arXiv:2303.03884v1 [math.DS] 7 Mar 2023

关于为两性群体构造的二次随机算子的动力系统

Z.S. BOXONOV

Abstract. 对于两类两性群体，我们给出了作用于标准单纯形笛卡尔积上的二次随机算子的构造性描述。我们考虑这样一种两性群体：雌性集合可划分为有限个不同类型，以 $\{1,2,...,n\}$ 为索引；类似地，雄性类型以 $\{1,2,...,\nu\}$ 为索引。针对 $n=\nu=2$ 和 $n=\nu=4$ 两种情形，为两性群体构造了二次随机算子。在这两种情形下，我们研究由两性群体的二次算子生成的动力系统，并求出所有不动点和极限点。此外，我们还对所得结果给出了一些生物学解释。

1. 引言

基因的作用会在足够大的、由可交配个体（属于同一物种）组成的群体中以统计方式显现。这些群体称为种群 [3]。种群不仅存在于空间中，也存在于时间中，即具有自身的生命周期。这一现象的基础是通过交配进行繁殖。种群中的交配可以是自由的，也可以受到某些限制。种群在时空中的整体由离散的世代组成 $\mathbb{G}_0, \mathbb{G}_1, ...$ 世代 $\mathbb{G}_{n+1}$ 是其亲代属于 $\mathbb{G}_n$ 世代的个体集合。种群状态是每一世代中不同类型生物体的概率分布。类型的划分称为分化。最简单的例子是性别分化。在两性群体中，任何类型划分都必须与性别分化相一致，即同一类型的所有生物体必须属于相同性别。因此，可以讨论雄性类型和雌性类型 [3], [14], [16]。

这类种群的动力学通常由定义在标准单纯形上的二次随机算子（QSO）来研究。

自然科学中的许多问题都可以通过非线性动力系统来解决（见 [6], [16], [17], [18]）。

QSO 的概念最早于 [1] 中提出。下面给出一些基本定义。自由种群的 QSO 有如下含义：假设一个自由种群由 n 个元素组成。集合

$$S^{n-1}=\left\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i=1\right\} \tag{1.1}$$

称为一个（$n-1$）维单纯形。

将单纯形映射到其自身的二次随机算子 $V{:}S^{n-1}\to S^{n-1}$，其形式为

$$V: x'_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij,k}x_ix_j, \quad k=1,...,n, \tag{1.2}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 92D25.*Key words and phrases.* 二次随机算子，双性群体，不动点，极限点。

其中$p_{ij,\ k}$是遗传系数和

$$p_{ij,k} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1, \ \ i,j,k = 1,...,n. \tag{1.3}$$

注意，每个元素 $x \in S^{n-1}$ 都是定义在 $E = \{1,...,n$上的概率分布 $\}$.

在二次随机算子（1.2）的作用下， $x^{(0)} \in S^{n-1}$的轨道 $\{x^{(m)}\}, m = 0, 1, 2, ...$ 定义如下: $x^{(m+1)} = V(x^{(m)})\ m = 0, 1, 2, ...$

数学生物学中算子 V 的主要问题之一，是研究轨道的渐近行为。对于由等式（1.2）和（1.3）以及附加条件定义的Volterra二次随机算子（见 [4], [5], [8]），这一问题已经得到完全解决

$$p_{ij,k} = 0, \ \ if \ k \notin \{i,j\}. \tag{1.4}$$

设 $F = \{F_1, F_2, ..., F_n\}$为雌性类型的集合， $M = \{M_1, M_2, ..., M_\nu\}$为雄性类型的集合。数 $n + \nu$称为种群的维数。种群状态定义为集合 F和 M上分别的概率分布 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, ..., y_\nu)$ 所组成的有序对（[9]）：

$$x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1; \ \ y_k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{\nu} y_k = 1. \tag{1.5}$$

该种群的状态空间是（$n-1$）维单纯形 S^{n-1} 与（$\nu-1$）维单纯形 $S^{\nu-1}$的笛卡尔积 $S^{n-1} \times S^{\nu-1}$。如果对于某一世代 $\mathbb{G}$ 的任意状态（x， y），由杂交和选择形成的下一世代 $\mathbb{G}'$ 的状态（ x'， y'）都能唯一确定，则称该种群的分化具有遗传性。

称映射 V： $S^{n-1} \times S^{\nu-1} \to S^{n-1} \times S^{\nu-1}$ （由等式定义）

$$(x', y') = V(x, y), \ \ (x, y) \in S^{n-1} \times S^{\nu-1}, \tag{1.6}$$

为演化算子。用坐标表示时，它具有如下等式组的形式

$$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_\nu), & 1 \leq i \leq n, \\ y_k' = g_k(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_\nu), & 1 \leq k \leq \nu, \end{cases} \tag{1.7}$$

这些等式也称为演化等式。对于任意初始状态（$x^{(0)}$， $y^{(0)}$），映射 (1.6) 唯一确定轨道

$$\{(x^{(t)}, y^{(t)})\}_{t=0}^{\infty} : (x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) = V((x^{(t)}, y^{(t)})) = V^{(t+1)}((x^{(0)}, y^{(0)})), \ \ t = 0, 1, 2, ... \tag{1.8}$$

从点（$x^{(0)}$， $y^{(0)}$）出发的轨道的极限点集合称为其极限集，记作 $\omega(x^{(0)}, y^{(0)})$。下面推导两性种群的演化方程。我们以遗传系数 $p_{ik}^{(f)}{}_{,j}$, $p_{ik\,l}^{(m)}$, 为基础。量 $p_{ik}^{(f)}{}_{,j}$ 定义为母本类型为 F_i, $1 \leq i \leq n$、父本类型为 M_k, $1 \leq k \leq \nu$ 时，后代属于女性类型 F_j, $1 \leq j \leq n$ 的概率。量 $p_{ik\,l}^{(m)}{}_{,}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k, l \leq \nu$ 以类似方式定义。显然,

$$p_{ik,j}^{(f)} \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} p_{ik,j}^{(f)} = 1; \ \ p_{ik,l}^{(m)} \geq 0, \ \sum_{l=1}^{\nu} p_{ik,l}^{(m)} = 1. \tag{1.9}$$

遗传系数考虑了若干因素，例如重组过程、配子选择、突变和差异出生率。设 (x, y) 是

世代 $\mathbb{G}$ 中的一个状态。在下一世代 $\mathbb{G}'$ 中，其萌发时各类型的概率根据全概率公式确定：

$$V:\begin{cases} x'_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu}p^{(f)}_{ik,j}x_iy_k, & 1\le j\le n,\\ y'_l=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu}p^{(m)}_{ik,l}x_iy_k, & 1\le l\le \nu. \end{cases} \tag{1.10}$$

该算 子称为双性群体的二次随机算子（QSOB P).

