arXiv:2303.03899v1 [math.AP] 7 Mar 2023

关于表面电迁移方程解的唯一性

Lucrezia Cossetti[1], Luca Fanelli[1,2] 和 Felipe Linares[3]

[1] *Ikerbasque & Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, UPV/EHU, Aptdo. 644,* 48080, *Bilbao, Spain; lucrezia.cossetti@ehu.eus; luca.fanelli@ehu.es*[2] *BCAM-Basque Center for Applied Mathematics, Mazarredo, 14 E48009 Bilbao, Spain*[3] *IMPA, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro 22460-320, Brazil; linares@impa.br*

2023年3月7日

摘要

本文研究表面电迁移（SEM）方程解的唯一性。该方程是等离子体物理中较经典的扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程在加入非局部扰动项后的推广。我们将证明，若两个解之差在两个不同的时刻具有足够强的空间衰减，则这两个解在整个时间区间上重合。

1 引言

本文研究了表面电迁移（SEM）方程初值问题的解的唯一性

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u + \frac{1}{2}(u\partial_x u + \partial_x u \partial_x \phi + \partial_y u \partial_y \phi) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, t \in [0,1], \\ \Delta \phi = \partial_x u. \end{cases} \tag{1}$$

其中， $u = u(x,y,t)$ 和 $\phi = \phi(x,y,t)$ 是实值函数， Δ 表示二维拉普拉斯算子。

近几十年来，人们对表面电迁移（SEM）现象进行了广泛研究 [2,18,19,34]其描述如下：设恒定的单向电流通过固态金属薄膜（纳米导体），载流电子与薄膜表面金属原子之间的碰撞会导致这些原子发生漂移。这种效应会引起固态金属表面的运动和/或变形，这一响应通常被称为表面电迁移（SEM）现象。在 [3] 中表明，在所施加电流较高的极限情况下，即将表面电迁移效应视为原子运动的主要原因时，对于小振幅和大宽度波，所提及的表面扰动的传播可由系统（1）有效描述。更具体地说，在（1）中， u 起表面位移的作用，而 ϕ 用于表示导体表面的静电势。

若将 ϕ 在（1）中设为零，则系统（1）中的第一个方程可化为著名的 Zakharov-Kuznetsov（ZK）方程

$$\partial_t u + \partial_x \Delta u + u\partial_x u = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, t \in [0,1]. \tag{2}$$

因此，系统（1）与 Zakharov–Kuznetsov 方程的区别在于它还耦合了关于 ϕ. 的势方程。

2020 Mathematics Subject Classification: 35A02, 35M10, 35Q74.Keywords. 表面电迁移方程，非局部非线性，解的唯一性，Carleman估计

Linares、Pastor 和 Scialom 在 [25] 中研究了表面电迁移方程（1）对应的初值问题。在这篇论文中，他们建立了 $H^s(\mathbb{R}^2)$ $s > 1/2.$ 的局部适定性理论。他们的结果借助了已有的 Zakharov–Kuznetsov 方程（2）的局部适定性理论，而该理论近年来取得了显著进展。关于 Zakharov–Kuznetsov 方程的首个结果由 Faminskii 给出 [12]，他证明了 $H^s(\mathbb{R}^2)$ $s \geq 1.$ 中的局部适定性。后来，在 [23], 中，Linares 和 Pastor 证明了类似结果，并将 Sobolev 指数降低到 $s \geq 3/4.$ 。Gr¨unrock 和 Herr 在 [17] 中，以及 Molinet 和 Pilot 在 [30] 中分别取得了进一步改进。在这些工作中，作者将 Sobolev 指数进一步降低至 $s > 1/2.$。最近，Kinoshita [21] 在 $H^s(\mathbb{R}^2)$ $s > -1/4$ 中建立了尖锐的局部适定性结果（另见 [20, 24, 30, 33]，其中给出了高维情形下的相应结果）。

ZK 方程解的渐近行为已在 [8, 10, 13–15, 22, 28, 35] 中得到研究。正则性传播已在 [26, 27, 29] 中得到考察。另请参阅近期综述 [31]。另一个引起色散方程研究群体浓厚兴趣的方面是唯一延拓原理。粗略地说，对于色散方程证明唯一延拓原理，意味着给出模型的两个解在两个不同时间的差值 $u_1 - u_2$ 的（空间）衰减的充分条件，从而保证这些解在整个时间区间内重合。关于 ZK 方程，Bustamante、Isaza 和 Mej´ıa 已在 [5] 中研究了这一主题（针对二维情形），随后本文作者在 [9] 中对此进行了研究。之后，Bustamante、Jim´enez 和 Mej´ıa 在 [6] 中将 [5] 中发展的策略推广，用于在三维情形下建立 ZK 方程的唯一延拓原理。

在本文中，我们关注将这些唯一性结果推广到表面电迁移（SEM）方程（1）。在陈述主要结果之前，我们先将系统（1）方便地改写为单个方程：定义算子 $\mathcal{L} := (\Delta)^{-1}\partial_x$，则系统（1）等价于

$$\partial_t u + \partial_x \Delta u + \frac{1}{2}\Big(u\,\partial_x u + \partial_x u\,\partial_x \mathcal{L}(u) + \partial_y u\,\partial_y \mathcal{L}(u)\Big) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, t \in [0,1]. \tag{3}$$

我们的唯一性结果如下所述。

定理 1.1。假设对于某个小的 $\varepsilon > 0$

$$u_1, u_2 \in C\big([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1+x^2+y^2)^{4/3+\varepsilon} dxdy)\big) \cap C^1\big([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2)\big),$$

是（3）的解。 则存在一个普适常数 $a_0 > 0$，使得如果对于某个 $a > a_0$

$$u_1(0) - u_2(0), u_1(1) - u_2(1) \in L^2\big(e^{a(x^2+y^2)^{3/4}} dxdy\big), \tag{4}$$

则 $u_1 = u_2.$

定理1.1 的证明遵循 [11] 为 KdV 方程所发展出的方案，并基于两类估计的比较：一类是下界，它是对适当紧支撑函数应用 Carleman 估计所得的结果；另一类是 H^2 范数的上界，该上界由数据满足式（4）所假设的指数衰减推出。我们强调，无论是下界还是上界，都需要调整或推广标准 Zakharov–Kuznetsov 方程的已有结果，其中还需要一种更合适的 Carleman 估计。此外，处理 SEM 模型特有的新型非局部项时还会遇到额外困难。

预备知识与记号

本节首先更明确地写出式（ $\partial_x \mathcal{L}$ 和 $\partial_y \mathcal{L}$, （3）中的非局部项。可以看出，它们本质上是 Riesz 变换的平方。事实上，记（ξ, η）为与物理空间变量（x, y）对应的傅里叶变量，则有

$$\mathcal{F}(\partial_x \mathcal{L} g)(\xi,\eta) = \frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}\mathcal{F}(g)(\xi,\eta), \qquad \mathcal{F}(\partial_y \mathcal{L} g)(\xi,\eta) = \frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}\mathcal{F}(g)(\xi,\eta). \tag{5}$$

我们回顾一下， Riesz变换 $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_d)$ 对任意 $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 在傅里叶空间中的定义为

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_j g)(\zeta) = -i\frac{\zeta_j}{|\zeta|}\mathcal{F}(g)(\zeta), \qquad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{6}$$

因此，根据定义（5）和（6），可知算子 $\partial_x\mathcal{L}$ 和 $\partial_y\mathcal{L}$ 可以用二维黎斯变换 $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_x,\ \mathcal{R}_y)$ 更简洁地表示为

$$\partial_x\mathcal{L}=-\mathcal{R}_x^2,\qquad \partial_y\mathcal{L}=-\mathcal{R}_x\mathcal{R}_y. \tag{7}$$

为后续讨论，我们需要权重的穆肯豪普特类 $A_p(\mathbb{R}^d)$ 的定义。

定义 1.1。 设 $1<p<\infty$，且 w 是一个可测的非负函数。我们称 $w\in A_p(\mathbb{R}^d)$ if

$$Q_p(w):=\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\le C, \tag{8}$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的任意一个球，且 C 是一个与 B. 无关的常数

我们回顾关于 Riesz 变换的有界性及加权有界性的以下结果（见 [1,7,32]）。

引理 1.1 （Riesz 变换的有界性）。 设 $1<p<\infty$ 且 p' 满足 $1/p+1/p'=1$，并设 w 是 A_p（$\mathbb{R}^d$）类中的一个权函数（见定义 （8））。那么，对任意 $j=1,\ 2.....,\ d$ 以下关于 Riesz 变换算子范数的估计 $\mathcal{R}_j$ 成立:

$$\|\mathcal{R}_j\|_{L^p\to L^p}=\cot\left(\frac{\pi}{2p^*}\right),\qquad p^*:=\max\{p,p'\}, \tag{9}$$

$$\|\mathcal{R}_j\|_{L^p(w)\to L^p(w)}\le c_{p,d}Q_p(w)^r,\qquad r:=\max\{1,p'/p\} \tag{10}$$

此外，这两个界都是锐利的，即所建立的界是最佳可能界。

2 定理1.1的证明

本节旨在证明定理1.1。与证明唯一延拓结果时的常见做法一样，这将通过比较差值的适当下界和上界来推出$v:=u_1-u_2$ 两个解 $u_1,\ u_2$ 对于（3）。研究 v 可将证明方程（3）解唯一性的问题，转化为证明与 v相关的方程的解平凡的问题，即

$$\partial_t v+\partial_x\Delta v+\frac{1}{2}\big(u_1\partial_x v+\partial_x u_2 v+\partial_x u_1\partial_x\mathcal{L}(v)+\partial_x\mathcal{L}(u_2)\partial_x v+\partial_y u_1\partial_y\mathcal{L}(v)+\partial_y\mathcal{L}(u_2)\partial_y v\big)=0. \tag{11}$$

下面我们将考虑一个比（11）更一般的问题，即

$$\partial_t v+\partial_x\Delta v+a_1(x,y,t)\partial_x v+b_1(x,y,t)\partial_y v+a_0(x,y,t)\partial_x\mathcal{L}(v)+b_0(x,y,t)\partial_y\mathcal{L}(v)+c_0(x,y,t)v=0, \tag{12}$$

对于适当的变量系数 $a_1,\ b_1,\ a_0,\ b_0$ 以及 c_0. 显然，（11）是（12）的一个特例，这一点只需令 $a_1=\frac{1}{2}($ $u_1+\partial_x\mathcal{L}(u_2))$ $b_1=\frac{1}{2}\partial_y\mathcal{L}(u_2)$ $a_0=\frac{1}{2}\partial_x u_1,\ \ b_0=\frac{1}{2}\partial_y u_1$ 以及 $c_0=\frac{1}{2}\partial_x u_2$.

