arXiv:2303.03871v1 [math.FA] 7 Mar 2023

具有指定聚点数量的有界数列集合的结构

QUENTIN MENET 和 DIMITRIS PAPATHANASIOU

摘要。对于每个向量 $x \in \ell^\infty$，我们都可以定义其聚点构成的非空紧集L_x 。给定 $\mathbb{N}\backslash\{1\}$的一个无限子集 A，因此我们可以研究在 A满足哪些条件时，集合 $L(A) := \{x \in \ell^\infty : |L_x| \in A\}$ 是可线性化的，甚至是稠密可线性化的。特别地，我们证明，若$L(A)$可线性化，则存在 $k \geq 1$，使得 $A \cap (A-k)$是无限的；若 $L(A)$稠密可线性化，则 $A \cap (A-1)$是无限的。最后，我们回答一个开放问题：是否存在一个闭的不可分子空间，其中每个非零向量都有可数多个聚点。

1. 引言

设 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 和 $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ 为赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 的有界实数列空间。显然，对于任意 $x \in \ell^\infty$， x 的聚点集合 L_x 是非空紧集；若存在递增序列 $(n_k)_{k\geq 1}$，使得当 k 趋于无穷时， x_{n_k} 趋于 a，则称 a 为 x 的一个聚点。由康托尔-本迪克松定理可知， L_x 的基数（记为 $|L_x|$）必属于 $\mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$，其中 ω 是 $\mathbb{N}$ 的基数， $\mathfrak{c}$ 是 $\mathbb{R}$ 的基数。因此，给定 $\mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$ 的一个子集 A，我们可以探究集合

$$L(A) = \{x \in \ell^\infty : |L_x| \in A\}.$$

如果我们讨论的是贝尔空间，就可能会关注这些集合何时是余稠的。在 ℓ^∞ 的语境下，我们更关注 $L(A) \cup \{0\}$ 中的线性结构，即 $L(A)$ 的可直线化性、稠密可直线化性和可空间化性。回顾一下，若 X 是拓扑向量空间，且 Y 是 X 的子集，则称 Y 是可线性化的（分别称为稠密可线性化的），如果 $Y \cup \{0\}$ 包含一个无限维子空间（分别包含一个稠密的无限维子空间）。在相同语境下，若 $Y \cup \{0\}$ 包含一个闭无限维子空间，则称 Y 是可空间化的。可直线化性与可空间化这一术语由 Gurariy [2, 6] 引入，并已成为许多研究的主题 [1, 3, 4, 5, 8, 9, 10]。

对于集合 $L(A)$，最早的研究由第二作者开展。Papathanasiou 在 [11] 中证明了 $\ell^\infty \backslash c_0$ 是稠密可线性化的；由他的证明还可推出， $L(\mathfrak{c})$实际上也是稠密可线性化的。随后，Leonetti、Russo 和 Somaglia [7] 考察了 $\mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$ 的其他子集，并对 $L(A)$的结构取得了若干有趣的结果。他们证明了 $L(\mathfrak{c})$也是可空间化的，$L(\omega)$是稠密可线性化且可空间化的，而 $L(\mathbb{N}\backslash\{1\})$是稠密可线性化的，但不可

2020 数学主题分类。15A03, 46B87。关键词和短语。可直线化性、可空间化、聚点。第一作者是比利时法语区科学研究基金会（Fonds de la Recherche Scientifique - FNRS）的研究助理。

空间化。当 A 是 $\mathbb{N}\backslash\{1\}$的子集时，我们很容易证明，若 A 是余有限的，则 $L(A)$是可线性化的。另一方面，若 A 是 $\mathbb{N}\backslash\{1\}$的有限子集，则根据定理 4.4]， $L(A)$不可线性化。若 A 是 $\mathbb{N}\backslash\{1\}$的无限子集但不是余有限的，Leonetti、Russo 和 Somaglia 证明了两种情况都可能出现。例如， $L(2\mathbb{N}+1)$是可线性化的，而 $L(\{3^n:\ n\geq 1\})$不可线性化。事实上，他们证明了，若 $a_0\geq 2$ 且 $a_{n+1}>2a_n$ ，则 $L(\{a_n:\ n\geq 0\})$不可线性化。这些不同的结果引出了不同的开放问题（参见 [7]）。

Question 1. *Is $L(2\mathbb{N})$ lineable? Is $L(\{n^2 : n\geq 2\})$ lineable?*

问题 2. $L(2\mathbb{N}+1)$ 在 ℓ^∞ 中是否稠密可线性化?

问题 3. $L(\omega)$ 或 $L(\mathbb{N}\cup\{\omega\})$ 是否包含不可分闭子空间? 它是否包含 ℓ^∞ 的等距副本?

除 $2\mathbb{N}$ 的情形外，我们将在以下各节回答所有这些问题。在第 2 节中，我们将关注某个子集 $A\subset\mathbb{N}\backslash\{1\}$ 下 $L(A)$ 的可直线化性和稠密可直线化性。更确切地说，我们证明，若 $A\subset\mathbb{N}\backslash\{1\}$ 且 $L(A)$ 可线性化，则存在 $k\geq 1$ 使得

$$|A\cap(A-k)|=\infty.$$

特别是，由此可以推得 $L(\{n^2:\ n\geq 2\}$ 不可线性化。随后我们证明，若 $A\subset\mathbb{N}\backslash\{1\}$ 且 $L(A)$ 在 ℓ^∞ 中稠密可线性化，则

$$|A\cap(A-1)|=\infty.$$

这给出了问题 2 的否定答案。最后，我们在第 3 节考察 $L(\omega)$ 的闭无限维子空间，并证明，尽管 $L(\mathbb{N}\cup\{\omega\})$ 不包含 ℓ^∞ 的等距副本，集合 $L(\omega)$（因此 $L(\mathbb{N}\cup\{\omega\})$ 也）包含一个不可分闭子空间，从而回答了问题 3。