文献 [9], [10], [11], [12], [14], [16] 研究了双性群体的一些二次随机算子。

主要问题是：给定算子 V 和初始点 $z^{(0)}\in S^{n-1}\times S^{\nu-1}$，轨道 $z^{(n)}=V(z^{(n-1)})$ $n=1$，2，.....最终会发生什么？极限 $\lim_{n\to\infty}z^{(n)}$ 是否存在？如果不存在，该序列的极限点集合是什么？这个集合是有限的还是无限的 [6]。

一般而言，这个问题相当困难，因为由算子（1.10）生成的动力系统是一个复杂的非线性系统。因此，我们将考虑该系统的两个特殊情形，并对这两种情形下的主要问题进行完整研究。

2. 有限 E的 QSOBP 构造

设 $(E,\mathcal{F})$ 是一个可测空间， $S(E,\mathcal{F})$ 是 $(E,\mathcal{F})$ 上所有概率测度构成的集合。当 E为有限时， $S(E,\mathcal{F})$ 上的二次随机算子 $=S^{n-1}$ 按 (1.2) 定义。

设 $G=(\Lambda,L)$ 是一个没有自环和重边的有限图，其中 Λ 是该图的顶点集合， L 是该图的边集合。

此外，设 Φ 是一个有限集合，称为等位基因集合（在统计力学问题中， Φ 称为自旋取值范围）。函数 $\sigma:\Lambda\to\Phi$ 称为一个元胞（在力学中称为构型）。用 Ω 表示所有元胞构成的集合，该集合对应于 (1.2) 中的E。设 $S(\Lambda,\Phi)$ 是定义在有限集合 Ω 上的所有概率测度构成的集合。

设 $\{\Lambda_i,i=1,2,...,n\}$ 是图 $G.$ 的极大连通子图（连通分量）集合

固定集合 $F\subset\Omega$，并称其为“女性”集合；集合 $M=\Omega\setminus F$称为“男性”集合。对于构型 $\sigma\in\Omega$，记其在 $A\subset\Lambda$ 上的“投影”（或“限制”）为 $\sigma(A)$： $\sigma(A)=\{\sigma(x)\}_{x\in A}$. 固定两个元胞 $\sigma_1^f\in F,\sigma_2^m\in M$，并令

$$\Omega^f(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m)=\{\sigma\in F:\sigma(\Lambda_i)=\sigma_1^f(\Lambda_i)\ or\ \sigma(\Lambda_i)=\sigma_2^m(\Lambda_i)\ for\ all\ i=1,...,n\},$$

$$\Omega^m(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m)=\{\sigma\in M:\sigma(\Lambda_i)=\sigma_1(\Lambda_i)\ or\ \sigma(\Lambda_i)=\sigma_2(\Lambda_i)\ for\ all\ i=1,...,n\}.$$

现在设 $\mu^f\in S(\Lambda,\Phi)$（$resp.\ \mu^m\in S(\Lambda,\Phi)$）是定义在 $F(resp.\ M)$ 上的概率测度，满足 $\mu^f(\sigma^f)>0,\mu^m(\sigma^m)>0$对任意元胞 $\sigma^f\in F$, $\sigma^m\in M$均成立；也就是说， μ^f, μ^m是具有某个势 [2], [7] 的 Gibbs测度。遗传系数 $p^{(f)}_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\ \sigma^f}$, $p^{(m)}_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\ \sigma^m}$定义如下：

$$\begin{aligned} p^f_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\sigma^f}&=\begin{cases}\frac{\mu^f(\sigma)}{\mu^f(\Omega^f(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m))}, & \text{if}\quad \sigma\in\Omega^f(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m)\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\\ p^m_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\sigma^m}&=\begin{cases}\frac{\mu^m(\sigma)}{\mu^m(\Omega^m(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m))}, & \text{if}\quad \sigma\in\Omega^m(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m)\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned} \tag{2.1}$$

显然， $p^f_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\ \sigma^f}\ge 0$, $p^m_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\ \sigma^m}\ge 0$和 $\sum_{\sigma\in F}p^f_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\ \sigma^f}=1$, $\sum_{\sigma\in M}p^{(m)}_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\ \sigma^m}=1.$

作用于单纯形 $S(\Lambda,\Phi)$ 且由系数 (2.1) 确定的 QSOBP $V\equiv V_\mu$ 定义如下：对于任意测度 $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)$，测度 $V(\lambda)=\lambda'\in S(\Lambda,\Phi)$

由等式定义

$$\begin{cases} \lambda'(\sigma^f) = \sum\limits_{\sigma_1^f\in F,\sigma_2^m\in M} p^f_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\sigma^f}\lambda(\sigma_1^f)\lambda(\sigma_2^m), \quad \sigma^f\in F, \\ \lambda'(\sigma^m) = \sum\limits_{\sigma_1^f\in F,\sigma_2^m\in M} p^m_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\sigma^m}\lambda(\sigma_1^f)\lambda(\sigma_2^m), \quad \sigma^m\in M. \end{cases} \tag{2.2}$$

因此，在构造 QSOBP 时，Gibbs测度自然地产生。

定理1. 当且仅当图 G 连通时，QSOBP (2.2) 是恒等算子。Pr

oof. 设 G 是一个连通图。那么，固定两个元胞 $\sigma_1^f\in F,\sigma_2^m\in M$，我们有 e

$$\Omega^f(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m)=\{\sigma_1^f\}, \quad \Omega^m(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m)=\{\sigma_2^m\}$$

遗传系数如下:

$$\begin{aligned} p^f_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\sigma^f} &= \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \sigma\in\Omega^f(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m) \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \\ p^m_{\sigma_1^f\sigma_2^m,\sigma^m} &= \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \sigma\in\Omega^m(G,\sigma_1^f,\sigma_2^m) \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3}$$

如果 QSOBP (2.2) 的系数按 (2.3) 所述进行描述，则有

$$\begin{cases} \lambda'(\sigma^f) = \lambda(\sigma^f)\sum\limits_{\sigma_2^m\in M}\lambda(\sigma_2^m) = \lambda(\sigma^f), \quad \sigma^f\in F, \\ \lambda'(\sigma^m) = \lambda(\sigma^m)\sum\limits_{\sigma_1^f\in F}\lambda(\sigma_1^f) = \lambda(\sigma^m), \quad \sigma^m\in M. \end{cases} \tag{2.4}$$

□

3. 在 $S^1\times S^1$ 上构造 QSOBP

令 G 为仅由两个顶点组成的图。此外，令 $\Phi=\{1,2\}.\Omega=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$ 为所有元胞的集合，其中 $\sigma_1=\{1,1\}$, $\sigma_2=\{1,2\}$, $\sigma_3=\{2,1\}$, $\sigma_4=\{2,2\}$。

$F=\{\sigma_i^f\}$, $i=1$, 2 为雌性的集合, $M=\{\sigma_j^f\}$, $j=3$, 4 为雄性的集合 s.

$$\begin{aligned} \Omega^f(G,\sigma_i^f,\sigma_j^m) &= \begin{cases} \{\sigma_1^f,\sigma_2^f\}, & \text{if} \quad i=2,\, j=3, \\ \{\sigma_i^f\}, & \text{otherwise}, \end{cases} \\ \Omega^m(G,\sigma_i^f,\sigma_j^m) &= \begin{cases} \{\sigma_3^m,\sigma_4^m\}, & \text{if} \quad i=2,\, j=3, \\ \{\sigma_j^m\}, & \text{otherwise}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

由 (3.1) 可得遗传系数如下:

$$\begin{aligned} p^f_{\sigma_i^f\sigma_j^m,\sigma_k^f} &= \begin{cases} a, & \text{if} \quad i=2,\ j=3,\ k=1, \\ 1-a, & \text{if} \quad i=2,\ j=3,\ k=2, \\ 1, & \text{if} \quad i=k=1,\ j=3,4 \ \text{ or } i=k=2,\ j=4, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \\ p^m_{\sigma_i^f\sigma_j^m,\sigma_l^m} &= \begin{cases} b, & \text{if} \quad i=2,\ j=3,\ l=3, \\ 1-b, & \text{if} \quad i=2,\ j=3,\ l=4, \\ 1, & \text{if} \quad i=1,\ j=l=3,4 \ \text{ or } i=2,\ j=l=4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$a=\frac{\mu^f(\sigma_1^f)}{\mu^f(\sigma_1^f)+\mu^f(\sigma_2^f)},\ b=\frac{\mu^m(\sigma_3^m)}{\mu^m(\sigma_3^m)+\mu^m(\sigma_4^m)}.$$