我们首先明确引入要从下方和上方估计的量，即

$$A_R(v):=\left(\int_0^1\int_{Q_R}(|v|^2+|\partial_x v|^2+|\partial_y v|^2+|\partial_x\partial_y v|^2+|\Delta v|^2)dxdydt\right)^{1/2}, \tag{13}$$

其中 $Q_R:=\{(x,y):\ R-1\le\sqrt{x^2+y^2}\le R\}$.

下界和上界的陈述见以下两个定理。

定理 2.1（下界）。设 $v\in C([0,1];\ H^3(\mathbb{R}^2))\cap C^1([0,1];\ L^2(\mathbb{R}^2))$ 是方程 (12) 的一个解，其系数为a_0、 a_1、 b_0、 b_1、 $c_0\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$。假设存在一个正的常数 A，使得

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}(|v|^2+|\partial_x v|^2+|\partial_y v|^2+|\Delta v|^2)\,dxdydt\le A^2. \tag{14}$$

设 $\delta > 0$, $r \in (0, 1/2)$ 且 $Q := \{(x, y, t) : \sqrt{x^2 + y^2} \le 1, \ t \in [r, 1-r]\}$ 并假设 $\|v\|_{L^2(Q)} > \delta$.

~~那么存在取决于 A、$\|a_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ $\|b_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ 以及 $\|c_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ 的正的常数 R_0、c_0、c_1，使得对于 $R \ge R_0$

$$A_R(v) \ge c_0 e^{-c_1 R^{3/2}}. \tag{15}$$

定理 2.2 (上界)。设 $v \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2))$ 是 (12) 的一个解，其系数 a_1, b_1 和 c_0 满足 a_1, $b_1 \in L^2_x L^\infty_{yt} \cap L^1_x L^\infty_{yt}$ 和 $c_0 \in L^\infty \cap L^2_x L^\infty_{yt}$，分别成立。于是存在正的常数 c 和 R_0，使得若对于某个 $a > 0$

$$v(0), v(1) \in L^2(e^{a(x^2+y^2)^{3/4}}\, dxdy),$$

then

$$A_R(v) \le c e^{-\frac{a}{16(28)^{3/2}} R^{3/2}} \tag{16}$$

对 $R \ge R_0$. 成立

在证明定理 2.1 和定理 2.2 之前，我们说明定理 1.1 如何轻易地由这两个结果推导得出。

定理 1.1 的证明。我们用反证法。假设 $v := u_1 - u_2 \neq 0$. 那么经过适当的平移、伸缩和乘以一个常数后，我们可以假设 v 满足定理 2.1 的假设。此外，可以看出，固定 $a_1 = \frac{1}{2}(u_1 + \partial_x \mathcal{L}(u_2))$ $b_1 = \frac{1}{2}\partial_y \mathcal{L}(u_2)$ 和 $c_0 = \frac{1}{2}\partial_x u_2$ 后，便有 $a_1, b_1 \in L^2_x L^\infty_{yt} \cap L^1_x L^\infty_{yt}$ 以及 $c_0 \in L^\infty \cap L^2_x L^\infty_{yt}$. 对于不涉及非局部算子 $\mathcal{L}$. 的项，这可仿照 [5] （另见 [9]）证明。对于涉及 $\mathcal{L}$ 的项，只需利用关系式 (7) 以及 Riesz变换关于 L^2 权函数的有界性 (10)。因此，定理 2.2 的假设也得以满足。于是，结合 (15) 和 (16)，当 R 充分大时，

$$c_0 e^{c_1 R^{3/2}} \le A_R(v) \le c e^{-\frac{a}{16(28)^{3/2}} R^{3/2}}.$$

最后，假设 $a > a_0 := 16(28)^{3/2} c_1$ 并令 R 趋于无穷大，便得到矛盾。因此 $v = 0$ 且定理 1.1 得证。 □

2.1 下界：定理 2.1 的证明

证明下界的出发点 在定理2.1 的证明中，是对线性算 or

$$P = \partial_t + \partial_x \Delta + a_1(x,y,t)\partial_x + b_1(x,y,t)\partial_y + c_0(x,y,t),$$

子 $a_1, b_1 (c_0 \in L^\infty)$ 的 Carleman 估计。更确切地说，我们希望证明以下结果。

引理 2.1. 设 φ: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，并令 $D := \mathbb{R}^2 \times [0,1]$. 我们定义

$$\phi(x,y,t) := \Big(\frac{x}{R} + \varphi(t)\Big)^2 + \frac{y^2}{R^2}. \tag{17}$$

那么存在常数 $c > 0$, $R_0 = R_0(\|a_1\|_{L^\infty}, \|b_1\|_{L^\infty}, \|c_0\|_{L^\infty}) > 1$ 和 $\overline{C} = \max\{\|\varphi'\|_{L^\infty}, \|\varphi''\|_{L^\infty}, 1\} > 0$，使得不等式

$$\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi} g\|_{L^2(D)} + \frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\alpha\phi}\partial_x g\|_{L^2(D)} + \frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\alpha\phi}\partial_y g\|_{L^2(D)} \le c\|e^{\alpha\phi}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2 + a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_0) g\|_{L^2(D)} \tag{18}$$

当 $\alpha \ge \overline{C} R^{3/2}$, $R \ge R_0$ 和 $g \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$ 在集合 $\{(x,y,t): |\frac{x}{R} + \varphi(t)| \ge 1\}$. 中紧支撑时成立

通常，若已知2.1 中关于完整算子 P 的 Carleman 估计，则当存在关于 P的主部$\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2$的类似 Carleman 估计时，便可轻易证明引理2.1 。更确切地说，证明引理 2.1 需要以下结果。

引理 2.2。设 $\varphi\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数，并设 $D\colon\ \mathbb{R}^2\times[0,1]$. 假设 $R>1$，并令 ϕ 如(17)中所述。

Then 中存在常数 $c>0$ 和 $\overline{C}=\max\{\|\varphi'\|_{L^\infty},\|\varphi''\|_{L^\infty},1\}>0$，使得不等式

$$\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)}+\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\alpha\phi}\partial_x g\|_{L^2(D)}+\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\alpha\phi}\partial_y g\|_{L^2(D)}\le c\|e^{\alpha\phi}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2)g\|_{L^2(D)}\tag{19}$$

若 $\alpha\ge\overline{C}R^{3/2}$ 和 $g\in C([0,1];\,H^3(\mathbb{R}^2))\cap C^1([0,1];\,L^2(\mathbb{R}^2))$ 在 $\{(x,y,t)\colon\ |\frac{x}{R}+\varphi(t)|\ge 1\}$. 中具有紧支撑，则该不等式成立

备注 2.1. 与 (19) 类似的估计此前已在 [5, 引理 31]. 中得到证明。在他们的版本中，左侧依赖于 ∂_y 的项并未出现（而且无法通过他们的证明得到）。正如下文将要看到的，为了证明完整算子 P 的引理 P（注意，它包含一个涉及 ∂_y的低阶项）对应的估计 (19)，我们需要采用更一般形式 (19) 的 Carleman 估计。由于 (19) 的证明与 [5, 式 (3.2)] 中的类似估计略有不同，因此我们决定在下文附录 2.2中给出详细证明。

现在，我们说明如何从引理 2.2中的估计式（19）推出引理 2.1中的估计式（18）

引理 *2.1* 的证明。由估计式（19），将 P 的低阶项加上再减去，即 $a_1\partial_x+b_1\partial_y+c_0$，并利用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)}+\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\alpha\phi}\partial_x g\|_{L^2(D)}+\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\alpha\phi}\partial_y g\|_{L^2(D)}&\\ \lesssim_c\|e^{\alpha\phi}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2+a_1\partial_x+b_1\partial_y+c_0)g\|_{L^2(D)}&\\ +\|a_1\|_{L^\infty(D)}\|e^{\alpha\phi}\partial_x g\|_{L^2(D)}+\|b_1\|_{L^\infty(D)}\|e^{\alpha\phi}\partial_y g\|_{L^2(D)}+\|c_0\|_{L^\infty(D)}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)},&\end{aligned}$$

这里用符号 $\lesssim_c$ 代替 $\le c$，而 c 与式（19）中的含义相同。在假设 $\alpha\ge\overline{C}R^{3/2}$ 下，比值 $\alpha^{3/2}/R^2$ 和 $\alpha^{5/2}/R^3$ 按 正分数幂增长 R。因此，只要 R 取充分大，即 $R\ge R_0$，其中 R_0 是一个依赖于 -范数的常数 a_1、b_1 和 c_0，那么右端最后三项就可以由左端的相应项吸收，从而得到所需的估计。