2. 可直线化性与稠密可直线化性

Leonetti、Russo 和 Somaglia [7] 已经证明， $L(\mathbb{N}\backslash\{1\})$ 和 $L(\omega)$ 都是稠密可线性化的。他们还指出，根据 Papathanasiou [11] 的结果可知， $L(\mathfrak{c})$ 是稠密可线性化的。因此，我们将把对可直线化性和稠密可直线化性的研究限定在 $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ 的子集 A 上。

给定两个序列 $x,y\in\ell^\infty$ ，它们的聚点个数有限且大于 2，我们希望更好地理解：对于任意一对非零实数 (λ,μ)，集合 $L_{\lambda x+\mu y}$ 的基数可能有哪些。我们将在本节中使用 [7] 中引入的记号。特别是，如 [7], 中所述，我们总能找到 $\mathbb{N}$ 的一个划分 $S_1,\dots,S_n$，使其由无限集构成，并找到互不相同的实数$\xi_1,\dots,\xi_n$，使得 $x\sim_{c_0}\xi_1 1_{S_1}+\cdots+\xi_n 1_{S_n}$, 也就是说，$x-\xi_1 1_{S_1}+\cdots+\xi_n 1_{S_n}\in c_0$，其中 $1_S=(z_n)_n$ ，且当 $n\in S$ 时 $z_n=1$ ，否则 $z_n=0$ 。通过将 $\mathbb{N}$ 划分为无限集 $T_1,\dots,T_k$，并取互不相同的实数 $\eta_1,\dots,\eta_k$，使得 $y\sim_{c_0}\eta_1 1_{T_1}+\cdots+\eta_k 1_{T_k}$，我们可以轻易地得出

$$L_{\lambda x+\mu y}=\{\lambda\xi_i+\mu\eta_j : S_i\cap T_j \text{ is infinite},\ 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq k\}.$$

鉴于这一等式，我们引入以下记号:

$$\mathcal{E}_{x,y}=\{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,k\} : S_i\cap T_j \text{ is infinite}\}$$

and

$$\mathcal{P}_{x,y}=\{(\xi_i,\eta_j) : (i,j)\in\mathcal{E}_{x,y}\}.$$

本文中若干证明的思路源于对$\mathcal{P}_{x,y}$在 $\mathbb{R}^2$中的构型的研究。例如，两个元素（ξ_i, η_j）$\in \mathcal{P}_{x,y}$和（$\xi_{i'}, \eta_{j'}$）$\in \mathcal{P}_{x,y}$，当且仅当它们在x^*（a, b）$= \lambda a + \mu b$下的像重合时，才会为 $\lambda x + \mu y$ 给出相同的聚点。从几何上看，这意味着（ξ_i, η_j）和（$\xi_{i'}, \eta_{j'}$）位于某个方程为 x^*（a, b）$= c$ 的直线上，其中 c为某个值。因此， $L_{\lambda x+\mu y}$的基数可解释为覆盖$\mathcal{P}_{x,y}$所需的实数 $c_1, \ldots, c_m$的最小数量，其中这些平行线由 x^*（a, b）$= c_l$ 给出。例如，由于总能找到一条经过原点、且不平行于从$\mathcal{P}_{x,y}$中取顶点所构成的（有限条）线段中任何一条的直线，因此存在一个向量$z \in \text{span}\{x, y\}$，使得$|L_z| = |\mathcal{E}_{x,y}|$；并且我们注意到，对于任意 $z \in \text{span}\{x, y\}$，$|L_z| \leq |\mathcal{E}_{x,y}|$。另一方面，考虑一条与连接$\mathcal{P}_{x,y}$中两个顶点的至少一条线段平行的直线，可得一个向量 $z \in \text{span}\{x, y\}$，使得$|L_z| < |\mathcal{E}_{x,y}|$。我们在以下引理中陈述这些简单事实，以供后续参考。

引理2.1。令 $x \in L(n)$ 和 $y \in L(k)$ 对某个 $n, k \geq 2$ 成立。存在满足以下条件的 z_1, $z_2 \in$张成空间$\{x, y\}$

$$|L_{z_1}| = |\mathcal{E}_{x,y}| \quad and \quad |L_{z_2}| < |\mathcal{E}_{x,y}|$$

and

$$|\mathcal{E}_{x,y}| = \max\{|L_z| : z \in \text{span}\{x, y\}\}.$$

如预期，若 A 是 $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ 的有限子集，则 $L(A)$ 不可线性化；但若 A 是无限集，即使 A 不是余有限的， $L(A)$ 也可能是可线性化的。例如， $2\mathbb{N}+1$ 就是这种情况（见 [7]）。不过，若以 (a_n) 表示 A 的递增枚举，则 [7] 已证明，若 $a_0 \geq 2$ 且 $a_{n+1} > 2a_n$，则 $L(A)$ 不可线性化。Leonetti、Russo 和 Somaglia 随后提出了这样的问题：当 $A = \{n^2 : n \geq 2\}$ 时， $L(A)$ 是否可线性化。因此，我们将上述条件推广，以便处理集合 $\{n^2 : n \geq 2\}$。下述命题的证明将依赖于以下思路：若集合 $\mathcal{P}_{x,y}$ 包含分布在 n_1 列中的 n_2 个点，那么相邻列中两点之间出现的最小斜率至多出现 $n_1 - 1$ 次，因此存在满足 $n_2 - n_1 < |L_z| < n_2$ 的 $z \in$ 张成空间$\{x, y\}$。

