利用类曲波函数对振荡核进行近乎最优的显式稀疏表示

Yanchuang Cao、Jun Liu、Dawei Chen*

中国北京 *100094* 应用物理与计算数学研究所

arXiv:2303.03889v1 [math.NA] 7 Mar 2023

摘要

本文通过一种基于曲波的方法，提出了振荡核的一种近乎最优的显式稀疏表示。通过对原始节点基进行变换，构造了多层次类曲波函数。随后，基于曲波基推导出一种新非标准形式的系统矩阵。由于振荡核具有方向低秩性质，该矩阵几乎可以达到最优稀疏性。通过后验压缩，进一步提高了其稀疏性。最后，数值结果表明，该方法具有近乎最优的对数线性计算复杂度，且精度可控。该显式稀疏表示有望为高频问题的快速直接求解器和有效预条件器相关后续研究奠定基础。它也可视为将基于小波的方法推广到高频情形，并可作为一种新的波动问题宽带快速算法。

关键词：稀疏化；曲波；方向快速多极子方法；高频；小波

1. 引言

在这项工作中，类似于以下形式的N体问题

$$f_i = \sum_{j=1}^{N} K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j)\sigma_j, \quad \text{for } i = 1,2,,,N \tag{1}$$

其中振荡核为

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa r}}{4\pi r}, \quad r = \left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right| \tag{2}$$

或其导数时，都会涉及此类计算。在通过边界积分方程或 Lippmann–Schwinger方程求解时，声学、电磁学或弹性动力学问题都可能涉及此类计算[1–6]。

*通讯作者电子邮箱：chen_dawei@iapcm.ac.cn (Dawei Chen)

提交至期刊的预印本 *2023*年*3*月*8*日

求解大规模问题时，可能会遇到两个主要困难。首先，直接计算的代价高昂，因为由于系统矩阵是稠密的，其计算复杂度为 $O(N^2)$。其次，通常使用的迭代求解器往往会受到系统矩阵条件性不佳的影响，尤其是在涉及高度振荡核的情况下 [6–9]。通过为系统矩阵及其逆构造近似稀疏表示，可以克服这些困难。

在许多快速算法中，系统矩阵都被构造成数据稀疏表示，即采用低秩分解形式表示系统，且仅包含 $O(N\log^{\alpha} N)_{\alpha\geq 0}$ 个元素。对于早期研究主要关注的低频情形，甚至是非振荡情形，当$\boldsymbol{x}$ 远离$\boldsymbol{y}$时，核$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$在渐近意义下是光滑的。因此，$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$可以用低阶展开进行近似，并可为对应于远场相互作用的非对角矩阵块构造低秩近似。遵循这一思想的代表性快速算法包括快速多极子方法（FMM）及其变体 [10–13], 树编码算法 [14], H^2-矩阵 [15], 自适应交叉近似 [16], 和嵌套交叉近似 [17, 18], 等。这些算法之间的主要区别之一在于，它们在核的低阶展开中使用了不同的函数，或在推导矩阵块的低秩近似时采用了不同的代数方案。每种算法都能以仅包含$O(N)$个元素的方式，为系统矩阵实现数据稀疏表示，并将低频情形下的计算复杂度降至线性。

然而，对于高频情形，这些早期快速算法无法获得数据稀疏表示，因为矩阵块的近似秩会随其大小增加 [19]。因此，应考虑核的其他数学性质来开发快速算法。研究发现，当核用指数展开近似时，即使在高频下，快速多极子方法中的平移矩阵也可以对角化，从而能够高效计算远场相互作用。这促成了对角形式快速多极子方法 [20, 21] 和高频快速多极子方法 [22, 23]。为克服其在低频情形下可能出现的数值不稳定性 [24, 25], , 研究人员开发了宽带快速多极子方法 [26, 27], , 其本质上是经典快速多极子方法与高频快速多极子方法的混合。也就是说，只有当矩阵块上的振荡变得显著时，才使用指数展开。因此，对于高频情形，计算复杂度降至 $O(N\log N)$，而对于低频情形则保持为 $O(N)$。因此，它为振荡核提供了兼具低秩分解与对角化的数据稀疏表示。

后来，人们基于振荡核的方向低秩性质 提出了另一种仅依赖低秩分解的数据稀疏表示。也就是说，对于满足方向抛物分离条件的$x \in \mathbb{X}$ 和$y \in \mathbb{Y}$，核$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$可以用低阶展开 [28, 29]近似。因此，必要时将远场划分为多个方向锥后，远场相互作用矩阵始终近似为低秩矩阵。其低秩近似可以按照低频快速算法中的相同方式构造。换言之，通过定义方向锥，可以将低频快速算法推广至高频情形，并通过仔细划分非对角矩阵块，实现系统矩阵的数据稀疏表

示。这一思路极具吸引力，并由此催生了多种宽带快速算法，包括从核无关快速多极子法推广而来的方向性快速多极子法 [28, 30], 、从黑盒快速多极子法推广而来的方向性快速多极子法 [29], 、dirH^2-ACA 方法，以及基于嵌套交叉近似的方向性代数快速多极子法 [31, 32]。所有这些方向性算法都能达到$O(N\log^{\alpha} N)_{\alpha\geq 0}$的计算复杂度，与宽带快速多极子方法相当。

显式稀疏的线性系统表示对于开发快速直接求解器和高效预条件子非常有用。其中一个代表性方法是逆快速多极子法，它首先将快速多极子方法中的数据稀疏表示转换为显式稀疏的扩展线性系统，然后高效地计算其逆 [33, 34]。遗憾的是，该方法基于经典快速多极子方法，因此仅适用于低频情形。对于高频情形，近期有人针对 Lippmann-Schwinger 方程提出了稀疏化扫描预条件器，借此可将计算开销降低至近似线性 [8]。但该方法要求在整个计算域上的笛卡尔网格上进行计算，因此对于点分布高度不均匀的问题，其性能可能并不理想，例如边界元分析，其中点仅分布在曲面上。

基于小波的方法（WBM）可以直接获得显式稀疏的系统矩阵 [35–37]。边界积分采用类小波函数进行离散化，这些函数具有紧支集，并且其低阶矩“消失”或“近似消失” [36, 38]。因此，对于低频问题，彼此充分分离的类小波函数之间的相互作用可以忽略。系统矩阵中只需保留小波之间的近场相互作用，从而使其成为显式稀疏矩阵，仅包含$O(N)$个非零元素 [35, 37]。然而，WBM 同样仅适用于低频情形 [39–41]。

WBM 和快速多极子方法（FMM）都基于这样一个事实：对于相距较远的$\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$，核$K(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$可以用低阶展开近似。进一步研究表明，两者可以相互转换[41, 42], ，这意味着可以将基于低秩分解的数据稀疏表示转换为采用类小波函数的显式稀疏表示。这一发现启发我们思考，方向性算法中的数据稀疏表示或许也能转换为显式稀疏表示，从而得到一种采用“方向性”类小波函数的新型宽带快速算法。

过去二十年间，人们提出了多种方向性小波，其中曲波是一种广受欢迎的小波，并在图像处理领域取得了巨大成功 [43–45]。此外，对其在科学计算中潜在应用的数学研究表明，振荡核的曲波表示具有最优稀疏性，仅包含$O(N\log N)$ 个非零元素 [46]。因此，可以合理地预期，在由方向性算法转换而来的新型宽带快速算法中，应采用类曲波函数作为新的基底，这样该算法便可称为基于曲波的方法 (CBM)。

本文旨在开发一种基于曲波的方法，为振荡核提供近乎最优的显式稀疏表示。该方法是方向性快速多极子方法的一种变换，也可视为 WBM 的推广。值得注意的是，在本研究中，我们不局限于核函数的某一种特定低阶展开，也不局限于某一种构造矩阵块低秩近似的算法，因此，该方法提供了一个将各种方向性算法转换为 CBM 的框架。

本文其余部分安排如下。第2节讨论一种将类似快速多极子方法的算法转换为小波压缩方法的框架，用于低频问题。随后，第3节将其推广到高频情形，得到适用于宽带问题的曲波基方法和显式稀疏表示。第4节通过后验压缩进一步增强其稀疏性。最后，第5节通过数值实验研究其性能。

2. 低频情形的小波压缩方法

我们的曲波基方法是由方向性快速多极子法转换而来的。对于低频情形，方向性快速多极子法会退化为相应的低频类快速多极子方法，因此我们的曲波基方法应退化为小波压缩方法。因此，在提出曲波基方法之前，本节将为N体问题介绍一个将类似快速多极子方法的算法转换为小波压缩方法的框架。

2.1. N体问题中的基函数与权函数

通常，小波压缩方法是针对积分的Petrov-Galerkin离散而发展起来的 [36, 37, 47], 在这种离散中，可以通过变换原始节点基和权函数来构造小波基。对于N体问题(1)，似乎不存在基函数或权函数。不过，它可以改写为以下Petrov-Galerkin积分形式

$$f_i = \sum_{j=1}^{N} K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j)\sigma_j = \int_{\Omega} \delta_i(\boldsymbol{x}) \int_{\Omega} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\delta_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \sigma_j, \quad \boldsymbol{x_i} \in \Omega, \boldsymbol{y}_j \in \Omega, \tag{3}$$

其中

$$\delta_i(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i), \quad \delta_j(\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_j).$$