□

现在我们可以证明定理 2.1的下界。

定理 2.1 的证明。与 [5] 中一样，我们引入函数 $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$，使得 $\theta=1$ 若 $\sqrt{x^2+y^2}\le R-1$，$\theta=0$ 若 $\sqrt{x^2+y^2}\ge R.$。令 $\mu\in C^\infty(\mathbb{R})$ 为递增函数，满足 $\mu=0$ 属于 $(-\infty,2]$，且 $\mu=1$ 属于 $[3,\infty)$。我们取 $\varphi\in C^\infty([0,1])$，使得 $\varphi=0$ 属于 $[0,r/2]\cup[1-r/2,1]$，$\varphi=4$ 属于 $[r,1-r]$，φ 关于 $[r/2,r]$ 递增，且 φ 关于 $[1-r,1-r/2].$ 递减。我们想将引理 2.1 应用于函数

$$g(x,y,t):=\theta(x,y)\mu\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)v(x,y,t),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,t\in[0,1],\tag{20}$$

其中 v 满足（12）。

不难验证，g 满足

$$(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2+a_1\partial_x+b_1\partial_y+c_0)g=\mu\theta(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2+a_1\partial_x+b_1\partial_y+c_0)v+F_1+F_2,$$

其中

$$F_1:=\mu\big[\partial_x(\Delta\theta)v+3\partial_x^2\theta\partial_x v+\partial_y^2\theta\partial_x v+2\partial_x\partial_y\theta\partial_y v+3\partial_x\theta\partial_x^2 v+2\partial_y\theta\partial_x\partial_y v+\partial_x\theta\partial_y^2 v+a_1\partial_x\theta v+b_1\partial_y\theta v\big]$$

and

$$\begin{aligned}F_2:=\big[\theta\partial_t\mu+3\partial_x^2\theta\partial_x\mu+3\partial_x\theta\partial_x^2\mu+\theta\partial_x^3\mu+\partial_y^2\theta\partial_x\mu+a_1\theta\partial_x\mu\big]v&\\ +[6\partial_x\theta\partial_x\mu+3\theta\partial_x^2\mu]\partial_x v+2\partial_y\theta\partial_x\mu\partial_y v+3\theta\partial_x\mu\partial_x^2 v+\theta\partial_x\mu\partial_y^2 v.&\end{aligned}$$

应用引理2.1于 g，并利用 v 满足（12），可得

$$\begin{aligned} c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)} &\le \|e^{\alpha\phi}\theta\mu(a_0\partial_x\mathcal{L}+b_0\partial_y\mathcal{L})v\|_{L^2(D)} + \|e^{\alpha\phi}F_1\|_{L^2(D)} + \|e^{\alpha\phi}F_2\|_{L^2(D)} \\ &\le \|a_0\|_{L^\infty(D)}\|e^{\alpha\phi}\theta\mu\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2(D)} + \|b_0\|_{L^\infty(D)}\|e^{\alpha\phi}\theta\mu\partial_y\mathcal{L}v\|_{L^2(D)} \\ &\quad + \|e^{\alpha\phi}F_1\|_{L^2(D)} + \|e^{\alpha\phi}F_2\|_{L^2(D)}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中，略微滥用一下记号，我们将 c 称为常数 c^{-1}，并且利用了 $a_0, b_0 \in L^\infty(D)$。我们首先要估计涉及 F_1 和 F_2. 的项。关于 F_1，可以看出，F_1 中的所有项都含有 θ. 的导数。这意味着 F_1 的支撑位于集合 $Q_R \times [0,1]$中，其中 Q_R 是环域 $Q_R := \{(x,y)\colon R-1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le R\}$.。在 $Q_R \times [0,1]$ 中，有 $\phi(x,y,t) \le 25$，确实

$$\begin{aligned} \phi(x,y,t) &\le \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \varphi(t)^2 + 2|\varphi(t)|\sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}} \\ &\le 25. \end{aligned}$$

至于 F_2，由于其中出现了 μ 的导数，其支撑位于集合 $\{(x,y,t)\colon 2 \le |\frac{x}{R}+\varphi(t)| \le 3, t \in [0,1]\}$.。由此可知，$\phi(x,y,t) \le 10$（回忆一下，函数 θ 的支撑位于 $x^2+y^2 \le R^2$中）。利用这些事实可得

$$\|e^{\alpha\phi}F_1\|_{L^2(D)} \le c_1 e^{25\alpha} A_R(v), \quad \text{and} \quad \|e^{\alpha\phi}F_2\|_{L^2(D)} \le c_2 e^{10\alpha} A, \tag{22}$$

其中 $A_R(v)$ 定义见 (13)，且 A 如 (14) 中所述。

现在我们要估计涉及非局部算子的项 $\partial_x\mathcal{L}$ 和 $\partial_y\mathcal{L}$. 。我们将证明，上述算子本质上是 Riesz 变换的平方（见 (7)），在适当的加权 L^2 空间中是有界算子。具体而言，我们证明了以下引理。

引理 2.3. 设 ϕ 如 (17)所示，且令 θ 和 μ 如定理 2.1的证明中所述。则以下估计 *es*

$$\|e^{\alpha\phi}\theta\mu\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2(D)} \le \|e^{\alpha\phi}\theta\mu v\|_{L^2(D)}, \tag{23}$$

$$\|e^{\alpha\phi}\theta\mu\partial_y\mathcal{L}v\|_{L^2(D)} \le \|e^{\alpha\phi}\theta\mu v\|_{L^2(D)} \tag{24}$$

成立。

为避免使论述冗长，我们将在本节末尾给出该引理的证明。现在将估计式 (22)、(23) 和 (24) 代入 (21)，并结合 (20)，得到

$$c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)} \le \|a_0\|_{L^\infty(D)}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)} + \|b_0\|_{L^\infty(D)}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)} + c_1e^{25\alpha}A_R(v) + c_2e^{10\alpha}A,$$

并且由于 $\alpha^{5/2}/R^3$ 以 R的正幂增长，右侧的前两项可以吸收到左侧，从而得到

$$c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)} \le +c_1e^{25\alpha}A_R(v) + c_2e^{10\alpha}A.$$

由于 $g = v$ 在 Q 中，我们得到

$$\begin{aligned} c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(D)} \ge c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}g\|_{L^2(Q)} &= c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha\phi}v\|_{L^2(Q)} \\ \ge c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}e^{10\alpha}\|v\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了在 Q 中，当 $\phi \ge 10$ 足够大时，R. 成立。由前两个不等式，并利用 $\|v\|_{L^2(Q)} \ge \delta > 0$，再除以 $e^{10\alpha}$，可得

$$c\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\delta \le c_1e^{15\alpha}A_R(v) + c_2A.$$

取 $\alpha = \overline{C}R^{3/2}$，其中 $\overline{C}$ 如引理 2.1 所述，可得

$$c\overline{C}^{5/2}R^{3/4}\delta \le c_1 e^{15\overline{C}R^{3/2}} A_R(v) + c_2 A.$$

若我们取足够大的 R，则右端的第二项可以被左端的项吸收。因此，我们可以得出存在 $R_0 > 0$，使得

$$A_R(v) \ge Ce^{-15\overline{C}R^{3/2}}$$

对于 $R \ge R_0$. 成立。至此，证明完成。 □

正如预期的那样，我们现在给出引理 2.3 的证明。

引理 *2.3* 的证明。我们将具体说明如何得到（23），估计式（24）可以类似地证明。取$f := e^{-\alpha\phi}$， ε， $\delta > 0$ 可得

$$\begin{aligned}\|e^{\alpha\phi}\theta\mu\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2(D)} &\\ \le \|e^{\alpha\phi}\ (\theta+\varepsilon f)\ \ (\mu+\delta)\ \partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2\ (D)}\ &+\delta\|e^{\alpha\phi}\theta\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2\ (D)}\ +\varepsilon\|\mu\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2\ (D)}\ +\varepsilon\delta\|\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2\ (D)}\ .\end{aligned} \tag{25}$$

我们只需估计右端的第一项。事实上，其余各范数均有上界 $\|\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2(D)}$ 而后者又有上界 $\|v\|_{L^2(D)}$ (这可由 (7) 和 (9) 得出)。因此，当 ε 和 δ 趋于零时，其余各项均可忽略。

回到 $\|e^{\alpha\phi}(\theta+\varepsilon f)(\mu+\delta)\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2(D)}$，回想关系式 (7)，我们要证明 $w := e^{\alpha\phi}(\theta+\varepsilon f)(\mu+\delta) \in A_2(\mathbb{R}^2)$, 从而由引理 1.1 得出该界

$$\|e^{\alpha\phi}(\theta+\varepsilon f)(\mu+\delta)\partial_x\mathcal{L}v\|_{L^2(D)} \le \|e^{\alpha\phi}(\theta+\varepsilon f)(\mu+\delta)v\|_{L^2(D)}. \tag{26}$$

我们区分位于 θ 的支撑内和支撑外的情形。

情形 $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2} \le 1$。此时，以下不等式链成立:

$$w = e^{\alpha\phi}\theta(\mu+\delta) + \varepsilon(\mu+\delta) \le e^{2\alpha(1+\|\phi\|^2_{L^\infty})}(1+\delta) + \varepsilon(1+\delta),$$

and

$$w \ge e^{\alpha\phi}\varepsilon f(\mu+\delta) \ge \varepsilon\delta.$$

情形 $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2} \ge 1$。此时，由于 $\theta = 0$，有 $w = \varepsilon(\mu+\delta)$。

利用这些 估计，我们想证明 $w \in A_2(\mathbb{R}^2)$。换言之，我们想要看到

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1}\right) \le C,$$

其中， B 是任意一个球 内的所有 $\mathbb{R}^2$ 以及 C 是与 B 无关的常数（参见 (8)）。为此，对于任意一个球 B 于 $\mathbb{R}^2$ 中，我们引入 以下记号

$$B_i = B \cap \{(x,y)\colon \tfrac{x^2}{R^2}+\tfrac{y^2}{R^2} \le 1\}, \qquad \text{and} \qquad B_e = B \cap \{(x,y)\colon \tfrac{x^2}{R^2}+\tfrac{y^2}{R^2} \ge 1\},$$