命题 2.2。设 $A \subset \mathbb{N}\backslash\{1\}$。若 $L(A) \cup \{0\}$ 包含一个维数为2的子空间 M，并且令

$$n_1 = \min\{|L_z| : z \in M\backslash\{0\}\} \in A \quad and \quad n_2 = \max\{|L_z| : z \in M\} \in A,$$

then

$$]n_2 - n_1, n_2[\cap A \neq \emptyset.$$

证明。设 M是 $L(A) \cup \{0\}$中的一个二维空间。令

$$n_1 = \min\{|L_z| : z \in M\backslash\{0\}\} \in A \quad \text{and} \quad n_2 = \max\{|L_z| : z \in M\} \in A.$$

我们选取线性无关向量 x、$y \in M$，使得 $|L_x| = n_1$ 和 $|L_y| = n_2$。由引理2.1可得 $n_2 = |\mathcal{E}_{x,\ y}|$，并且 $n_2 > n_1$。现在我们要证明存在 $z \in$ 张成空间 $\{x, y\}$，使得

$$|L_z| \in]n_2 - n_1, n_2[.$$

为此，我们写作

$$x \sim_{c_0} a_1 1_{S_1} + \cdots + a_{n_1} 1_{S_{n_1}}$$

其中 $S_1,\dots,S_{n_1}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个划分，分成无限集，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{n_1}$，并且

$$y\sim_{c_0} b_1 1_{T_1}+\cdots+b_{n_2}1_{T_{n_2}}$$

其中 $T_1,\dots,T_{n_2}$ 是 $\mathbb{N}$ 划分成的无限个集合，且 $b_1<b_2<\cdots<b_{n_2}$。对于$1\le l\le n_1$，我们将 i_l 视为满足 $|S_l\cap T_{i_l}|=\infty$ 的 $[1,n_2]$ 中最小的整数，并将 I_l 视为满足 $|S_l\cap T_{I_l}|=\infty$ 的 $[1,n_2]$ 中最大的整数。我们考察

$$\mathcal{C}=\{\frac{b_{i_{l+1}}-b_{I_l}}{a_{l+1}-a_l}:1\le l\le n_1-1\}.$$

设 $C=\min\mathcal{C}$，且 $l_1,\cdots,l_r$, $1\le r<n_1$ 是指标的一个枚举，使得

$$C=\frac{b_{i_{l_s+1}}-b_{I_{l_s}}}{a_{l_s+1}-a_{l_s}},\quad 1\le s\le r.$$

我们证明 $z=-Cx+y$ 满足 $|L_z|\in]n_2-n_1,n_2[$。事实上，若令 $A_l=\{-Ca_l+b_i:|S_l\cap T_i|=\infty,\ 1\le i\le n_2\}$，则有

$$L_z=\bigcup_{1\le l\le n_1-1}A_l.$$

由于 $b_1<b_2<\cdots<b_{n_2}$，我们得到$\sum_{1\le l\le n_1-1}|A_l|=|\mathcal{E}_{x,\ y}|$。此外，根据 C 的定义，我们有

$$\max A_l=-Ca_l+b_{I_l}\le -Ca_{l+1}+b_{i_{l+1}}=\min A_{l+1}.$$

最后，我们指出，当且仅当对于某个 $1\le s\le r$， $l=l_s$ 时，上述不等式取等号，因此

$$|\mathcal{E}_{x,y}|-r=\left|\bigcup_{1\le l\le n_1-1}A_l\right|=|L_z|.$$

由于 $1\le r\le n_1-1$，我们可以得出结论，因为 $z\in M\backslash\{0\}$，因此 $|L_z|\in A$。 □

上述命题以及以下事实： L（$\mathbb{N}\backslash\{1\}$）中的每个无限维子空间 $M\cup\{0\}$ 都包含聚点数量任意多的向量，共同导出以下结果。

定理 2.3. 设 $A\subset\mathbb{N}\backslash\{1\}$。如果 L（A）是可线性化的，那么存在 $k\ge 1$ 使得

$$|A\cap(A-k)|=\infty.$$

证明。设 M是 L（A）$\cup\{0\}$中的一个无限维空间。我们考虑满足 $|L_x|=$ 的 $x\in M\min\{|L_z|:\ z\in M\}$，并令 $K=|L_x|$。还存在一个属于 M 的序列（y_n），其$\lim_n|L_{y_n}|=\infty$，因为当 F 是 $\mathbb{N}\backslash\{1\}$（[7, 定理 4.4]）的有限子集时，$L$（$F$）不可线性化。将命题 2.2 应用于 $\mathrm{span}\{x,y_n\}$，我们推得

$$]|\mathcal{E}_{x,y_n}|-K,|\mathcal{E}_{x,y_n}|[\cap A\neq\emptyset.$$

特别地，存在 $1\le k\le K$ 和一个递增序列（n_j），使得$|\mathcal{E}_{x,\ y_{n_j}}|-k\in A$对任意 j都成立。由于$|\mathcal{E}_{x,\ y_{n_j}}|\ge|L_{y_{n_j}}|$且$|\mathcal{E}_{x,\ y_{n_j}}|\in A$，我们得到$|A\cap\ (A-k)\ |=\infty$。 □

这个定理通过断言 [7] by asserting that$L(\{n^2:n\ge 2\})$ 不可线性化，使我们能够回答 [7] 中提出的一个开放问题。更一般地，我们得到以下例子：

例 2.4. 如果 $(a_n)_{n\geq 0}$ 是一个满足 $a_0 \geq 2$ 且 $\lim_n(a_{n+1}-a_n) = \infty$ 的递增序列，那么 $L(\{a_n : n \geq 0\})$ 不可线性化。

鉴于前面的例子以及 $2\mathbb{N}+1$ 的情形，我们不禁会想：当 $\operatorname{limsup}_n(a_{n+1}-a_n) = \infty$ 但 $\operatorname{liminf}_n(a_{n+1}-a_n) < \infty$ 时， $L(\{a_n : n \geq 0\})$ 是否可线性化。为了构造这样一个例子，我们将使用下面的引理，它是通过对 [7] 中的引理 2.2 依次应用得到的。