因此，N体问题可以视为在 Ω 上的积分，并以狄拉克-δ 函数作为基函数与权函数进行离散化；小波则可以构造为狄拉克-δ 函数的线性组合。

2.2. 远场相互作用的小波压缩

对于低频情形，核可以用低阶展开来近似

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \approx \sum_{r} T_r(\boldsymbol{x}) \sum_{s} d_{rs} S_s(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \tag{4}$$

当 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 相距较远时

$$\operatorname{dist}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \geq \eta \max(\operatorname{diam}\mathbb{X}, \operatorname{diam}\mathbb{Y}). \tag{5}$$

因此，Petrov-Galerkin 离散化中的远场相互作用可以通过以下方式计算

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_\Omega w_i(\boldsymbol{x}) \int_\Omega K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \chi_j(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\approx \sum_r \int_\Omega T_r(\boldsymbol{x}) w_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \sum_s d_{rs} \int_\Omega S_s(\boldsymbol{y}) \chi_j(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}. \end{aligned} \tag{6}$$

记

$$M_{ri}(w) = \int_\Omega T_r(\boldsymbol{x}) w_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad M_{sj}(\chi) = \int_\Omega S_s(\boldsymbol{y}) \chi_j(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{7}$$

分别表示w 和 χ的矩。显然，当$A_{ij} \approx 0$，且$\boldsymbol{M}(w_i) \approx 0$ 或$\boldsymbol{M}(\chi_j) \approx 0$时，即$w$的矩$_i$ 或 χ_j 近似为零时，系统矩阵将变得稀疏。

类小波函数由原始节点函数 $\{\chi\}$ 和 $\{w\}$变换而来。为简便起见，本文也将它们称为小波。对于基函数 $\{\chi\}$，计算矩矩阵$\boldsymbol{M}(\chi)$，并对其进行奇异值分解

$$\boldsymbol{M}(\chi) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}, \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 是由按降序排列的奇异值构成的对角矩阵。将 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和$\boldsymbol{Q}$ 按相对较大的奇异值 $\{\sigma_i | \sigma_i \geq \varepsilon\sigma_0\}$ 和可忽略的奇异值 $\{\sigma_i | \sigma_i < \varepsilon\sigma_0\}$ 对应的列进行划分，然后

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(\chi)[\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_0] &= \boldsymbol{U}[\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_0] \approx [\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{0}] \\ &:= [\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}), \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Psi})], \end{aligned} \tag{9}$$

with

$$[\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}] = \left[\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\{\chi\}, \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\{\chi\}\right]. \tag{10}$$

也就是说，原始基函数被变换为一组不具有准消失矩的尺度函数 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\{\chi\}$，以及具有准消失矩的小波 $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\{\chi\}$。

尺度函数的数量 $\boldsymbol{\Phi}$ 有限，且与矩阵块的大小无关。假设核可由p项展开近似，则矩矩阵$\boldsymbol{M}(\chi)$也仅包含 p 行，因此，相对较大的奇异值数量和尺度函数数量都不会超过p。由于p 与点的数量无关，因此尺度函数的数量仅为$O(1)$。

小波 fo　　r 个权函数也可以用类似的方法构造。然后，对于.....的矩阵块

远场相互作用（6）变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= [\boldsymbol{M}(w)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}(\chi) = \left\{[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_w), \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Psi}_w)]\,\boldsymbol{Q}_w^{\mathrm{H}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\left\{\left[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_\chi), \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Psi}_\chi)\right]\boldsymbol{Q}_\chi^{\mathrm{H}}\right\} \\ &\approx \left[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_w)\boldsymbol{Q}_{w,1}^{\mathrm{H}}\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\left[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_\chi)\boldsymbol{Q}_{\chi,1}^{\mathrm{H}}\right] = \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1}}\left\{[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_w)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_\chi)\right\}\boldsymbol{Q}_{\chi,1}^{\mathrm{H}} \\ &:= \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}_{\chi,1}^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{D} = [d_{rs}]$。因此，矩阵块 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}_{w,1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{\chi,1} = [\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_w)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_\chi) \tag{12}$$

其中仅包含尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}_w$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_\chi$的相互作用，并且只有 $O(1)$ 个非零元素。

注意，式（6）实际上是单层快速多极子法中的平移，其中 $\boldsymbol{M}(\chi), \boldsymbol{D}, [\boldsymbol{M}(w)]^{\mathrm{T}}$ 分别称为源到矩（S2M）、矩到局部（M2L）和局部到目标（L2T）平移矩阵。也就是说，将快速多极子法转换为 WBM 时，基函数的矩矩阵可以定义为与快速多极子法中的 S2M 矩阵相同，而权函数的矩矩阵则应定义为 L2T 矩阵的转置。

2.3. 多层小波构造

利用多层小波基，可以实现具有 $O(N)$ 个非零元素的系统矩阵显式稀疏表示。多层小波基可以构造在平衡八叉树上，这在 WBM 中较为常用。首先定义一个包含所有点的第 0 层立方体。然后，对于当前最细层级，如果存在包含超过N_P 个点的立方体，则将该层级中的每个立方体划分为下一层级的八个子立方体。持续进行细分，直到每个叶立方体中的节点数不超过预先设定的数量 N_P。对于每个立方体 C，将其近场定义为与 C相邻的立方体之并集，即 N^C 。其余立方体定义为远场 F^C，相互作用场定义为 $I^C = N^P \backslash N^C$，其中 P 是 C 的父级。

多层小波的构造从最精细的L层开始。对于每个叶立方体C，计算C内节点基的矩矩阵。然后将节点基变换为小波 $\boldsymbol{\Psi}_L$ 和尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}_L$，并计算L层中尺度函数的矩$\boldsymbol{M}_L(\boldsymbol{\Phi}_L)$。

对于第l层中满足$l < L$的每个立方体C，收集其子立方体中的尺度函数，并将其变换为第l层的小波和尺度函数。首先，通过矩到矩（M2M）平移，将其子立方体中尺度函数的矩$\boldsymbol{M}_{l+1}(\boldsymbol{\Phi}_{l+1})$转换为第$l$层上的矩

$$\boldsymbol{M}_l(\boldsymbol{\Phi}_{l+1}) = \mathcal{M}_l\boldsymbol{M}_{l+1}(\boldsymbol{\Phi}_{l+1}), \tag{13}$$

然后对其进行奇异值分解，得到第l层的小波 $\boldsymbol{\Psi}_l$ 和尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}_l$，以及它们的矩$\boldsymbol{M}_l(\boldsymbol{\Psi}_l)$和$\boldsymbol{M}_l(\boldsymbol{\Phi}_l)$。这一过程递归进行，直到到达$h$层；在该层，所有立方体彼此之间都处于近场或相互作用场中。

现在讨论权函数的多层小波构造。注意，多层快速多极子法中的平移可以表示为

$$\boldsymbol{b} = \mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{M}\mathcal{S}\boldsymbol{x}, \tag{14}$$

其中，S,M,D,L,T 分别表示 S2M、M2M、M2L、L2L、L2T 平移。与单层快速多极子法 $\boldsymbol{b}$ = T DS$\boldsymbol{x}$相比，MS 实际上在第（$L-1$）层中充当了 $\left[\boldsymbol{M}_{L-1}(\boldsymbol{\Phi}_\chi)\right]$ 的角色，其中 S $=\boldsymbol{M}_L(\chi)$；而 TL 则充当了 $[\boldsymbol{M}_{L-1}(\boldsymbol{\Phi}_w)]^{\mathrm{T}}$ 的角色，其中 T $=[\boldsymbol{M}_L(w)]^{\mathrm{T}}$。因此，对于权函数，

$$\boldsymbol{M}_l(\boldsymbol{\Phi}_{l+1}) = \mathcal{L}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{l+1}(\boldsymbol{\Phi}_{l+1}). \tag{15}$$

也就是说，在权函数的多层小波构造中，应使用快速多极子法中 L2L 平移矩阵的转置来平移尺度函数的矩。

构　由原始节点基 $\boldsymbol{X}$ $=\{\chi\}$ 构造多层小波基可表示为　s

$$\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{X} & \rightarrow & \boldsymbol{\Phi}_L & \rightarrow & \boldsymbol{\Phi}_{L-1} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \boldsymbol{\Phi}_h \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & \boldsymbol{\Psi}_L & & \boldsymbol{\Psi}_{L-1} & & \cdots & & \boldsymbol{\Psi}_h \end{array}$$

2.4. 关于小波基的线性系统

关于多层小波基，系统矩阵有两种表示形式，即标准形式和非标准形式。本文采用非标准形式，其中仅存在同一层函数之间的相互作用，因此形式简单得多。此外，它比标准形式更高效 [35]。

该　系统矩阵可以转换为使用第L层小波表示的形式　el

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,L}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_L^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_L^{\psi,\phi} \\ \boldsymbol{A}_L^{\phi,\psi} & \boldsymbol{A}_L^{\phi,\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\chi,0,L}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,1,L}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

由于准消失矩的作用，小波之间的远场相互作用始终可以忽略不计，因此$\boldsymbol{A}^{\psi,\ \psi}{}_L$，$\boldsymbol{A}^{\psi,\ \phi}{}_L$，$\boldsymbol{A}^{\phi,\ \psi}{}_L$ 都是稀疏的，只有$\boldsymbol{A}^{\phi,\ \phi}{}_L$ 是完全稠密的。$\boldsymbol{A}^{\phi,\ \phi}{}_L$ 还可以通过小波进一步稀疏化