若 QSOBP (2.2) 的系数如 (3.2) 所示，则有

$$V:\begin{cases}\lambda'(\sigma_1^f)=\lambda(\sigma_1^f)\lambda(\sigma_3^m)+\lambda(\sigma_1^f)\lambda(\sigma_4^m)+a\lambda(\sigma_2^f)\lambda(\sigma_3^m),\\ \lambda'(\sigma_2^f)=(1-a)\lambda(\sigma_2^f)\lambda(\sigma_3^m)+\lambda(\sigma_2^f)\lambda(\sigma_4^m),\\ \lambda'(\sigma_3^m)=\lambda(\sigma_1^f)\lambda(\sigma_3^m)+b\lambda(\sigma_2^f)\lambda(\sigma_3^m),\\ \lambda'(\sigma_4^m)=\lambda(\sigma_1^f)\lambda(\sigma_4^m)+\lambda(\sigma_2^f)\lambda(\sigma_4^m)+(1-b)\lambda(\sigma_2^f)\lambda(\sigma_3^m).\end{cases}\tag{3.3}$$

记

$$x_1=\lambda(\sigma_1^f),\ x_2=\lambda(\sigma_2^f),\ y_1=\lambda(\sigma_3^m),\ y_2=\lambda(\sigma_4^m).\tag{3.4}$$

由 $\lambda(\sigma_1^f)+\lambda(\sigma_2^f)=1, \lambda(\sigma_3^m)+\lambda(\sigma_4^m)=1$ 和 (3.4)，可将算子 V 写成如下形式:

$$V:\begin{cases}x_1'=x_1+ax_2y_1,\\ x_2'=(1-a)x_2y_1+x_2y_2,\\ y_1'=x_1y_1+bx_2y_1,\\ y_2'=y_2+(1-b)x_2y_1.\end{cases}\tag{3.5}$$

由于 $(x_1,x_2;y_1,y_2)\in S^1\times S^1$，我们有 $x_2=1-x_1$ 和 $y_2=1-y_1$（记作$x_1=x,y_1=y$）。可将 QSOBP (3.5) 改写为如下形式

$$W:\begin{cases}x'=x+a(1-x)y,\\ y'=y(x+b(1-x)),\end{cases}\tag{3.6}$$

其中 $a,b\in(0,1)$，且 W: $S_0^1\to S_0^1$, $S_0^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y\in[0,1]\}$. 因此，我们得到一个具有两个独立参数的二次算子。

3.1. (3.5) 的不动点。

我们首先求出算子 W 的不动点，该算子定义为（3.6）。为了求出（3.6）的不动点，我们应求解以下方程

$$\begin{aligned}x&=x+a(1-x)y,\\ y&=y(x+b(1-x)).\end{aligned}\tag{3.7}$$

记 $Fix(W)$ 为算子 W 的所有不动点的集合，该算子由（3.6）给出 .

下面的命题是显然的。

命题1。集合 $Fix(W)$ 具有以下形式

$$Fix(W)=Z_1\bigcup Z_2$$

其中

$$Z_1=\{(x,y):x\in[0,1),y=0\},\ Z_2=\{(x,y):x=1,y\in[0,1]\}.\tag{3.8}$$

Fr由命题1，我们得到关于算子（3.5）的不动点的如下结论。

命题2。集合 $Fix(V)$ 具有如下形式

$$Fix(V)=\mathcal{Z}_1\bigcup\mathcal{Z}_2$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1&=\{(x_1,x_2;y_1,y_2):x_1\in[0,1),x_2=1-x_1,y_1=0,y_2=1\},\\ \mathcal{Z}_2&=\{(x_1,x_2;y_1,y_2):x_1=1,x_2=0;y_1\in[0,1],y_2=1-y_1\}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

3.2. 不动点类型。

现在我们将考察不动点的类型。

定义 1.（参见[6]）如果算子 W 的不动点 s 处的雅可比矩阵J 没有位于单位圆上的特征值，则称该不动点为双曲的。

定义 2.（参见[6]）双曲不动点 s称为:

1）若雅可比矩阵 $J(s)$的所有特征值的绝对值均小于 1，则称其为吸引的;

2）若雅可比矩阵 $J(s)$的所有特征值的绝对值均大于 1，则称其为排斥的;

3）否则为鞍点。

T为了确定算子（3.6）不动点的类型，我们写出雅可比矩阵 :

$$J_W = \begin{pmatrix} 1-ay & a(1-x) \\ y(1-b) & x(1-b)+b \end{pmatrix}.$$

显然，对于参数 $a,b \in (0,1)$ 的任意取值，不动点 $\forall z_1 \in Z_1$ 和 $\forall z_2 \in Z_2 \setminus \{(1,0)\}$ 处的雅可比矩阵的特征值中总有一个等于 1，另一个小于 1；而不动点 $z_3 = (1,0)$ 处的雅可比矩阵的两个特征值均为 1。

对于由（3.6）定义的算子 W 的不动点类型，有如下命题:

命题3。不动点 $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ 是非双曲的（但 $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2 \setminus \{z_3\}$ 是半吸引的 [1]）。

3.3. 极限点集合。

本小节中，对于任意初始点 $(x^{(0)},y^{(0)}) \in S_0^1$，我们研究轨道 $(x^{(n)},y^{(n)}) = W^n(x^{(0)},y^{(0)})$ $n \geq 1$. 的行为

集合 A 称为关于 W 不变，如果 $W(A) \subset A$.

记

$$M_c = \{(x,y) \in S_0^1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{1-b} = c\},\ c = const. \tag{3.10}$$

引理1. 集合 M_c 关于算子 W 不变，即 $W(M_c) \subset M_c$。证明. 由 (3.6) 的第一和第二个等式可得

$$\frac{x'-x}{a} = (1-x)y,\ \frac{y-y'}{1-b} = (1-x)y.$$

因此

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{1-b} = \frac{x}{a} + \frac{y}{1-b}.$$

□

注意

$$S_0^1 = \bigcup_c M_c. \tag{3.11}$$

根据（3.11），只需研究每个不变集合上的轨道。

定理 2. 若 $(x^{(0)},y^{(0)}) \in M_c \setminus Fix(W)$，则算子（3.6）满足以下性质 s

$$\lim_{n\to\infty} W^n((x^{(0)},y^{(0)})) = \begin{cases} z_1^* = (ac,0), & if\ \ ac < 1, \\ z_2^* = \left(1, \frac{(ac-1)(1-b)}{a}\right), & if\ \ ac \geq 1, \end{cases}$$

其中 $z_i^* \in Z_i$, $i = 1,2$； Z_i 在（3.8）中定义，且 $c = x^{(0)}/a + y^{(0)}/(1-b)$。

[1]这意味着第二特征值的绝对值小于 1。

证明。由（3.6）可得

$$W^{(n+1)}((x^{(0)},y^{(0)})):\begin{cases} x^{(n+1)}-x^{(n)}=a(1-x^{(n)})y^{(n)}\geq 0,\\ y^{(n+1)}-y^{(n)}=(1-x^{(n)})y^{(n)}(b-1)\leq 0.\end{cases} \tag{3.12}$$

因此， $x^{(n)}$ 是一个非递减序列，其上界为 1； $y^{(n)}$ 序列是非递增的，下界为 0。因此， $x^{(n)}$ 和 $y^{(n)}$ 均有极限，分别记为 x^*（≤ 1）、y^*（≥ 0）。

由引理1可得

$$\frac{x^{(n)}}{a}+\frac{y^{(n)}}{1-b}=\frac{x^{(0)}}{a}+\frac{y^{(0)}}{1-b}=c. \tag{3.13}$$

由（3.12）和（3.13）可得

$$\begin{cases} a(1-x^*)y^*=0,\\ (b-1)(1-x^*)y^*=0.\\ \frac{x^*}{a}+\frac{y^*}{1-b}=c\end{cases} \tag{3.14}$$