引理 2.5。 如果 $x_1,...,x_k \in L(\mathbb{N})$ 满足 $|L_{x_i}| = n_i$、 $1 \leq i \leq k$，且 $z = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ 且 $a_k \neq 0$，那么

$$\frac{n_k}{n_1 \dots n_{k-1}} \leq |L_z| \leq n_1 \dots n_k.$$

现在我们证明，存在一个间隔可以任意大的集合 A，使得 $L(A)$ 可线性化。

命题 2.6。 设 $(n_k)_{k\geq 1}$ 是一个递增序列。存在一个无限集 $\mathcal{K}$，使得集合

$$L\left([2,+\infty[\setminus \bigcup_{k\in\mathcal{K}} [n_k, n_{k+1}[\right)$$

是可线性化的。

证明。 我们寻求通过归纳法构造一个线性无关族$(x_n)_{n\geq 1} \subset \ell^\infty$ 以及一个整数的递增序列（k_j）$_{j\geq 1}$，使得

$$\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L\left([2,+\infty[\setminus \bigcup_{k\in\mathcal{K}} [n_k, n_{k+1}[\right) \cup \{0\}$$

对于 $\mathcal{K} = \{k_j : j \geq 1\}$。

设 $x_1 \in \ell^\infty$ 是一个满足 $|L_{x_1}| : = l_1 = 2$ 的序列，并令 k_1 满足 $n_{k_1} > l_1$。我们选取 l_2 使得 $\frac{l_2}{l_1} \geq n_{k_1+1}$，然后取一个序列 $x_2 \in \ell^\infty$，满足 $|L_{x_2}| = l_2$以及 k_2，使得 $n_{k_2} > l_1 l_2$。归纳地，若 $r \geq 1$，我们选取 l_r 使得

$$\frac{l_r}{l_1 \dots l_{r-1}} \geq n_{k_{r-1}+1}$$

然后取一个序列 $x_r \in \ell^\infty$，使得 $|L_{x_r}| = l_r$，以及 k_r，使得

$$n_{k_r} > l_1 \dots l_r.$$

那么 $M : =$ 张成空间$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是一个包含于其中的无限维子空间

$$L\left([2,+\infty[\setminus \bigcup_{k\in\mathcal{K}} [n_k, n_{k+1}[\right) \cup \{0\}$$

对于 $\mathcal{K} := \{k_j : j \in \mathbb{N}\}$。事实上，如果 $z = \sum_{i=1}^{j} a_i x_i \in M$ 满足 $a_j \neq 0$，那么根据引理 2.5及归纳法，我们得到

$$n_{k_{j-1}+1} \leq \frac{l_j}{l_1 \dots l_{j-1}} \leq |L_z| \leq l_1 \dots l_j < n_{k_j}.$$

□

特别地，如果我们将前面的命题应用于满足 $\lim_k(n_{k+1}-n_k)=\infty$ 的序列 (n_k)，则可推得存在一个递增序列 (a_n)，满足 $a_0\geq 2$ 且 $\limsup_n(a_{n+1}-a_n)=\infty$，使得 $L(\{a_n: n\geq 0\})$ 是可线性化的。

关于 [7] 的另一个问题涉及 $L(2\mathbb{N}+1)$ 的稠密可直线化性。事实上，他们在那里证明了 $L(2\mathbb{N}+1)$ 是可线性化的，而 $L(\mathbb{N}\backslash\{1\})$ 是稠密可线性化的。因此，自然会尝试确定 $L(2\mathbb{N}+1)$ 是否也能稠密可线性化。结果答案是否定的，因为要使无限集 A 满足 $L(A)$ 是稠密可线性化的，必须满足更强的假设：$|A\cap(A-1)|=\infty$。这一结果的思路可概括如下。若 y 是一个非零序列，其聚点彼此相距至少 $\delta>0$，且 x 是一个与 $1_{2\mathbb{N}}-1_{2\mathbb{N}+1}$ 非常接近的序列，那么集合 $\mathcal{P}_{x,\,y}$ 将属于两个细长矩形 $\{(\xi,\eta): |\xi-1|<\varepsilon\}$ 和 $\{(\xi,\eta): |\xi+1|<\varepsilon\}$，它们分别位于 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 周围。若 ε 相对于 δ 和 $\|y\|^{-1}$ 足够小，则同一矩形内两点之间的斜率，其绝对值将为 0，或大于两个矩形内两点之间斜率的绝对值。由此可知，两个矩形之间出现的最大斜率（若最大斜率等于 0，则为最小斜率）只会出现一次，这意味着存在 $z\in$ 张成空间$\{x,y\}$，使得$|L_z|=|\mathcal{E}_{x,\,y}|-1$。

定理 2.7. 设 $A\subset\mathbb{N}\backslash\{1\}$。若 $L(A)$ 是稠密可线性化的，则

$$|A\cap(A-1)|=\infty.$$

证明。设 M 是 $L(A)\cup\{0\}$ 中的一个稠密的无限维向量空间，并设$y\in M$ 是一个非零序列。我们可以写成

$$y\sim_{c_0} a_1 1_{S_1}+\cdots+a_N 1_{S_N}$$

其中 $S_1,\ldots,S_N$是 $\mathbb{N}$的一个划分，划分为无限集，且 $a_1<a_2<\cdots<a_N$。我们考虑

$$\delta:=\min\{a_{l+1}-a_l: 1\leq l<N\}.$$

由于 M 是稠密的，存在 $x\in M$ 使得

$$\|x-(1_{2\mathbb{N}}-1_{2\mathbb{N}+1})\|<\varepsilon=\min\left\{\frac{\delta}{8\|y\|},\frac{1}{2}\right\}.$$