基在第（$L-1$）层中的应用，从而得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,L}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_L^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_L^{\psi,\phi} \\ \boldsymbol{A}_L^{\phi,\psi} & \boldsymbol{A}_L^{\phi,\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\chi,0,L}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,1,L}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,L}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_L^{\psi,\psi} & & \boldsymbol{A}_L^{\psi,\phi} & \\ & \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,L-1}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{L-1}^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_{L-1}^{\psi,\phi} \\ \boldsymbol{A}_{L-1}^{\phi,\psi} & \boldsymbol{A}_{L-1}^{\phi,\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\chi,0,L-1}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,1,L-1}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} & \\ \boldsymbol{A}_L^{\phi,\psi} & & \boldsymbol{A}_L^{\phi,\phi} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\chi,0,L}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,1,L}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,L}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L}}\,\overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,L-1}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L}}\,\overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,L-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_L^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_L^{\psi,\phi} & & \\ \boldsymbol{A}_L^{\phi,\psi} & & & \\ & & \boldsymbol{A}_{L-1}^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_{L-1}^{\psi,\phi} \\ & & \boldsymbol{A}_{L-1}^{\phi,\psi} & \boldsymbol{A}_{L-1}^{\phi,\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\chi,0,L}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,1,L}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,0,L-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_{\chi,1,L}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,1,L-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_{\chi,1,L}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

此过程递归进行，直至最高层。因此，矩阵-向量乘法 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 被转换为

$$
\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{Q}_w}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}}\boldsymbol{Q}_{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}. \tag{18}
$$

采用非标准形式的系统矩阵

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_L^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_L^{\psi,\phi} & & & & & \\ \boldsymbol{A}_L^{\phi,\psi} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boldsymbol{A}_{h+1}^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_{h+1}^{\psi,\phi} & & & \\ & & \boldsymbol{A}_{h+1}^{\phi,\psi} & & & & \\ & & & & \boldsymbol{A}_h^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_h^{\psi,\phi} \\ & & & & \boldsymbol{A}_h^{\phi,\psi} & \boldsymbol{A}_h^{\phi,\phi} \end{bmatrix} \tag{19}
$$

是最优稀疏的，因为 $\boldsymbol{A}^{\psi,\psi}$、$\boldsymbol{A}^{\psi,\phi}$、$\boldsymbol{A}^{\phi,\psi}$ 中的远场相互作用可以被舍弃，且 $\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}$ $_h$ 的规模受到限制。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_* = [&\boldsymbol{Q}_{*,0,L},\quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L},\quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L}\boldsymbol{Q}_{*,0,L-1},\quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L}\boldsymbol{Q}_{*,1,L-1},\quad \cdots, \\
&\boldsymbol{Q}_{*,1,L}\boldsymbol{Q}_{*,1,L-1}\cdots\boldsymbol{Q}_{*,1,h+1}\boldsymbol{Q}_{*,0,h},\quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L}\boldsymbol{Q}_{*,1,L-1}\cdots\boldsymbol{Q}_{*,1,h+1}\boldsymbol{Q}_{*,1,h}] \\
= \Bigg[&\boldsymbol{Q}_{*,0,L},\quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L},\quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L}\boldsymbol{Q}_{*,0,L-1},\quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L}\boldsymbol{Q}_{*,1,L-1},\quad \cdots,\quad \prod_{l=L}^{h+1}\boldsymbol{Q}_{*,1,l}\cdot\boldsymbol{Q}_{*,0,h},\quad \prod_{l=L}^{h+1}\boldsymbol{Q}_{*,1,l}\cdot\boldsymbol{Q}_{*,1,h}\Bigg]
\end{aligned} \tag{20}
$$

是原始节点基 $\boldsymbol{X}$ 与小波基之间的变换矩阵

$$
\boldsymbol{\Psi}_* = \{\boldsymbol{\Phi}_{*,L}, \boldsymbol{\Psi}_{*,L}, \boldsymbol{\Phi}_{*,L-1}, \boldsymbol{\Psi}_{*,L-1}, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_{*,h}, \boldsymbol{\Psi}_{*,h}\}, \tag{21}
$$

其中，下标中的 $*$ 表示权函数w ，或表示基函数 χ 。然后，矩阵向量乘法$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可通过 WBM 中的以下三个步骤以线性计算成本完成：

1. 使用快速小波变换 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}_{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}$计算小波基函数 $\boldsymbol{\Psi}_{\chi}$ 的系数 $\tilde{\boldsymbol{x}}$；

2. 计算小波权函数 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ 的系数 $\boldsymbol{\Psi}_{w}$，通过 $\tilde{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}}\tilde{\boldsymbol{x}}$；

3. 使用逆快速小波变换计算目标值 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Q}_{w}\tilde{\boldsymbol{b}}$。

非标准系统矩阵可以通过向上传递计算得到。与立方体 C 和 $B \in N^{C}$ 对应的矩阵块为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{B,C}^{\phi,\phi} & \boldsymbol{A}_{B,C}^{\phi,\psi} \\ \boldsymbol{A}_{B,C}^{\psi,\phi} & \boldsymbol{A}_{B,C}^{\psi,\psi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_{L,w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{B,C}\boldsymbol{Q}_{L,\chi}. \tag{22}$$

如果 C 和 B 位于最细层级，$\boldsymbol{A}_{B,C}$ 由原始节点基与权函数之间的相互作用构成，因此它实际上是快速多极子方法中的源到目标（S2T）转换矩阵。如果C 和 B 位于更高的l层级，$\boldsymbol{A}_{B,C}$ 由其子节点的所有 ϕ相互作用构成，其中包括（$l+1$）层级中的近场相互作用和交互场相互作用。近场相互作用已通过（$l+1$）层级中的变换（22）计算完成。交互场相互作用可以利用矩矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi})$ 和 M2L平移高效计算

$$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi} = \boldsymbol{Q}_{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{\chi} = \boldsymbol{Q}_{w}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{M}(w)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}(\chi)\boldsymbol{Q}_{\chi} = \left[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_{w})\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Phi}_{\chi}). \tag{23}$$

矩阵计算仅需进行近场和相互作用场中的计算，因此其计算成本是线性的。

3. 高频情形下的曲波压缩

现在我们将方向性快速多极子法转换为 CBM。我们的 CBM 同样包含低频区域和高频区域中的计算，其中低频区域的计算与 WBM 相同。因此，本节主要讨论高频区域中的计算。

3.1. 多层曲波构造

我们的 CBM 同样基于振荡核的方向性低秩性质。也就是说，该核可以用低阶展开来近似

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \approx \sum_{r} T_{r}(\boldsymbol{x}) \sum_{s} d_{rs} S_{s}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$$

当 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 满足抛物线分离条件时，如图1所示。根据第2.2节中的理论，可以使用具有准消失矩的基函数和权函数对 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 之间的远场相互作用进行稀疏化。请注意，该展开仅对某个方向锥有效，而且$T_{r}(\boldsymbol{x})$ 和 $S_{s}(\boldsymbol{y})$ 随方向锥而异，因此矩和类小波函数具有方向性。在

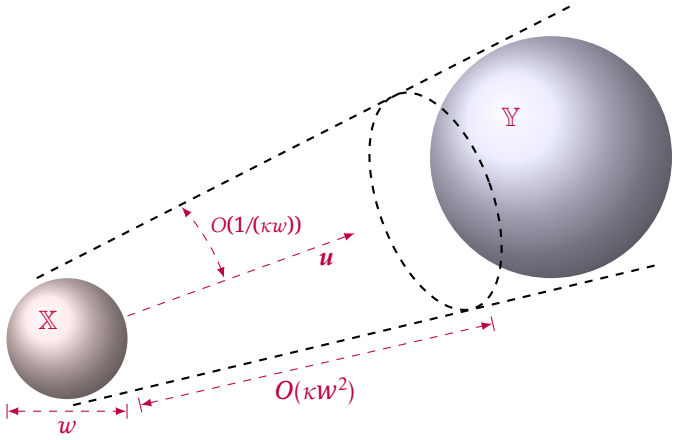


图 1：抛物线分离条件。

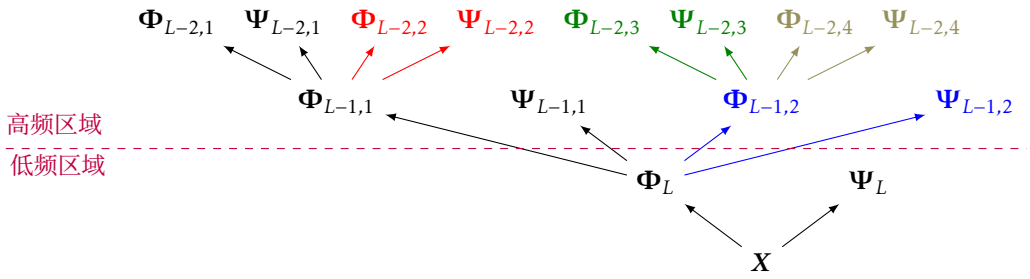
下文中，为简便起见，这些方向性类小波函数在本文中称为类曲波函数，或曲波。

在多层曲波构造中，八叉树被划分为低频区域和高频区域。低频区域由尺寸小于波长的低层立方体组成，其余立方体位于高频区域。记低频区域中的最高层为h_l层。为确保$h_l < L$，使低频区域非空，在八叉树构造过程中，尺寸大于波长的立方体始终会被细分。