序列 $x^{(n)}$ 的极限等于 $x^*<1$ 或 $x^*=1$。首先考虑$x^*<1$的情形。由（3.14）中的第一和第二个方程可得 $y^*=0$。将此值代入（3.14）中的第三个方程，得到 $x^*=ac<1$。现在考虑 $x^*=1$的情形。将 $x^*=1$ 代入（3.14）中的第三个方程，得到 $y^*=\frac{(ac-1)(1-b)}{a}$。□

下面的定理描述了 z 中任意点的轨道。

定理3. 对于由 (3.5) 给出的算子 V（即在条件 a、$b\in$(0,1)下），以及任意初始点 $z=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)};\ y_1^{(0)},y_2^{(0)}\right)\in S^1\times S^1\setminus Fix(V)$，有以下结论

$$\lim_{n\to\infty}V^{(n)}(z)=\begin{cases} z_1^*=(ac,1-ac;0,1), & if\ \ ac<1,\\ z_2^*=\left(1,0;\frac{(ac-1)(1-b)}{a},1-\frac{(ac-1)(1-b)}{a}\right), & if\ \ ac\geq 1,\end{cases}$$

其中 $z_i^*\in\mathcal{Z}_i,\ i=1,2;$ $\mathcal{Z}_i$ 在 (3.9) 中定义，且 $c=x_1^{(0)}/a+y_1^{(0)}/(1-b)$。

证明. 由定理2可直接得出。 □

4. S3 × S3 上的一个 QSOBP

设图 G 由一条边和三个顶点组成。此外，设 $\Phi=\{1,2\}$.Ω $=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6,\sigma_7,\sigma_8\}$ 是所有元胞的集合，其中

$$\sigma_1=\{1-1,1\},\sigma_2=\{1-2,1\},\sigma_3=\{2-1,2\},\sigma_4=\{2-2,2\},$$
$$\sigma_5=\{1-1,2\},\sigma_6=\{1-2,2\},\sigma_7=\{2-1,1\},\sigma_8=\{2-2,1\}.$$

$F=\{\sigma_i^f\}$, $i=1, 2, 3, 4$ 是雌性的集合，$M=\{\sigma_j^f\}$, $j=5, 6, 7, 8$ 是雄性的集合。

$$\begin{aligned}\Omega^f(G,\sigma_i^f,\sigma_j^m)&=\begin{cases}\{\sigma_1^f,\sigma_2^f\}, & \text{if}\quad i=1,\ j=6,\ \text{or}\ \ i=2,\ j=5,\\ \{\sigma_3^f,\sigma_4^f\}, & \text{if}\quad i=3,\ j=8,\ \text{or}\ \ i=4,\ j=7,\\ \{\sigma_i^f\}, & \text{otherwise},\end{cases}\\ \Omega^m(G,\sigma_i^f,\sigma_j^m)&=\begin{cases}\{\sigma_5^m,\sigma_6^m\}, & \text{if}\quad i=1,\ j=6,\ \text{or}\ \ i=2,\ j=5,\\ \{\sigma_7^m,\sigma_8^m\}, & \text{if}\quad i=3,\ j=8,\ \text{or}\ \ i=4,\ j=7,\\ \{\sigma_j^m\}, & \text{otherwise}.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.1}$$

由 (4.1) 得到如下遗传系数:

$$p^f_{\sigma^f_i\sigma^m_j,\sigma^f_k}=\begin{cases} a, & \text{if} \quad i=k=1,j=6,\ or\ i=2,j=5,k=1,\\ b, & \text{if} \quad i=k=3,j=8,\ or\ i=4,j=7,k=3,\\ 1-a, & \text{if} \quad i=k=2,j=5,\ or\ i=1,j=6,k=2,\\ 1-b, & \text{if} \quad i=k=4,j=7,\ or\ i=3,j=8,k=4,\\ 1, & \text{if} \quad i=k=1,j=5,7,8,\ or\ i=k=2,j=6,7,8,\\ & \text{or} \quad i=k=3,j=5,6,7,\ or\ i=k=4,j=5,6,8\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$p^m_{\sigma^f_i\sigma^m_j,\sigma^m_l}=\begin{cases} c, & \text{if} \quad j=l=5,i=2,\ or\ i=1,j=6,l=5,\\ d, & \text{if} \quad j=l=7,i=4,\ or\ i=3,j=8,l=7,\\ 1-c, & \text{if} \quad j=l=6,i=1,\ or\ i=2,j=5,l=6,\\ 1-d, & \text{if} \quad j=l=8,i=3,\ or\ i=4,j=7,l=8,\\ 1, & \text{if} \quad j=l=5,i=1,3,4,\ or\ j=l=6,i=2,3,4,\\ & \text{or} \quad j=l=7,i=1,2,3,\ or\ j=l=8,i=1,2,4\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{4.2}$$

其中

$$a=\frac{\mu^f(\sigma^f_1)}{\mu^f(\sigma^f_1)+\mu^f(\sigma^f_2)},\ b=\frac{\mu^f(\sigma^f_3)}{\mu^f(\sigma^f_3)+\mu^f(\sigma^f_4)},\ c=\frac{\mu^m(\sigma^m_5)}{\mu^m(\sigma^m_5)+\mu^m(\sigma^m_6)},\ d=\frac{\mu^m(\sigma^m_7)}{\mu^m(\sigma^m_7)+\mu^m(\sigma^m_8)}.$$

如果 QSOBP 的系数由 (4.2) 定义，则有 $V\colon S^3\times S^3\to S^3\times S^3$，

$$V:\begin{cases} x'_1=x_1-(1-a)x_1y_2+ax_2y_1\\ x'_2=x_2-ax_2y_1+(1-a)x_1y_2\\ x'_3=x_3-(1-b)x_3y_4+bx_4y_3\\ x'_4=x_4-bx_4y_3+(1-b)x_3y_4\\ y'_1=y_1-(1-c)x_2y_1+cx_1y_2\\ y'_2=y_2-cx_1y_2+(1-c)x_2y_1\\ y'_3=y_3-(1-d)x_4y_3+dx_3y_4\\ y'_4=y_4-dx_3y_4+(1-d)x_4y_3\end{cases} \tag{4.3}$$

其中

$$x'_1=\lambda'(\sigma^f_1),\ x'_2=\lambda'(\sigma^f_2),\ x'_3=\lambda'(\sigma^f_3),\ x'_4=\lambda'(\sigma^f_4),$$
$$y'_1=\lambda'(\sigma^m_5),\ y'_2=\lambda'(\sigma^m_6),\ y'_3=\lambda'(\sigma^m_7),\ y'_4=\lambda'(\sigma^m_8).$$

对于 $a_0,c_0\in(0,1)$，我们记

$$I_{a_0c_0}=\{z\in S^3\times S^3: x_1+x_2=a_0, x_3+x_4=1-a_0, y_1+y_2=c_0, y_3+y_4=1-c_0\}. \tag{4.4}$$

下面的引理很有用

引理 2. 对任意固定的 $a_0,c_0\in(0,1)$，我们有

(1) 对任意 $z\in S^3\times S^3$，以下结论成立

$$z'=V(z)\in I_{a_0c_0},\ i.e.,\ V(S^3\times S^3)\subset I_{a_0c_0};$$

(2) 集合 $I_{a_0c_0}$ 关于 V 不变，即 $V(I_{a_0c_0})\subset I_{a_0c_0}$。

证明。证明由以下易于验证的等式得出

$$x'_1+x'_2=x_1+x_2,\ x'_3+x'_4=x_3+x_4,\ y'_1+y'_2=y_1+y_2,\ y'_3+y'_4=y_3+y_4.$$

