满足 $d_T \circ Fu = u \circ a$ 的态射 u。

一个设想中的左伴随为 B 实现了一个自然双射

$$F\text{-}\mathsf{Mre}_O\big(L((A,a),u),(E,d,s)\big) \cong \mathsf{Alg}(F)_{/O_\infty}\big(((A,a),u),B(E,d,s)\big) \tag{3.25}$$

对应于以下两类交换图：



(3.26)

建立这种对应关系的方法显而易见。 ◀

函子 B 定义如下：

- 在 F-Mre 中的对象 $\mathfrak{e} = (E,d,s)$，对应关系将 $\mathfrak{e}$ 送至唯一映射 $u_E\colon E \to O_\infty$；根据 (3.13) 中的构造，该映射是一个 F-代数同态；对于态射，$f\colon (E,d,s) \to (F,d',s')$ 是 F-
- Moore 机之间的态射，B 的作用是恒等映射。这最终是终对象 O_∞ 的终性质直接蕴含 $u_F \circ f = u_E$ 这一事实的结果。

▶ 注 3.9. ( ) 定理 3.8 中的伴随实际上是一个更长的伴随链的一部分，构造如下：回顾一下，每个伴随 $G\colon \mathcal{K} \leftrightarrows \mathcal{H}\colon U$ 都会导出一个“局部”$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$伴随 $G\colon \mathcal{K}_{/UA} \leftrightarrows \mathcal{H}_{/A}\colon U$，其中 $U(FA, f\colon FA \to A) = Uf$。那么，若 F 是一个输入过程，我们便得到伴随

$$\mathcal{K}_{/O_\infty} \underset{\tilde{U}}{\overset{\tilde{G}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{Alg}(F)_{/(O_\infty,d_\infty)} \underset{B}{\overset{L}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} F\text{-}\mathsf{Mre}. \tag{3.27}$$

参考文献

[1] J. Adámek 和 V. Trnková。《范畴中的自动机与代数》。Kluwer，1990 年。[2] G. Boccali、A. Laretto、F. Loregian 和 S. Luneia。自动机的双范畴：双范畴中的自动机。准备中。草稿可在 http://tetrapharmakon.github.io/stuff/bicategories.pdf获取，2023 年 3 月。[3] F. Borceux。《范畴代数手册：第 2 卷》，《数学及其应用百科全书》第 51 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994 年。范畴与结构。[4] M. Droste、W. Kuich 和 H. Vogler（编）。《加权自动机手册》。Springer Berlin Heidelberg，2009 年。 doi:10.1007/978-3-642-01492-5。[5] H. Ehrig、K.-D. Kiermeier、H.-J. Kreowski 和 W. Kühnel。《自动机普遍理论：一种范畴论方法》。doi:10.1007/978-3-322-96644-5。[6] R. Guitart。张量与机器。《拓扑与微分几何札记》，21(1)：5–62，1980 年。网址： http://www.numdam.org/item/CTGDC_1980__21_1_5_0/。[7] B. Jacobs。《余代数导论：迈向状态与观测的数学》。剑桥理论计算机科学论著。剑桥大学出版社，2016 年。 doi:10.1017/CBO9781316823187。

[8] F.W. Lawvere。空间范畴未必是广义空间，正如有向图所揭示的那样。《Revista colombiana de matemáticas》，20(3-4)：179–186，1986 年。[9] F.W. Lawvere。公理化凝聚。《Theory and Applications of Categories》，19：41–49，2007 年。[10] S. Mac Lane。《工作数学家范畴论》，《数学研究生文本》第 5 卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1998 年。 doi:10.1007/978-1-4757-4721-8。[11] G. Naudé。行为与实现之间的伴随情形。《Quaestiones Mathematicae》，2：245–267，1977 年。 doi:10.1080/16073606.1977.9632546。[12] G. Naudé。普遍实现。《Journal of Computer and System Sciences》，19(3)：277–289，1979 年。 doi:10.1016/0022-0000(79)90005-9。