对于立方体C，若其位于低频区域，则其近场、远场和相互作用场的定义与 WBM 中相同。若其位于高频区域，则其近场N^C定义为距离不超过$O(kw^2)$的立方体B的并集，其余部分定义为其远场F^C。其相互作用场$I^C = N^P \backslash N^C$被划分为多个方向锥，其张角为$O(1/(\kappa w))$。因此，每个方向锥都与C满足抛物线分离条件。

由原始节点基$\boldsymbol{X}$构造多层曲波的过程如图 2 所示。首先，在低频区域将原始节点基变换为小波基，然后在高频区域进一步将尺度函数变换为曲波。对于每个方向锥，都会构造一组曲波和方向尺度函数。对于第（$h_l - 1$）层，即高频区域中的最细层级，$\boldsymbol{u}$方向锥中的曲波由h_l层的非方向尺度函数变换而来。对于高频区域中更高的l层，其中$l < h_l$，$\boldsymbol{u}_l$方向锥中的曲波由第（$\boldsymbol{u}_{l+1}$）层中$l+1$方向锥内的方向尺度函数变换而来，其中$\boldsymbol{u}_l$包含在第$\boldsymbol{u}_{l+1}$个方向锥内。

请注意，在高频区域 [28] 中，所有立方体共有 $O(N\log N)$ 个方向锥。对于每个方向锥，曲波基通过对矩矩阵进行 M2M 和奇异值分解构造得到。因此很容易看出，多层曲波构造的计算复杂度为 $O(N\log N)$。



Figu图 2：多层曲波的构造，其中下标（l, γ）表示第 l 层中的第 γ 个方向锥 l.

3.2. 新非标准形式中的线性系统

现在，让我们构造关于曲波基的系统矩阵的显式稀疏表示。低频区域中的矩阵稀疏化与 WBM 中的相同，从而得到如公式 (19) 所示的变换后系统矩阵。随后，只有一个稠密填充的矩阵块 $\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$，对应于第 h_l 层所有尺度函数之间的相互作用，其大小随波数 κ 增长。因此，曲波稀疏化的关键是在高频区域中，进一步利用曲波基对 $\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$ 进行稀疏化。

对$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$ 进行稀疏化的一个直接想法，是直接应用 WBM 中的稀疏化方案，即将其转换为曲波与方向尺度函数之间的近场相互作用。然而，曲波基有多个组，每组对应一个方向锥。$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$ 可以通过

$$\boldsymbol{A}_{h_l}^{\phi,\phi} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,h_l-1,\gamma}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,h_l-1,\gamma}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{h_l-1,\gamma}^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_{h_l-1,\gamma}^{\psi,\phi} \\ \boldsymbol{A}_{h_l-1,\gamma}^{\phi,\psi} & \boldsymbol{A}_{h_l-1,\gamma}^{\phi,\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\chi,0,h_l-1,\gamma}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{Q}_{\chi,1,h_l-1,\gamma}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \tag{24}$$

对于每个第 γ 组。我们无法确定应该使用哪一组。更重要的是，变换后的矩阵块 $\boldsymbol{A}^{\psi,\psi\,h_l,\gamma}$,$\boldsymbol{A}^{\psi,\phi\,h_l,\gamma}$,$\boldsymbol{A}^{\phi,\psi\,h_l,\gamma}$ 不再是稀疏的，因为只有 γ 方向锥中的 ψ 相互作用可以忽略，而其他锥中的相互作用仍然显著。因此，我们必须找到另一种方案来稀疏化 $\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$，并构造一种新非标准形式，以实现系统矩阵的稀疏表示。

在本文中，$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$ 中的远场相互作用按锥逐一进行稀疏化。注意，$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$ 可以在h_l层划分为近场相互作用和交互场相互作用$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi\ h_l}$,NI($h_l$)，以及更高层次上的交互场相互作用；后者还可进一步划分为与多个方向锥相关的相互作用。也就是说，

$$\boldsymbol{A}_{h_l}^{\phi,\phi} = \boldsymbol{A}_{h_l,\mathrm{NI}(h_l)}^{\phi,\phi} + \sum_{l=h_l-1}^{h} \sum_{\gamma}^{\Gamma_l} \boldsymbol{A}_{h_l,\mathrm{I}(l,\gamma)}^{\phi,\phi}, \tag{25}$$

其中，I(l,γ)表示第l层相互作用场中的第 γ个方向锥， Γ_l 是

第l层中锥的数量，并且

$$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l,\mathrm{I}(l,\gamma)} = \int_{\mathbb{X}} \boldsymbol{\Phi}_{w,h_l}(\boldsymbol{x}) \int_{\mathbb{Y}} K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \boldsymbol{\Phi}_{\chi,h_l}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

其中 $\mathbb{X}$ 是第l层的立方体，$\mathbb{Y}$ 是它们的第 γ 个方向锥。

$\boldsymbol{A}^{\phi}{}_{,\phi\ h_l,\mathrm{I}(l,\gamma)}$ 可以用低阶展开近似，因为核具有方向低秩性质。首先将 ϕ_{h_l}-相互作用转换为 ϕ_{h_l-1}-相互作用

$$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l,\mathrm{I}(l,\gamma)} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,0,h_l-1,\gamma'}} & \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,h_l-1,\gamma'}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\psi,\psi}_{h_l-1,\gamma'} & \boldsymbol{A}^{\psi,\phi}_{h_l-1,\gamma'} \\ \boldsymbol{A}^{\phi,\psi}_{h_l-1,\gamma'} & \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l-1,\gamma'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,0,h_l-1,\gamma'} \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,1,h_l-1,\gamma'} \end{bmatrix} \tag{26}$$

其中，下标 (h_l-1,γ') 表示第 (h_l-1) 层中包含 $\mathrm{I}(l,\gamma)$ 的方向锥。由于曲波的方向矩准消失，矩阵块$\boldsymbol{A}^{\psi}{}_{,\psi\ h_l-1,\gamma'}$、$\boldsymbol{A}^{\psi}{}_{,\phi\ h_l-1,\gamma'}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\phi}{}_{,\psi\ h_l-1,\gamma'}$ 可以忽略，因此式 (26) 变为

$$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l,\mathrm{I}(l,\gamma)} = \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,h_l-1,\gamma'}} \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l-1,\gamma'} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,1,h_l-1,\gamma'}. \tag{27}$$

也就是说，ϕ_{h_l}-相互作用被转换为 ϕ_{h_l-1}-相互作用，并对矩阵块进行压缩。递归进行此过程，直至第l层，得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l,\mathrm{I}(l,\gamma)} &= \left(\overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,h_l-1,\gamma'}}\,\overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,h_l-2,\gamma'}} \cdots \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,l,\gamma}}\right) \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{l,\gamma} \left(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,1,l,\gamma} \cdots \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,1,h_l-2,\gamma'} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,1,h_l-1,\gamma'}\right) \\ &= \prod_{\lambda=h_l-1}^{l} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,\lambda,\gamma'}} \cdot \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{l,\gamma} \cdot \prod_{\lambda=l}^{h_l-1} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,1,\lambda,\gamma'}. \end{aligned} \tag{28}$$

将式 (28) 代入式 (25)，得到

$$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l} = \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l,\mathrm{NI}(h_l)} + \sum_{l=h_l-1}^{h} \sum_{\gamma}^{\Gamma_l} \prod_{\lambda=h_l-1}^{l} \overline{\boldsymbol{Q}_{w,1,\lambda,\gamma'}} \cdot \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{l,\gamma} \cdot \prod_{\lambda=l}^{h_l-1} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,1,\lambda,\gamma'}. \tag{29}$$

它可以写成如下形式

$$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l} = \overline{\boldsymbol{Q}_{w,\mathrm{HFR}}} \cdot \boldsymbol{A}_{\mathrm{ns,HFR}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}_{\chi,\mathrm{HFR}}, \tag{30}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{ns,HFR}} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l,\mathrm{NI}(h_l)}, \underbrace{\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l-1,1}, \cdots, \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h_l-1,\Gamma_{h_l-1}}}_{(h_l-1)\text{-th level}}, \cdots, \underbrace{\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h,1}, \cdots, \boldsymbol{A}^{\phi,\phi}_{h,\Gamma_h}}_{h\text{-th level}}) \tag{31}$$

and

$$\boldsymbol{Q}_{*,\mathrm{HFR}} = [\boldsymbol{I}, \underbrace{\boldsymbol{Q}_{*,1,h_l-1,1}, \cdots, \boldsymbol{Q}_{*,1,h_l-1,\Gamma_{h_l-1}}}_{(h_l-1)\text{-th level}}, \cdots, \underbrace{\prod_{\lambda=h_l-1}^{h} \boldsymbol{Q}_{w,1,\lambda,1'}, \cdots, \prod_{\lambda=h_l-1}^{h} \boldsymbol{Q}_{w,1,\lambda,\Gamma'_h}}_{h\text{-th level}}] \tag{32}$$