因此 $B = B_i \cup B_e$. 现在

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1}\right) &= \frac{1}{|B|^2}\left(\int_{B_i} w + \int_{B_e} w\right)\left(\int_{B_i} w^{-1} + \int_{B_e} w^{-1}\right)\\ &\le \frac{1}{|B|^2}\left(|B_i|\left(e^{2\alpha(1+\|\phi\|^2_{L^\infty})}+\varepsilon\right)(1+\delta) + |B_e|\varepsilon(1+\delta)\right)\left(|B_i|\frac{1}{\varepsilon\delta} + |B_e|\frac{1}{\varepsilon\delta}\right)\\ &\le \frac{1}{|B|^2}(c|B|)\frac{|B|}{\varepsilon\delta}\\ &\le c_{\varepsilon,\delta},\end{aligned}$$

其中 $c_{\varepsilon,\ \delta}$ 不依赖于 B. 利用关系式（7）以及 $w \in A_2$（$\mathbb{R}^2$）这一事实，两次应用引理 1.1可得（26）。将估计（26）代入（25），并令 ε 和 δ 趋于零，即得（23）。 □

2.2 上界：定理2.2的证明

本节讨论定理2.2中上界的证明。起点是如下持续性衰减结果。

引理 2.4。设 $w \in C([0,1];\, H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1];\, L^2(\mathbb{R}^2))$，使得对于所有 $t \in [0,1]$，$w(t)$ 的支撑都包含于 $\mathbb{R}^2$ 的一个紧子集 K 中，并令 $D := \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.

假设 $c_0 \in L^\infty \cap L^2_x L^\infty_{yt}$ 和 $a_1, b_1 \in L^2_x L^\infty_{yt} \cap L^1_x L^\infty_{yt}$ 在这些空间中的范数都很小。则存在一个与集合 K 无关的 $c>0$，使得对于 $\beta \geq 1$ 和 $\lambda \geq 7\beta$，以下估计

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)} + \sum_{0<k+l\leq 2} \|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x^k\partial_y^l w\|_{L^\infty_x L^2_{yt}(D)} \\ \leq c\lambda^2\Big(\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big) \\ + c\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_y\partial_y^2 + a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_0)w\|_{L^1_t L^2_{xy}(D)\cap L^1_x L^2_{ty}(D)} \quad (27)\end{aligned}$$

成立。这里 J 是在傅里叶空间中定义的算子，形式为 $\mathcal{F}(Jg)(\xi,\eta) := (1+\xi^2+\eta^2)^{1/2}\mathcal{F}g(\xi,\eta)$，其中 (ξ,η) 是物理空间中变量 (x,y) 所对应的傅里叶变量。

前面的结果可由仅涉及算子主部的初步估计推出 P，即 $\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2$. 这些估计包含在以下引理中，该引理由 [5, 定理 1。2] 证明，并且是算子逆算子的有界性所带来的结果$\partial_t + \partial_x^3 + \partial_y\partial_x^2$.

引理 2.5。设 w 如引理2.4所述，并设 $D: = \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.

- *For $\lambda > 0$ and $\beta > 0$,*

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^\infty_t L^2_{xy}(D)} \leq \|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ + \|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_y\partial_x^2)w\|_{L^1_t L^2_{xy}(D)}. \quad (28)\end{aligned}$$

- 存在一个与 K 无关的 $c>0$，使得对于 $\beta \geq 1$ 和 $\lambda \geq 7\beta$,

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}Lw\|_{L^\infty_x L^2_{yt}(D)} \leq c\lambda^2\Big(\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big) \\ + c\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_y\partial_x^2)w\|_{L^1_x L^2_{yt}(D)}, \quad (29)\end{aligned}$$

其中 L 表示集合 $\{\partial_x, \partial_y, \partial_x^2, \partial_{xy}, \partial_y^2\}$. 中的任意算子

现在我们简要说明如何由引理2.4 推出引理2.5。

引理 2.4 的证明。由估计式（28），利用直接估计 $\|\cdot\|_{L^2(D)} \leq \|\cdot\|_{L^\infty_t L^2_{xy}(D)}$ 以及 $\|\|_{L^1_t L^2_{xy}(D)} \leq \|\cdot\|_{L^2(D)}$，在右端加上并减去算子 P 的低阶部分，并利用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)} \leq \|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ + \|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_y\partial_x^2 + a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_0)w\|_{L^1_t L^2_{xy}(D)} \\ + \|a_1\|_{L^2_x L^\infty_{ty}(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x w\|_{L^\infty_x L^2_{yt}(D)} + \|b_1\|_{L^2_x L^\infty_{yt}(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_y w\|_{L^\infty_x L^2_{yt}(D)} \\ + \|c_0\|_{L^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_w\|_{L^2(D)}.\end{aligned}$$

同样，由（29）可得

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}Lw\|_{L^\infty_x L^2_{yt}(D)} \leq c\lambda^2\Big(\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big) \\ + c\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_y\partial_x^2 + a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_0)w\|_{L^1_x L^2_{yt}(D)} \\ + c\|a_1\|_{L^1_x L^\infty_{yt}(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x w\|_{L^\infty_x L^2_{yt}(D)} + c\|b_1\|_{L^1_x L^\infty_{yt}(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_y w\|_{L^\infty_x L^2_{yt}(D)} \\ + c\|c_0\|_{L^2_x L^\infty_{yt}(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)}.\end{aligned}$$

将前面两个估计相加，得到

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)}+\sum_{0<k+l\le 2}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x^k\partial_y^l w\|_{L_x^\infty L_{yt}^2(D)}\\ \le c\lambda^2\Big(\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}+\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)\\ +c\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_y\partial_x^2+a_1\partial_x+b_1\partial_y+c_0)w\|_{L_1^tL_{xy}^2(D)\cap L_x^1L_{yt}^2(D)}\\ +c\|a_1\|_{L_x^2L_{yt^\infty(D)}\cap L_x^1L_{yt}^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x w\|_{L_x^\infty L_{yt}^2(D)}\\ +c\|b_1\|_{L_x^2L_{yt^\infty(D)}\cap L_x^1L_{yt}^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_y w\|_{L_x^\infty L_{yt}^2(D)}\\ +c\|c_0\|_{L^\infty(D)\cap L_x^2L_{yt}^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)}.\end{aligned}$$

最后，利用 a_1、b_1 和 c_0 在相应空间中的范数足够小，将前一个不等式右端的最后三项吸收到左端的相应项中，即可得到估计（27）。

□

现在我们可以证明定理2.2中的上界。

定理2.2的证明。对于 $R>3$，我们取 $N\in\mathbb{N}$，其中 $N>28R.$。我们定义$\phi_{R,N}:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ 使得 $0\le\phi_{R,N}\le 1$, $\phi_{R,N}=1$ 属于 $[R+1,N]$ 且 $\operatorname{supp}\phi_{R,N}\subset(R,N+1)$。我们引入辅助函数

$$w(t)(x,y):=\phi_{R,N}(\sqrt{x^2+y^2})v(t)(x,y),$$

其中 v 满足（12）。容易看出 w 满足

$$\begin{aligned}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2+a_1\partial_x+b_1\partial_y+c_0)w&=\phi_{R,N}(\partial_t+\partial_x^3\partial_x\partial_y^2+a_1\partial_x+b_1\partial_y+c_0)v+F\\&=-\phi_{R,N}\big(a_0\partial_x\mathcal{L}(v)+b_0\partial_y\mathcal{L}(v)\big)+F,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}F:=\big(\partial_x^3\phi_{R,N}+\partial_x\partial_y^2\phi_{R,N}+a_1\partial_x\phi+b_1\partial_y\phi\big)v+\big(3\partial_x^2\phi_{R,N}+\partial_y^2\phi_{R,N}\big)\partial_x v+2\partial_x\partial_y\phi_{R,N}\partial_y v\\ +3\partial_x\phi_{R,N}\partial_x^2 v+2\partial_y\phi_{R,N}\partial_x\partial_y v+\partial_x\phi_{R,N}\partial_y^2 v.\end{aligned}\tag{30}$$

现在我们希望将引理2.4 应用于 $w.$。为此，我们首先需要使 a_1、b_1 和 c_0 在相应空间中的范数较小（参见引理2.4）；然而，在定理2.2较宽泛的$\widetilde{\ }$假设下，这通常未必成立。因此，我们引入辅助函数$\phi_{R,N}$，使得$\phi_{R,N}\phi_{R,N}=\phi_{R,N}$以及 $\widetilde{a_1}:=a_1\phi_{R,N}$, $b_1:=b_1\phi_{R,N}$和 $\widetilde{c_0}:=c_0\phi_{R,N}$（以及 $\widetilde{a_0}:=a_0\phi_{R,N}$和 $b_0:=b_0\phi_{R,N}$）在 R 充分大时具有较小的范数。

容易证明

$$(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2+\widetilde{a_1}\partial_x+\widetilde{b_1}\partial_y+\widetilde{c_0})w=-\phi_{R,N}\big(\widetilde{a_0}\partial_x\mathcal{L}(v)+\widetilde{b_0}\partial_y\mathcal{L}(v)\big)+\widetilde{F},$$

$\widetilde{\ }$其中，F 的形式与 F 相同，但将 a_1 和 b_1 分别替换为 $\widetilde{a_1}$ 和 b_1.