于是我们可以写成

$$x\sim_{c_0}(b_1 1_{T_1}+\cdots+b_L 1_{T_L})+(c_1 1_{Q_1}+\cdots+c_J 1_{Q_J})$$

with

$$-1-\varepsilon\leq b_1<\ldots<b_L\leq -1+\varepsilon<1-\varepsilon\leq c_1<\ldots<c_J\leq 1+\varepsilon.$$

令

$$C:=\max\{\frac{a_k-a_i}{c_j-b_l}\ :\ |T_l\cap S_i|=\infty,\,|Q_j\cap S_k|=\infty,1\leq j\leq J,\,1\leq l\leq L,\,1\leq k,i\leq N\}.$$

注意，如果 $C=0$，我们可以将 y 替换为 $-y$，从而得到 $C\neq 0$（因为 $\mathcal{P}_{x,y}$ 中的元素不可能全部对齐，因为 $1\notin A$）。因此，不失一般性，我们可以假设有 $C\neq 0$，并注意到

$$|C|\leq\frac{\|y\|}{1-\varepsilon}\leq 2\|y\|.$$

现在我们考虑

$$z=-Cx+y$$

并证明$|L_z|=|\mathcal{E}_{x,y}|-1$。

Let

$$A_l = \{-Cb_l + a_i : |T_l \cap S_i| = \infty,\ 1 \le i \le N\}$$

对于 $1 \le l \le L$ 和

$$B_j = \{-Cc_j + a_k : |Q_j \cap S_k| = \infty,\ 1 \le i \le N\}$$

对于 $1 \le j \le J$。我们知道

$$L_z = \bigcup_{1\le l\le L} A_l \cup \bigcup_{1\le j\le J} B_j \quad \text{and} \quad \sum_{1\le l\le L} |A_l| + \sum_{1\le j\le J} |B_j| = |\mathcal{E}_{x,y}|.$$

取 i_0、j_0、k_0、l_0，使得 $|T_{l_0} \cap S_{i_0}| = \infty$、$|Q_{j_0} \cap S_{k_0}| = \infty$，并且

$$C = \frac{a_{k_0} - a_{i_0}}{c_{j_0} - b_{l_0}}.$$

我们证明，在集合 A_l 中的所有元素和集合 B_j 中的所有元素之间，只有两个相等的元素 $-Cb_{l_0} + a_{i_0}$ 和 $-Cc_{j_0} + a_{k_0}$。因此可得$|L_z| = |\mathcal{E}_{x,\ y}| - 1$。

我们需要考虑三种情形:

(1) 令 $1 \le l < l' \le L$ 和 $1 \le i$、$i' \le N$。如果 $-Cb_l + a_i = -Cb_{l'} + a_{i'}$，那么$C = \frac{a_{i'} - a_i}{b_{l'} - b_l}$。然而，我们知道 $C \ne 0$，因此 $i' \ne i$。根据 δ 和 ε 的定义可得

$$|C| \ge \frac{\delta}{2\varepsilon} \ge 4\|y\|.$$

这是矛盾的，因为 $|C| \le 2\|y\|$。

(2) 设 $1 \le j < j' \le J$和 $1 \le k, k' \le N$。若 $-Cc_j + a_k = -Cc_{j'} + a_{k'}$，则如前所述，我们得到

$$|C| = \frac{|a_{k'} - a_k|}{|c_{j'} - c_j|} \ge \frac{\delta}{2\varepsilon} \ge 4\|y\|,$$

这与矛盾。

(3) 设 $1 \le j \le J$, $1 \le l \le L$和 $1 \le k, k' \le N$。若 $-Cc_j + a_k = -Cb_l + a_i$, 且 $-Cc_j + a_k \in B_j$和 $-Cb_l + a_i \in A_l$，则

$$-Cc_{j_0} + a_{k_0} = -Cb_{l_0} + a_{i_0} = -Cb_l + a_i = -Cc_j + a_k.$$

事实上，例如，若有

$$-Cc_{j_0} + a_{k_0} = -Cb_{l_0} + a_{i_0} > -Cb_l + a_i = -Cc_j + a_k$$

then

$$\frac{a_{k_0} - a_i}{c_{j_0} - b_l} > C$$

这与矛盾。因此可得 $a_{i_0} - Cb_{l_0} = a_i - Cb_l$ 和 $a_{k_0} - Cc_{j_0} = a_k - Cc_{j_0}$。根据前面的各点，这意味着 $l = l_0$和 $j = j_0$（从而也意味着 $i = i_0$ 和 $k = k_0$）。

由此可得$|L_z| = |\mathcal{E}_{x,\ y}| - 1$ 证明至此完成，因为$|\mathcal{E}_{x,\ y}| - 1 \in A \cap (A - 1)$。□

如前所述，由此结果可直接得出，$L(2\mathbb{N} + 1)$并非稠密可线性化。我们还可以通过比较命题 2.6 与下面的结果，评估可直线化性与稠密可直线化性之间的差异。

命题 2.8。 如果$(n_k)^{k\geq 1}$ 满足 $n_{k+1} > n_k^2$，则对于任意 $k \geq 1$，以及任意无限集 $\mathcal{K}$，集合

$$L\left([2,+\infty[\setminus \bigcup_{k\in\mathcal{K}} [n_k, n_{k+1}[\right)$$

不是稠密可线性化的。

证明。 令 $(n_k)^{k\geq 1}$ 使得

$$n_{k+1} > n_k^2$$

且 $\mathcal{K}$ 为一个无限集。我们希望证明，如果

$$M \subset L\left([2,+\infty[\setminus \bigcup_{k\in\mathcal{K}} [n_k, n_{k+1}[\right) \cup \{0\}$$