分别表示高频区域下的稀疏化系统矩阵和变换矩阵。

将式 (30) 代入低频区域中相对于小波基的非标准形式系统矩阵，可得到适用于高频问题的线性系统 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Q}_w \tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}} \boldsymbol{Q}_\chi^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}$ ，其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_* =& [\boldsymbol{Q}_{*,0,L}, \quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L}, \quad \cdots, \quad \prod_{l=L}^{h_l+1} \boldsymbol{Q}_{*,1,l} \cdot \boldsymbol{Q}_{*,0,h_l}, \quad \prod_{l=L}^{h_l+1} \boldsymbol{Q}_{*,1,l} \cdot \boldsymbol{Q}_{*,\mathrm{HFR}}] \\
=& [\boldsymbol{Q}_{*,0,L}, \quad \boldsymbol{Q}_{*,1,L}, \quad \cdots, \quad \prod_{l=L}^{h_l+1} \boldsymbol{Q}_{*,1,l} \cdot \boldsymbol{Q}_{*,0,h_l}, \quad \prod_{l=L}^{h_l+1} \boldsymbol{Q}_{*,1,l} \cdot \boldsymbol{Q}_{*,1,h_l}, \\
& \underbrace{\prod_{l=L}^{h_l} \boldsymbol{Q}_{*,1,l} \cdot \boldsymbol{Q}_{*,1,h-1,1}, \quad \cdots, \quad \prod_{l=L}^{h_l} \boldsymbol{Q}_{*,1,l} \cdot \prod_{\lambda=h_l-1}^{h} \boldsymbol{Q}_{*,1,\lambda,\Gamma_h}}_{\text{for all directional cones in the high frequency regime}}],
\end{aligned}
\tag{33}
$$

and

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{A}_L^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_L^{\psi,\phi} & & & & & & & & & \\
\boldsymbol{A}_L^{\phi,\psi} & & & & & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & & & & \\
& & & \boldsymbol{A}_{h_l+1}^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_{h_l+1}^{\psi,\phi} & & & & & & \\
& & & \boldsymbol{A}_{h_l+1}^{\phi,\psi} & & & & & & & \\
& & & & & \boldsymbol{A}_{h_l}^{\psi,\psi} & \boldsymbol{A}_{h_l}^{\psi,\phi} & & & & \\
& & & & & \boldsymbol{A}_{h_l}^{\phi,\psi} & \boldsymbol{A}_{h_l,\mathrm{NI}(h_l)}^{\phi,\phi} & & & & \\
& & & & & & & \boldsymbol{A}_{h_l-1,1}^{\phi,\phi} & & & \\
& & & & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & & & \boldsymbol{A}_{h,\Gamma_h}^{\phi,\phi}
\end{bmatrix}
\tag{34}
$$

是高频情况下新非标准形式系统矩阵的显式稀疏表示。

低频区域中的 $\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{ns}}$ 矩阵块以与 WBM 相同的方式计算，而高频区域中的 $\mathrm{A}^{\phi,\phi}_{\mathrm{l},\gamma}$ 则可通过 M2L平移高效计算。值得注意的是，$\mathrm{A}^{\phi,\phi}_{\mathrm{l},\gamma}$ 中的每个子矩阵块都对应一个 M2L操作，因此仅有 O(N logN) 个矩阵块。由于核的方向低秩性质，每个矩阵块的大小均为 O(1) 量级。因此，$\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{ns}}$中仅有 O(N logN) 个非零元素，矩阵计算的计算复杂度也为 O(N logN)。随后，通过依次计算快速曲波变换 $\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{Q}_\chi^{\mathrm{H}}\mathrm{x}$、曲波空间中的矩阵向量乘法 $\tilde{\mathrm{b}} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{ns}}\tilde{\mathrm{x}}$ 以及逆快速曲波变换 $\mathrm{b} = \mathrm{Q}_w\tilde{\mathrm{b}}$，$\mathrm{b} = \mathrm{Ax}$ 的计算开销可降至对数线性级别。

4. 后验压缩

在 WBM 的研究中发现，尽管低频情形下使用小波对系统矩阵进行了稀疏化，但其中仍然存在许多极小元素。通过舍弃这些极小元素，可以显著降低内存开销，这被称为 后验 压缩技术 [48]。考虑到我们的 CBM 与 WBM 之间的关系，可以合理预期，第3节中获得的显式稀疏表示中也会存在许多可舍弃元素，并且可以通过后验 压缩技术进一步增强其稀疏性。

值得注意的是，我们的目标是以可控精度构建系统矩阵的近乎最优显式稀疏表示。然而，原始的后验压缩技术是为快速边界元分析而开发的，其阈值旨在保持采用分片常数单元的边界元法的收敛率。因此，在我们的 CBM 中，需要重新定义舍弃元素的阈值。

对于$\boldsymbol{B}$ 中的每个矩阵块 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}}$，均按以下方式进行压缩：

$$\tilde{B}_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & \|B_{ij}\| \geq \eta, \\ 0, & \|B_{ij}\| < \eta. \end{cases} \tag{35}$$

当满足以下条件时，所产生的相对误差可控：

$$\frac{\|\boldsymbol{B} - \tilde{\boldsymbol{B}}\|_1}{\|\boldsymbol{B}\|_1} \leq \eta m / \|\boldsymbol{B}\|_1 = \varepsilon, \tag{36}$$

其中，误差估计中采用L_1 范数，因为它易于计算。因此，阈值可取为：

$$\eta = \varepsilon \|\boldsymbol{B}\|_1 / m. \tag{37}$$

为节省内存，压缩后的矩阵块 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 应以稀疏模式存储。每个非零元素均以一个复数变量存储其数值，并以一个整数存储其位置。因此，含有N_{nz}个非零元的$\boldsymbol{B}$ 可占用N_{nz}[sizeof(int) +sizeof(complex)] 内存。请注意，后验压缩前的矩阵块需要mn·sizeof(complex) 内存，因此只有当$\boldsymbol{B}$ 中存在

$$N_{\mathrm{nz}} < mn \frac{\mathtt{sizeof(complex)}}{\mathtt{sizeof(int)} + \mathtt{sizeof(complex)}} \tag{38}$$

不可丢弃的元素。

5. 数值结果

本工作中实现的 CBM 是由优化的 dFMM [2], 转化而来的，即利用等效密度构造低秩近似，并在曲波构造和矩阵计算中使用 [2] 压缩后的 S2M、M2M、M2L、L2L 和 L2T 平移矩阵。

该程序使用 C++以串行方式实现。本节通过一组数值算例展示其性能。所有算例均在一台中国 FT 2000+ CPU（2.2 GHz）和 128 GB 内存的计算机上完成。

5.1. 精度与计算复杂度

首先，我们研究采用求和式 (1) 和单层 Helmholtz 核 (2) 的 CBM 的精度与计算复杂度。点 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_j\}$ 采样于单位球面上，每个波长约有 10 个点，密度 $\{\sigma_j\}$ 随机定义。我们通过以下方式估计 CBM 的相对误差 ε_{a}

$$\varepsilon_{\mathrm{a}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{t}}} \left\| f_i^{(\mathrm{a})} - f_i^{(\mathrm{d})} \right\|_2^2}{\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{t}}} \left\| f_i^{(\mathrm{d})} \right\|_2^2}}, \tag{39}$$

其中，$\{f^{(\mathrm{a})}{}_i\}$ 是使用 CBM 计算得到的 N_{t} 个随机选取点上的势，而 $\{f^{(\mathrm{d})}{}_i\}$ 是通过直接求和计算得到的势。在本文中，误差估计选取 $N_{\mathrm{t}} = 500$ 个点。

针对不同的 ε 和无量纲直径 κD，我们多次计算该求和。在最高频率情形下，$\kappa D = 201.1$，直径为 32 个波长，如图 3 所示，边界上采样了超过 100 万个点。计算结果汇总于表1，其中 $T_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{m}}, T_{\mathrm{P}}, T_{\mathrm{t}}$ 分别表示曲波构造、稀疏系统矩阵计算、矩阵-向量乘法和总运行时间的计算时间开销；$M_{\mathrm{Q}}, M_{\mathrm{m}}, M_{\mathrm{t}}$ 分别表示 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵、稀疏系统矩阵和总内存消耗的内存开销。

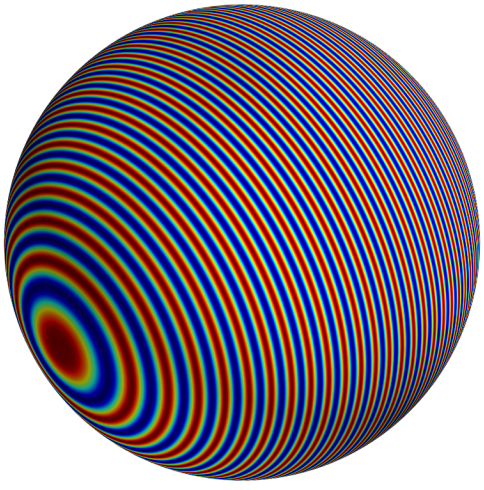


图 3：一个球体，$\kappa D = 201.1$。

总体误差 ε_{a} 通常与预设参数 ε处于同一量级。误差ε_{a}似乎会随 $\log N$增长。这是合理的，因为在每一层中都会引入量级为$O(\varepsilon)$ 的误差，