现在我们可以应用引理 2.4，从而得到对于 $\beta\ge 1$ 和 $\lambda\ge 7\beta$，有

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)}+\sum_{0<k+l\le 2}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x^k\partial_y^l w\|_{L_x^\infty L_{yt}^2(D)}\\ \le c\lambda^2\Big(\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}+\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)\\ +c\|\widetilde{a_0}\|_{L^\infty(D)\cap L_x^2L_{yt}^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,N}\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}\\ +c\|\widetilde{b_0}\|_{L^\infty(D)\cap L_x^2L_{yt}^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,N}\partial_y\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}\\ +c\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\widetilde{F}\|_{L_t^1L_{xy}^2(D)\cap L_x^1L_{ty}^2(D)},\end{aligned}\tag{31}$$

其中我们使用了H¨older不等式

$$\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,N}(\widetilde{a_0}\partial_x\mathcal{L}(v)+\widetilde{b_0}\partial_y\mathcal{L}(v))\|_{L_t^1L_{xy}^2(D)\cap L_x^1L_{ty}^2(D)}$$
$$\leq \|\widetilde{a_0}\|_{L^\infty(D)\cap L_x^2L_{yt}^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,N}\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}+\|\widetilde{b_0}\|_{L^\infty(D)\cap L_x^2L_{yt}^\infty(D)}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,N}\partial_y\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}.$$

我们先考虑涉及非局部算子 $\partial_x\mathcal{L}$ 和 $\partial_y\mathcal{L}$. 。我们将明确说明如何处理$\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,\ N}\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}$；对应的 y 变量项可以用类似的方法估计。与上文引理 2.3 的证明一样，我们取一个辅助函数 $f:=e^{-(\lambda|x|+\beta|y|)}$ 并且 $\varepsilon>0$，并写作

$$\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,N}\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}\leq\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\phi_{R,N}+\varepsilon f)\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}+\varepsilon\|\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}. \tag{32}$$

利用 L^2-有界性 Riesz变换（见（9）可知，右端（32）中的最后一项是有限的，因此由于 $\varepsilon>0$. 的任意性，可以忽略。为了估计右端（32）中的第一项，我们希望证明权函数 $w:=e^{\lambda|x|+\beta|y|}\ (\phi_{R,\ N}+\varepsilon f)\ \in A_2\ (\mathbb{R}^2)$，从而由引理10中的界（1.1）得到

$$\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\phi_{R,N}+\varepsilon f)\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}\leq\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\phi_{R,N}+\varepsilon f)v\|_{L^2(D)}. \tag{33}$$

为证明这一点，与引理2.3的证明一样，我们区分处于ϕ_R的支撑N 内和处于其外的情形。

情形 $\sqrt{x^2+y^2}\in[R,N+1]$. 在此情形下，成立以下不等式链:

$$w=e^{\lambda|x|+\beta|y|}(\phi_{R,N}+\varepsilon f)\leq e^{(\lambda+\beta)(N+1)}+\varepsilon$$

and

$$w\geq\varepsilon.$$

情形 $\sqrt{x^2+y^2}\notin[R,N+1]$. 在此情形下，由于 $\phi_{R,\ N}=0$，可得 $w=\varepsilon$.

这些界表明 $w\in A_2(\mathbb{R}^2)$（详见上文引理 2.3 ），因此估计式（33）成立。由于 ε任意，令 ε 趋于零，由（33）和（32）可得

$$\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\phi_{R,N}\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2(D)}\leq\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)}.$$

~利用这个界以及 $\widetilde{a_0}$ 和 b_0 具有小范数这一事实，可以将（31）右端的非局部项吸收到左端，从而得到

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)}+\sum_{0<k+l\leq2}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x^k\partial_y^lw\|_{L_x^\infty L_{yt}^2(D)}&\\ \leq c\lambda^2\Big(\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}+\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)&\\ +c\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\widetilde{F}\|_{L_t^1L_{xy}^2(D)\cap L_x^1L_{ty}^2(D)}&\end{aligned}, \tag{34}$$

~ ~接下来，我们估计依赖于 F. 的项。从 F 的显式表达式（见（30））可知，其中只出现了 $\phi_{R,\ N}$ 的导数。因此，$\widetilde{F}$ 的支撑是集合 $\Omega_R:=\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\in(R,R+1)\}$ 和 $\Omega_N:=\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\in(N,N+1)\}$ 的并集，其面积分别为 R 和 N 量级。在第一个集合 Ω_R 中，有

$$\lambda|x|+\beta|y|\leq(\lambda+\beta)\sqrt{x^2+y^2}\leq(\lambda+\beta)(R+1).$$

由此估计，利用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\widetilde{F}\chi_{\Omega_R}\|_{L_t^1L_{xy}^2(D)\cap L_x^1L_{ty}^2(D)}&\leq e^{(\lambda+\beta)(R+1)}\|\widetilde{F}\chi_{\Omega_R}\|_{L_t^1L_{xy}^2(D)\cap L_x^1L_{ty}^2(D)}\\ &\leq cR^{1/2}e^{(\lambda+\beta)(R+1)}\||v|+|\nabla v|+|\Delta v|+|\partial_x\partial_yv|\|_{L^2(D)}\\ &\leq cR^{1/2}e^{(\lambda+\beta)(R+1)},\end{aligned} \tag{35}$$

这里的常数 $c>0$ N $v\ 0\quad v\ 1\ \in$会逐 $L^2\ e^{a(x^2+y^2\ 3/4}dxdy$ $\overline{\lambda}>0$ $\overline{\beta}>0\ v\ 0\quad v\ 1\ \in L^2\ e^{2\overline{\lambda}|x|+2\overline{\beta}|y|}dxdy$ 。行变化。对于 Ω 中的估计，我们注意到，由于 ( ) ( ) ()，因此对所有 和所有 ，( ) ( ) ( )。采用与 [4, 定理 1。3], 中经典 ZK 方程所用的类似论证，可以证明这一性质在整个时间区间 $[0,1]$内保持成立。更确切地说，有 v 是一个从 $[0,1]$ 到$H^3(e^{2\overline{\lambda}|x|+2\overline{\beta}|y|}dxdy)$的有界函数。 因此，我们可以取 $\overline{\lambda}=\lambda+1$ 和 $\overline{\beta}=\beta+1$，并应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\widetilde{F}\chi_{\Omega_N}\|_{L^1_tL^2_{xy}(D)\cap L^1_xL^2_{ty}(D)}\le C_{\lambda,\beta}N^{1/2}e^{-N}\|e^{(\lambda+1)|x|+(\beta+1)|y|}\widetilde{F}\|_{L^2(D)},\tag{36}$$

其中最后一项是有限的。这意味着，由于 N 可以任意大，式（36）右端可以忽略不计。因此，当 N 趋于无穷大时，由（35）和（36）可得

$$\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\widetilde{F}\|_{L^1_tL^2_{xy}(D)\cap L^1_xL^2_{ty}(D)}\le CR^{1/2}e^{(\lambda+\beta)(R+1)}.\tag{37}$$

在给出（ w（0）和 w（1）这两个分别依赖于初始数据和末态数据的项在（34）右端的界之前，我们先作如下观察：考虑区域 $Q_{28R}:=\{(x,\ y,\ t):\ 28R-1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 28R\}$. 有 $Q_{28R}\times[0,1]\subset D_R$，此外，由于 $N>28R,\ \ v=w$在 $Q_{28R}\times[0,1]$. 中。在 $Q_{28R}\times[0,1]$中我们还有如下界

$$\lambda|x|+\beta|y|\ge\frac{\lambda}{7}(|x|+|y|)\ge\frac{\lambda}{7}(28R-1)\ge 3\lambda R.$$

由此，应用 H¨older 不等式、界（34）以及估计（37），可得

$$\begin{aligned}e^{3\lambda R}A_{28R}&\le\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}v\|_{L^2(Q_{28}\times[0,1])}+\sum_{0<k+l\le 2}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x^k\partial_y^l v\|_{L^2(Q_{28}\times[0,1])}\\&\le R^{1/2}\Big(\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}w\|_{L^2(D)}+\sum_{0<k+l\le 2}\|e^{\lambda|x|+\beta|y|}\partial_x^k\partial_y^l w\|_{L^2(D)}\Big)\\&\le c\lambda^2R^{1/2}\Big(\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}+\|J^3(e^{\lambda|x|+\beta|y|}w(1))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)+ce^{2\lambda R},\end{aligned}\tag{38}$$

其中在最后一个不等式中，我们利用了：取 $\beta=\lambda/7$、 $\lambda\ge 7$，并利用 $R>3$，即可得到

$$Re^{(\lambda+\beta)(R+1)}\le ce^{(\lambda+\beta+1)(R+1)}\le ce^{\lambda\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)\frac{4}{3}R}\le ce^{2\lambda R}.$$

接下来需要估计分别依赖于初始数据和末态数据的项 $w(0)$ 和 $w(1)$。我们仅明确给出 $w(0)$ 的情形，因为 $w(1)$ 的情形可以类似处理。我们将用到本节末尾证明的以下插值结果（类似结果另见 [16, 引理 1] ）。

引理 2.6. 对于 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\beta>0$，设 $f\in H^k(\mathbb{R}^2)\cap L^2(e^{2\beta(|x|+|y|)}dxdy)$。那么对于 $\theta\in[0,1]$，有

$$\|J^{\theta k}(e^{(1-\theta)\beta(|x|+|y|)}f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\le c\|J^kf\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|e^{\beta(|x|+|y|)}f\|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)},\tag{39}$$

其中常数 $c>0$ 依赖于 k 和 β.