是一个线性子空间，那么其维数是可数的。

令 $k \in \mathcal{K}$。为此，我们证明 $M \cap L([2, n_k])$ 中的每个线性无关向量族的基数都小于 n_k。事实上， [7]中证明了集合 $L([2, n_k])$ 恰好是 $(n_k - 1)$-可线性化的。因此，如果 $M\cap L([2, n_k])$ 中存在一个$\{x_1, \dots, x_{n_k}\}$ 线性无关向量族，那么就存在一个向量$z_0 \in$ 属于由$\{x_1, \dots, x_{n_k}\}$ 张成的空间，并且满足 $|L_{z_0}| \geq n_k + 1$。现在，我们可以写成

$$z_0 = \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}$，对于 $1 \leq i \leq n_k$。令

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n_k-1} a_i x_i.$$

若 $|L_{z_1}| \leq n_k$，则由于 $|L_{x_{n_k}}| \leq n_k$ 也成立，由引理 2.5 可得

$$|L_{z_0}| \leq n_k^2.$$

否则，有

$$|L_{z_1}| \geq n_k + 1.$$

重复这一过程，我们便得到一个向量 $z_i \in$张成空间$\{x_1, \dots, x_{n_k-i}\}$，其中某个 $0 \leq i < n_k$ 满足

$$n_k + 1 \leq |L_{z_i}| \leq n_k^2.$$

但这意味着

$$M \cap L([n_k + 1, n_k^2]) \neq \emptyset$$

这就产生了矛盾，因为 $n_{k+1} > n_k^2$ 和 $k \in \mathcal{K}$。现在，证明得证，因为 M 的任意哈梅尔基都包含在

$$\bigcup_{k\in\mathcal{K}} L([2, n_k])$$

因此它将是可数的。这使得 M 不可能在 ℓ^∞中稠密。 □

由命题 2.6 和命题 2.8 可得一大族无限集 A，使得 $L(A)$ 可线性化但不稠密可线性化。

推论 2.9. 对于任意$(n_k)^{k\geq 1}$，若满足 $n_{k+1} > n_k^2$ 对任意 $k \geq 1$，则存在一个无限集 $\mathcal{K}$，使得该集合

$$L\left([2,+\infty[\setminus \bigcup_{k\in\mathcal{K}} [n_k, n_{k+1}[\right)$$

是可线性化的，但不是稠密可线性化的。

另一个满足 $L(A)$ 可线性化但不稠密可线性化的无限集 A 的例子，可以由偶数集给出。事实上，我们可以从定理 2.7 推出， $L(2\mathbb{N})$ 不是稠密可线性化的。然而， $L(2\mathbb{N})$ 是否可线性化仍是一个开放问题。这个问题见于 [7]，我们在此再次提出，因为在我们看来，它非常重要且引人深思。

问题 4. $L(2\mathbb{N}) \cup \{0\}$ 是否包含一个无限维子空间?

3. 非可分空间化

Leonetti、Russo 和 Somaglia 在 [7] 中证明，集合 $L(\mathbb{N}\setminus\{1\})$ 不可空间化，而集合 $L(\omega)$ 和 $L(\mathfrak{c})$ 均可空间化。他们还指出， $L(\mathfrak{c}) \cup \{0\}$ 甚至包含一个实数集的等距副本。然而，目前尚不清楚能否在 $L(\omega)\cup\{0\}$ 中找到实数集的等距副本，也不清楚 $L(\omega)\cup\{0\}$ 是否包含一个闭的不可分子空间。本节将回答 [7] 中提出的这个开放问题。为此，我们首先证明， $L(\omega)\cup\{0\}$ 甚至 $L(\mathbb{N}\cup\{\omega\})\cup\{0\}$ 都不包含实数集的等距副本。

命题 3.1. 集合 $L(\mathbb{N}\cup\{\omega\})\cup\{0\}$ 不包含ℓ^∞的等距副本。

证明。假设存在一个线性等距映射 $\phi\colon \ell^\infty \to L(\mathbb{N}\cup\{\omega\})\cup\{0\}$。设 A和 B 是 $\mathbb{N}$ 的非空不相交子集，并令 $P_n(x)$为 x的第 n个坐标。由于 $\|\phi(1_A)\| = \|\phi(1_B)\| = \|\phi(1_A+1_B)\| = \|\phi(1_A-1_B)\| = 1$，我们首先指出，若 $|P_n(\phi(1_A))| = 1$，则 $P_n((\phi(1_B)) = 0$ ；若存在递增序列 (n_k)，使得 $\lim_k |P_{n_k}(\phi(1_A))| = 1$，则 $\lim_k P_{n_k}(\phi(1_B)) = 0$。

现在证明，对于 $\mathbb{N}$中的任意无限集 A，存在递增序列 (n_k)，使得 $\lim_k |P_{n_k}\phi(1_A)| = 1$。假设结论不成立。那么，由于$\|\phi(1_A)\| = 1$，存在一个非空有限集 $\mathcal{N}$，使得对于任意 $n \in \mathcal{N}$，$|P_n\phi(1_A)| = 1$，并且对于任意 $n \notin \mathcal{N}$， $|P_n\phi(1_A)| < 1$。设 $N = |\mathcal{N}|$、A_1、.....、A_{N+1}是 A 的一个由无限集构成的划分。可以看到，集合 $\mathcal{N}_k = \{n\colon |P_n\phi(1_{A_k})| = 1\}$两两不相交，并且对任意 $1 \leq k \leq N+1$， $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}$。根据 N的定义，这意味着存在 $1 \leq k \leq N+1$，使得 A_k 为空集。这表示存在递增序列 (n_j)，使得 $|P_{n_j}(\phi(1_{A_k}))|$趋于 1，因此$|P_{n_j}(\phi(1_A))|$ 也趋于 1，这就产生了矛盾。