表1：球体单层核的结果。

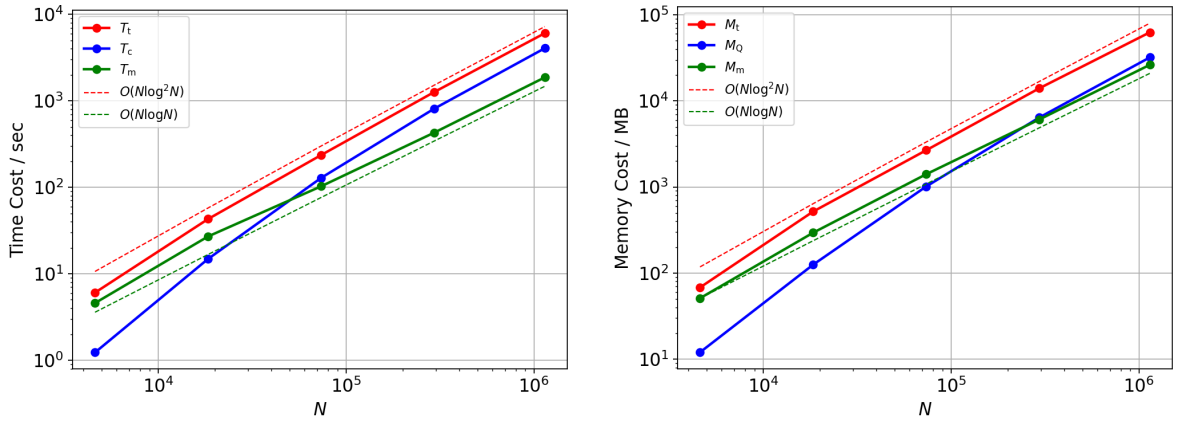
ε_0	κD	N	时间开销（秒）				内存开销（MB）			ε_a
			T_c	T_m	T_p	T_t	M_Q	M_m	M_t	
1e-3	12.6	4,608	1	5	<1	6	12	51	68	1.0e-3
1e-3	25.1	18,432	15	27	<1	43	125	294	518	2.7e-4
1e-3	50.3	73,728	129	103	2	236	1,013	1,406	2,671	4.4e-3
1e-3	100.5	294,912	812	429	11	1,265	6,414	6,083	14,011	5.5e-3
1e-3	201.1	1,143,072	4,054	1,866	79	6,053	31,987	26,241	62,579	8.8e-3
1e-6	12.6	4,608	5	44	<1	51	12	208	249	1.2e-6
1e-6	25.1	18,432	173	351	1	528	518	2,641	3,465	6.2e-6
1e-6	50.3	73,728	1,796	1,200	8	3,009	5,465	9,826	16,923	8.3e-6
1e-6	100.5	294,912	14,238	5,074	83	19,413	38,089	46,476	94,412	9.5e-6

而八叉树中有$O(\log N)$层。与我们的算法所转换自的 [2] 中的 dFMM 误差相比，误差有所增大。这是因为在我们的 CBM 中，除了核的低秩近似之外，在构造具有准消失矩的曲波以及进行后验压缩时还会引入额外误差。尽管如此，总体误差仍然是可控的。

在N体问题的评估中，大部分计算时间都耗费在系统矩阵的显式稀疏表示构造上，包括曲波构造和矩阵计算。一旦获得稀疏表示，就可以非常高效地计算目标点上的势。大部分内存开销用于存储$\boldsymbol{Q}$ 矩阵和稀疏系统矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}}$，它们是进行曲波变换以及曲波空间中的矩阵-向量乘法所必需的。

使用 $\varepsilon_0 = 1\text{e-}3$ 进行评估所产生的时间和内存开销绘于图4中，以展示计算复杂度。结果表明，存储 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}}$所占用的内存量级为$O(N\log N)$，这意味着通过我们的算法获得的系统矩阵显式稀疏表示中仅有对数线性数量的非零元。矩阵计算所需的时间开销也以$O(N\log N)$的速度增长。

理论上，曲波构造的计算复杂度和总体计算开销也应为$O(N\log N)$。对于立方体宽度为w的每一层，由于点采样自曲面，非空立方体最多有$O(D^2/w^2)$个。当立方体处于高频区域时，方向锥最多有$O(\kappa^2 w^2)$个。每个方向锥的曲波构造计算开销为$O(1)$，因为矩矩阵和M2M矩阵的维度与 κw无关。因此，每一层的曲波构造计算开销为$O(D^2/w^2 \cdot \kappa^2 w^2) = O(\kappa^2 D^2) = O(N)$，而曲波构造的总体计算复杂度为



(a) 总时间开销。

(b) 总内存消耗。

图4：单位球面上单层核求和的计算开销。

所有层的计算复杂度应为$O(N\log N)$，因为八叉树中有$O(\log N)$层。

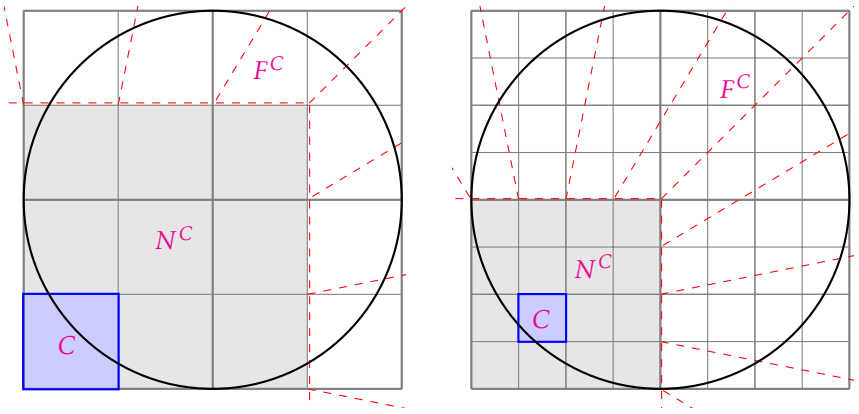
然而，曲波构造中的时间和内存开销似乎比理论预测增长得更快，整体计算复杂度似乎为$O(N\log^2 N)$。为找出原因，我们统计了数值算例中实际非空方向锥的数量。注意，对于高频下的一个立方体，如果其在某个方向锥中的相互作用场为空，但该锥内远场中存在非空立方体，则该锥仍被视为非空；由于后续构造更高层级的父级时需要用到这些曲波和尺度函数，因此必须构造它们。非空锥的数量因立方体而异，因此我们计算每个层级的平均值。对于˜每个立方体宽度以波长计为$w/\lambda = \kappa w/2\pi$的层级，每个锥的平均非空锥数量 $\bar{\Gamma}_l$及其理论上界 Γ_l 列于表2中。

表2：球面上点的N体问题中非空方向锥的数量。

w/λ	$\tilde{\Gamma}_l$				$\bar{\Gamma}_l$
	$\kappa D = 8\pi$	$\kappa D = 16\pi$	$\kappa D = 32\pi$	$\kappa D = 64\pi$	
1	12.9	35.4	49.1	55.7	96
2	-	-	69.1	142.0	384

实际数值情形表明，非空方向锥的数量可能远小于上界 $\bar{\Gamma}_l \sim O(\kappa^2 w^2)$，且往往随频率升高而增加。这可能是因为点所在曲面的无量纲曲率 λ/R 随频率升高而减小。当频率不太高时，曲率相对较大，远场曲面往往分布在少数方向锥中。但频率升高后，曲率减小，且

曲面往往会占据更多方向锥，如图5所示。尽管如此，方向锥的数量绝不会超过 $\bar{\Gamma}_l \sim O(\kappa^2 w^2)$。因此，随着频率不断升高，曲波构造的计算复杂度在渐近意义上应趋近于 $O(N \log N)$。图4部分展示了这一趋势，其中 T_C 的斜率随频率升高而减小。预计若能提供更高频率算例的结果，该斜率还会进一步减小，趋近于与 $O(N \log N)$ 的斜率平行。然而，由于计算机的内存限制，本文未计算这些算例。



(a) 较低频率，6 个非空锥。　　(b) 较高频率，8 个非空锥。

图5：对于相同的 w/λ，非空方向锥的数量随频率增加而增加。图示为二维情形。三维情形与此类似。

5.2. 其他层的核

本节研究了我们的 CBM 在双层、伴随层和四极层情况下的性能。点同样采样于单位球面上，且其法向量指向外侧。数值结果列于表3–5中。

结果表明，伴随层核的性能与双层核大致相同。这是合理的，因为它们的矩阵实际上互为转置，即 $\boldsymbol{A}^{(\mathrm{a})} = \boldsymbol{A}^{(\mathrm{d})}$，其中上标 (a) 和 (d) 分别表示伴随层核和双层核。由于在我们的 CBM 中得到稀疏表示 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_w \boldsymbol{A}_{\mathrm{ns}} \boldsymbol{Q}_\chi$，因此理论上有 $\boldsymbol{Q}_w^{(\mathrm{a})} = \boldsymbol{Q}_\chi^{(\mathrm{d})}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}}^{(\mathrm{a})} = \tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ns}}^{(\mathrm{d})}$，以及 $\boldsymbol{Q}_\chi^{(\mathrm{a})} = \boldsymbol{Q}_w^{(\mathrm{d})}$。因此，伴随层核的计算与双层核相同，只是在算法中交换目标点和源点的位置。计算开销上的细微差异可能来自在高频区域 [28, 49] 中为核的低秩近似构造而随机选取等效点。

记忆　　通过存储 M_{m} 和 A_{ns}，四极子层的成本远低于单层　　.