利用前面的结果，对 $k=4$、 $\beta=4\lambda$ 和 $f=w(0)$，有

$$\|J^3(e^{\lambda(|x|+|y|)}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\le c\|J^4w(0)\|^{3/4}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|e^{4\lambda(|x|+|y|)}w(0)\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

首先注意，由于 $\phi_{R,\ N}$ 及其导数均有一个与 R 和 N 无关的常数界，因此有

$$\|J^4w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\le c\|J^4v(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},\tag{40}$$

因此，根据假设， $w(0)\in H^4(\mathbb{R}^2)$ 等于 $v(0)\in H^4(\mathbb{R}^2)$。

现在，由于 w 的支撑位于集合

$$D_R:=\{(x,y):x^2+y^2\ge R^2\}\times[0,1],$$

并再次利用 $\phi_{R,\ N}$ 有一个与 R 和 N 无关的常数上界，可得

$$\|e^{4\lambda(|x|+|y|)}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|e^{4\lambda(|x|+|y|)}w(0)\|_{L^2(x^2+y^2\geq R^2)} \leq c\|e^{4\lambda(|x|+|y|)}v(0)\|_{L^2(x^2+y^2\geq R^2)}. \tag{41}$$

此外，取 $\lambda := \frac{a}{16}R^{1/2}$，若 $x^2+y^2 \geq R^2$，则得到

$$4\lambda(|x|+|y|) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}aR^{1/2}\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}a(x^2+y^2)^{3/4}. \tag{42}$$

由（40），利用（41）和（42）可得

$$\begin{aligned}
\lambda^2 R^{1/2}\|J^3(e^{\lambda(|x|+|y|)}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq c\lambda^2 R^{1/2}\|e^{4\lambda(|x|+|y|)}w(0)\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq ca^2R^3\left\|e^{\frac{a}{2\sqrt{2}}(x^2+y^2)^{3/4}}v(0)\right\|^{1/4}_{L^2(x^2+y^2\geq R^2)} \\
&\leq ca^2\left\|e^{\frac{a}{2}(x^2+y^2)^{3/4}}v(0)\right\|^{1/4}_{L^2(D)} \\
&\leq c_a,
\end{aligned} \tag{43}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了 $v(0) \in L^2(e^{a(x^2+y^2)^{3/4}}dxdy)$。将（43）代入（38）得到

$$e^{3\lambda R}A_{28R} \leq c_a + ce^{2\lambda R} \leq c_a e^{2\lambda R}.$$

这给出了上界

$$A_{28R} \leq c_a e^{-\frac{a}{16}R^{3/2}},$$

这正是我们要证明的结论。 □

正如预期的那样，我们现在要证明插值引理2.6。

引理2.6的证明。只需考虑 $k=1$. 对于 $\theta \in [0,1]$ 和 $\beta > 0$，我们定义 $w_\theta(x,\ y) := e^{(1-\theta)\beta(|x|+|y|)}$. 为证明不等式（39），我们只需证明

$$\|J^\theta(w_\theta f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \simeq \|w_\theta J^\theta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{44}$$

事实上，一旦证明了（44），利用加权Sobolev空间的标准插值，不等式（39）便可推出。注意到，为证明（44），只需证明不等式

$$\|J^\theta(w_\theta f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|w_\theta J^\theta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{45}$$

因为反向不等式可由对偶性得到。不等式（45）等价于

$$\|J^\theta w_\theta J^{-\theta} w_\theta^{-1} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{46}$$

为证明（46），我们定义解析算子族 $T_z := J^z w_z J^{-z} w_z^{-1}$，其中 $\Re z \in [0,1]$. 因此，根据斯坦-魏斯插值定理，只要证明 L^2-L^2 的有界性 $T_{i\eta}$ 以及 $T_{1+i\eta}$，$\eta \in \mathbb{R}$. 为此，我们将始终利用以下事实：对于任意 $\gamma \in \mathbb{R}$，算子 $J^{i\gamma}$ 在 L^2 上有界，并且在 w-加权 L^2 空间中，对于任意权函数 $w \in L^1_{\text{loc}}$，均有如下估计

$$\|wJ^{i\gamma}f\|_{L^2} \leq c(\gamma)\|wf\|_{L^2},$$

或等价地

$$\|wf\|_{L^2} \leq c\|wJ^{-i\gamma}f\|_{L^2},$$

其中 c 与 γ. 无关

我们首先给出关于 $T_{i\eta} = J^{i\eta}e^{(1-i\eta)\beta(|x|+|y|)}J^{-i\eta}e^{(-1+i\eta)\beta(|x|+|y|)}$. 的估计。利用 $J^{i\gamma}$ 的有界性，可得

$$\begin{aligned}
\|J^{i\eta}e^{(1-i\eta)\beta(|x|+|y|)}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|e^{(1-i\eta)\beta(|x|+|y|)}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \|e^{(1-i\eta)\beta(|x|+|y|)}J^{i\eta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

或者等价地

$$\|T_{i\eta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

现在考虑算子 $T_{1+i\eta} = J^{(1+i\eta)}e^{i\eta\beta(|x|+|y|)}J^{-(1+i\eta)}e^{-i\eta\beta(|x|+|y|)}$. A 对 $T_{i\eta}$ 的估计采用类似的论证可得

$$\begin{aligned}\|J^{(1+i\eta)}e^{i\eta\beta(|x|+|y|)}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|Je^{i\eta\beta(x+y)}f\|_{L^2(x\geq 0,y\geq 0)} + \|Je^{i\eta\beta(x-y)}f\|_{L^2(x\geq 0,y<0)}\\ &\quad + \|Je^{i\eta\beta(-x+y)}f\|_{L^2(x<0,y\geq 0)} + \|Je^{i\eta\beta(-x-y)}f\|_{L^2(x<0,y<0)}\\ &\lesssim \|Je^{i\eta\beta(x+y)}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|Je^{i\eta\beta(x-y)}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &\quad + \|Je^{i\eta\beta(-x+y)}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|Je^{i\eta\beta(-x-y)}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &:= r\text{-}h\text{-}s.\end{aligned} \tag{47}$$

回想一下，根据定义，对于 $s\in\mathbb{R}$，我们有以下一系列恒等式

$$\|J^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|(1-\Delta)^{s/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \simeq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|D^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \qquad D^s := (-\Delta)^{s/2}.$$

将这一事实用于 $s=1$，并注意到 $|De^{i\eta\beta(\pm x\pm y)}| \lesssim |\eta|$，由莱布尼茨法则可得

$$\begin{aligned}r\text{-}h\text{-}s &\lesssim |\eta|\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|Df\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &\lesssim (1+|\eta|)\|Jf\|_{L^2}\\ &\lesssim (1+|\eta|)\|e^{i\eta\beta(|x|+|y|)}J^{(1+i\eta)}f\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{48}$$

将 (48) 代入 (47) 可得

$$\|T_{1+i\eta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim (1+|\eta|)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

由此完成证明。 □

Carleman 估计：引理 2.2 的证明

最后，我们给出引理 2.2中 Carleman 估计的证明。正如前面提到的，该证明是对 [5] 中引理 3.1 证明的改编。

引理 *2.2* 的证明。为简化记号，暂时不再显式写出对α 的指数权函数 $e^{\alpha\phi}$. 的依赖。为此，我们定义 $\psi(x,\ y,\ t)$: $=\alpha\phi(x,\ y,\ t)$。

按照惯例，为证明（19），考虑共轭算子是方便的

$$e^{\psi(x,y,t)}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)e^{-\psi(x,y,t)}. \tag{49}$$

我们定义 f: $= e^{\psi}g$. 由于 $e^{\psi}\partial_x e^{-\psi} = (\partial_x - \psi_x)f$ 且 $e^{\psi}\partial_y e^{-\psi} = (\partial_y - \psi_y)f$，为建立（19），只需证明共轭算子（49）满足相应的估计，即

$$\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|f\|_{L^2(D)} + \frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|(\partial_x-\psi_x)f\|_{L^2(D)} + \frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|(\partial_y-\psi_y)f\|_{L^2(D)} \leq c\|e^{\psi}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2)e^{-\psi}f\|_{L^2(D)}. \tag{50}$$

首先，直接计算可得

$$\begin{aligned}e^{\psi}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2)e^{-\psi}f &= (\partial_t-\psi_t)f + (\partial_x-\psi_x)^3 f + (\partial_x-\psi_x)(\partial_y-\psi_y)^2 f\\ &= \partial_t f - \psi_t f + \partial_x^3 f - 3\psi_{xx}\partial_x f - 3\psi_x\partial_x^2 f + 3\psi_x\psi_{xx}f + 3\psi_x^2\partial_x f - \psi_x^3 f\\ &\quad + \partial_x\partial_y^2 f - \psi_{yy}\partial_x f - 2\psi_y\partial_x\partial_y f + \psi_y^2\partial_x f - \psi_x\partial_y^2 f + \psi_x\psi_{yy}f + 2\psi_x\psi_y\partial_y f - \psi_x\psi_y^2 f,\end{aligned}$$

其中这里我们用到了 $\psi_{xxx} = \psi_{xxy} = \psi_{xy} = 0$. 我们可以将其写为

$$e^{\psi}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x\partial_y^2)e^{-\psi}f = \mathcal{A}f + \mathcal{S}f,$$

其中 $\mathcal{A}f$ 和 $\mathcal{S}f$ 分别是由下式给出的反对称算子和对称算子

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \partial_x^3 + 3\psi_x^2\partial_x + 3\psi_x\psi_{xx} + \partial_t + \psi_{yy}\psi_x + \psi_y^2\partial_x + 2\psi_y\psi_x\partial_y + \partial_y^2\partial_x\\ \mathcal{S} &:= -3\partial_x(\psi_x\partial_x) - \psi_x^3 - \psi_t - \psi_y^2\psi_x - \psi_{yy}\partial_x - 2\psi_y\partial_x\partial_y - \psi_x\partial_y^2.\end{aligned}$$