□

对于每个固定的 $a_0, c_0 \in (0,1)$，根据引理 2，对于每个点 $z^{(0)} \in S^3 \times S^3$，对序列 $z^{(t)} = V(z^{(t-1)})$ $t = 1,2,...$ 的研究可归结为情形 $z^{(0)} \in I_{a_0c_0}$。因此，我们关注以下动力系统:

$$z^{(0)} \in I_{a_0c_0},\ z^{(1)} = V(z^{(0)}),\ z^{(2)} = V(z^{(1)}),...$$

主要问题是研究极限

$$\lim_{m\to\infty} z^{(m)} = \lim_{m\to\infty} V^m(z^{(0)}).$$

算子 V 在 $I_{a_0c_0}$ 上的限制，简记为 W_0，具有如下形式（记 $x_1 = x$、 $y_1 = y$、 $x_3 = u$、 $y_3 = v$）

$$W_0 : \begin{cases} x' = x - (1-a)x(c_0 - y) + a(a_0 - x)y, \\ u' = u - (1-b)u(1 - c_0 - v) + b(1 - a_0 - u)v, \\ y' = y - (1-c)(a_0 - x)y + cx(c_0 - y), \\ v' = v - (1-d)(1 - a_0 - u)v + du(1 - c_0 - v), \end{cases} \tag{4.5}$$

其中

$$a, b, c, d \in (0,1),\ a_0, c_0 \in (0,1). \tag{4.6}$$

由此得到一个含有六个独立参数的二次算子。

由式（4.5）可见，第一个方程和第三个方程中的变量不依赖于第二个方程和第四个方程中的变量。因此，研究算子 W_0 的动力学，可归结为研究算子 W_1 （第一个和第三个方程）以及算子 W_2 （第二个和第四个方程）的动力学。

如果我们假设

$$x \leftrightarrow v,\ y \leftrightarrow v, a \leftrightarrow b,\ c \leftrightarrow d, a_0 \leftrightarrow 1 - a_0,\ c \leftrightarrow 1 - c_0 \tag{4.7}$$

那么算子 W_1 和 W_2 完全相同。因此，通过研究算子 W_1的动力学，我们可以分析算子 W_2、 W_0 和 V的动力学。

考虑算子 W_1： $S_1 \to S_1$， $S_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in (0,\ a_0)\ y \in (0,\ c_0)\}$,

$$W_1 :\ \begin{array}{l} x' = x - (1-a)x(c_0 - y) + a(a_0 - x)y, \\ y' = y - (1-c)(a_0 - x)y + cx(c_0 - y). \end{array} \tag{4.8}$$

4.1. （4.8）的不动点。

首先，我们来求算子 W_1. 的不动点。要找到 W_1 的不动点，我们应当解下列方程

$$\begin{array}{l} (1-a)x(c_0 - y) = a(a_0 - x)y, \\ (1-c)(a_0 - x)y = cx(c_0 - y). \end{array} \tag{4.9}$$

由（4.9）可得

$$(a_0 - x)y = \frac{1-a}{a}x(c_0 - y) = \frac{c}{1-c}x(c_0 - y).$$

若 $a + c \neq 1$，则 $x(c_0 - y) = 0$ 即 $x = 0$ 或 $y = c_0$. 在这种情况下，系统 (4.9) 有两个解 $(x, y) = (0, 0)$ 和 $(x, y) = (a_0, c_0)$。若 $a + c = 1$，则系统 (4.9) 有无穷多个形如 $(x, \frac{cc_0x}{aa_0 + (c-a)x})$ 的解。

综上，得到以下结果（使用 (4.7) 求出 W_2 的不动点）

命题 4。集合 $Fix(W_1)$ $Fix(W_2)$ 具有以下形式

$$Fix(W_1) = \begin{cases} (0,0)\ or\ (a_0, c_0), & if\ \ a + c \neq 1 \\ (x, y), & if\ \ a + c = 1 \end{cases} \tag{4.10}$$

$$Fix(W_2) = \begin{cases} (0,0)\ or\ (1 - a_0, 1 - c_0), & if\ \ b + d \neq 1 \\ (u, v), & if\ \ b + d = 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

其中

$$y=\frac{cc_0x}{aa_0+(c-a)x},v=\frac{d(1-c_0)u}{b(1-a_0)+(d-b)u.}$$

由命题 4 和（4.4）可得关于算子（4.3）不动点的如下结论 .

命题 5. 等式（4.3）定义的算子 V 的不动点如下:

$$Fix(V)=\begin{cases}(0,a_0,0,1-a_0;0,c_0,0,1-c_0)\ or & \\ (a_0,0,1-a_0,0;c_0,0,1-c_0,0), & if\ \ a+c\neq 1,\ b+d\neq 1\\ (a_0,0,1-a_0,0;c_0,0,1-c_0,0)\ or & \\ (x_1,a_0-x_1,0,1-a_0;y_1,c_0-y_1,0,1-c_0), & if\ \ a+c=1,\ b+d\neq 1\\ (0,a_0,x_3,1-a_0-x_3;0,c_0,y_3,1-c_0-y_3)\ or & \\ (a_0,0,x_3,1-a_0-x_3;c_0,0,y_3,1-c_0-y_3), & 若\ \ a+c\neq 1,\ b+d=1\\ (x_1,a_0-x_1,,x_3,1-a_0-x_3;y_1,c_0-y_1,y_3,1-c_0-y_3), & 若\ \ a+c=1,\ b+d=1\end{cases}\tag{4.12}$$

其中

$$y_1=\frac{cc_0x_1}{aa_0+(c-a)x_1},y_3=\frac{d(1-c_0)x_3}{b(1-a_0)+(d-b)x_3.}$$

4.2. 不动点类型。

现在我们来考察不动点的类型。在分析不动点之前，先给出以下有用的引理（[13]）。

引理 3. 设 $F(\lambda)=\lambda^2+B\lambda+C$，其中 B和 C是两个实常数。假设 λ_1和λ_2 是 $F(\lambda)=0$的两个根。则有以下结论。

(i) 若 $F(1)>0$，则 (i.1) $|\lambda_1|<1$ 和 $|\lambda_2|<1$ 当且仅当 $F(-1)>0$ 和 $C<1$; (i.2) $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2\neq -1$ 当且仅当 $F(-1)=0$ 和 $B\neq 2$; (i.3) $|\lambda_1|<1$ 和 $|\lambda_2|>1$ 当且仅当 $F(-1)<0$; (i.4) $|\lambda_1|>1$ 和 $|\lambda_2|>1$ 当且仅当 $F(-1)>0$ 和 $C>1$; (i.5) λ_1 和 λ_2 是共轭复根，且仅当 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$ 当且仅当 $-2<B<2$ 和 $C=1$; (i.6) $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 当且仅当 $F(-1)=0$ 和 $B=2$.(ii) 若 $F(1)=0$，即 1 是 $F(\lambda)=0$的一个根，则另一个根 λ 满足$|\lambda|=(<,>)1$，当且仅当 $|C|=(<,>)1$。(iii) 若 $F(1)<0$，则 $F(\lambda)=0$有一个根位于 $(1;\infty)$ 内。此外，(iii.1) 另一个根 λ满足 $\lambda<(=)-1$，当且仅当 $F(-1)<(=)0$; (iii.2) 另一个根 λ 满足 $-1<\lambda<1$，当且仅当 $F(-1)>0$.