表 3：球体双层核的结果。

ε_0	κD	N	时间开销（秒）				内存开销（MB）			ε_a
			T_c	T_m	T_p	T_t	M_Q	M_m	M_t	
1e-3	12.6	4,608	1	5	<1	6	12	61	77	5.0e-4
1e-3	25.1	18,432	15	26	<1	43	125	388	559	1.1e-3
1e-3	50.3	73,728	124	95	2	225	1,013	1,901	3,177	1.2e-3
1e-3	100.5	294,912	786	403	35	1,238	6,465	8,515	16,518	1.7e-3
1e-3	201.1	1,143,072	4,065	1,738	83	5,941	32,884	38,000	74,970	1.8e-3
1e-6	12.6	4,608	6	48	<1	55	6	316	351	5.8e-7
1e-6	25.1	18,432	164	358	1	532	531	2,971	3,807	1.4e-6
1e-6	50.3	73,728	1,869	1,241	9	3,124	5,854	12,161	19,753	1.5e-6
1e-6	100.5	294,912	15,357	5,252	80	20,708	40,368	56,058	106,432	1.7e-6

这是因为，对于四极层核

$$\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_y} = \left[(k^2r^2 + 3ikr - 3)(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_x)(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_y) + (1-ikr)(\hat{\boldsymbol{n}}_x\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_y)\right]\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r^3}, \tag{40}$$

其超奇异性使其在$\boldsymbol{x}$ 接近$\boldsymbol{y}$时急剧增大。因此，近场中的元素可能远大于单层核情况下的元素。变换后的矩阵块$\boldsymbol{A}^{\phi,\phi}$的范数，以及事后 压缩（37）的阈值也会随之增大。因此，在事后 压缩中可以丢弃更多微小元素，使最终显式稀疏表示中的非零元素更少，内存消耗也更低。总体误差 ε_a 会增大，但仍与 ε大致处于同一量级。

然而，双层核和伴随核的内存开销M_m 大于单层核。这是因为，对于双层核

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y} = (1-ikr)\cdot(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_y)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r^2} \tag{41}$$

以及伴随核

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_x} = -(1-ikr)\cdot(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_x)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r^2}, \tag{42}$$

由于$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ 项，当$\boldsymbol{x}$ 趋近于$\boldsymbol{y}$ 时，该项趋近于0，因为$\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$ 是在曲面上采样的，且$\boldsymbol{n}$ 是表面法线。这使得近场中的元素比单层核情况下的元素小得多，并导致显式稀疏表示采用更小的后验压缩阈值。因此，显式稀疏表示中会保留更多非零元素，并消耗更多内存。总体误差 ε_a 可能会变小，因为后验压缩引入的误差较少。

表 4：球体的伴随层核结果。

ε_0	κD	N	时间开销（秒）				内存开销（MB）			ε_{a}
			T_{c}	T_{m}	T_{p}	T_{t}	M_{Q}	M_{m}	M_{t}	
1e-3	12.6	4,608	1	5	<1	6	12	60	77	5.0e-4
1e-3	25.1	18,432	15	26	<1	41	125	388	559	1.1e-3
1e-3	50.3	73,728	127	96	2	228	1,012	1,901	3,177	1.2e-3
1e-3	100.5	294,912	786	403	34	1,237	6,465	8,515	16,518	1.7e-3
1e-3	201.1	1,143,072	4,068	1,732	82	5,937	32,884	38,000	74,970	1.8e-3
1e-6	12.6	4,608	5	44	<1	51	6	316	351	5.8e-7
1e-6	25.1	18,432	160	352	1	515	531	2,971	3,807	1.4e-6
1e-6	50.3	73,728	1,875	1,234	10	3,124	5,854	12,161	19,753	1.5e-6
1e-6	100.5	294,912	15,494	5,254	80	20,847	40,368	56,058	106,432	1.7e-6

5.3. 不同几何

我们使用一架X45X飞机和一艘DARPA Suboff 潜艇来研究CBM在不同几何形状上的性能。CAD模型从 *grabcab.com*下载。我们考虑了不同的频率以及 ε 的不同取值。在最高频率情况下，飞机的尺寸约为96个波长，潜艇长度约为109个波长，如图6和图7所示。点也以每个波长约10个点的密度进行采样。求和采用单层核计算。计算结果列于表6和表7中，其中展示了对数线性复杂度。与球体上的求和相比，在大致相同的计算开销下，飞机和潜艇可以计算更高频率的情况，表明我们的CBM对于扁平且细长的几何形状更加高效。这是因为对于此类几何形状，更多方向锥为空，因此需要处理的方向锥更少。

6. 结论

本文通过开发一种基于曲波的方法，提出了振荡核的一种近乎最优的显式稀疏表示。下面总结其主要特点：

- 系统矩阵的显式稀疏表示仅包含$O(N\log N)$个非零元素。

- 以可控精度构造该表示的计算复杂度为对数线性。

表 5：球体采用四极层核的结果。

ε_0	κD	N	时间开销（秒）				内存开销（MB）			ε_a
			T_c	T_m	T_p	T_t	M_Q	M_m	M_t	
1e-3	12.6	4,608	1	5	<1	6	12	46	62	8.0e-4
1e-3	25.1	18,432	14	25	<1	41	125	159	456	2.2e-4
1e-3	50.3	73,728	120	94	2	219	1,023	722	2,382	3.7e-3
1e-3	100.5	294,912	773	394	10	1,192	6,380	3,562	12,533	4.5e-3
1e-3	201.1	1,143,072	3,961	1,712	79	5,808	33,159	17,018	58,595	5.7e-3
1e-6	12.6	4,608	6	47	<1	54	0	324	353	4.0e-7
1e-6	25.1	18,432	164	352	1	519	546	2,347	3,196	6.4e-6
1e-6	50.3	73,728	1,943	1,241	9	3,196	6,216	8,624	16,677	6.5e-6
1e-6	100.5	294,912	17,068	5,340	77	22,502	43,356	39,995	94,160	1.2e-5

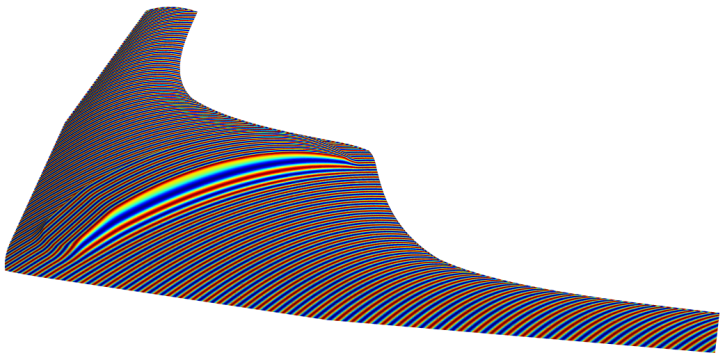


图6：一架飞机，$\kappa D = 603.2$。

• 方向性快速多极子法中的 S2M、M2M、M2L、L2L 和 L2T 平移矩阵可直接用于我们的基于曲波的方法。由于可以采用各种构造核的低秩近似的技术来计算平移矩阵，因此可以轻松开发出我们基于曲波的方法的各种变体。

• 数值结果表明，我们的方法对于具有单层、双层、伴随层和四极子层的表面分布点表现良好，因此同样适用于基于边界积分方程的波分析。

我们基于曲波的方法是对方向性快速多极子法进行变换而构建的。它也可以看作是将基于小波的方法推广至高频情形，并可作为一种新的宽带快速算法。本工作有望为未来与新型快速直接求解器相关的研究奠定基础，并

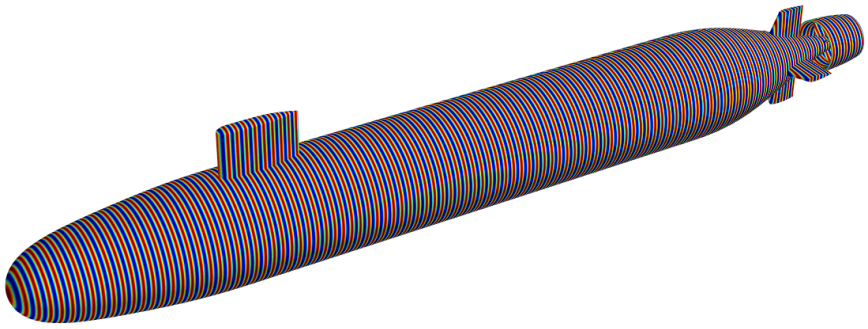


图7：一艘潜艇，配有 $\kappa D = 684.3$。

表6：飞机使用单层核的结果。

ε_0	κD	N	时间开销（秒）				内存开销（MB）			ε_a
			T_c	T_m	T_p	T_t	M_Q	M_m	M_t	
1e-3	75.4	22,992	17	26	<1	45	155	308	565	2.0e-3
1e-3	150.8	88,608	114	107	2	226	1,026	1,738	3,024	1.4e-3
1e-3	301.6	350,388	763	501	25	1,305	6,547	8,180	16,121	1.7e-3
1e-3	603.2	1,401,348	3,920	2,035	99	6,139	35,612	34,059	74,600	1.7e-3
1e-6	75.4	22,992	149	283	2	438	614	2,557	3,454	9.5e-7
1e-6	150.8	88,608	1,091	1,370	9	2,481	4,708	13,770	20,157	8.9e-7
1e-6	301.6	350,388	6,570	5,910	82	12,603	30,559	64,361	102,260	1.2e-6

用于高频问题的高效预条件子。

致谢

本工作得到国家自然科学基金委员会资助，项目编号为12101064。作者还非常感谢与Lihua Wen教授、Jinyou Xiao、Junjie Rong等人的宝贵讨论。

参考文献

[1] Stephen Kirkup。《声学中的边界元法》。Integrated Sound Software，1998。[2] Yanchuang Cao、Lihua Wen、Jinyou Xiao 和 Yijun Liu。基于 Burton-Miller公式的大规模声学问题快速方向性边界元法。《Engineering Analysis with Boundary Elements》，50：47–58，2015。[3] Weng Cho Chew 和 Li Jun Jiang。大规模计算概述：过去、现在与未来。《Proceedings of the IEEE》，101(2)：227–241，2013。