换言之，我们已经证明，对于 $\mathbb{N}$ 中的任意无限集 A，1 或 -1 属于$L_{\phi(1_A)}$。注意，若 B 是 A 的无限子集，且$1 \in L_{\phi(1_B)}$（分别地，$-1 \in L_{\phi(1_B)}$），则$1 \in L_{\phi(1_A)}$（分别地，$-1 \in L_{\phi(1_A)}$）。因此，存在 $\mathbb{N}$ 中的一个无限集 A，使得对于 A 的任意无限子集 B，都有$1 \in L_{\phi(1_B)}$；或者，对于 A的任意无限子集B，都有 $-1 \in L_{\phi(1_B)}$。事实上，只需考虑满足$1 \in L_{\phi(1_A)}$ 且$-1 \notin L_{\phi(1_A)}$的 A，或满足$-1 \in L_{\phi(1_A)}$ 且$1 \notin L_{\phi(1_A)}$的$-1 \in L_{\phi(1_A}$。若不存在这样的集合，就意味着对于任意无限集，实数 1 和 -1 都属于$L_{\phi(1_A)}$，因此任意无限集 A 都满足所需性质。

不失一般性，假设存在一个无限集 A，使得对于 A 的任意无限子集 B，都有 $1 \in L_{\phi(1_B)}$。我们考虑由 A 的无限子集组成的族 $(A_{j,k})_{j\geq 1, 0\leq k\leq 2^j-1}$，满足：若 $k \neq k'$，则 $A_{j,k} \cap A_{j,k'} = \emptyset$；若 $A_{j,k} = A_{j+1,2k} \cup A_{j+1,2k+1}$。令

$$y_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{k}{2^j} 1_{A_{j,k}}.$$

序列 $(y_j)_{j\geq 1}$ 在 ℓ^∞ 中收敛，因为

$$\begin{aligned} y_{j+1} - y_j &= \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} \frac{k}{2^{j+1}} 1_{A_{j+1,k}} - \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{k}{2^j} 1_{A_{j,k}} \\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} (\frac{2k}{2^{j+1}} - \frac{k}{2^j}) 1_{A_{j+1,2k}} + \sum_{k=0}^{2^j-1} (\frac{2k+1}{2^{j+1}} - \frac{k}{2^j}) 1_{A_{j+1,2k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{1}{2^{j+1}} 1_{A_{j+1,2k+1}} \end{aligned}$$

因此 $\|y_{j+1} - y_j\| = \frac{1}{2^{j+1}}$。我们用 y 表示 $(y_j)_{j\geq 1}$ 的极限，并得到序列 $(\phi(y_j))_{j\geq 1}$ 趋于 $\phi(y)$。

根据 A的性质，我们可以指出，对于任意 $j \geq 1$，都有

$$L_{\phi(y_j)} \supset \{\frac{k}{2^j} : 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$$

因为对于任意 $0 \leq k \leq 2^j - 1$，都存在一个递增序列 (n_l)，使得$P_{n_l}(\phi(1_{A_{j,\,k}}))$ 趋于 1，且 $P_{n_l}(\phi(1_{A_{j,\,k'}}))$ 在 $k' \neq k$时趋于 0。这使我们可以得出结论：$L_{\phi(y)}$ 包含一个不可数的 $[0,1]$。事实上，$L_{\phi(y)}$ 是一个闭集，并且对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $j_0 \geq 1$，使得对于任意 $j \geq j_0$,

$$\|\phi(y_j) - \phi(y)\| < \varepsilon.$$

特别地，如果 $j \geq j_0$ 和 $a \in L_{\phi(y_j)}$ 那么 $d_\infty(L_{\phi(y)}, a) \leq \varepsilon$。由于 $L_{\phi(y_j)} \supset \{\frac{k}{2^j} : 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$，我们得到所需结论。□

尽管集合 $L(\omega) \cup \{0\}$ 不包含 ℓ^∞的等距副本，但我们可以采用另一种方法，在 $L(\omega)\cup\{0\}$ 中构造一个闭的非可分子空间。

命题 3.2。集合 $L(\omega) \cup \{0\}$ 包含一个闭的非可分子空间。

证明。 设 $(A_s)_{s\in\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集族，使得对于任意 $s \neq t$，交集 $A_s \cap A_t$ 是有限的。根据引理 2.1]，可以找到这样的族。对于每个 $s \in \mathbb{R}$，我们将 A_s 划分为无限子集 $(A_s^m)_{m=0}^\infty$。如果$c_m = \frac{1}{2^m}$，$m \geq 0$，则令 $(x_s)_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\omega)$ 为

$$x_{s,n} = \begin{cases} c_m \text{ if } n \in A_s^m, \\ 0 \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意到 $L_{x_s} = \{c_m : m \geq 0\} \cup \{0\}$。令

$$M = \overline{\text{span}}\{x_s : s \in \mathbb{R}\}.$$

显然，M 是闭且不可分的，因为它包含不可数族 $(x_s)_{s\in\mathbb{R}}$，并且对于任意 $s \neq t$，都有 $\|x_s - x_t\| = 1$。

我们将证明 $M \subset L(\omega) \cup \{0\}$。若 $x \in M\backslash\{0\}$，则存在一个序列 $(y_N)_{N=1}^{\infty} \subset$ 张成空间$\{x_s : \ s \in \mathbb{R}\}$，使得 $y_N \to x_\circ$ 于是我们可以找到一个由互不相同的实数组成的序列 $(s_k)_{k\geq 0}$，使得

$$y_N = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^N x_{s_k}$$

其中 $a_k^N \in \mathbb{R}$，并且对于任意 N，只有有限多个系数 a_k^N非零。我们还注意到

$$L_{y_N} = \{a_k^N c_m : k, m \geq 0\} \cup \{0\}.$$

由于 y_N 的坐标沿集合 $A_{s_k}^0$最终等于 a_k^N，且 $(y_N)_{N=1}^{\infty}$ 是柯西序列，我们得到：若 $\varepsilon > 0$，则存在 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 N_1，$N_2 \geq N_0$

$$|a_k^{N_1} - a_k^{N_2}| \leq \|y_{N_1} - y_{N_2}\| < \varepsilon,$$

对于每个 $k \geq 0$。因此，存在 $a_k \in \mathbb{R}\ (k \geq 0)$，使得

$$a_k^N \to a_k \quad \text{as } N \to \infty, \text{ uniformly for } k \geq 0.$$

