排版后的文章将在此处显示与文章类型相对应的横幅

arXiv:2303.03940v1 [physics.flu-dyn] 7 Mar 2023

旋转可混溶流体中由法拉第不稳定性驱动的湍流混合的直接数值模拟。

Narinder Singh[1] 和 Anikesh Pal[1]†

[1]印度理工学院坎普尔分校机械工程系，印度北方邦坎普尔 208016

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

本文采用直接数值模拟（DNS），研究法拉第不稳定性诱发的两种密度差较小的互溶流体湍流混合受旋转影响的情况。我们通过不可逆混合率 M 量化不可逆混合，该过程体现了可用势能（APE）向背景势能（BPE）的转化。我们证明，在较低强迫振幅下，次谐波不稳定阶段的湍动能（*t.k.e.*）随科里奥利频率 f 的增加而增大，直至 $(f/\omega)^2 < 0.25$，其中 ω 为强迫频率。这种 *t.k.e.* 的增强归因于更多不稳定模态的激发。随着 $(f/\omega)^2$ 增至 0.25，不可逆混合得以维持更长时间，这是由于次谐波不稳定阶段延长；最终，不稳定性饱和后混合停止。当 $(f/\omega)^2 > 0.25$ 时，科里奥利力会显著延迟次谐波不稳定性的起始。强烈的旋转效应会导致湍流减弱，因为大部分 APE 转化为 BPE，使得对于 $(f/\omega)^2 > 0.25$，能够转回 *t.k.e.* 储能库的 APE 减少。因此，在随后的振荡中，可用于通过周期性强迫输入外部能量的 *t.k.e.* 很少。由于当 $(f/\omega)^2 > 0.25$ 时不稳定性始终不会饱和，因此 APE 通过 M 向 BPE 的转化仍在继续，我们观察到不可逆混合持续时间较长。在较高强迫振幅下，旋转的不稳定性延迟效应可以忽略不计，湍流强度较弱且持续时间短。因此，当 $(f/\omega)^2 < 0.25$ 时，不可逆混合现象也会很快结束。然而，当 $(f/\omega)^2 > 0.25$ 时，则可观察到持续的不可逆混合。我们还用 M 衡量混合效率，发现当强迫振幅较低且旋转速率为 $(f/\omega)^2 > 0.25$ 时，混合效率较高，因为 APE 的大部分转化为 BPE。

关键词：

† 通讯邮箱：pala@iitk.ac.in

1. 引言

法拉第不稳定性（Faraday 1831）描述了两种不互溶流体的界面在垂直周期振动作用下产生驻波图样的现象。然而，在稳定分层的两层互溶流体系统中，当强迫振幅超过某一阈值后，这些驻波会变得高度紊乱并开始相互作用，从而引发流体混合，最终混合达到饱和（Zoueshtiagh 等2009；Amiroudine 等2012；Diwakar 等2015）。Gréa 与 Adou（2018）；Briard 等（2019）利用理论模型和 DNS，研究了密度差较小的流体中由法拉第不稳定性引发的湍流混合的起始与饱和，参数范围较广。他们证明，在谐波不稳定阶段，弥散界面开始以小振幅振荡；随后，在次谐波不稳定阶段，湍流混合区迅速增长并发展。然而，由于不稳定性饱和，湍流混合无法长时间维持。他们还通过解析方法估算了混合区的最终尺寸，如下所示：

$$L_{sat} = \frac{2\mathcal{A}g_0}{\omega^2}\,(2F + 4)\,, \tag{1.1}$$

其中，L_{sat} 是饱和状态下混合区的最终渐近尺寸（稍后定义），$\mathrm{A} = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ 是阿特伍德数，用于表示重流体（ρ_1）与轻流体（ρ_2）之间的密度差；g_0 是平均加速度，F 是振荡振幅，ω 是强迫频率。Briard 等（2019）通过将总势能（PE）划分为背景势能（BPE）和可用势能（APE），对湍流混合所伴随的不可逆混合进行了定量数值研究。他们报告称，表征不可逆混合程度的BPE在次谐波不稳定性起始期间增加。APE代表总PE中可通过不可逆混合转化为BPE的部分，在饱和时达到峰值，并以BPE的形式部分释放到流体中。这会带来更多不可逆混合，使数值计算得到的最终混合区尺寸 L 大于解析预测值 L_{sat} 1。Briard 等（2020）进行了线性稳定性分析，将背景密度剖面的垂直非均匀性和黏性耗散纳入考虑，以预测尖锐界面或弥散界面条件下法拉第不稳定性的起始及其最终饱和状态。随后，Briard 等（2020）和 Cavelier 等（2022）使用淡水和盐水开展了进一步实验，以探究湍流混合的动力学；直接数值模拟和理论预测证实了他们的发现。他们发现，不稳定性触发时，两种流体的界面处会出现自然波长。随着振幅增大，会形成清晰的结构；这些结构在节点处因失稳过程而破裂，从而产生湍流混合。最终，不稳定性饱和会抑制湍流，混合层的最终尺寸与解析预测值 L_{sat}一致。最近，Singh & Pal（2022）对旋转作用下互溶流体中的法拉第不稳定性进行了理论分析，并通过直接数值模拟验证了他们的发现。他们报告称，在较低强迫振幅（F）下，旋转效应会延迟次谐波不稳定性的起始，这是因为谐波至次谐波转变与次谐波不稳定性起始之间存在稳定区域。在稳定区域中，混合层因扩散而增长。然而，随着 F增大，稳定性图中所有不稳定区域的面积随之增加，大多数受激模态变得不稳定，因此旋转的不稳定性延迟效应减弱。他们得出结论，当 $(f/\omega)^2 < 0.25$ 时，不稳定性会饱和，混合区尺寸趋于渐近值。然而，当 $(f/\omega)^2 \geqslant 0.25$ 时，不稳定性不会饱和，混合区尺寸会持续增长。

这些研究表明，法拉第不稳定性可促进稳定分层流体中的混合，其作用取决于多种参数，例如振动的频率和振幅以及初始分层的强度。理解稳定分层海洋内部的湍流跨等密度面混合十分重要，因为它在输送水团、热量、营养物质及其他生化物质的全球翻转环流中发挥着重要作用（Wunsch & Ferrari 2004；Talley等人 2016）。法拉第不稳定性为理解这些流动提供了一个框架，并有助于阐明支配海洋流动中混合的潜在物理过程。正如 Noh & Long（1990）、Fernando（1991）和 Fleury 等人 （1991）的研究所报告，地球自转会显著影响温跃层中跨等密度面混合过程的动力学。例如，在中纬度南大洋深海区，$N/f \approx 4.67$，其中 N 为布伦特-魏萨拉频率（Nikurashin 等人 2013；Rosenberg 等人 2015）。在外部强迫、地球自转和分层发挥核心作用的情况下，模拟湍流特性及其伴随的不可逆混合，是地球物理流体动力学中的一项重大挑战。受海洋流动中湍流混合现象的启发，我们旨在利用直接数值模拟，定量研究旋转互溶流体中由时间周期性加速度驱动的湍流混合所伴随的不可逆混合及混合效率。在本研究中，我们采用 Winters 等人 （1995）的框架。该框架通过将总势能划分为背景势能和可用势能，用于研究稳定分层流体中剪切诱导混合的能量学。需要指出的是，法拉第不稳定性驱动湍流混合，进而产生小尺度湍流和垂向运动，从而增强稳定分层流体的混合。然而，分层剪切流中的湍流混合通常由开尔文-亥姆霍兹不稳定性驱动，该不稳定性源于密度梯度上的速度剪切。因此，这两种情况下混合层的动力学有所不同。本文重点研究旋转如何影响弥散界面上结构的形成及其后续破裂，进而产生湍流、不可逆混合和混合效率。为实现这些目标，本文结构安排如下：在 §2 中，我们讨论含边界方程的控制方程、模拟设置，并简要介绍 Singh & Pal（2022）提出的线性稳定性分析理论框架。随后，我们在 §3中讨论线性稳定性分析的预测结果和数值结果。最后，我们在 §4中总结全文。

2. 方法

2.1. 控制方程

本文考虑密度差较小的两层互溶流体系统，该系统由加速度的垂向周期振荡 $g(t) = g_0(1+F\cos(\omega t))$ 驱动。我们认为混合物的密度是质量浓度的线性变化函数，因此，在矩形区域中，浓度为 $C(\rho_2) = 0$ 的较轻流体位于浓度为 $C(\rho_1) = 1$ 的较重流体之上。在垂向周期性强迫 $g(t)$ 下，采用布辛涅斯克近似的非定常不可压缩流动由质量、动量和浓度场的三维守恒方程控制，其形式如下（Singh & Pal 2022）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\nabla P - f\hat{k} \times \boldsymbol{U} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} - 2\mathcal{A}Cg(t)\hat{k}, \tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla C = \kappa \nabla^2 C. \tag{2.1c}$$

这里， $\boldsymbol{U}$ 表示速度矢量，其分量分别为水平方向 x_1、 x_2 和垂直方向 x_3 上的 (U_1, U_2, U_3)； P 为相对于静水平衡背景状态的压力偏差， ν $(\mathrm{m^2 s^{-1}})$ 为运动黏度， κ $(\mathrm{m^2 s^{-1}})$ 为扩散系数。通过雷诺分解，将变量（如 B ）分解为其水平平均的平均分量 $\langle B\rangle_H$ 和脉动分量 b，即

$$B(x_1, x_2, x_3, t) = \langle B\rangle_H(x_3, t) + b(x_1, x_2, x_3, t), \tag{2.2a}$$

$$\langle B\rangle_H(x_3, t) = \frac{1}{l_{x_1} l_{x_2}} \int_{-l_{x_1}/2}^{+l_{x_1}/2} \int_{-l_{x_2}/2}^{+l_{x_2}/2} B(x_1, x_2, x_3, t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{2.2b}$$