表7：采用单层核的潜艇结果。

ε_0	κD	N	时间开销（秒）				内存开销（MB）			ε_{a}
			T_{c}	T_{m}	T_{p}	T_{t}	M_{Q}	M_{m}	M_{t}	
1e-3	85.5	21,348	12	25	<1	38	98	301	498	6.8e-4
1e-3	171.1	84,204	127	111	2	243	1,060	1,556	2,887	1.0e-3
1e-3	342.1	330,600	770	459	13	1,258	6,493	7,349	15,477	1.1e-3
1e-3	684.3	1,342,260	4,435	1,911	98	6,527	39,701	29,105	76,253	2.4e-3
1e-6	85.5	21,348	92	238	1	335	327	2,179	2,668	7.4e-7
1e-6	171.1	84,204	1,101	1,288	9	2,407	4,818	12,903	19,489	1.0e-6
1e-6	342.1	330,600	7,018	5,354	79	12,503	32,125	59,739	101,496	1.1e-6

[4] Zhaoneng Jiang、Xuguang Qiao、Wenfei Yin、Xiaoyan Zhao、Xiaofeng Xuan 和 Ting Wan。用于电磁问题分析的一种条件良好的多层方向性简稀疏方法。《Engineering Analysis with Boundary Elements》，99：244–247，2019。[5] Yanchuang Cao、Jinyou Xiao、Lihua Wen 和 Zheng Wang。一种用于宽带多域弹性动力学分析的快速方向边界元法。《Engineering Analysis with Boundary Elements》，108：210–216，2019。[6] St´ephanie Chaillat 和 Marc Bonnet。三维时谐弹性动力学快速多极子加速边界元法的最新进展。《Wave Motion》，50(7)：1090–1104，2013。[7] Yijun Liu。声波问题的边界元法。《Engineering Analysis with Boundary Elements》，107：53–62，2019。[8] Fei Liu 和 Lexing Ying。稀疏化与扫掠：一种用于Lippmann–Schwinger方程的高效预条件子。《SIAM Journal on Scientific Computing》，40(2)：B379–B404，2018。[9] Bj¨orn Engquist 和 Lexing Ying。亥姆霍兹方程的扫掠预条件子：层次矩阵表示。《Communications on Pure and Applied Mathematics》，64：697–735，2011。[10] V. Rokhlin。经典位势理论积分方程的快速求解。《Journal of Computational Physics》，60：187–207，1985。[11] L. Greengard 和 V. Rokhlin。一种用于粒子模拟的快速算法。《Journal of Computational Physics》，73(2)：325–348，1987。[12] D. Zorin L. Ying、G. Biros。一种适用于二维和三维的核无关自适应快速多极子算法。《Journal of Computational Physics》，196(2)：591–626，2004。[13] William Fong 和 Eric Darve。黑箱快速多极子方法。《Journal of Computational Physics》，228(23)：8712–8725，2009。[14] Josh Barnes 和 Piet Hut。一种层次化 O(N logN) 力计算算法。《Nature》，324：446–449，1986。[15] W. Hackbusch 和 S. B¨orm。通过插值近似积分算子的 H^2-矩阵。《Applied Numerical Mathematics》，43：129–143，2002。[16] Mario Bebendorf。边界元矩阵的近似。《Numer Math》，86(4)：565–589，2000。[17] M. Bebendorf 和 R. Venn。根据非局部算子的元素构造嵌套基近似。《Numerische Mathematik》，121(4)：609–635，2012。[18] Vaishnavi Gujjula 和 Sivaram Ambikasaran。一种新的嵌套交叉近似。arXiv：2203.14832，2022。[19] C C Lu 和 W C Chew。求解混合积分方程的快速算法。《IEE Proc. H》，140：455–460，1993。[20] V. Rokhlin。三维亥姆霍兹方程平移算子的对角形式。《Applied and Computational Harmonic Analysis》，1：82–93，1993。[21] L. Greengard 和 V. Rokhlin。一种用于三维拉普拉斯方程的快速多极子方法新版本。《Acta Numerica》，6(1)：229–269，1997。

[22] Eric Darve。《快速多极子方法：数值实现》。Journal of Computational Physics，160(1):195–240，2000。[23] N Nishimura。《快速多极子加速边界积分方程方法》。Applied Mechanics Reviews，55(4):299–324，2002。[24] R Coifman、V Rokhlin 和 S Wandzura。《波动方程的快速多极子方法：一种通俗易懂的方案》。IEEE Antennas and Propagation Magazine，35:7–12，1993。[25] B Dembart 和 E Yip。《麦克斯韦方程快速多极子方法的精度》。IEEE Comput. Sci. Eng.，5(3):48–56，1998。[26] Hongwei Cheng、William Y. Crutchfield、Zydrunas Gimbutas、Leslie F. Greengard、J. Frank Ethridge、Jingfang Huang、Vladimir Rokhlin、Norman Yarvin 和 Junsheng Zhao。《三维亥姆霍兹方程的宽频带快速多极子方法》。Journal of Computational Physics，216(1):300–325，2006。[27] Nail A. Gumerov 和 Ramani Duraiswami。《用于三维亥姆霍兹方程的宽带快速多极子加速边界元法》。Journal of the Acoustical Society of America，125(1):191–205，2009。[28] Bj¨orn Engquist 和 Lexing Ying。《振荡核的快速方向多层算法》。SIAM Journal on Scientific Computing，29(4):1710–1737，2007。[29] Matthias Messner、Martin Schanz 和 Eric Darve。《基于切比雪夫插值的振荡核快速方向多层求和》。Journal of Computational Physics，231(4):1175–1196，2012。[30] Austin R. Benson、Jack Poulson、Kenneth Tran、Bj¨orn Engquist 和 Lexing Ying。《并行方向快速多极子方法》。SIAM Journal of Scientific Computing，36(4):C335–C352，2014。[31] Mario Bebendorf、Christian Kuske 和 Raoul Venn。《亥姆霍兹问题的宽带嵌套交叉近似》。Numerische Mathematik，130(1):1–34，2015。[32] Vaishnavi Gujjula 和 Sivaram Ambikasaran。《一种新的方向代数快速多极子方法迭代求解器：采用 HODLR 预条件子加速 Lippmann–Schwinger方程求解》。Commun. Comput. Phys.，32:1061–1093，2022。[33] Sivaram Ambikasaran 和 Eric Darve。《逆快速多极子方法》。arXiv: 1407.1572v1，2014。[34] Pieter Coulier、Hadi Pouransari 和 Eric Darve。《逆快速多极子方法：将快速近似直接求解器用作稠密线性系统的预条件子》。Computer Science，39(3):A761–A796，2017。[35] G. Beylkin、R. Coifman 和 V. Rokhlin。《快速小波变换与数值算法 I》。Communications on Pure and Applied Mathematics，44(2):141–183，1991。[36] Johannes Tausch 和 Jacob White。《用于复杂几何中边界积分算子稀疏表示的多尺度基》。SIAM J. Sci. Comput.，24(5):1610–1629，2003。[37] Johannes Tausch。《以变阶小波方法对非标准形式的层势进行稀疏表示》。Journal of Numerical Mathematics，12(3):233–254，2004。[38] Jinyou Xiao、Johannes Tausch 和 Lihua Wen。《小波 Galerkin 边界元法中的近似矩矩阵分解》。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，197:4000–4006，2008。[39] Daan Huybrechs、Jo Simoens 和 Stefan Vandewalle。《关于振荡核积分方程中小波矩阵压缩对波数的依赖性的说明》。《计算与应用数学杂志》，172:233–246，2004。[40] Stuart C. Hawkins、Ke Chen 和 Paul J. Harris。《波数对亥姆霍兹方程小波边界元法压缩的影响》。International Journal of Numerical Analysis and Modeling，4(1):48–62，2007。[41] Jinyou Xiao、Lihua Wen 和 Johannes Tausch。《关于小波 Galerkin 边界元法中的快速矩阵-向量乘法》。Engineering Analysis with Boundary Elements，33(2):159–167，2009。[42] Jinyou Xiao 和 Johannes Tausch。《用于直接边界元法的快速小波-多极子方法》。Engineering Analysis with Boundary Elements，34:673–679，2010。[43] Emmanuel J. Cand`es 和 David L. Donoho。《曲波：一种对具有边缘的对象极为有效的非自适应表示》，第105–120页。纳什维尔：范德比尔特大学出版社，2000。[44] Emmanuel Cand`es、Laurent Demanet、David Donoho 和 Lexing Ying。《快速离散曲波变换》。Multiscale Model.

Simul.，5(3):861–899，2006。[45] Jianwei Ma 和 Gerlind Plonka。《曲波变换：近期应用综述》。*IEEE Signal Processing Magazine*，27(2):118–133，2010。[46] Emmanuel J. Cand`es 和 Laurent Demanet。《波传播子的曲波表示具有最优稀疏性》。*Communica-tions on Pure andAppliedMathematics*，58:1472–1528，2005。[47] Jinyou Xiao 和 Wenjing Ye。《基于直接积分公式的斯托克斯流大规模问题小波边界元法》。《国际工程数值方法杂志》，88:693–714，2011。[48] Jinyou Xiao、Johannes Tausch 和 Yucai Hu。《小波边界元矩阵的后验压缩》。*Comput.Mech.*，44:705–715，2009。[49] Bj¨orn Engquist 和 Lexing Ying。《亥姆霍兹核的快速方向算法》。《计算与应用数学杂志》，234(6):1851–1859，2010。