Pro位置 6。对于算子 (4.8) 的不动点，以下结论成立

$$(0,0)\ is\ \begin{cases}attractive, & if\ \ a+c<1\\ saddle, & if\ \ a+c>1\end{cases}$$

$$(a_0,c_0)\ is\ \begin{cases}attractive, & if\ \ a+c>1\\ saddle, & if\ \ a+c<1\end{cases}$$

$$\left(x,\frac{cc_0x}{aa_0+(c-a)x}\right)\ is\ non-hyperbolic,\ if\ a+c=1.$$

证明。为求 并确定算子 (4.8) 的不动点 (x,y) 的类型，我们写出雅可比矩阵 :

$$J_{W_1}=\begin{pmatrix}1-(1-a)c_0+(1-2a)y & aa_0+(1-2a)x\\ cc_0+(1-2c)y & 1-(1-c)a_0+(1-2c)x\end{pmatrix}.$$

特征方程为

$$F(\lambda)=\lambda^2+B\lambda+C, \tag{4.13}$$

其中

$$B=(1-a)c_0+(1-c)a_0-(1-2a)y-(1-2c)x-2,$$

$$C=(1-a-c)(a_0c_0-c_0x-a_0y)-(1-a)c_0-(1-c)a_0+(1-2a)y+(1-2c)x+1.$$

(1) 设 $x=0,y=0$. 则

$$F(1)=(1-a-c)a_0c_0,\ C=1-c_0(1-a(1-a_0))-a_0(1-c(1-c_0))<1,$$

$$F(-1)=3-(1-a)c_0-(1-c)a_0+(1-c_0)(1-a_0)+ac_0(1-a_0)+ca_0(1-c_0)>0.$$

若 $a+c<1$, 则 $F(1)>0$. 根据引理 3 的第 (i.1) 项, $|\lambda_1,\ _2|<1$. 若 $a+c>1$, 则$F(1)<0$. 根据引理 3 的第 (iii.2) 项, $\lambda_1>1,\ -1<\lambda<1$.

(2) 令 $x=a_0$、 $y=c_0$. , 则

$$F(1)=-(1-a-c)a_0c_0,\ C=1-a_0c_0-ac_0(1-a_0)-a_0c(1-c_0)<1,$$

$$F(-1)=(1-c_0)(1-a_0)+ac_0(1-a_0)+ca_0(1-c_0)+2-ac_0-ca_0>0.$$

如果 $a+c>1$, 则 $F(1)>0$. 根据引理 3 的 (i.1) 项, $|\lambda_1,\ _2|<1$. 如果 $a+c<1$, 则$F(1)<0$. 根据引理 3 的 (iii.2) 项, $\lambda_1>1$、 $-1<\lambda<1$.

(3) 令 $y=\frac{cc_0x}{ac_0+(c-a)x}$. 则 $F(1)=0$. 根据引理 3 的 (ii) 项, 特征值 λ_1 和 λ_2 中至少有一个等于 1。□

4.3. 极限点集合。

令 $a+c\neq 1$。以下定理描述了 S_1 中任意点 $(x^{(0)},y^{(0)})$ 的轨道。

定理 4. 对于由 (4.8) 给出的算子 W_1 （即满足条件 (4.6)）, 以及任意初始点 $(x^{(0)},y^{(0)})\in S_1\setminus Fix(W_1)$, 以下结论成立

$$\lim_{n\to\infty}x^{(n)}=\begin{cases}0, & if\ \ a+c<1,\\ a_0, & if\ \ a+c>1,\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}y^{(n)}=\begin{cases}0, & if\ \ a+c<1,\\ c_0, & if\ \ a+c>1,\end{cases}$$

其中 $(x^{(n)},y^{(n)})=W_1^n(x^{(0)},y^{(0)})$, W_1^n是 W_1 的第 n 次迭代。

证明。令 $a+c<1$. 则存在 $k>1$ 使得 $c\cdot k=1-a$。记 $z^{(n)}=x^{(n)}+y^{(n)}$和 $z_0^{(n)}=x^{(n)}+k\cdot y^{(n)}$, 其中 $x^{(n)}$、 $y^{(n)}$ 由下列方式定义

$$\begin{aligned}x^{(n)}&=x^{(n-1)}-(1-a)x^{(n-1)}(c_0-y^{(n-1)})+a(a_0-x^{(n-1)})y^{(n-1)},\\ y^{(n)}&=y^{(n-1)}-(1-c)(a_0-x^{(n-1)})y^{(n-1)}+cx^{(n-1)}(c_0-y^{(n-1)}).\end{aligned} \tag{4.14}$$

由 (4.14) 可得

$$\begin{aligned}z^{(n)}-z^{(n-1)}&=(a+c-1)\left(x^{(n-1)}(c_0-y^{(n-1)})+y^{(n-1)}(a_0-x^{(n-1)})\right)\le 0,\\ z_0^{(n)}-z_0^{(n-1)}&=(1-k)y^{(n-1)}(a_0-x^{(n-1)})\le 0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

数列 $\{z^{(n)}\}$ 和 $\{z_0^{(n)}\}$ 均为单调有界数列, 即,

$$0\le ...\le z^{(n)}\le z^{(n-1)}\le ...\le z^{(0)},$$

$$0\le ...\le z_0^{(n)}\le z_0^{(n-1)}\le ...\le z_0^{(0)}.$$

因此， $\{z^{(n)}\}$ 和 $\{z_0^{(n)}\}$ 存在极限点，分别记其极限为 z^* 和 z_0^*。因此，下列极限存在

$$y^* = \lim_{n\to\infty} y^{(n)} = \frac{1}{1-k}\lim_{n\to\infty}(z^{(n)} - z_0^{(n)}) = \frac{1}{1-k}(z^* - z_0^*),$$
$$x^* = \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = z^* - y^*.$$

由(4.14)可得

$$(1-a)x^*(c_0 - y^*) = a(a_0 - x^*)y^*, \quad (1-c)(a_0 - x^*)y^* = cx^*(c_0 - y^*),$$

即， $x^* = 0$， $y^* = 0$ （见图1）。

对于 $a + c > 1$，该定理的证明与上述类似（见图2）。 □

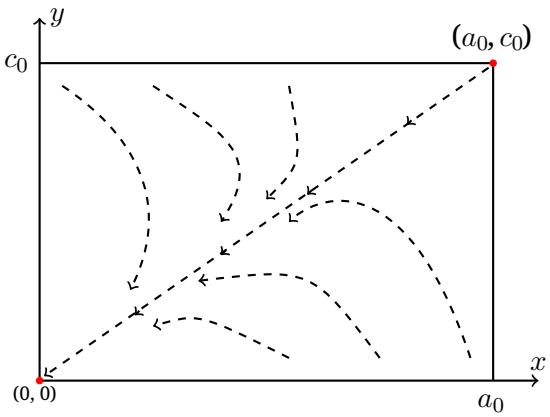

图1. $a + c < 1$.

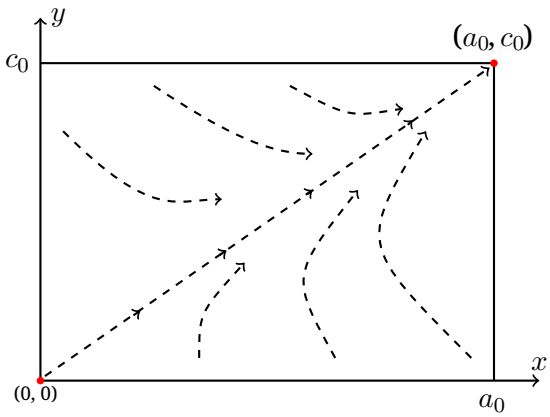

图2. $a + c > 1$.