特别地，存在 $L > 0$，使得对于所有 $N \geq 1$ 和所有 $k \geq 0$，都有$|a_k^N| \leq L$。

接下来我们证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $N_0 \in \mathbb{N}$、$K \geq 0$ 和 $M \geq 0$，使得若对某个 $N \geq N_0$ 有$|y_{N,n}| \geq \varepsilon$，则 $n \in \bigcup_{k\leq K} \bigcup_{m\leq M} A_{s_k}^m$。事实上，同样由于 $(y_N)_{N=1}^{\infty}$ 是柯西序列，我们得到 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $N \geq N_0$，$\|y_N - y_{N_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$。令

$$K = \max\{k \geq 0 : a_k^{N_0} \neq 0\}$$

且 $M \geq 0$ 使得

$$2c_{M+1}LK < \varepsilon.$$

设 n 使得$|y_{N,\ n}| \geq \varepsilon$ 对某个 $N \geq N_0$成立。若 $n \notin \bigcup_{k\leq K} \bigcup_{m\leq M} A_{s_k}^m$，则

$$|y_{N_0,n}| \leq \sum_{k=1}^{K} |a_k^N| c_{M+1} \leq KLc_{M+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$|y_{N,n}| < \|y_N - y_{N_0}\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

对所有 $N \geq N_0$ 都成立，这与假设矛盾。

现在我们证明

$$L_x = \{a_k c_m : k, m \geq 0\} \cup \{0\}$$

因此 $x \in L(\omega)$。设 $a \in L_x$ 满足 $a \neq 0$。考虑一个递增序列 (n_l)，使得

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_l} = a.$$

由于 $y_N \to x$，因此存在 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $N \geq N_0$，$|y_{N,\ n_l}| > \frac{|a|}{2}$ 最终成立。将上一段的结论应用于 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$，可得存在 K、$M \geq 0$，使得

$$(n_l) \subset \bigcup_{k\leq K} \bigcup_{m\leq M} A_{s_k}^m$$

最终。取一个子序列后，我们可以假设

$$(n_l) \subset A_{s_k}^m$$

对某些 $k \leq K$ 和 $m \leq M$成立。现在注意到 $(y_{N,n_l})_N$ 在 l 中一致收敛到 x_{n_l}，并且对任意 N，$(y_{N,n_l})_l$ 收敛到 $a_k^N c_m$。由此可得

$$a = \lim_{l\to\infty} x_{n_l} = \lim_{l\to\infty} \lim_{N\to\infty} y_{N,n_l} = \lim_{N\to\infty} \lim_{l\to\infty} y_{N,n_l} = \lim_{N\to\infty} a_k^N c_m = a_k c_m.$$

由此可得 $L_x \subset \{a_k c_m : k, m \geq 0\} \cup \{0\}$。

反向包含关系则更容易证明。对每个 $k, m \geq 0$，只需考虑 (n_l)，即 $A_{s_k}^m$ 的递增枚举，并像上面那样推出 $\lim_{l\to\infty} x_{n_l} = a_k c_m$。最后，由于 L_x 是闭的，且 c_m 趋于 0，我们得出 $L_x = \{a_k c_m : k, m \geq 0\} \cup \{0\}$。

□

参考文献

[1] R. Aron、L. Bernal-González、D.M. Pellegrino 和 J.B. Seoane-Sepúlveda，《数学中的线性可构性：探寻线性》，数学专著与研究札记，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2016年。[2] R.M. Aron、V.I. Gurariy、J.B. Seoane-Sepúlveda，《 $\mathbb{R}$上的函数集的线性可构性与空间可构性》，《美国数学会会刊》133（2005年），795–803。[3] L. Bernal-González 和 M. Ordóñez Cabrera，《线性可构性判据及其应用》，《泛函分析杂志》266（2014年），第6期，3997–4025。[4] L. Bernal-González、D.M. Pellegrino 和 J.B. Seoane-Sepúlveda，《拓扑向量空间中非线性集合的线性子集》，《美国数学会通报》（新系列）51（2014年），第1期，71–130。[5] D. Cariello 和 J.B. Seoane-Sepúlveda，《 ℓ_p空间中的基本序列与可空间化》，《泛函分析杂志》266（2014年），第6期，3797–3814。[6] V.I. Gurariy、L. Quarta，《连续函数集的可直线化性》，《数学分析及其应用杂志》294（2004年），62–72。[7] P. Leonetti、T. Russo、J. Somaglia，《 ℓ^∞的某些子集中的稠密可直线化性与可空间化》，arXiv:2203.08662（2022年），1–19。[8] F. León-Saavedra 和 A. Montes-Rodríguez，《超循环向量的线性结构》，《泛函分析杂志》148（1997年），524–545。[9]F. León-Saavedra 和 A. Montes-Rodríguez，《谱理论与超循环子空间》，《美国数学会汇刊》353（2001年），247–267。[10] Q. Menet，《超循环子空间与加权移位》，《数学进展》255（2014年），305–337。[11]D. Papathanasiou，《 $\ell^\infty \setminus c_0$的稠密可直线化性与代数可构性》，《美国数学会会刊》150（2022年），991–996。

（Q. Menet）概率与统计服务，数学系，蒙斯大学，公园广场20号，7000 蒙斯（比利时）电子邮箱地址：quentin.menet@umons.ac.be（D. Papathanasiou）概率与统计服务，数学系，蒙斯大学，公园广场20号，7000 蒙斯（比利时）电子邮箱地址：dimitrios.papathanasiou@umons.ac.be