此处， $\langle\rangle_H$ 表示均匀方向 x_1 和 x_2 上的水平平均， $\langle b\rangle_H$ =0，且 l_{x_1}、 l_{x_2} 分别为 x_1 和 x_2 方向上的区域长度。混合区尺寸-L根据平均浓度剖面 $\langle C\rangle_H$ （Andrews 和 Spalding（1990））计算得出： L =6 $\int_{-\infty}^{+\infty}\langle C\rangle_H(x_3,\ t)\,(1-\langle C\rangle_H(x_3,\ t))\,\mathrm{d}x_3$。分层（或布伦特-维萨拉）频率定义为

$$N = \sqrt{-2\mathcal{A}g_0 \frac{\partial\langle C\rangle_H}{\partial x_3}}, \tag{2.3}$$

其中垂 直浓度梯度近似为 $\partial\langle C\rangle_H/\partial x_3 = -1/L$。

2.2. 理论模型

Singh & Pal（2022）详细介绍了旋转并垂直振荡的两层可混溶流体系统中法拉第不稳定性的无黏线性稳定性分析。这里，我们简要讨论线性化控制方程（马丢方程）的推导由来及其所依据的假设。将雷诺分解 2.2*a*代入控制方程 2.1*a*、2.1*b* 和 2.1*c*，并令平均速度场为 $\langle\boldsymbol{U}\rangle_H = 0$ 和$\langle\boldsymbol{u}\rangle_H = \langle c\rangle_H = \langle p\rangle_H = 0$，即可得到脉动速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t)$ 和浓度 $c(\boldsymbol{x},\ t)$ 场的方程。所得方程如下：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.4a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + f\epsilon_{ij3}u_j\hat{e}_3 - 2\mathcal{A}g(t)c\delta_{i3} + \frac{\partial\langle u_i u_3\rangle_H}{\partial x_3} + \nu\nabla^2 u_i, \tag{2.4b}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j\frac{\partial c}{\partial x_j} = -u_3\frac{\partial\langle C\rangle_H}{\partial x_3} + \frac{\partial\langle u_3 c\rangle_H}{\partial x_3} + \kappa\nabla^2 c. \tag{2.4c}$$

我们假设流体为无黏流体，且速度和浓度的脉动较小。因此，方程 2.4*b* 和 2.4*c*中的非线性项、黏性项和扩散项均予以忽略。假设浓度剖面为分段形式，即在底部和上部的纯流体（未混合）中为常数，在混合层中呈线性变化；未混合区的平均浓度垂直梯度为 $\partial\langle C\rangle_H/\partial x_3 = 0$，混合区中则为常数 $\partial\langle C\rangle_H/\partial x_3 =$ 。线性化方程的详细推导及其求解策略见 Singh & Pal（2022）。最终得到的线性化方程组（关于 $N > f$）等价于一组马丢方程，具体如下：

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\tau^2} + \left(\frac{f^2\cos^2(\theta)}{\omega^2} + \frac{N^2\sin^2(\theta)}{\omega^2}(1 + F\cos(\tau))\right)a = 0, \tag{2.5}$$

其中， a 表示浓度场模态的振幅， $\tau(=\omega t)$为无量纲时间， θ 是竖直轴与波矢$\mathbf{K}$ 之间的夹角，波矢的

Case	F	ω (弧度/秒$^{-1}$)	f (秒$^{-1}$)	f/ω	$(f/\omega)^2$	η_{cu}
F075f/ω0	0.75	0.67	0	0	0	~ 0.495
F075f/ω48	0.75	0.67	0.322	0.481	0.23	~ 0.363
F075f/ω59	0.75	0.67	0.396	0.591	0.35	永不饱和
F1f/ω0	1.0	0.7	0	0	0	~ 0.421
F1f/ω48	1.0	0.7	0.338	0.482	0.23	~ 0.372
F1f/ω59	1.0	0.7	0.414	0.591	0.35	永不饱和
F2f/ω0	2.0	0.8	0	0	0	~ 0.392
F2f/ω48	2.0	0.8	0.384	0.48	0.23	~ 0.366
F2f/ω59	2.0	0.8	0.473	0.592	0.35	永不饱和
F3f/ω0	3.0	0.9	0	0	0	~ 0.345
F3f/ω48	3.0	0.9	0.432	0.48	0.23	~ 0.333
F3f/ω59	3.0	0.9	0.532	0.592	0.35	永不饱和

表1：模拟参数：η_{cu} 为累积混合效率。所有情况均采用阿特伍德数 A $= 0.01$、运动黏度 $\nu = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$、扩散系数 $\kappa = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$，以及 $g_0 = 10\,\mathrm{ms^{-2}}$（Briard 等 2019年；Singh & Pal 2022）。

分量 (k, l, m) 分别沿 x_1、x_2 和 x_3 方向。Floquet 理论可用于求解系数为周期函数的线性微分方程，因此本文采用该理论求解一组马丢方程 2.5。使用 Floquet 理论求解方程 2.5 的详细过程见附录 A。方程 2.5 的解可能稳定，也可能不稳定，这决定了系统的稳定性。

2.3. 模拟细节

控制方程2.1*a*、2.1*b*和2.1*c* 采用有限差分法在交错网格的笛卡尔坐标系中求解。数值算法见 Singh & Pal（2022）。该数值求解器已得到广泛验证，并用于研究快速旋转对流驱动的发电机（Naskar & Pal 2022*a*，*b*）、旋转对流（Pal & Chala malla 2020），以及若干分层自由剪切流和壁面湍流（Brucker & Sarkar 2010；Pal等 2013；Pal & Sarkar 2015；Pal 2020）。在顶部和底部边界附近设置海绵区，以抑制扰动传播出计算域时产生的虚假反射；阻尼函数会逐渐使速度趋于边界处的相应值。这些阻尼函数按照 Brucker & Sarkar（2010）的说明添加到动量方程 2.1*b* 的右端。海绵区与混合区相距足够远，因此不会影响流体混合的动力学过程。所有变量在 x_1 和 x_2（水平方向）采用周期边界条件，而在顶部和底部壁面（x_3），速度矢量采用无滑移边界条件 $\boldsymbol{U}$，C 和压力 P 则采用诺伊曼边界条件。当前数值模拟中的初始浓度剖面（Briard 等 2019，2020；Singh & Pal 2022）表示为

$$C(\boldsymbol{x}, t = 0) = \frac{1}{2}\left(1 - \tanh\left(\frac{2x_3}{\delta}\right)\right), \tag{2.6}$$

其中，参数 δ 用于改变初始混合区尺寸-L_0。 $\delta = 0$。035 和相应的 $L_0 = 0$。096m 用于所有数值模拟。按照 Singh & Pal（2022）的报告，在初始浓度剖面 2.6 上施加宽带涨落。该

水平向的计算域尺寸为 $l_{x_1} = l_{x_2} = 2\pi$m，垂直方向为 $l_{x_3} = 2H = 3.5\pi$ m，其中顶部和底部边界处均设有厚度为 $H_s = 0.64\pi$m 的海绵区。水平向采用均匀网格 $N_{x_1} = N_{x_2} = 512$，而垂直方向 x_3采用非均匀网格 $N_{x_3} = 512$，并在厚度为 1.53πm 的垂直中心区域进行网格加密，网格数为 $\Delta x_{3_{min}} = \Delta x_1 = \Delta x_2$。表1列出了所有模拟工况的关键参数。我们根据 f/ω 的取值，在每个 F 下选取三个工况：当 $f/\omega = 0$ 时，次谐波不稳定性达到饱和；当 f/ω 为 0.48（$(f/\omega)^2 < 0.25$）时，次谐波不稳定性达到饱和；而当 $f/\omega = 0$ 为 0.59（$(f/\omega)^2 \geqslant 0.25$）时，则始终不会达到饱和（Singh & Pal 2022）。我们为每个工况指定一个唯一名称，例如 F075f/ω48，表示 $F = 0.75$ 和 $f/\omega = 0.48$。

3. 结果

3.1. 线性稳定性分析

图1a展示了在强迫振幅为 $F = 1$ 时，参数平面 $(N/\omega)^2 - (f/\omega)^2$中的稳定性图，该图通过求解线性化控制方程（马丢方程）2.5得到。稳定区域（白色）位于红色（次谐波）和青色（谐波）失稳舌区之间。根据 Floquet 分析（见附录A、Jordan & Smith (2007) 和 Singh 和 Pal（2022）），第一亚谐波舌区内的解是周期为 $T = 4\pi$的周期解。因此，解会以频率 $\omega/2$增长并振荡，因为方程（2.5）中的 $\cos(\tau)$（其中 $\tau = \omega t$）具有周期 $T = 2\pi$，其频率为$2\pi/T = 1$。然而，第二和第三次谐波舌区内的解分别以 $3\omega/2$和 $5\omega/2$的频率增长。第一谐波舌区内的解是 2π 周期的，并以频率 ω增长；而在第二和第三谐波舌区内，解分别以 2ω 和 3ω的频率增长。位于谐波和次谐波失稳舌区之外的解是稳定的。图1b展示了最左侧的第一亚谐波舌区内不稳定的 θ模态的增长率等值线（σ），其范围为 $\sigma = 0.02$至 $\sigma = 0.12$，步长为0.02。黑色曲线对应于 $\sigma = 0$的中性稳定曲线，它将稳定解区域与不稳定解区域分隔开。图1a中的倾斜蓝色实线段表示在给定 $(f/\omega)^2 = 0.23$和初始分层条件 $(N_0/\omega)^2$的情况下，第一谐波舌区中对应于角度 $\theta \in [0, \pi/2]$,、可能被激发的频率（$\in [(f/\omega)^2, (N_0/\omega)^2]$）。该线段从 $(f/\omega)^2$（左端点（×），位于 $\theta = 0$）延伸至 $(N_0/\omega)^2$（右端点（×），位于 $\theta = \pi/2$）。次谐波或谐波舌区内的不稳定 θ模态会触发法拉第不稳定性。这会导致混合区尺寸-L 增大，并使 $(N/\omega)^2$, 减小，如箭头向左所示，因为根据方程2.3，$(N/\omega)^2 = 2\mathrm{A}g_0/(L\omega^2) \propto 1/L$。因此，不稳定性发生的条件（Gréa & Adou 2018；Singh & Pal 2022）基于以下事实定义：只要至少有一个 θ模态落入任一不稳定舌区，解就会增长，从而导致不稳定性。该条件表示为

$$\left(\frac{N}{\omega}\right)^2 > \mathcal{G}(f, F)\,, \tag{3.1}$$

其中，G(f, F) 表示最左侧的第一亚谐波舌区的最左边界（见图1a）。随着时间演化，L 因不稳定的 θ 模态而增长，蓝线（实线）线段的右端 $((N/\omega)^2)$ 进入第一次谐波舌区，如图1b中 $(N/\omega)^2 = 0.4$ 处的蓝色 × 所示。此时，许多频率 $(\in [(f/\omega)^2, (N/\omega)^2])$ 被激发，对应于角度 $\theta \in [0, \pi/2]$ 和增长率 σ，如图1b中倾斜的蓝色虚线段所示。在此状态下会触发次谐波不稳定性，从而导致 L 急剧增长（Singh & Pal

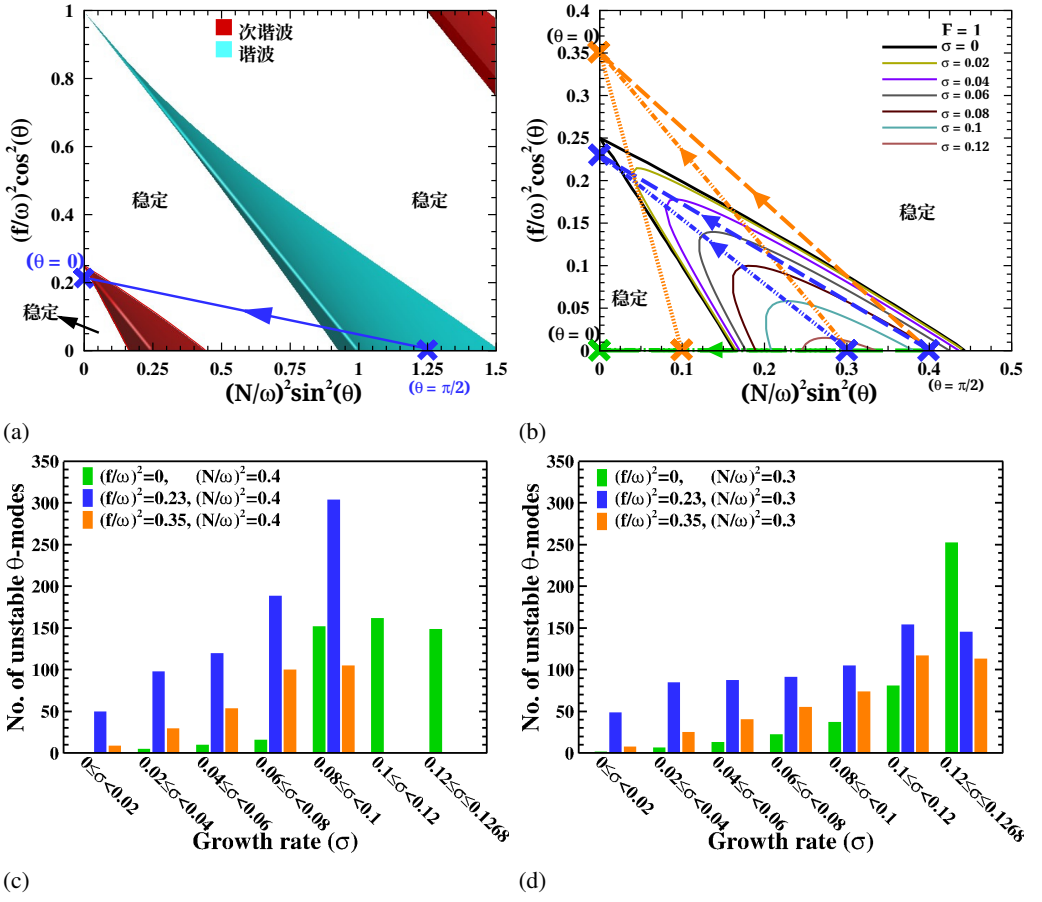

图 1：(a) 强迫振幅为 $F = 1$ 时，Mathieu 方程 2.5（Singh & Pal 2022）解的稳定性图。稳定（白色）区域位于红色（次谐波）和青色（谐波）不稳定舌区之间。倾斜的蓝线（实线）线段表示被激发的频率；对于给定的 $(f/\omega)^2 = 0$，对应角度为 $\theta \in [0, \pi/2]$，。23，第一谐波舌区中的初始条件为 $(N_0/\omega)^2$（左端（×）位于 $\theta = 0$，右端（×）位于 $\theta = \pi/2$）。箭头表示随着混合区尺寸-L 增大，$(N/\omega)^2$ 的演变。(b) 为 (a) 中最左侧的第一亚谐波舌区的放大图。黑色曲线表示增长率为 $\sigma = 0$ 时的中性稳定曲线。彩色曲线分别表示不同增长率（σ）的等值线，间隔为 0.02。绿色、蓝色和橙色的虚线及点划线线段分别表示非旋转情形（f/ω）$^2 = 0$，以及旋转情形（f/ω）$^2 = 0$。23 和 0.35；当（N/ω）^{2} 在 L增长过程中达到 0.4 和 0.3 时，各自允许增长的不稳定 θ模态的可能数量在不同增长率（σ）下，对于（f/ω）$^2 = 0$、0.23 和 0.35 这几种情形，分别见 (c)（当（N/ω）$^2 = 0.4$ 时）和 (d)（当（N/ω）$^2 = 0.3$ 时）。

2022）。这一过程重复发生，$(N/\omega)^2$ 移至0.3，如蓝色点划线段所示。当 $(N/\omega)^2$ 穿过最左侧的中性稳定曲线（黑色），即 $(N/\omega)^2 = G(f, F)$ 时，不稳定性最终达到饱和。不稳定性条件3.1不再满足，L 达到饱和。水平绿色线段和倾斜橙色线段（包括虚线和点划线）分别表示无旋转（$f/\omega)^2 = 0$ 和有旋转（$f/\omega)^2 = 0.35$ 的情况。这里需要指出，当 $(f/\omega)^2 < 0.25$ 时，不稳定性达到饱和。

当 $(f/\omega)^2 \geqslant 0.25$ 时，会观察到一个有趣的现象：$(N/\omega)^2$ 进入最左侧的稳定区间，如倾斜的橙色虚线段所示。该线段必须始终穿过第一次谐波舌区。不稳定性条件 3.1 始终满足，因此 L 将持续增长。因此，不稳定性永远不会饱和。

图1c展示了在各种增长率 σ 下，允许增长的不稳定 θ-模态的可能数量；对于每种情形，$(N/\omega)^2 = 0.4$，$(f/\omega)^2 = 0$ 分别为 0.23 和 0.35。这里，绿色、蓝色和橙色条分别对应图1b中所示的绿色、蓝色和橙色虚线段。对于给定的 $(f/\omega)^2$ 和 $(N/\omega)^2$,，我们假设计算不同增长率下 θ-模态的数量时，θ 角度的步长为 0.1，增长率区间的间隔为 0.02；但最后一个区间除外，它从 0.12 延伸至 0.1268，并包含最大增长率。在非旋转情形 $(f/\omega)^2 = 0$ 中，增长最快的 θ-模态的增长率为 $0.12 \leqslant \sigma \leqslant 0.1268$（见图1c）。然而，旋转情形 $(f/\omega)^2 = 0.23$（$0.08 \leqslant \sigma < 0.1$）中增长最快模态的增长率低于非旋转情形。因此，对于 $(f/\omega)^2 = 0.23$，混合区尺寸-L 将逐渐增加（或 $(N/\omega)^2$ 逐渐减小），而非旋转情形下 L（或 $(N/\omega)^2$）则会快速增加（或减小）。因此，与非旋转情形相比，旋转情形 $(f/\omega)^2 = 0.23$ 的次谐波不稳定阶段更长。次谐波不稳定阶段是指从次谐波不稳定性起始到饱和的时间间隔。在较高旋转速率 $(f/\omega)^2 = 0.35$ 下，与 $(f/\omega)^2 = 0.23$ 相比，增长率为 $0.8 \leqslant \sigma < 0.1$ 的增长最快 θ-模态更少（见图1c中蓝色条和橙色条的对比）。这表明，对于 $(f/\omega)^2 = 0.35$，L 的增加比 $(f/\omega)^2 = 0.23$ 时缓慢得多。图1d显示，在较晚时刻，当 $(N/\omega)^2 = 0.3$ 且 $(f/\omega)^2 = 0$ 时，只有少量 θ-模态能够以较小的增长率 $\sigma < 0.08$ 增长，而大量不稳定模态则以较大的增长率 $\sigma \geqslant 0.08$ 增长。对于 $(f/\omega)^2 = 0.23$，情况则不同：大量不稳定模态在所有增长率下均可增长。这会触发更多次谐波不稳定性，并表明对于 $0 < (f/\omega)^2 < 0.25$ 的情形，湍动能 (*t.k.e.*) 会增加；与非旋转情形相比，这是因为次谐波不稳定性会导致湍流混合（Singh & Pal 2022）。尽管对于 $(f/\omega)^2 = 0.35$，增长率最高达 $\sigma < 0.12$ 的不稳定模态比 $(f/\omega)^2 = 0$ 更多，但以 $0.12 \leqslant \sigma \leqslant 0.1268$ 增长的模态数量显著更少。这表明较高的旋转速率 $(f/\omega)^2 \geqslant 0.25$ 对应较弱的湍流。