利用定理 4，下面的定理描述了 $S_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 中任意点 $(u^{(0)}, v^{(0)})$ 的轨道：$u \in [0, 1 - a_0], v \in [0, 1 - c_0]\}$。

定理 5. 对于算子 W_2 （即满足条件 (4.6)），以及任意初始点 $(u^{(0)}, v^{(0)}) \in S_2 \setminus Fix(W_2)$，有如下结论

$$\lim_{n\to\infty} u^{(n)} = \begin{cases} 0, & if \ \ b + d < 1, \\ 1 - a_0, & if \ \ b + d > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} v^{(n)} = \begin{cases} 0, & if \ \ b + d < 1, \\ 1 - c_0, & if \ \ b + d > 1, \end{cases}$$

其中 $(u^{(n)}, v^{(n)}) = W_2^n(u^{(0)}, v^{(0)})$，且 W_2^n 是 W_2 的第 n 次迭代。

下面的定理描述了 $I_{a_0c_0}$ 中任意点 z 的轨道。

定理 6. 对于由 (4.3) 给出的算子 V （即满足条件 (4.6)），以及任意初始点 $z = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}, y_4^{(0)}\right) \in I_{a_0c_0} \setminus Fix(V)$，有以下结论

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)}(z) = \begin{cases} (0, a_0, 0, 1 - a_0; 0, c_0, 0, 1 - c_0) & if \ \ a + c < 1, \ b + d < 1, \\ (0, a_0, 1 - a_0, 0; 0, c_0, 1 - c_0, 0) & if \ \ a + c < 1, \ b + d > 1, \\ (a_0, 0, 0, 1 - a_0; c_0, 0, 0, 1 - c_0) & if \ \ a + c > 1, \ b + d < 1, \\ (a_0, 0, 1 - a_0, 0; c_0, 0, 1 - c_0, 0) & if \ \ a + c > 1, \ b + d > 1. \end{cases}$$

证明。由定理 4 和定理 5 可轻易推出。 □

设 $a+c=1$.那么，由（4.8）可得 $x'+y'=x+y$.不失一般性，我们假设$x+y=1$属于算子 W_1。然后，我们将下述函数记为 T

$$T: x' = (2a-1)x^2 + ((1-a)(2-c_0) - aa_0)\, x + aa_0. \tag{4.16}$$

记

$$S^* = [0,1].$$

下面的引理很有用

引理4. 如果满足条件（4.6），那么函数 T（由（4.16）定义）将 S^* 映射到其自身。

证明. 我们要证明，如果 $x \in S^*$，那么 $x' = T(x) \in S^*$。

$$T(0) = aa_0 \in S^*,\ T(1) = 1 - c_0(1-a) \in S^*.$$

如果 $2a-1 \geq 0$，那么 $T(x) = (2a-1)\, x^2 + (1-a)\,(2-c_0)\, x + aa_0(1-x) \geq 0$. 如果 $2a-1 < 0$，那么方程 $T(x) - 1 = 0$ 在区间（0, 1）内没有实根。因此，$T(x) \leq 1$。□

我们来求函数 T 的不动点。通过求解方程 $T(x) = x$，得到 t_1,t_2当 $a \neq \frac{1}{2}$ 时，以及 t_3 当 $a = \frac{1}{2}$ 时。

$$\begin{aligned} t_1 &= \tfrac{1}{2(2a-1)} \left(1 + aa_0 - (1-a)(2-c_0) - \sqrt{D}\right), \\ t_2 &= \tfrac{1}{2(2a-1)} \left(1 + aa_0 - (1-a)(2-c_0) + \sqrt{D}\right), \\ t_3 &= \tfrac{a_0}{a_0+c_0}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中 $D = (1 + aa_0 - (1-a)(2-c_0))^2 - 4aa_0(2a-1)$。

容易验证，若 $a > \frac{1}{2}$，则 $0 < t_1 < 1 < t_2$；若 $a < \frac{1}{2}$，则 $t_2 < 0 < t_1 <$ 1.

综上，我们得到以下

命题7. 集合 $Fix(T)$ 具有以下形式

$$Fix(T) = \begin{cases} t_1, & if\ \ a \neq \frac{1}{2}, \\ t_3, & if\ \ a = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{4.18}$$

假设 t^* 是 T 的一个不动点。对于一维动力系统，已知当 $|T'(t^*)| < 1$ 时，t^* 是吸引不动点。当$|T'(t^*)| > 1$ 时，点 t^* 是排斥不动点。最后，若 $|T'(t^*)| = 1$，则该不动点是鞍点 [19]。

我们来计算 $T'(x)$ 在不动点 t^* 处的导数。

$$T'(t^*) = 2(2a-1)t^* + (1-a)(2-c_0) - aa_0.$$

将点 t_1、t_3 代入 $T'(t^*)$，替换 t^*，我们得到如下结果

$$T'(t_1) = 1 - \sqrt{D},\ T'(t_3) = \frac{1}{2}(1 - a_0 - c_0).$$

因此，对于 t^* 类型，以下命题成立。

命题 8. 对于 (4.16)，不动点 t^* 的类型是吸引的。

T 中的点 x 称为 T 的周期点，如果存在 p，使得 $T^p(x) = x$。满足 $T^p(x) = x$ 的最小正整数 p 称为点 x 的素周期或最小周期。

命题 9. 对于 $p \geq 2$，函数 (4.16) 在集合S^*中没有任何 p-周期点。

证明。我们首先描述 $p=2$ 在 S^*上的周期点，即方程的解

$$T(T(x))=x. \tag{4.19}$$

注意， T 的不动点是方程 (4.19) 的解。为了寻找其他解，我们考虑方程

$$\frac{T(T(x))-x}{T(x)-x}=0,$$

简单计算可知，最后一个方程等价于以下方程

$$(2a-1)^2x^2+(2a-1)(1-aa_0+(1-a)(2-c_0))x+(1-a)(2-c_0)\ +2a^2a_0+1=0. \tag{4.20}$$

若 $a=\frac{1}{2}$，则方程 (4.20) 在 S^* 中无解。

考虑

$$l(x)=(2a-1)^2x^2+(2a-1)(1-aa_0+(1-a)(2-c_0))x+(1-a)(2-c_0)+2a^2a_0+1,$$

$$l'(x)=2(2a-1)^2+(2a-1)(1-aa_0+(1-a)(2-c_0)),$$

$$l''(x)=2(2a-1)^2.$$

记作 $N(c)$ 表示有序数列中符号变化的次数 s

$$l(c),\ l'(c),\ l''(c).$$

若 $a>\frac{1}{2}$，则 $N(0)=0$ 且 $N(1)=0$。若 $a<\frac{1}{2}$，则 $N(0)=2$ 且 $N(1)=2$。根据布丹–傅里叶定理，方程 (4.20) 在集合 S^* 中没有实根。因此，函数 (4.16) 在 S^* 中没有任何 2-周期点。由于 T 在 S^* 上连续，根据沙尔科夫斯基定理（[15]），我们有 $T^p(x)=x$ 对所有 $p\geq 2$ 均无解（固定点除外）。□

下述定理描述了 S^*. 中任意点 x_0 的轨道

定理7. 对于由 (4.16) 给出的函数 T （即满足条件 (4.6)），以及任意初始点 $x_0\in S^*\setminus Fix(T)$，有以下结论

$$\lim_{n\to\infty}x^{(n)}=\begin{cases}t_1, & if\ \ a\neq\frac{1}{2},\\ t_3, & if\ \ a=\frac{1}{2},\end{cases}$$

其中， t_1和 t_3由（4.17）定义， $x^{(n)}=T^n(x_0)$中的 T^n是 T的 n次迭代。

证明。证明可由命题7、8和9得出。 □

利用定理7，当 $a+c=1$时，可以描述算子W_1 在集合 S_1 上的动力学（见图3）。

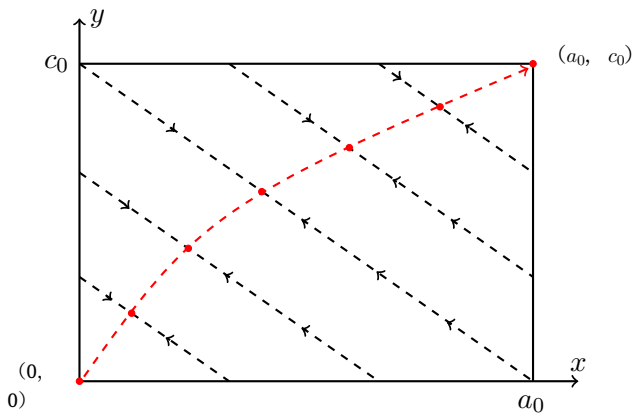

图3。 $a+c=1$.