证明（50）的关键在于，为共轭算子（49）的对称部分与反对称部分之间的对易子的正性提供一个下界。事实上，容易看出

$$\begin{aligned}\|e^{\psi}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)e^{-\psi}f\|_{L^2}^2 &= \|(\mathcal{A}+\mathcal{S})f\|_{L^2}^2\\ &= \|\mathcal{A}f\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{S}f\|_{L^2}^2 + \langle[\mathcal{S},\mathcal{A}]f, f\rangle\\ &\geq \langle[\mathcal{S},\mathcal{A}]f, f\rangle,\end{aligned} \tag{51}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(D)$中的内积。

对（51）中的对易子进行显式计算可得

$$\begin{aligned}\langle[\mathcal{S},\mathcal{A}]f, f\rangle = &\int_D (9\psi_x^4\psi_{xx} - 3\psi_{xx}^3 + 6\psi_{xt}\psi_x^2 + \psi_{tt} + 6\psi_x^2\psi_y^2\psi_{xx} + 2\psi_{xt}\psi_y^2\\ &\quad + 4\psi_x^2\psi_y^2\psi_{yy} + \psi_y^4\psi_{xx} + \psi_{xx}\psi_{yy}^2 - 6\psi_{xx}^2\psi_{yy})f^2\\ &+ \int_D (18\psi_x^2\psi_{xx} - 6\psi_{xt} - 6\psi_y^2\psi_{xx} + 4\psi_{yy}\psi_y^2)(\partial_x f)^2\\ &+ \int_D (2\psi_y^2\psi_{xx} - 6\psi_x^2\psi_{xx} - 2\psi_{xt} + 4\psi_x^2\psi_{yy})(\partial_y f)^2\\ &+ \int_D 24\psi_x\psi_y\psi_{xx}\partial_x f\partial_y f\\ &+ \int_D (4\psi_{yy} + 6\psi_{xx})(\partial_y\partial_x f)^2 + \int_D 9\psi_{xx}(\partial_x^2 f)^2 + \int_D \psi_{xx}(\partial_y^2 f)^2.\end{aligned} \tag{52}$$

我们先考虑涉及 $\partial_x f\partial_y f$的项。由于 ψ_{xx}和 ψ_{yy}是常数，分部积分可得

$$\begin{aligned}24\psi_{xx}\int_D \psi_x\psi_y\partial_x f\partial_y f &= 16\psi_{xx}\int_D \psi_x\psi_y\partial_x f\partial_y f + 8\psi_{xx}\int_D \psi_x\psi_y\partial_x f\partial_y f\\ &= 8\psi_{xx}^2\psi_{yy}\int_D f^2 - 16\psi_{xx}\int_D \psi_x\psi_y f\partial_x\partial_y f + 8\psi_{xx}\int_D \psi_x\psi_y\partial_x f\partial_y f.\end{aligned}$$

注意，在最后一个等式中，第一项为正，而其余两项原则上没有确定的符号。我们还注意到，其余积分中的被积函数可以看作平方展开时产生的两个乘积项。接下来我们将探讨这一思路。

由于 $\psi_{xx} = \psi_{yy}$ 和它们都是正的常数，因此有

$$\begin{aligned}&\int_D \left[(6\psi_{xx} + 4\psi_{yy})\psi_x^2\psi_y^2 f^2 - 16\psi_{xx}\psi_x\psi_y f\partial_x\partial_y f + (4\psi_{xx} + 6\psi_{yy})(\partial_y\partial_x f)^2\right]\\ &\qquad = \psi_{xx}\int_D \left[10\psi_x^2\psi_y^2 f^2 - 16\psi_x\psi_y f\partial_x\partial_y f + 10(\partial_x\partial_y f)^2\right]\\ &\qquad = \psi_{xx}\int_D \left(\frac{8}{3}\psi_x\psi_y f - 3\partial_x\partial_y f\right)^2 + \frac{26}{9}\psi_{xx}\int_D \psi_x^2\psi_y^2 f^2 + \psi_{xx}\int_D (\partial_x\partial_y f)^2\\ &\qquad \geq \frac{26}{9}\psi_{xx}\int_D \psi_x^2\psi_y^2 f^2 + \psi_{xx}\int_D (\partial_x\partial_y f)^2.\end{aligned}$$

现在我们考虑

$$\begin{aligned}&\psi_{xx}\int_D \left[18\psi_x^2(\partial_x f)^2 + 2\psi_y^2(\partial_y f)^2 + 8\psi_x\psi_y\partial_x f\partial_y f\right]\\ &\qquad = \psi_{xx}\int_D (4\psi_x\partial_x f + \psi_y\partial_y f)^2 + 2\psi_{xx}\int_D \psi_x^2(\partial_x f)^2 + \psi_{xx}\int \psi_y^2(\partial_y f)^2\\ &\qquad \geq 2\psi_{xx}\int_D \psi_x^2(\partial_x f)^2 + \psi_{xx}\int \psi_y^2(\partial_y f)^2.\end{aligned}$$

将之前的估计代入（52）可得

$$\begin{aligned}\langle[\mathcal{S},\mathcal{A}]f,f\rangle \geq &\int_D (9\psi_x^4\psi_{xx}+6\psi_{xt}\psi_x^2+\psi_{tt}+\tfrac{26}{9}\psi_x^2\psi_y^2\psi_{xx}+2\psi_{xt}\psi_y^2+\psi_y^4\psi_{xx})f^2\\ &+\int_D (2\psi_x^2\psi_{xx}-6\psi_{xt}-2\psi_y^2\psi_{xx})(\partial_x f)^2\\ &+\int_D (\psi_y^2\psi_{xx}-2\psi_x^2\psi_{xx}-2\psi_{xt})(\partial_y f)^2\\ &+\psi_{xx}\int_D (\partial_y\partial_x f)^2+9\psi_{xx}\int_D (\partial_x^2 f)^2+\psi_{xx}\int_D (\partial_y^2 f)^2.\end{aligned}$$

利用 $\int \psi_y^2(\partial_x f)^2 = -\int \psi_y^2 f\partial_x^2 f$，可得

$$\begin{aligned}\psi_{xx}\int_D \left[\psi_y^4 f^2-2\psi_y^2(\partial_x f)^2+9(\partial_x^2 f)^2\right] &= \psi_{xx}\int_D (\psi_y^2 f+\partial_x^2 f)^2+8\psi_{xx}\int_D (\partial_x^2 f)^2\\ &\geq 8\psi_{xx}\int_D (\partial_x^2 f)^2.\end{aligned}$$

现在，我们写作

$$-2\int_D \psi_x^2\psi_{xx}(\partial_y f)^2 = 3\int_D \psi_x^2\psi_{xx} f\partial_y^2 f+\int_D \psi_x^2\psi_{xx}(\partial_y f)^2.$$

右端的第一项可以看作一个平方项的一部分，事实上

$$\begin{aligned}\psi_{xx}\int_D \left[9\psi_x^4 f^2+3\psi_x^2 f\partial_y^2 f+(\partial_y^2 f)^2\right] &= \psi_{xx}\int \left(\tfrac{3}{2}\psi_x^2 f+\partial_y^2 f\right)^2+\frac{27}{4}\psi_{xx}\int_D \psi_x^4 f^2\\ &\geq \frac{27}{4}\psi_{xx}\int_D \psi_x^4 f^2.\end{aligned}$$

结合这两个估计可得

$$\begin{aligned}\langle[\mathcal{S},\mathcal{A}]f,f\rangle \geq &\int_D (\tfrac{27}{4}\psi_x^4\psi_{xx}+6\psi_{xt}\psi_x^2+\psi_{tt}+\tfrac{26}{9}\psi_x^2\psi_y^2\psi_{xx}+2\psi_{xt}\psi_y^2)f^2\\ &+\int_D (2\psi_x^2\psi_{xx}-6\psi_{xt})(\partial_x f)^2\\ &+\int_D (\psi_y^2\psi_{xx}+\psi_x^2\psi_{xx}-2\psi_{xt})(\partial_y f)^2\\ &+\psi_{xx}\int_D (\partial_y\partial_x f)^2+8\psi_{xx}\int_D (\partial_x^2 f)^2.\end{aligned}\tag{53}$$

现在我们注意到

$$\psi_x = \frac{2\alpha}{R}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right);\qquad \psi_y = \frac{2\alpha y}{R^2};\qquad \psi_t = 2\alpha\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)\varphi'(t);$$
$$\psi_{tt} = 2\alpha\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)\varphi''(2)+2\alpha(\varphi'(t))^2;\qquad \psi_{xt} = \frac{2\alpha}{R}\varphi'(t);\qquad \psi_{xx} = \psi_{yy} = \frac{2\alpha}{R^2}.$$

利用上述信息，我们可以更明确地写成（53），即：

$$\begin{aligned}\langle[\mathcal{S},\mathcal{A}]f,f\rangle\geq &\int_D \left[216\frac{\alpha^5}{R^6}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^4+48\frac{\alpha^3}{R^3}\varphi'(t)\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)+2\alpha\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)\varphi''(t)\right.\\ &\left.+2\alpha(\varphi'(t))^2+\frac{208}{9}\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2\psi_y^2+\frac{4\alpha}{R}\varphi'(t)\psi_y^2\right]f^2\\ &+\int_D \left[16\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2-12\frac{\alpha}{R}\varphi'(t)\right](\partial_x f)^2\\ &+\int_D \left[\frac{2\alpha}{R^2}\psi_y^2+\frac{8\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2-\frac{4\alpha}{R}\varphi'(t)\right](\partial_y f)^2\\ &+\frac{2\alpha}{R^2}\int_D (\partial_y\partial_x f)^2+16\frac{\alpha}{R^2}\int_D (\partial_x^2 f)^2.\end{aligned}$$

Since $\alpha \geq \overline{C} R^{3/2} > 1$，其中 $\overline{C}$:= 最大值$\{\|\varphi'\|_{L^\infty}, \|\varphi''\|_{L^\infty}, 1\}$，由于$|\frac{x}{R} + \varphi(t)| \geq 1$，很容易得到 s

$$
\begin{aligned}
216\frac{\alpha^5}{R^6}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^4 + 48\frac{\alpha^3}{R^3}\varphi'(t)\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right) + 2\alpha\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)\varphi''(t) \\
&\geq 216\frac{\alpha^5}{R^6}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^4 - 48\frac{\alpha^3}{R^3}\|\varphi'\|_{L^\infty}\left|\frac{x}{R}+\varphi(t)\right| - 2\alpha\|\varphi''\|_{L^\infty}\left|\frac{x}{R}+\varphi(t)\right| \\
&\geq 166\frac{\alpha^5}{R^6}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^4.
\end{aligned}
$$

此外

$$
\begin{aligned}
\frac{208}{9}\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2\psi_y^2 + \frac{4\alpha}{R}\varphi'(t)\psi_y^2 &\geq \frac{208}{9}\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2\psi_y^2 - \frac{4\alpha}{R}\|\varphi'\|_{L^\infty}\psi_y^2 \\
&\geq \frac{172}{9}\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2\psi_y^2.
\end{aligned}
$$

类似地

$$
\begin{aligned}
16\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2 - 12\frac{\alpha}{R}\varphi'(t) &\geq 16\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2 - 12\frac{\alpha}{R}\|\varphi'\|_{L^\infty} \\
&\geq \frac{4\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2 \\
&\geq \frac{4\alpha^3}{R^4},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\frac{8\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2 - \frac{4\alpha}{R}\varphi'(t) &\geq \frac{8\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2 - \frac{4\alpha}{R}\|\varphi'\|_{L^\infty} \\
&\geq \frac{4\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2 \\
&\geq \frac{4\alpha^3}{R^4}.
\end{aligned}
$$

由这些估计并舍去一个正项可得

$$
\begin{aligned}
\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle \geq \int_D \left[166\frac{\alpha^5}{R^6}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^4 + \frac{172}{9}\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2\psi_y^2\right] f^2 \\
+ \int_D \frac{4\alpha^3}{R^4}\left[(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2\right].
\end{aligned}
$$

注意到

$$
166\frac{\alpha^5}{R^6}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^4 \geq 134\frac{\alpha^5}{R^6} + \frac{4\alpha^3}{R^4}(\psi_{xx}+\psi_{yy}) + \frac{4\alpha^3}{R^4}\psi_x^2
$$

并且

$$
\frac{172}{9}\frac{\alpha^3}{R^4}\left(\frac{x}{R}+\varphi(t)\right)^2\psi_y^2 \geq \frac{4\alpha^3}{R^4}\psi_y^2,
$$

可得

$$
\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle \geq 134\frac{\alpha^5}{R^6}\int_D f^2 + \frac{4\alpha^3}{R^4}\int_D \left[(\partial_x f)^2 + (\psi_{xx}+\psi_x^2)f^2\right] + \frac{4\alpha^3}{R^4}\int_D \left[(\partial_y f)^2 + (\psi_{yy}+\psi_y^2)f^2\right]. \tag{54}
$$

注意到

$$
\int_D [(\partial_x - \psi_x)f]^2 = \int_D \left[(\partial_x f)^2 + (\psi_{xx}+\psi_x^2)f^2\right],
$$

并且，对于 y 变量中的相应项，同样由（54）可得（50）。 □

致谢

L.C 获得了由 MCIN/AEI/10.13039/50110 0011033 资助的 Ram´on y Cajal RYC2021-032803-I 项目，以及欧盟 NextGenerationEU/PRTR、德国研究联合会（DFG）项目编号 258734477（SFB 1173）和 Ikerbasque 的支撑。L.F. 获得了由 Agencia de Investigación 资助的项目 PID2021-123034NB-I00/AEI/10.13039/501100011033、由巴斯克政府资助的项目 IT1615-22，以及 Ikerbasque 的支撑。F.L. 部分获得了 CNPq 项目 305791/2018-4 和 FAPERJ 项目 E-26/202.638/2019 的支撑。

参考文献

[1] R. Ba˜nuelos 和 G. Wang，鞅的尖锐不等式及其在 Beurling-Ahlfors 变换和 Riesz 变换中的应用，Duke Math. J. 80 (1995)，第 3 期，575-600。[2] R. M. Bradley，电迁移诱导的金属表面孤子传播，Phys. Rev. E 60 (1999)，3736-3740。[3] _____，载流金属薄膜上孤子传播的横向不稳定性，Phys. D 158 (2001)，216–232。[4] E. Bustamante、P. Isaza 和 J. Mej´ıa，关于扎哈罗夫–库兹涅佐夫方程解的支撑，J. Differential Equations 251 (2011)，2728-2736。[5] _____，关于扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程解的唯一性，J. Funct. Anal. 264 (2013)，第 11 期，2529–2549。[6] E. Bustamante、J. Jim´enez Urrea 和 J. Mej´ıa，关于三维Zakharov-Kuznetsov方程解的唯一延拓性质，Nonlinear Anal. Real World Appl. 39 (2018)，537-553。[7] R. R. Coifman 和 C. Fefferman，极大函数和奇异积分的加权范数不等式，Studia Math 51 (1974)，241-250。[8]R. Cˆote、C. Mu˜noz、D. Pilod 和 G. Simpson，高维Zakharov-Kuznetsov孤子的渐近稳定性，《理性力学与分析档案》220 (2016)，第2期，639-710。[9] L. Cossetti、L. Fanelli 和 F. Linares，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程的唯一性结果，《偏微分方程通讯》44 (2019)，第 6 期，504-544。[10] A. de Bouard，高维中某些非线性色散孤立波的稳定性与不稳定性，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 126 (1996)，第 1 期，89-112。[11] L. Escauriaza、C. E. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega，关于k广义KdV方程解的唯一性，J. Funct. Anal. 244 (2007)，第 2 期，504-535。[12] A. V. Faminskii，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程的柯西问题，Differ. Equ. 31 (1995)，1002-1012。[13] L. G. Farah、J. Holmer、S. Roudenko 和 K. Yang，二维三次Zakharov-Kuznetsov方程在有限或无限时间内的爆破解，2018。[14] _____，三维二次Zakharov-Kuznetsov方程孤立波的渐近稳定性，2020。[15] L. G. Farah、F. Linares 和 A. Pastor，关于二维广义Zakharov-Kuznetsov方程的注记：局部、整体及散射结果，J. Differential Equations 253 (2012)，第 8 期，2558-2571。[16] G. Fonseca 和 G. Ponce，加权Sobolev空间中Benjamin–Ono方程的初值问题，《泛函分析杂志》260 (2011)，第 2 期，436-459。

[17] A. Gr¨unrock 和 S. Herr，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程的傅里叶限制范数方法，Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (2014)，2061-2068。[18] M. R. Gungor 和 D. Maroudas，表面电迁移条件下金属薄膜中空洞表面的形态演化非线性分析，Surf. Sci. 415 (1998)，第 3 期，L1055-L1060。[19] ———,穿晶空洞扩展导致金属薄膜电迁移诱发失效的理论分析，J. Appl. Phys. 85 (1999)，2233-2246。[20] S. Herr 和S. Kinoshita，三维及更高维中扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程的次临界适定性结果，(2020)。[21] S. Kinoshita，二维扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程柯西问题的整体适定性。亨利·庞加莱研究所年刊 (C) 非线性分析，38 (2) (2021)，451-505。[22] C. Klein、S. Roudenko 和 N. Stoilov，三维Zakharov–Kuznetsov方程中孤子稳定性、分辨率和相互作用的数值研究，Physica D: Nonlinear Phenomena,423 (2021)，132913。[23] F. Linares 和 A. Pastor，二维修正Zakharov–Kuznetsov方程的适定性，SIAM J. Math Anal. 41 (2009)，1323–1339[24] F. Linares 和 J.-C. Saut，三维Zakharov-Kuznetsov方程的柯西问题，Discrete Contin. Dyn. Syst. 24 (2009)，第 2 期，547–565。[25] F. Linares、A. Pastor 和 M. Scialom，表面电迁移方程解的存在性，Nonlinearity 34 (2021)，第 8 期，5213-5233。[26] F. Linares 和 G. Ponce，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程解的特殊正则性性质，Co mmun. Pure Appl. Anal. 17 (2018)，第 4 期，1561-1572。[27] A. J. Mendez，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程解的正则性传播，预印本 arXiv:2008.11252 (2020)。[28] A. J. Mendez、C. Mu˜noz、F. Poblete 和 J. C. Pozo，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程大解的局部能量衰减，《偏微分方程通讯》46 (2021)，第8期，1440-1487。[29] A. J. Mendez 和 O. Ria˜no，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程解的衰减性质，预印本 arXiv.2302.11731[math.AP] (2023)。[30] L. Molinet 和 D. Pilod，扎哈罗夫-库兹涅佐夫方程的双线性斯特里哈茨估计及其应用，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 32 (2015)，347-371。[31] C. Mu˜noz，关于若干非可积色散模型中大初值长时间渐近行为的综述，预印本 arXiv:2210.10902[math.AP] (2022)[32] S. Petermichl，黎斯变换的尖锐加权界，Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008)，1237-1249[33] F. Ribaud 和 S. Vento，三维Zakharov-Kuznetsov方程的适定性结果，SIAM J. Math. Anal. 44 (2012)，第4期，2289–2304。[34] M. Schimschak 和 J. Krug，作为移动边界值问题的表面电迁移，Phys. Rev. Lett. 78 (1997)，278-281[35] F. Valet，Zakharov-Kuznetsov型方程的渐近K-孤子型解，2020。