图2a展示了强迫振幅为 $F = 3$时的稳定性图。图2b给出了最左侧的第一亚谐波舌区内增长率从 $\sigma = 0$ 到 $\sigma = 0.28$、步长为0.04的等值线。可以观察到，随着 F增加，第一亚谐波舌区和谐波舌区变宽，这些舌区之间的稳定区域缩小，从而导致次谐波不稳定性和湍流混合提前起始，这与非旋转情形相似（Singh & Pal 2022）。此外，对于所有 $(f/\omega)^2$情形，增长最快模态的最大增长率（σ_{max}）在 $F = 3$ 时是较低强迫振幅（$F = 1$）下的2.7倍，即 $\sigma_{max} = 0.338$（对应 $F = 3$），而$\sigma_{max} = 0.1268$（对应 $F = 1$）。因此，次谐波不稳定性在$F = 3$时比在 $F = 1$时更早触发。这表明，对于 $(f/\omega)^2 < 0.25$情形，$F = 3$时的次谐波不稳定阶段短于 $F = 1$时的次谐波不稳定阶段。与 $F = 1$时的情形相似，当 $(f/\omega)^2 < 0.25$时，不稳定性达到饱和；而当 $(f/\omega)^2 \geqslant 0.25$时，不稳定性始终不会饱和，并且 L在 $F = 3$时持续增长，这是由于不稳定的 θ模态不断被触发，如图2b中的橙色虚线段所示。线性稳定性分析得出的这些预测将进一步支持我们的数值

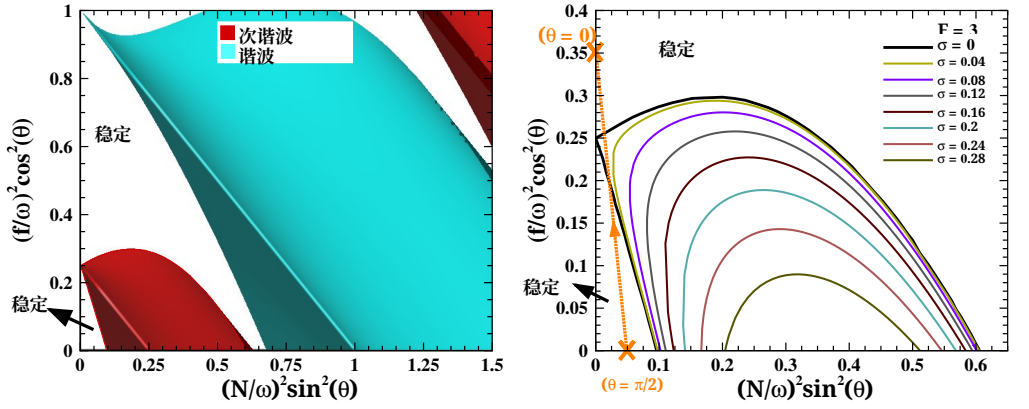

图 2： (*a*) Mathieu 方程 2.5 （Singh & Pal 2022）在 $F = 3$处的解的稳定性图（b）为图*a*中最左侧第一个不稳定次谐波（红色）舌区的放大图。不稳定次谐波区域由表示增长率的黑色中性稳定曲线 $\sigma = 0$ 界定，彩色曲线表示不同增长率的等值线（σ），间隔为 0.04。橙色点线段表示旋转情形 （f/ω）$^2 = 0$。35。箭头表示随着混合区尺寸L 增大，（N/ω）^{2} 的演化。

模拟，详见下一节。

3.2. 数值模拟

垂直方向（x_3）积分的湍动能（$t_\text{。}k_\text{。}e_\text{。}$）随时间 $F = 1$ 的演化如图 3a所示。 $t_\text{。}k_\text{。}e_\text{。}$ 定义为

$$t.k.e. = \frac{\langle u_1^2\rangle_H + \langle u_2^2\rangle_H + \langle u_3^2\rangle_H}{2}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} - \langle \boldsymbol{U}\rangle_H . \tag{3.2}$$

这里， $\langle \boldsymbol{U}\rangle_H(x_3, t)$ 是水平平均的平均速度场， $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ 是脉动速度场。在次谐波不稳定性起始期间，F1f/ω0 和 F1f/ω48 的 *t.k.e.* 快速增长。最终，由于不稳定性饱和， *t.k.e.* 衰减。由于次谐波区域内更多不稳定 θ 模态被激发并得以增长（其增长率 σ 在 0 到 0.1268 之间，线性稳定性分析对此有所显示），F1f/ω48 的 *t.k.e.* 高于 F1f/ω0 。受强旋转影响， $f/\omega = 0.59$ （情形 F1f/ω59 ）的 *t.k.e.* 显著降低。根据线性稳定性分析的预测，在较高增长率下激发的少数不稳定 θ 模态，也可能是 F1f/ω59 的 *t.k.e.* 较低的原因。尽管数值较小，F1f/ω59 的 *t.k.e.* 仍得以维持，这是由于次谐波不稳定性持续触发，从而导致湍流混合持续进行。对于 $F = 0.75$，也观察到了 *t.k.e.* 的类似演变。在更高的强迫振幅 $F = 3$ 下，湍流一开始便出现，因此所有 f/ω 情形的 *t.k.e.* 均相似（图3b），这表明强垂直强迫减弱了旋转的不稳定性延迟效应。注意，F1f/ω48 的 *t.k.e.* 最大值高于 F3f/ω48。在相应强迫振幅下，非旋转情形也存在这一现象。F1f/ω48 的次谐波不稳定阶段更长，因此其 *t.k.e.* 高于 F3f/ω48 的 ω48 。图3a和图3b插图中混合区尺寸 L 的演变以阴影区域展示了次谐波不稳定阶段。

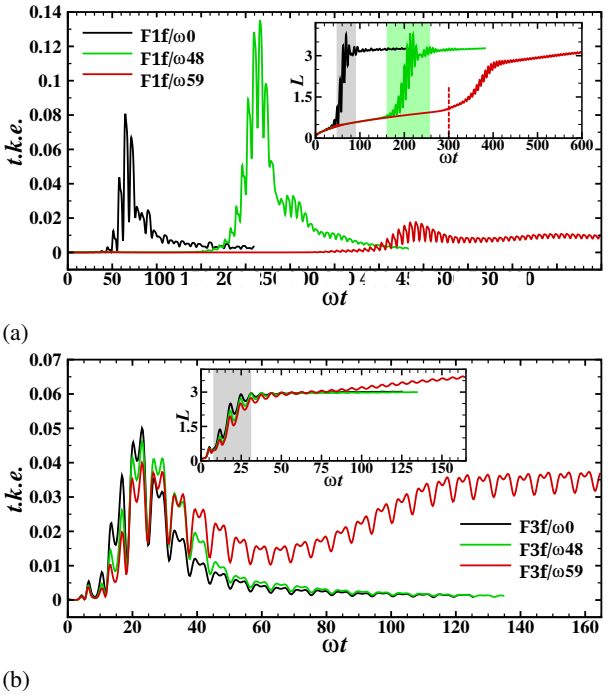

图3：无旋转（$f/\omega = 0$）和有旋转（$f/\omega = 0.48$，0.59）情形下，垂直方向（x_3）积分的 $t_。\ k_。\ e_。$ 随时间的演化，分别对应（a） $F = 1$和（b） $F = 3_。$ 插图显示混合区尺寸-L 的演化，阴影区域表示次谐波不稳定阶段。（a）面板插图中的红色竖直虚线表示 F1f/ω59 次谐波不稳定性的起始。

对于 $F = 0.75,1$，次谐波不稳定阶段较长，这意味着低振幅振荡期间触发的不稳定性，其饱和过程有所延迟。因此，不稳定性有充足时间发展，最终导致湍流。与 $F = 0.75,1$ 相比，在$F = 2,3$ 时，次谐波不稳定阶段较短。不稳定性迅速饱和，因此没有足够时间发展并增强湍流。这一观察结果与我们的线性稳定性分析一致：分析预测，增长最快的模态的最大增长率在 $F = 3$ 时是 $F = 1$ 时的 2.7 倍，因此 $F = 3$ 时的次谐波不稳定阶段较短。有趣的是，F2f/ω59 （图未显示）和 F3f/ω59 均表现出 $t.k.e.$ 的恢复，这是由于次谐波不稳定性持续触发所致。

通过分析垂直平面内浓度场的等值线图，研究有旋转和无旋转情况下向湍流转变的现象。图4展示了 F1f/ω0的浓度场界面的演化。最初受到垂直周期性加速度作用的扰动界面，由于谐波和次谐波共振而变形成波状形态，如图4a 所示，时间为 $\omega t = 33_。6_。$ 这一弥散的波状界面在次谐波不稳定性的作用下振幅增大，形成蘑菇状波，如图4b 所示，时间为 $\omega t = 49_。$ 此时，一些波长较短的波变得紊乱并相互作用，从而产生微小的速度脉动。在下一次振荡中，较长波长波的振幅增大，形成形状清晰的蘑菇状波，并在节点处破碎，如图4c 所示，时间为 $\omega t = 56_。$ 这一过程称为

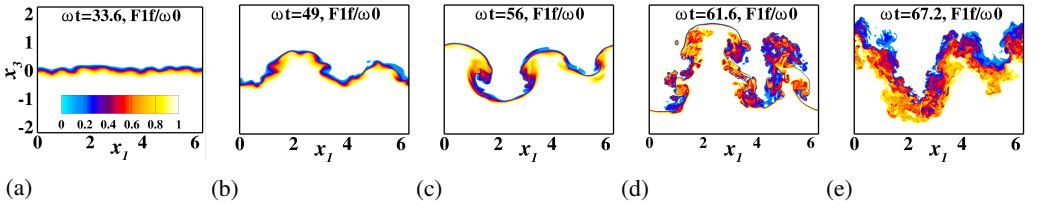

图4：案例 F1f/ω0 在各时刻的垂直 $x_1 - x_3$ 中心平面（$x_2 = \pi$）浓度场等值线：(*a*) ωt = 33。6，(*b*) ωt = 49，(*c*) ωt = 56，(*d*) ωt = 61。6，以及 (*e*) ωt = 67。2。 $C = 1$ （密度较大）和 $C = 0$ （密度较小）的纯流体以透明方式显示。

法拉第波的波破碎（Cavelier 等人，2022），它导致不可逆混合的起始。在随后几次振荡中，整个界面破碎成小尺度结构，最终完全转变为湍流，如图4d和4e所示。对于 $F = 0$，75 和 $f/\omega = 0$，也观察到了类似的动力学过程（见影片1 和影片4）。

在 F1f/ω48 中，垂直振荡与旋转的综合作用使弥散界面上多个位置出现卷起结构，如图5a中 ωt = 175.28时所示。在随后的振荡中，卷起结构会继续形成，尺寸较大，但方向与前一个相反。这些卷起结构最终会破碎并形成湍流（见图5a）。值得注意的是，整个界面层在一次振荡中就破碎成小结构，因此，与 F1f/ω0 相比，湍流混合区域的厚度更大；在后者中，蘑菇状波先在节点处破碎，随后湍流在接下来的振荡中扩展至整个界面层。作为补充数据提供的影片2展示了这一过程。卷起结构的形成及其最终破碎并转变为湍流，是 F1f/ω48 中 *t.k.e.*较 F1f/ω0 更大的原因（图3a）。这一现象与我们的线性稳定性分析一致，具体如下。对于 F1f/ω48，大量不稳定模态在各种增长率下均可增长。当 $(N/\omega)^2$ = 0.4和0.3时，图1c和图1d展示了这一点。对应于 $(N/\omega)^2$ = 0.4和0.3的 ωt 处于 175 – 205范围内。图5a显示，在 ωt = 193.2时卷起结构开始形成，因此可以推断，不稳定模态会促进卷起结构的形成，而卷起结构破碎后会增强 F1f/ω48中的 *t.k.e* 。我们在 F075f/ω48 中也观察到类似的动力学过程（见影片5）。这一现象导致不可逆混合逐渐增强。当科里奥利频率增至 f/ω = 0.59（案例 F1f/ω59）时，我们发现旋转的作用足以抑制大振幅波和卷起结构的形成。因此，湍流混合仅由指状不稳定性引起，如图5b所示（见补充影片3和影片6）。

在较高的强迫振幅 F = 3 下，对于 f/ω = 0。48，我们观察到界面上随机指状结构的形成；如图 5c所示，这些结构在第一次振荡中便发生断裂。因此，湍流混合从周期性强迫开始时便已启动。此外，由于在较高 F下次谐波不稳定阶段较短，湍流强度较低。随着旋转所产生的不稳定性延迟效应在较高强迫振幅下减弱（Singh & Pal 2022），对于所有 f/ω 为 F = 2、3，湍流混合均通过该机制发生（图未示出）。我们已将 F3f/ω48 的浓度场动画作为补充数据（影片7）提供。

由于不涉及平均速度场，我们从分析不可逆过程

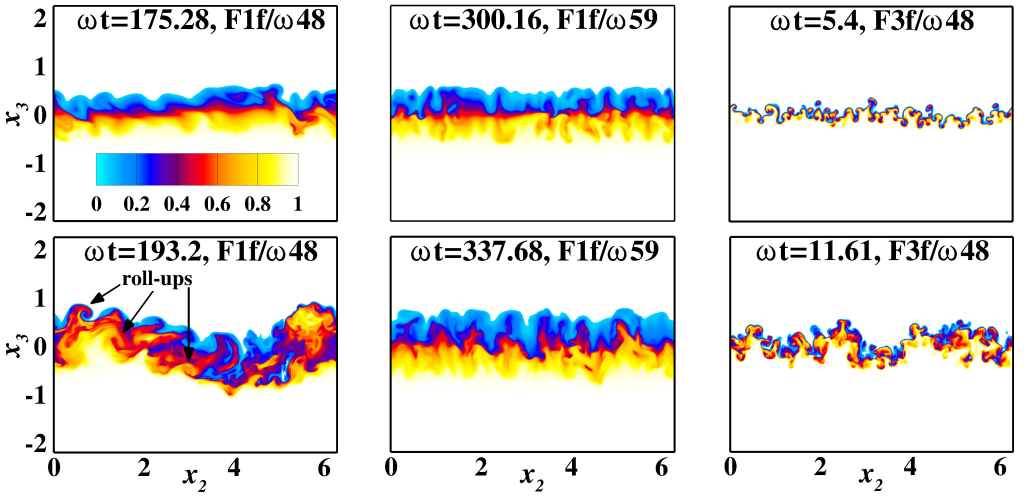

图5：旋转情形下，在失稳增长阶段的不同时刻，垂直 $x_2 - x_3$ 中心平面（$x_1 = \pi$）内浓度场的等值线：（a）F1f/ω48，（b）F1f/ω59，以及（c）F3f/ω48。

混合开始，采用 $t.k.e.$ 演化方程如下：

$$\frac{dt.k.e.}{dt} = \mathcal{P} - S - B - \epsilon - \frac{\partial \mathcal{T}_j}{\partial x_j}. \tag{3.3}$$

湍流产生项 P $= -\langle u_i u_j \rangle_H \frac{\partial \langle U_i \rangle_H}{\partial x_j}$和输运项 $\partial \mathrm{T}_j/\partial x_j$（其中 T $_j = \langle p u_j \rangle_H - 2\nu \langle s_{ij} u_i \rangle_H + \frac{1}{2}\langle u_i u_i u_j \rangle_H$可忽略不计）。周期性强迫的能量输入为 $S = 2\mathrm{A}g_0 F \cos(\omega t)\langle u_3 c \rangle_H$。浮力通量 $B = 2\mathrm{A}g_0 \langle u_3 c \rangle_H$ 表示 $t.k.e$ 与势能之间可逆的交换速率。黏性耗散 $\epsilon = 2\nu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle_H$（其中 $s_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$）则是 $t.k.e$ 的汇。所有数值模拟的方程 3.3 均实现了极佳的闭合，这表明各方向上的网格间距足以解析所有长度尺度。

通过将总势能（PE）$E_p = 2\mathrm{A}g_0 \int_V C(\boldsymbol{x}) x_3 \mathrm{d}V$分解为可用势能（APE） E_a与背景势能（BPE） E_b之和，来表征不可逆混合（Winters 等 1995）。BPE 是流体可能具有的最小势能，无法从势能库中提取出来以驱动宏观流体运动。为估算流体在任意时刻的 BPE，将一个浓度为 C 、位于高度 x_3 的体积元 dV 绝热地移至x_3^*，使重新分布的浓度场处处达到统计稳定状态（$\mathrm{d}C(x_3^*)/\mathrm{d}x_3^* \leqslant 0$）。我们计算 $E_b = 2\mathrm{A}g_0 \int_V C(x_3^*) x_3^* \mathrm{d}V$，并将其从 E_p中减去，得到 E_a（Winters 与 Barkan，2013；Chalamalla 与 Sarkar，2015）。 E_a可转化为动能。由于我们的计算域由顶部和底部边界封闭，表面通量为零。我们按照 Winters等 （1995）推导 PE、BPE 和 APE 演化的简化方程，

$$\frac{dE_p}{dt} = B_V + \phi_i, \tag{3.4a}$$

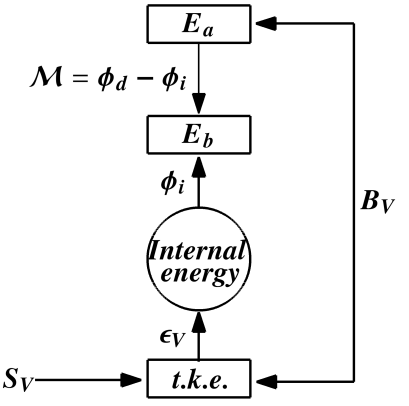

图 6：能量路径示意图： S_V 为体积积分后的 S，表示周期性强迫输入的外部能量； B_V 为可逆浮力通量；M 为纯湍流混合导致的不可逆混合率； ϕ_d 为不可逆跨等密度面通量； ϕ_i 为层流扩散导致的内能向势能的转换； ϵ_V 为动能耗散。

$$\frac{dE_b}{dt} = \phi_d, \tag{3.4b}$$

$$\frac{dE_a}{dt} = B_V - (\phi_d - \phi_i)\,. \tag{3.4c}$$

这里， B_V、 ϕ_i和 ϕ_d均在体积$V = l_{x_1} l_{x_2}(2H - 2H_s)$上积分，而（$2H - 2H_s$）表示计算域的垂直高度，不包括顶部和底部海绵层的厚度。 $B_V = \int B l_{x_1} l_{x_2} \mathrm{d}x_3$是体积积分的浮力通量， $\phi_i = -2\mathrm{A} g_0 \kappa A \left(\langle C_{top}\rangle_H - \langle C_{bot}\rangle_H\right)$，其中 $A = l_{x_1} l_{x_2}$表示在没有宏观流体运动的情况下，静态稳定的浓度（C）分布通过内能不可逆地转化为势能，使势能增加的速率。 ϕ_i 是严格非负的量，表示因层流扩散而导致 BPE 以恒定速率 ϕ_i 增加。 $\phi_d = 2\mathrm{A} g_0 \kappa \int_V -\mathrm{d}x_3^* \mathrm{d}C \, |\nabla C|^2 \mathrm{d}V$表示由不可逆跨等密度面通量引起的 BPE 变化率，是不可逆混合的量度。请注意，随着 $\phi_d \geqslant 0$，跨等密度面混合总会使 E_b增加。 ϕ_d 与层流扩散导致的 BPE 增加以及经由 B_V 直接来自 *t.k.e.* 储能库的能量有关； B_V 与湍流混合相关。我们希望研究次谐波不稳定性引发的湍流混合相关的能量学。因此，我们定义不可逆混合率 M（$= \phi_d - \phi_i$），以将纯湍流混合导致的 BPE 增加与层流扩散导致的增加区分开来（Peltier & Caulfield 2003）。由于计算域中存在周期性强迫，我们选择计算累积混合效率（Peltier & Caulfield 2003；Briard等 2019年），如下所示：

$$\eta_{cu}(t) = \frac{\int_0^t \mathcal{M}\,\mathrm{d}t}{\int_0^t (\mathcal{M} + \epsilon_V)\,\mathrm{d}t}. \tag{3.5}$$

这里，$\epsilon_V = \int \epsilon l_{x_1} l_{x_2} \mathrm{d}x_3$ 为体积积分后的黏性耗散。累积混合效率 η_{cu} 衡量不可逆损失 $t_\circ k_\circ e_\circ$ ，该损失用于不可逆湍流混合；与之相对，总 $t_\circ k_\circ e_\circ$ 损失则包括不可逆湍流混合和黏性耗散。

图 6 展示了能量路径。箭头表示不同能量库之间的能量交换

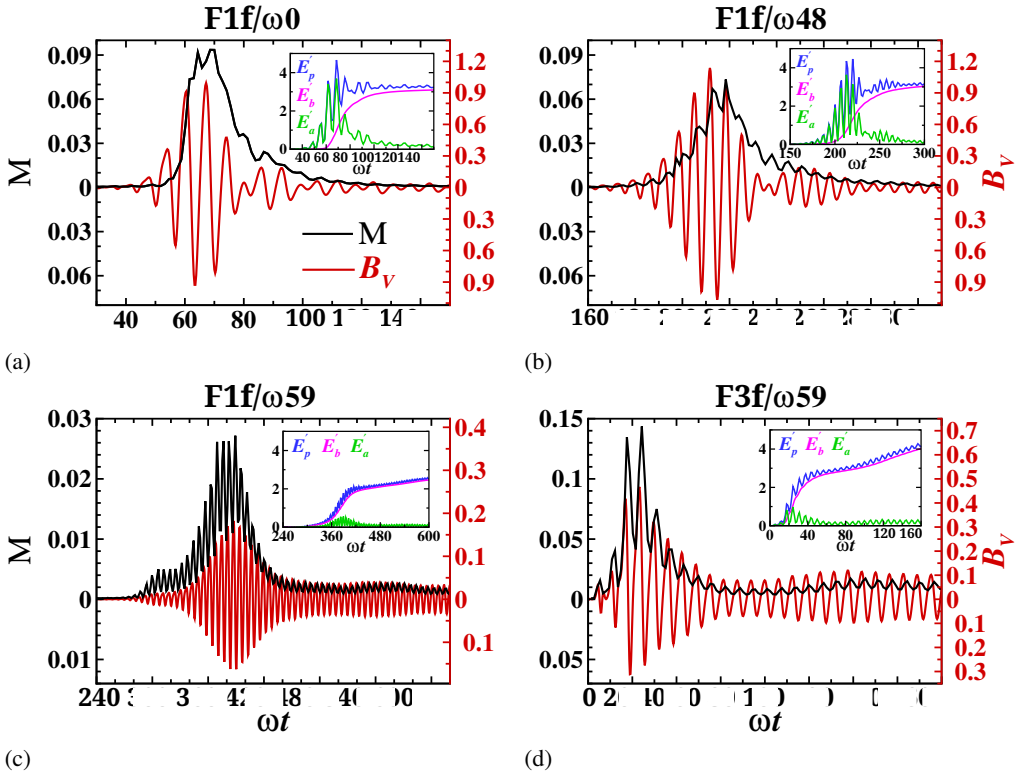

图7：在 $F = 1$ 时，浮力通量（B_V）和不可逆混合率（M）的时间演化：对于（a） $f/\omega = 0$、（b） $f/\omega = 0$。48、（c） $f/\omega = 0$。59，以及在 $F = 3$ 时对于（d） $f/\omega = 0$。59。各面板插图显示了不可逆湍流混合引起的势能变化（$E_p'(t) = E_p(t) - E_p(0) - \phi_i t$）、背景势能（$E_b'(t) = E_b(t) - E_b(0) - \phi_i t$）和可用势能（$E_a'(t) = E_p'(t) - E_b'(t)$）的相应时间演化。

。S_V 表示外部能量向 *t.k.e.* 储能库的输入速率。在湍流混合引起流体运动的情况下，*t.k.e.* 通过可逆浮力通量 B_V进入势能库，使 E_a增加。其中一部分 E_a 可通过纯湍流混合转移至 E_b，其程度由 M 量化，从而导致不可逆混合。剩余部分 E_a则通过 B_V 转化回 *t.k.e.*。能量从 *t.k.e.*储能库损失并进入内能库，这一过程通过黏性耗散 ϵ_V实现。层流扩散则通过 ϕ_i 直接向 E_b 提供能量。

图7展示了可逆浮力通量 B_V 和不可逆混合率 M 的时间演化。我们还在每幅图的插图中给出了 E_p'、E_b'和 E_a' 的演化。E_p' 和 E_b' 表示不可逆湍流混合导致的势能（PE）和背景势能（BPE）的总变化量，其计算以初始值为基准。E_a'（$=E_p' - E_b'$）表示相应的可用势能（APE）变化量。与恒定速率的层流扩散相关的势能和背景势能累积变化未计入 E_p' 和 E_b'。因此，E_p（t）$' = E_p$（t） $- E_p(0) - \phi_i t$，且 E_b（t）$' = E_b$（t） $- E_b(0) - \phi_i t$，其中 t 是从模拟开始起算的时间。对于 F1f/ω0，*t.k.e.* 因次谐波不稳定性的起始以及蘑菇状波的形成和破碎而增加。这种 *t.k.e.* 的增加导致 B_V 在 $\omega t \simeq 46 - 55$ 时增大，因此流体势能也随之增加，如图 7a 所示。势能以可用势能的形式储存，后者几乎

通过 B_V 回到 *t.k.e.*，因为可用势能向背景势能的转换仍为零，这一点由 M ≈ 0 量化。在随后的振荡中，这种 *t.k.e.* 有助于外部能量输入，使 *t.k.e.* 增强并导致波破碎。M 也在 $\omega t \simeq 55$ 后开始增大。波破碎后，整个界面层发生破碎，M 迅速增大，表明可用势能快速转化为背景势能，而可用势能则减少。当不稳定性在 $\omega t \simeq 70$ 处达到饱和时，*t.k.e.* 和 B_V 均减小，使可用势能下降，而势能达到饱和。背景势能也趋于饱和，这可由 M 逐渐减小看出。与 F1f/ω0 类似，我们观察到，F1f/ω48 的 B_V 在 $\omega t \simeq 180$ 时增大，这是由于 *t.k.e.* 增强所致（见图7b）。与此同时，B_V、势能和可用势能也都增加。与 F1f/ω0 相比，F1f/ω48 的 M 和背景势能逐渐增加，而非快速增加。其原因是，在 F1f/ω48 的次谐波不稳定阶段，弥散界面处持续形成并破碎卷起结构。随着不稳定性达到饱和，B_V 和可用势能开始下降，背景势能随之增加并最终达到饱和；这一过程在图7b中表现为 M 逐渐降至零。M 的这种逐渐下降表明，不可逆混合持续的时间比 F1f/ω0 更长，这是由于次谐波不稳定阶段较长。对于 F1f/ω59，由于存在稳定区域，次谐波不稳定性的起始明显延迟；该区域内不会激发谐波或次谐波模态（Singh & Pal 2022）。如图3a插图所示，F1f/ω59 的混合区尺寸-L 演化清楚地显示了这一区域。因此，直到 $\omega t \simeq 280$，B_V 和可用势能 ~ 0。在此期间，初始浓度剖面在保持静力稳定性的同时发生扩散（Winters 等，1995）。直到湍流混合开始，流体始终处于势能最小的参考态，这根据 E_b 的定义表明 $E_p = E_b$。不会产生可用势能，且 $\phi_d = \phi_i$（根据方程3.4a、3.4b和3.4c），这表明背景势能通过 ϕ_i 增加。因此，势能的增加是以流体内能为代价的。我们发现，直到 $\omega t \simeq 280$，$\phi_d(0.001) \approx \phi_i(0.0008)$。F1f/$\omega$48 也观察到了类似现象，并且对于所有 f/ω，在 $F = 0.75$ 时也都如此。旋转速率较高时，湍流较弱（见影片3），因此 *t.k.e* 和 B_V 均小于前述情况（图7c）。B_V 在 $\omega t \simeq 280$ 后增加，使可用势能增大。由 *t.k.e* 产生的可用势能，大部分经由 B_V 转移至背景势能。因此，只有少部分可用势能能够可逆地交换回 *t.k.e.*，这由图7c插图中较小的可用势能值体现。因此，在随后的振荡中，*t.k.e.* 储能库中只有少量动能可用，这部分能量会贡献于外部能量输入，从而导致湍流减弱。对于 F1f/ω59，不稳定性始终未达到饱和，而是持续触发，使 *t.k.e.* 和 B_V 得以维持。势能也因 B_V 而持续增加；由于大部分可用势能转化为背景势能，可用势能始终保持较低水平。M 持续振荡且保持大于零，表明背景势能随时间持续增加，也说明较高旋转速率下不可逆混合得以持续。

对于较高的强迫振幅 $F = 2$，3 和 $f/\omega = 0$，0.48，*t.k.e.* 和 B_V 从周期性强迫开始时便增加，导致可用势能增加（图未示出）。随后，背景势能和 M 也增加。由于这些情况下的不稳定性很快达到饱和，B_V 和可用势能约为零。背景势能达到饱和，M 也趋于零，这表明不可逆混合停止。对于 $F = 2$，3 和 $f/\omega = 0.59$ 的情况，能量学的初期演变（F3f/ω59 的图7d）与上述情况相似。然而，在后期，其演变类似于 F1f/ω59 的情况，并呈现非零的 B_V 和 M，表明背景势能持续增加，且不可逆湍流混合得以维持。

累积混合效率的时间演化 η_{cu} 绘于图8中。我们报告 η_{cu} 不稳定性饱和时的 $f/\omega = 0$ 和0。48 种情况。由于不稳定性

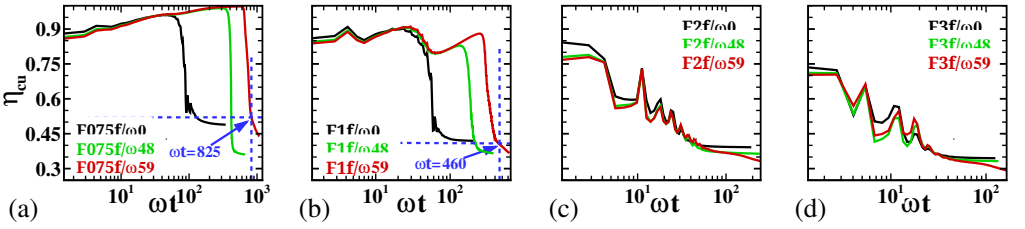

图 8：强迫振幅为 (*a*) $F = 0.75$、(*b*) $F = 1$、(*c*) $F = 2$ 和 (*d*) $F = 3$ 时，无旋转（$f/\omega = 0$）和有旋转（$f/\omega = 0.48$，0.59）情形下累积混合效率的时间演化 η_{cu}。

对于 $f/\omega = 0.59$，不稳定性从未饱和，因此 η_{cu} 是在达到峰值后 M 降至近似最小值时给出的。对于 F075f/ω0 情况，当不可逆混合率 M 和黏性耗散 ϵ_V 增加时，η_{cu} 迅速降低。不稳定性饱和后，它达到 ~ 0.495的最小值。在存在旋转的 F075f/ω48中，η_{cu} 降至 ~ 0.363，这意味着混合效率不如 F075f/ω0。对于 F075f/ω59，由于不可逆混合持续进行，η_{cu} 持续降低。然而，混合仍然更有效（在 $\omega t \simeq 825$时为$\eta_{cu} \approx 0.52$），高于 F075f/ω0 和 F075f/ω48。对于 F1f/ω0，η_{cu} 为 ~ 0.421，与 Briard 等（2019）所得结果相似。在 $F = 1$ 以及 $f/\omega = 0.48$ η_{Cu} ~ 0.372，而对于 $f/\omega = 0.59$，累积混合效率在 $\omega t = 460$时为 0.406，但会随时间持续降低。我们发现，对于所有 f/ω 值，随着 F 增加，混合效率降低；对于 $f/\omega = 0.59$的情况，混合效率还会继续降低。在本研究中，使垂直振荡的稳定分层流体发生混合的主要机制是法拉第不稳定性。在密度分层剪切流中，开尔文-亥姆霍兹不稳定性负责混合。尽管混合机制不同，我们模拟得到的累积混合效率却与分层剪切湍流（Gregg 等人 2018）的结果惊人地相似。

4. 结论

我们进行直接数值模拟，以研究旋转对垂直振荡作用下两种互溶流体中由法拉第不稳定性驱动的湍流混合的影响。在较低强迫振幅 $F = 0。75$ 和 1 时，$t。k。e。$ 随科里奥利频率从 $f/\omega = 0$ 增至 0。48 而增强。这种增强归因于次谐波区域中更多不稳定θ模态的激发，进而在次谐波不稳定阶段促使界面层处的卷起结构形成并破碎。无旋转情况下的湍流生成机制则有所不同。对于 $f/\omega = 0$ 情况，会形成清晰的蘑菇状波，并在节点处解体。随后，湍流在连续的振荡过程中扩展至整个混合层。与 $f/\omega = 0$，0。48 相比，$f/\omega = 0。59$ 的湍流较弱，这是由于指状结构的形成并逐渐破碎所致。在 $f/\omega = 0$ 分别为 0。48 和 0。59、且强迫振幅较高（$F = 2$ 和 3）时，我们观察到指状结构在周期性强迫的前两次振荡中破碎，从而使湍流提前起始。然而，由于次谐波不稳定阶段较短，与较低强迫振幅时相比，湍流强度较低且持续时间较短。线性稳定性分析表明，较高 F 下次谐波不稳定阶段缩短，归因于增长最快的模态具有更高的增长率；$F = 3$ 的增长率是 $F = 1$ 的 2.7 倍。有趣的是，对于 $f/\omega = 0。59$，$t。k。e。$ 在初始下降后有所增加，这是由于持续触发

*Turb*流体由法拉第不稳定性驱动的湍流混合，发生于旋转可混溶流体中 17 次谐波不稳定性。

我们还分析了与流体相关的能量学。对于 $f/\omega = 0.48$、$F = 0.75$、1 的情况，*t.k.e.* 增加意味着浮力通量 B_V 增加，因此可用势能也随之增加。部分可用势能通过与湍流混合相关的不可逆混合率 M 转化为背景势能，其余部分则通过 B_V 转化回 *t.k.e.*。当不稳定性饱和导致 *t.k.e.* 开始减小时，B_V 也随之减小，表明可用势能减少。因此，背景势能趋于饱和，M 则趋近于零。有趣的是，由于次谐波不稳定阶段持续时间较长，$f/\omega = 0.48$ 的不可逆混合持续时间比 $f/\omega = 0$ 更长。旋转速率较高的 $f/\omega = 0.59$ 情况下，次谐波不稳定性的起始显著延迟，因此 B_V 和可用势能保持为零。在此期间，初始浓度剖面发生扩散，使总势能以 ϕ_i 的速率增加。根据方程 3.4c，由于 ϕ_d 等于 ϕ_i，这些势能以相同速率全部转化为背景势能。次谐波不稳定性开始后，*t.k.e*、B_V 和可用势能均增加。然而，这些值仍显著小于 $f/\omega = 0$、0.48 的情况。与 $f/\omega = 0$、0.48 的情况相比，在 $f/\omega = 0.59$ 的情况下，大部分可用势能通过 M 转化为背景势能，只有少量可用势能转回 *t.k.e* 储能库。因此，在随后的振荡中，只有少量 *t.k.e.* 可用于贡献周期性强迫带来的外部能量输入，这表明与 $f/\omega = 0$、0.48 的情况相比，湍流较弱。由于 $f/\omega = 0.59$ 的不稳定性从未饱和，*t.k.e.*、B_V 和可用势能虽然较小，但始终不为零。M 始终大于零，表明背景势能持续增加，且不可逆湍流混合持续进行。在 $F = 2$、3 时，对于所有 f/ω 情况，M 从垂直强迫开始时便不断增加。然而，由于次谐波不稳定性迅速饱和，$f/\omega = 0$、0.48 的不可逆混合并未持续很久。由于 $f/\omega = 0.59$ 的不稳定性从未饱和，M 持续振荡，因此不可逆混合也持续进行。最后，我们用累积混合效率量化混合现象。我们得出结论：当旋转速率 $(f/\omega)^2 > 0.25$ 且强迫振幅较低、为 $F = 0.75$、1 时，与 $(f/\omega)^2 < 0.25$ 相比，混合过程效率更高，因为大部分可用势能通过 M 转化为背景势能。

S补充数据。补充视频可在 https://doi.org/**.****/jfm.** 查看 *...

致谢。我们衷心感谢 Vamsi K. Challamalla 博士提供用于计算总势能、x_3^*、背景势能和 ϕ_d 的计算机程序。我们还要感谢印度理工学院坎普尔分校研究与开发办公室通过资助编号 IITK/ME/2019194 提供经费支持。我们衷心感谢印度政府国家超级计算使命下的 PARAM Sanganak 在印度理工学院坎普尔分校提供的支持与资源。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

作者贡献。作者对数据分析、得出结论以及论文撰写作出了同等贡献。

附录A。Floquet 分析

本文简要讨论与 Floquet 理论相关的定理，以及如何运用这些定理求解 Mathieu 方程（2.5）的步骤。定理证明和求解步骤可参见 Jordan & Smith（2007年，第308–317页）。

定理 1（Floquet 定理）。设 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$ 是一阶线性微分系统，其中 $A(t)$ 是 T-周期矩阵，满足 $A(t+T) = A(t)$，$\forall\, t$。该系统至少有

一个非平凡解 $\vec{x} = \vec{\chi}(t)$ 使得

$$\vec{\chi}(t+T) = \mu\vec{\chi}(t), \quad \forall\, t \tag{A 1}$$

其中 μ 是一个特征数或***Floquet*** 乘子。

若 $\Phi(t)$ 是系统 $\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x}$ 的一个基本解矩阵，则 $\Phi(t+T)$ 也是一个基本矩阵，并且存在一个非奇异矩阵 C，使得：

$$\Phi(t+T) = C\Phi(t), \quad \forall\, t \tag{A 2a}$$

$$C = \Phi^{-1}(t)\,\Phi(t+T). \tag{A 2b}$$

这里，**特征数**μ's 是 C的特征值。我们可以求得在 $t = 0$ 处取初始条件的矩阵$C = \Phi(T)$，使得 $\Phi(0) = \boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。

定理 2。对于系统 $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$，其中 $A(t)$ 是 T-周期的，其特征数为特征数$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$，则特征数的乘积为：

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n = \exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}\{A(t)\}\right). \tag{A 3}$$

系统的**特征指数** (σ) 定义为 $e^{\sigma T} = \mu$，用于表征不稳定性的增长率。

定理 3. 设 C 具有 n 个互异特征值，μ_i 及相应的 σ_i，i=1,2,...,n。则系统 $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ 具有 n 个如下形式的线性无关解：

$$\vec{\chi}_i(t) = e^{\sigma_i t}\vec{P}_i(t) \tag{A 4}$$

其中 $P_i(t)$是周期为 T的周期向量函数。

显然，**特征指数** $e^{\sigma_i t}$将决定解（A4）的行为。现在，我们将上述定理应用于 Mathieu 方程（2.5）。方程（2.5）可改写为：

$$\ddot{a} + (\gamma + \alpha + \beta\cos\tau)\,a = 0, \tag{A 5}$$

其中，

$$\gamma = \frac{f^2\cos^2(\theta)}{\omega^2}; \quad \alpha = \frac{N^2\sin^2(\theta)}{\omega^2}; \quad \beta = F\frac{N^2\sin^2(\theta)}{\omega^2}. \tag{A 6}$$

定义 $a = X$ 和 $\dot{a} = Y$，将方程（A5）表示为如下的一阶系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\gamma + \alpha + \beta\cos\tau) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}. \tag{A 7}$$

按照定理 1的记号，

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\gamma + \alpha + \beta\cos\tau) & 0 \end{bmatrix}. \tag{A 8}$$

这里，$A(\tau)$ 的周期为 2π。当 $\mathrm{tr}\{A(\tau)\} = 0$ 时，$A(\tau)$ 的**特征数**之积为 $\mu_1\mu_2 = \mathrm{e}^0 = 1$。对于以下初始条件

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A 9}$$

我们通过 $C = \Phi(T)$ 对系统进行数值积分（使用 MATLAB®），从 $\tau = 0$ 到 $\tau = 2\pi$，得到矩阵 μ_1 和 μ_2 是 C 的特征方程的解

$$\mu^2 - (\text{sum of roots})\mu + (\text{product of roots}) = 0, \tag{A 10}$$

并利用 $\mu_1\mu_2 = 1$，得到

$$\mu^2 - \phi(\gamma, \alpha, \beta)\mu + 1 = 0. \tag{A 11}$$

这里，$\phi(\gamma,\ \alpha,\ \beta)$ 表示根的和。方程（μ_1 和 μ_2）的解A11为

$$\mu_1, \mu_2 = \frac{1}{2}\left(\phi \pm \sqrt{(\phi^2 - 4)}\right). \tag{A 12}$$

因此，ϕ 的不同取值及其对应的 μ_1，μ_2 (σ_1 和 σ_2 将决定解的行为。当 $\phi > 2$：μ_1，μ_2 均为实数且为正，其中 $\mu_1\mu_2 = 1$，其中一个（设为 $\mu_1 > 1$ 且 $\mu_2 < 1$。相应的**特征指数**为实数，形式为 $\sigma_1 = \xi > 0$，$\sigma_2 = -\xi < 0$ （因为 $\sigma_2 = \ln(\mu_2)/T < 0$）。因此，定理3 给出的通解可写为：

$$X(\tau) = c_1 e^{\xi\tau} P_1(\tau) + c_2 e^{-\xi t} P_2(\tau), \tag{A 13}$$

其中 $\xi > 0$，因此 $\mathrm{e}^{\xi\tau}$ 对应于随时间的指数增长，解变得**不稳定**，且具有**谐波**特性。当 $\phi < -2$：μ_1、μ_2 均为实数且为负，其中$\mu_1\mu_2 = 1$。通解的形式为：

$$X(\tau) = c_1 e^{\left(\xi + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\tau} P_1(\tau) + c_2 e^{\left(-\xi + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\tau} P_2(\tau). \tag{A 14}$$

此处，$\mathrm{e}^{\xi\tau}$ 会导致解指数增长，最终变得**不稳定**，并呈现**次谐波** 响应。当 $-2 < \phi < +2$：μ_1、μ_2 为复数时，我们有 $\sigma_1 = \mathrm{i}\zeta$和 $\sigma_2 = -\mathrm{i}\zeta$，其中 ζ 为实数，这意味着解在任何时刻均有界且呈振荡状态，但不一定是周期的，并且位于**稳定参数区域**内。当 $\phi = +2$：$\mu_1 = \mu_2 = 1$时，其中一个解的周期为 2π，并位于稳定性曲线上的**谐波舌区** 。当 $\phi = -2$：$\mu_1 = \mu_2 = -1$时，其中一个解的周期为 4π，并位于**稳定性曲线** $\phi = 2$上的**次谐波舌区** 。

参考文献

Amiroudine, Sakir, Zoueshtiagh, Farzam & Narayanan, Ranga 2012 互溶液体间由法拉第不稳定性产生的混合。*Physical review E* **85** (1), 016326. Andrews, Malcolm J & Spalding, Dudley Brian 1990 一项研究瑞利–泰勒不稳定性引发的二维混合的简单实验。*Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **2** (6), 922–927. Briard, Antoine, Gostiaux, Louis & Gréa, Benoît-Joseph 2020 互溶流体中的湍流法拉第不稳定性。*Journal of Fluid Mechanics* **883**. Briard, Antoine, Gréa, Benoît-Joseph & Gostiaux, Louis 2019 互溶流体中法拉第不稳定性的谐波到次谐波转变。*Physical Review Fluids* **4** (4), 044502. Brucker, Kyle A & Sarkar, Sutanu 2010 分层流体中自推进尾流与拖曳尾流的比较研究。*Journal of Fluid Mechanics***652**, 373–404. Cavelier, M, Gréa, B-J, Briard, A & Gostiaux, L 2022 互溶流体中法拉第波向湍流的亚临界转捩。*Journal of Fluid Mechanics* **934**. Chalamalla, Vamsi K & Sarkar, Sutanu 2015 内潮驱动的近底湍流中的混合、耗散率及其基于翻转的估算。*Journal of Physical Oceanography* **45** (8), 1969–1987. Diwakar, SV, Zoueshtiagh, Farzam, Amiroudine, Sakir & Narayanan, Ranga 2015 互溶流体系统中的法拉第不稳定性。*Physics of Fluids***27** (8), 084111. Faraday, Michael 1831 第十七篇：论一种特殊的声学图形，以及某些粒子群在振动弹性表面上呈现的形态

。伦敦皇家学会哲学汇刊 (121), 299–340. Fernando, Harindra JS 1991 分层流体中的湍流混合。《流体力学年度评论》23 (1), 455–493. Fleury, M, Mory, M, Hopfinger, EJ & Auchere, D 1991 旋转对密度界面处湍流混合的影响。Journal of Fluid Mechanics 223, 165–191. Gréa, B-J & Adou, A Ebo 2018 法拉第不稳定性驱动的湍流混合区最终会达到多大？Journal of Fluid Mechanics 837, 293–319. Gregg, Michael C, D'Asaro, Eric A, Riley, James J & Kunze, Eric 2018 海洋中的混合效率。《海洋科学年度评论》10, 443–473. Jordan, Dominic & Smith, Peter 2007 非线性常微分方程：科学家与工程师导论。牛津大学出版社。Naskar, Souvik & Pal, Anikesh 2022a 旋转平板层发电机中最优热对流的直接数值模拟。Journal of Fluid Mechanics 942. Naskar, Souvik & Pal, Anikesh 2022b 运动学和磁边界条件对对流驱动平板层发电机动力学的影响。Journal of Fluid Mechanics 951, A7. Nikurashin, Maxim, Vallis, Geoffrey K & Adcroft, Alistair 2013 南大洋地转流的能量耗散途径。《自然·地球科学》6 (1), 48–51. Noh, Yign & Long, Robert R 1990 旋转分层流体中的湍流混合。《地球物理与天体物理流体动力学》53 (3), 125–143. Pal, Anikesh 2020 湍流剪切流中亚网格尺度过程的深度学习模拟。《地球物理研究快报》47 (12), e2020GL087005. Pal, Anikesh & Chalamalla, Vamsi K 2020 深海对流中羽流的演化与湍流动力学。Journal of Fluid Mechanics 889. Pal, Anikesh & Sarkar, Sutanu 2015 外部湍流对分层与非分层环境中尾流演化的影响。Journal of Fluid Mechanics 772, 361–385. Pal, Anikesh, de Stadler, Matthew B & Sarkar, Sutanu 2013 自推进尾流中脉动的空间演化与湍流斑块的比较。《流体物理学》25 (9), 095106. Peltier, WR & Caulfield, CP 2003 分层剪切流中的混合效率。《流体力学年度评论》35 (1), 135–167. Rosenberg, Duane, Pouquet, Annick, Marino, Raffaele & Mininni, Pablo Daniel 2015 利用高分辨率直接数值模拟, 证实旋转分层湍流中存在博尔吉亚诺–奥布霍夫标度。《流体物理学》27 (5), 055105. Singh, Narinder & Pal, Anikesh 2022 旋转环境中互溶流体法拉第不稳定性的起始与饱和。arXiv预印本 arXiv:2207.13739。Talley, LD, Feely, RA, Sloyan, BM, Wanninkhof, R, Baringer, MO, Bullister, JL, Carlson, CA, Doney, SC, Fine, RA, Firing, E & others 2016 海洋热量、碳含量与通风的变化：GO-SHIP全球重复水文观测首个十年的回顾。《海洋科学年度评论》8, 185–215. Winters, Kraig B & Barkan, Roy 2013 布辛涅斯克流体流动的可用势能密度。Journal of Fluid Mechanics 714, 476–488. Winters, Kraig B, Lombard, Peter N, Riley, James J & D'Asaro, Eric A 1995 密度分层流体中的可用势能与混合。Journal of Fluid Mechanics 289, 115–128. Wunsch, Carl & Ferrari, Raffaele 2004 垂直混合、能量与海洋大尺度环流。《流体力学年度评论》36, 281–314. Zoueshtiagh, F, Amiroudine, S & Narayanan, R 2009 互溶流体法拉第不稳定性的实验与数值研究。Journal of fluid mechanics 628, 43–55.