5. 结果的生物学解释

在生物学中，群体遗传学研究种群中等位基因（类型）频率的分布及其变化。

前几节所表述的结果具有如下生物学解释：设 $z^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in S$ 为一个初始状态，即 $x^{(0)}$（分别为 $y^{(0)}$）是基因型集合 $\{1, ..., n\}$（分别为 $\{1, ..., \nu\}$）上的概率分布。假设该点的轨道 $z^{(m)}$ 具有极限 $z = ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_\nu))$，这意味着种群的未来演化是稳定的：女性基因型 i 以概率 x_i 存活，男性基因型 j 以概率y_j存活。如果某种基因型的概率为零，则该基因型将消失。

两个顶点的情形（$n = \nu = 2$）：

(a) 种群具有一个连续的平衡态集合（命题1），并且保持在种群某个平衡态（稳定不动点）的邻域内。(b) 设 a 和 b 分别表示由一只2 型雌性和一只1 型雄性产生1 型雌性和1 型雄性的出生概率。(b.1) 如果1 型雌性和雄性的概率分别为 $x^{(0)}$ 和 $y^{(0)}$，且2 型雌性的概率大于 $ay^{(0)}/(1-b)$，那么在未来演化中，两种类型的雌性和2 型雄性分别以概率 $x^{(0)} + ay^{(0)}/(1-b)$、$1 - x^{(0)} - ay^{(0)}/(1-b)$和1存活。因此，1 型雄性消失。(b.2) 如果1 型雌性和雄性的概率分别为 $x^{(0)}$ 和 $y^{(0)}$，且2 型雌性的概率小于 $ay^{(0)}/(1-b)$，那么在未来演化中，两种类型的雄性和1 型雌性分别以概率 $(1-b)(x^{(0)} - 1)/a + y^{(0)}$、$1 - (1-b)x^{(0)} - 1/a + y^{(0)}$ 和1存活。因此，2 型雌性消失。(b.3) 如果1 型雌性和雄性的概率分别为 $x^{(0)}$ 和 $y^{(0)}$，且2 型雌性的概率等于 $ay^{(0)}/(1-b)$，那么在未来演化中，2 型雄性和1 型雌性分别以概率1存活。因此，2 型雌性和1 型雄性消失（定理3的解释）。

一条边和三个顶点的情形（$n = \nu = 4$）：

(c) 种群根据参数的不同，可能有两个或无穷多个（连续统）平衡态（命题 5）。种群会停留在其某个平衡态（稳定不动点）的邻域内。(d) 设 a 和 c 分别为由 1 型雄性和 2 型雌性，或由 2 型雄性和 1 型雌性所生育的 1 型雌性和 1 型雄性的出生概率。设 b 和 d 分别为由 3 型雄性和 4 型雌性，或由 4 型雄性和 3 型雌性所生育的 3 型雌性和 3 型雄性的出生概率。(d.1) 若 $a + c < 1$、$\beta + d < 1$，则在未来演化中，2 型和 4 型雌性和雄性分别以 a_0、$1 - a_0$、c_0、$1 - c_0$ 的概率存续，而 1 型和 3 型雌性和雄性消失。(d.2) 若 $a + c < 1$、$b + d > 1$，则在未来演化中，2 型和 3 型雌性和雄性分别以 a_0、$1 - a_0$、c_0、$1 - c_0$ 的概率存续，而 1 型和 4 型雌性和雄性消失。(d.3) 若 $a + c > 1$、$b + d < 1$，则在未来演化中，1 型和 4 型雌性和雄性分别以 a_0、$1 - a_0$、c_0、$1 - c_0$ 的概率存续，而 2 型和 3 型雌性和雄性消失。

(d.4) 若 $a+c>1$、 $b+d>1$，则在未来演化中，1 型和 3 型雌性和雄性分别以 a_0、$1-a_0$、 c_0、 $1-c_0$ 的概率存续，而 2 型和 4 型雌性和雄性消失（定理 6 的解释）。

5.1. 致谢。我谨向U.A.Rozikov教授致谢，感谢他提出的意见和建议。

References

[1] N. Bernshtein, *Solution of one mathematical problem related to the theory of inheritance*, (1924) Uch. Zap. Nauchno-Issled. Kaf. Ukr. Otd. Mat., 1, 83 115 - C. Preston, , ( ) 剑桥大学出版社, [2] *Gibbs States on Countable Sets* 1974 伦敦—纽约. [3] Yu. I. Lyubich, *Mathematical structures in population genetics*, (1992) 生物数学, 22, Springer- Verlag, 柏林. [4] R. N. Ganikhodzhaev, *Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments*, (1992) Mat. Sb. 183 (8), 119-140 [俄罗斯科学院数学文集 76 (2), 489-506 (1993)]. [5] R. N. Ganikhodzhaev, *Map of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems* 1994 56 5 40 49 [56 5 1125 1131 1994] , ( ) Mat. Zametki ( ), - Math. Notes ( ), - ( ) . [6] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, (2003), Westview出版社. [7] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *On quadratic stochastic operators generated by Gibbs distributions*, (2006), 规则混沌动力学, 11(4), 467-473. [8] R. N. Ganikhodzhaev and D. B. Eshmamatova, *Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories* 2006 8 2 12 28 , ( ), Vladikavkaz.Mat. Zh. ( ), - . [9] U. A. Rozikov, U. U. Zhamilov, *Volterra quadratic stochastic operators of a two-sex population*, (2011), Ukrainian Math. J. 63, no. 7, 1136-1153. [10] M. Ladra, U.A. Rozikov, *Evolution algebra of a bisexual population*, (2013), J. Algebra 378 153-172. [11] A. Dzhumadil'daev, B. A. Omirov, U. A. Rozikov, *Constrained evolution algebras and dynamical systems of a bisexual population* 2016 496, 351 380 , ( ), Linear Algebra and its Applications - O. Castanos, U.U. Jamilov, U.A. Rozikov, [12] *On Volterra quadratic stochastic operators of a two-sex population on $S^1 \times S^1$* 10 48550 1808 01812 , doi.org/ . /arXiv. . . [13] Cheng Wang, Xianyi Li, *Stability and Neimark-Sacker bifurcation of a semi-discrete population model*, (2014 4, 4, 419 435), Journal of Applied Analysis and Computation, vol. no. - N. N. Ganikhodjaev, U. U. Jamilov *Contracting Quadratic Operators of Bisexual population*,(2015), Appl. Math. Inf. Sci. 9, 5, 2645 2650 No. - U. A. Rozikov, *An Introduction to Mathematical Billiards*, [14] (2019), 世界科学出版社, 新加坡, 224 pp. [15] U.A. Rozikov, (2020), 种群动力学：代数与概率方法, *World Sci. Publ., Sing.* 460 , pp. [16] Z.S. Boxonov, U.A.Rozikov, *Dynamical system of a mosquito population with distinct birth-death rates*, (2021) Journal of Appleid Nonlinear Dynamics, Vol.10, No.4, p.807-816. [17] F.F. Eshmatov, U.U. Jamilov, Kh.O. Khudoyberdiev, *Discrete Time Dynamics of a SIKD Reinfection Model* 2023 16 5 2250104 , ( ), International Journal of Biomathematics. ( ), . [18] Z.S. Boxonov,*A discrete-time dynamical system of mosquito population*, JDEA., (2023), Vol. 29, No. 1, p.67-83. doi.org/10.1080/10236198.2022.2160245

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences