arXiv:2303.03957v1 [math.HO] 7 Mar 2023

以现代矩阵为基础的方式教授初等线性代数所面临的挑战

Frank Uhlig

奥本大学数学与统计系，美国阿拉巴马州奥本，
邮编 36849-5310，美国 uhligfd@auburn.edu

摘要

我们通过整体审视和个人经历回顾，评估美国初等线性代数课程的现状。我们探讨初等线性代数教学中问题的可能补救办法，并考虑将课程从抽象代数式教学转变为以具体矩阵为基础的入门课程。鉴于新冠疫情后我们更多地使用电子书和电子入门教材，本文阐述了这门课程现代化改革所面临的挑战。

我们特别讨论了行列式、特征多项式和多项式求根方法的使用。这些方法既无用又无必要，却在初等教科书中无处不在，并被用于大多数初等线性代数课程中的矩阵特征值问题；然而，它们毫无实际用途，也无法用于求解矩阵特征值。

本文向所有数学家提出挑战：几十年来，我们在初等线性代数教学中一直严重误导学生、使他们未能受到良好教育。本文呼吁转向一种全新的、完全基于矩阵理论的方法，以实用且可计算的方式涵盖所有经典主题。

本文汇集了过去几年中关于如何运用矩阵教授现代线性代数的多场讲座内容，并从中提炼、重新阐述了作者最初在新冠疫情期间于英格兰和美国的数学教育线上讲座中提出的许多观点。当时，我的主要目标是通过具体实例展示若干以现代矩阵为基础的方法，说明如何讲授线性代数的标准概念。这些线上讲座还包括对现已列入 ILAS教育网页的第3、5和6课教案进行的首次试讲，参见 [3]。此后，我们也在 ILAS戈尔韦会议和2022年于波士顿举行的联合数学会议上，介绍了更多关于如何使初等线性代数课程现代化的尝试；这次是现场演讲。本文的主要目标是总结为何必须彻底改变初等线性代数课程的理论依据，以及如何实现这一改变。我们需要了解如何在所有相关参与者——授课教师、学生、服务学科、教科书印刷商等——之间快速、妥善且友好地推动这一变革。自约400年前伽利略的时代以来，数学和科学领域从未遇到过此类挑战。但在线性代数领域，这种变革如今绝对势在必行，因为我们已经停滞了200年，仍处于19世纪20年代至1870年代的模式。

我和你能如何助力这一转变?

引言

本文以整体视角探讨我们在全球范围内为线性代数入门课程开展的教学工作，从个人经历的角度审视这一复杂问题，并将其视为一项共同努力。

个人经历与所得启示

几十年来，“线性代数”一直是本科阶段的基础课程，数学专业学生以及许多应用科学、工程学和其他学科的学生都会在早期学习这门课。我如今在大学层面教授线性代数已有50多年，亲历了许多旨在改进学生学习效果和对学科理解的教学发展。回顾20世纪60年代，我进入德国的科隆大学学习数学。当时，由数学研究所主任为刚入学的一年级学生授课是一种荣誉，而线性代数课程使用的是教授根据自己对该学科的最佳理解和诠释撰写的手写讲义与证明。

因此，当时出现了许多尝试，即以矩阵理论为基础构建线性代数课程[埃米尔·阿廷（《汉堡讲义》，1961年）；Wolfram Jehne教授、Plewe博士（讲义，科隆大学，1965年）；Hans Schneider和Phil Barker（《矩阵与线性代数》，多佛出版社，1968年）]，这些课程与更为传统的、以抽象和理论演绎及逻辑为基础的“定义—定理—证明”课程以及基于行列式的课程相互竞争。事实上，当我们这些学生在科隆大学数学研究所的数学图书馆中寻找线性代数书籍时，大多数答案都出现在书名为《行列式理论》或其略微变体的书籍中；例如，其中关于非奇异矩阵A的所有问题、证明和结论，都以$\det(A) \neq 0$的形式表述。我们在卡片目录中检索“线性代数”，或沿着那排长约50码、高达6英尺的数学书架，用肉眼寻找书脊上的“线性代数”，都没有找到结果，只好继续解释行列式方面的结论。

20世纪70年代，我学习并主要教授数值分析，到了1980年，我又开始教授初等线性代数。那时我注意到，学生在试图理解当时盛行于德国和美国的自上而下式“定义—定理—证明”课程中的抽象数学和代数证明时，学生群体中出现了令人不安的波动和不满。

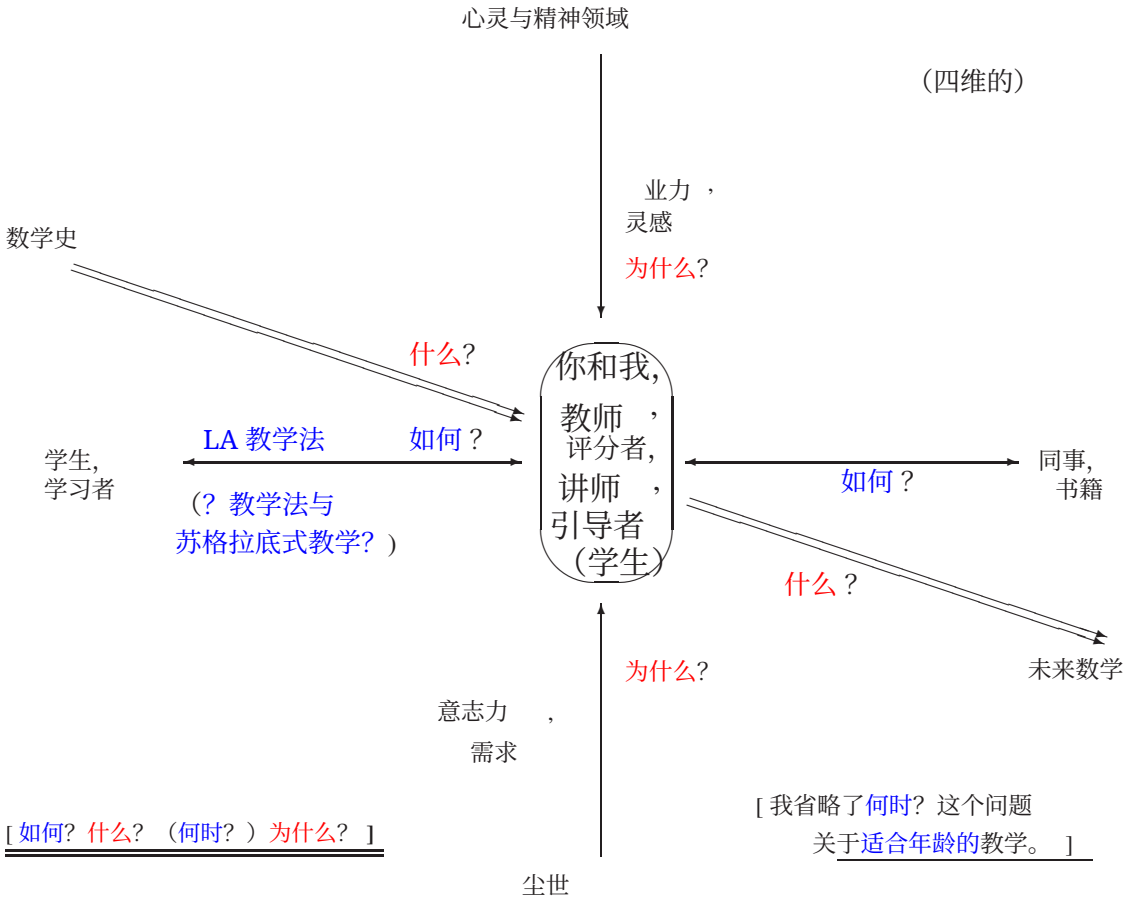
线性代数教学见解的发展与初等线性代数课程的开设

与此同时，我开始关注如何调整教学方式，以便更好地理解学生的学习困难（让·皮亚杰、Anna Sierpinska、Guershon Harel、Tommy Dreyfuss 等人）。线性代数常常像一只变色龙，同一符号被用来表示不同的对象，例如数字零（0）、零向量（0）或平凡子空间（用 $\{0\}$ 表示）。这类记号含糊不清，会造成混乱，最终使学生对线性代数失去兴趣和投入。他们只是死记硬背地学习这门学科，机械地做行化简、行列式计算、特征多项式计算等，却始终没有得到深入理解这门学科的关键。我们的教科书没有阐明线性代数和矩阵理论的发展方向、需求及进展，而这门学科正越来越多地应用于现代领域，并已成为互联网、现代商业、工程学和创新的基础。在美国，线性代数过去主要由年轻教师、博士后及其他教师作为服务课程来教授，如今依然如此。在“要么发表、要么出局”的年代，他们必须发展各自特定领域的专长，以获得终身教职和晋升；而教授这门课程的并非那些了解并会推广线性代数现代教学方式的专家。对线性代数教学的研究最终促成了更合理的方式，让我们能够触达学生并进行教学，也使教学大纲和教科书做出了一些小幅调整。但学生的倦怠情绪依然存在；在两届线性代数教育研究小组会议（1993年和2022年）之后，情况并未得到太大改善。唯一的变化是，敬业的教师如今越来越多地从应用入手，通过亲自操作矩阵开展探索，进行个别化教学，而不是自上而下地采用定义—定理—证明的方式。

教学是一个复杂的过程。对复杂问题零敲碎打地作答，通常会带来意料之外的后果。因此，面对教学中遇到的任何复杂问题，进行全面分析既有必要，也更可取。针对复杂问题的整体性处理，应从一个简单且多少带有个人色彩的问题入手，询问相关人员：你希望眼前的情况如何得到解决，并在未来不再成为问题？例如，5年、10年或30年后会怎样？我们希望初等线性代数课程能够顺利开展，彻底消除当前的问题。对线性代数而言，这意味着要全面理解课程目标、教什么、怎么教以及为什么教；课程内容要完全跟上时代，并兼顾课堂中的所有参与者。针对初等线性代数教学问题的整体性解决方案，能够消除学生的不满，以自然的好奇心和自主探索取而代之。这样一来，我们当前令人不安、与现代认知及矩阵在日常生活中的应用格格不入的课堂讲授方式，也将得到改变。

我们中的一些人可能想在第一门线性代数课程中引入软件，另一些人则可能想引入在线课程软件，等等。在讨论具体的补救措施之前，我们现在来看看将教师和学生联系在一起的整体网络。

1 统御数学教学过程与第一门线性代数课程的力量与领域之网



任何个人整体教学分析最根本的问题都是：“我为什么教学，我们为什么教学，你为什么教学？”每位教师每天都必须清楚自己对这个问题的答案。是什么激励我们投身教学？原因有现实层面的，也有因果业报层面的。在现代世界，我们都需要食物和住所。我们学习、求学，然后受雇谋生，赚取我们的“每日生计”。

我、我们或你，是因为不得不教才教吗？还是说，“教学”只是我们谋生的工作？我或你是否更愿意整天盖房子、修汽车、打理花园，或从事其他真正能让你我兴奋的有益工作？

除了现实原因，还有一些因缘上的理由，例如“我注定要教书”、“我受召来教导年轻人”、“教学是我毕生的事业”，等等，因为“教学让我快乐”。在日常层面，在学院或大学环境中，我们如何教学也有一定要求。刚开始职业生涯时，我们可能会选用他人编写的教科书，也可能必须遵循大学或院系规定的教学大纲。我们需要遵循教学原则，也有多种教学风格可选，例如互动式教学、开放式课堂、自上而下的讲授，以及介于其间的多种反向教学方式。

当我们教授线性代数这类鲜活、不断发展的学科时，从古代到当下并延伸至未来的数学史，会使我们受到更多因素的牵引。我们是从古代讲起，还是从现代乃至前沿的新方法讲起，结合当下的应用与思想，抑或呈现旧有内容？学生方面也同样如此：他们此前接受过怎样的准备？八岁时以及八年级时又学过什么？大学生的数学理解能力何时才算扎实？线性代数的概念何时会让他们觉得难以承受，又是为何？这些问题让教师和学生每天都面临“如何”继续下去的难题。我们在数学思维上的个人旅程——无论身为教师还是学生——牵引着我们，在我们身上交汇，并在学习过程中将我们联系起来。作为大学教育中教学与学习这场“游戏”的参与者，这些旅程在我们心中浮现并引起共鸣。

以下是两个从远古至近代的线性代数主题、相关人物和年代列表 .

高斯消元、Gaxby 和 Saxby	亚述和巴比伦	公元前4000年至公元前2000年	标准数学概念包含代数证明或纸笔解释在我们95% + 的线性 代数教科书 and 当今的课程
多项式	笛卡尔	1637	
多项式根			
复数	卡尔达诺	1545	
符号法则	笛卡尔	1637	
矩阵	莱布尼茨, Seki	1683	
行列式	卡尔达诺、关孝和、莱布尼茨	1545年、1683年、1693年	
克拉默法则	克拉默	1750	
代数基本定理	高斯	1799	
柯西-施瓦茨不等式	柯西、施瓦茨	1821年、1888年	
正规方程	高斯	1822	
鲁思-赫尔维茨	Ruth, 赫尔维茨	1876, 1895	
格拉姆-施密特	Gram, 施密特	1883, 1907	
特征向量	欧拉	1751年，1760年	
特征值	柯西	1819	
特征多项式	柯西	1819	
凯莱-哈密顿定理	凯莱、哈密顿	1858年、1864年	
约旦标准形	Jordan	1870	

要全面地开展线性代数教学，整体力图中那条斜向的数学史脉络尤为重要。我们在一门数学课程中所教的内容对许多服务学科而言至关重要，而这些内容决定了这门课对学生有多大关联性，以及他们希望在课堂上投入多少精力。教师必须了解当今应用中使用的方法。下文列出的现代线性代数和矩阵相关主题不断演变，决定了我们的教学方法能够也应该有多现代。我们是在为学生的未来做准备，还是只在教授过去？请比较上方和下方的两个列表。

最小多项式	克雷洛夫	1931	偶尔提及的数学项目 在我们 ± 的5% 教科书或课程中。
向量迭代	克雷洛夫	1931	
LR分解			
QR分解			
舒尔分解	舒尔	1909	
海森堡矩阵	海森堡	1943	
吉文斯反射	吉文斯	20世纪50年代	
豪斯霍尔德变换	Householder	1958	
QR算法	Francis、Kublanovskaya	1961	
奇异值分解	Golub、Kahan	1965	
奇异值分解和“PageRank”搜索引擎	Page、Brin	1996	
QR多重位移算法	Braman、Byers、Mathias	2002	
TensorFlow搜索引擎	Google团队	2021	

上一页列出了一些有名称的古老和早期线性代数主题；这些主题出现在我们当前的初等线性代数教材中，通常也会在我们现行的第一门初等线性代数课程中教授。其中18个用大括号标出的项目，与线性代数的标准向量空间、具体矩阵研究及其相互关系一起，决定了我们当今课堂教学大纲的大部分内容。上面第二份现代主题列表中，20世纪30年代之后取得的任何线性代数进展，通常都不会在我们当前大多数初等线性代数课程中提及，更不用说教授了。

遗憾的是，美国的大多数应用型专业都不会为其研究生和本科生建议或要求学习高级线性代数课程或数值线性代数课程。这一遗漏随后影响了美国工程界的很大一部分。科技公司必须在我们的毕业生首次就业时对他们进行再培训，使其掌握最新的线性代数知识。这既没有必要，代价也非常高昂。我们现在必须采取行动，使第一门线性代数课程现代化，并将过去90年、40年或20年的现代矩阵进展充分传授给年轻一代。

柯西在19世纪20年代提出的、当时颇具创见的想法——使用行列式和特征多项式 $f(x)$ 作为 $A_{n,\ n}$ 特征数据的载体——从未结出硕果；人类在200年的尝试中始终未能找到从基于行列式的特征多项式 $f(x) = \det(A - xI_n) = 0$ 中提取特征值的实用方法。我们为什么还要继续教授它?

1931年，Aleksei Krylov发表了关于矩阵的向量迭代和Krylov子空间的奠基性论文。

摘自Krylov的论文，俄文原文见 https ://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Krylov Aleksei/:

“显然，如果对于 $k = 2$ 和 $k = 3$ 而言，容易构造这个 *[*阶*]* 方程（即，一个 k 乘以 k 矩阵的特征多项式 $f(x)$），那么对于 $k = 4$ 展开过程就会变得繁琐，而当数值 k大于5时，直接进行这种运算完全无法实现。

因此，应采用避免完整展开行列式的方法。本文的目的.....是介绍一些简单的方法，以构造展开形式的世俗方程；此后，其解，即对其根进行数值计算，便不再有任何困难。”

克雷洛夫上文的第一段真实地描述了试图计算维数极低的矩阵的特征方程时会遇到的情况$A_{k,\ k}$。如今，我们的学生（至少95%的学生）在初等线性代数课程和教科书中都会了解到这一点。然而，他们所学的特征值理论并未超越柯西时代。克雷洛夫没有建议通过行列式来求矩阵特征值，而是建议寻找前 $k+1$ 个向量迭代 $\{b, Ab, A^2b, ..., A^kb\}$ 之间的线性相关关系，其中 $b \neq o_n$，然后他描述了 A 的最小多项式，该多项式以 A的所有特征值为根。然而，克雷洛夫后来提出的通过数值计算求多项式根的设想，在两百年来的尝试中始终未能实现。

然而，如今我们的初等线性代数课程中的“亮点”竟然是柯西那个走投无路的死胡同式想法。这简直令人难以置信。自20世纪60年代以来，我们就拥有了 Francis 的 QR算法这一优秀的数值矩阵特征值求解方法；自21世纪初以来，借助 Francis 的多重位移算法，即使对于维数 k 达到一万量级的矩阵也能求解特征值，但我们以及我们的教科书却往往甚至不讲授 QR 之类的正交矩阵分解。

2 在当今初等线性代数课程中运用现代矩阵理论进行教学大纲改革的数学依据

我一直对构造性证明，尤其是对线性代数中基于矩阵的洞见，很感兴趣。在我作为教师和研究数学家的数十年间，我始终关注着矩阵思维中的一些瑰宝。2020/21 年，Ian Benson 找到我；他读过我早期的一本教科书，书名为《Transform Linear Algebra》，见 [1]。我特意选择了这个颇具挑衅性的书名（其中“Transform”既可以是动词，也可以是名词），旨在表达线性变换（即矩阵）的力量——无论是在数学本身的线性代数中，还是在线性代数教学中。通过对相关列向量矩阵进行行阶梯形化简，可以轻松理解向量集的线性（无）关性；这使我们那些无处不在的教科书中关于线性（无）关性的文字逻辑定义和处理方式显得十分可笑。Ian 希望通过数学教师协会（ATM）帮助英国教师实现 A-level 大学考试的现代化，允许用线性代数替代微积分这一必考科目。当我查阅牛津大学和剑桥大学提供的 A-level 考试入门指南时，我惊讶地发现，其中准备阶段的微积分示例和题目，竟然与我20世纪60年代中期在德国参加德国高中毕业考试时学习和接受考试的内容完全相同。问过父亲后，我得知，为了通过1919/20年的德国高中毕业考试，他当年接受的考试中也正是这些完全相同的微积分示例。自那以后，数学难道就没有任何变化吗？现代矩阵理论又如何呢?

于是我面临着一个数学难题：矩阵能否帮助我们更好地理解线性代数，并彻底革新线性代数课程大纲，使之适应互联网、智能手机和计算机时代?

这些想法促使我为现代线性代数课程编写一套基于矩阵的课程计划，课程内容从有着数千年历史的行化简，延伸到特征向量／特征值计算及更多内容，并以现代实践和观念为基础；这些实践和观念自 20 世纪 30 年代起便出现在我们的第二个学科——姓名与日期列表中。

线性代数研究线性函数 f，这些函数将 n–空间映射到 m–空间。若函数 $f\colon u \in \mathbb{R}^n \to f(u) \in \mathbb{R}^m$ 满足

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

对于所有向量 u 和 v 以及所有标量 α 和 β。借助1907年的里斯表示定理，我们在第一份课程计划中证明，每个线性变换 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 都可以用其标准矩阵来描述。

表示

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ f(e_1) & \cdots & f(e_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

对于标准单位向量 $e_i \in \mathbb{R}^n$，其各个位置均为零，只有第 i 个位置为 1。因此，在课程计划 1 中，研究线性变换就等同于研究矩阵。

在课程计划 2 中，我们学习线性方程以及矩阵行阶梯形的化简，从而找出主元和自由列或自由变量。随后，我们解读这些结果，并确定判断线性方程组有解或无解的标准 $Ax = b$。首先必须用手和纸笔高效、正确地进行行化简。掌握这一过程后，学生便可使用软件，并学习如何在 Python、Octave、Mathematica、Matlab 等软件中正确编写行化简代码。

课程计划 3 首先从理论上讲解矩阵求逆，接着通过纸笔计算练习实际的矩阵求逆，最后使用学生编写的软件代码进行求逆。这些技巧适用于向量空间、向量集、生成集，以及子空间、基和维数等概念。这里也会简单涉及线性无关。

我们的线性代数课程教案从标准单位向量基 $\mathcal{E} = \{e_i\}$ 和线性变换 f的标准矩阵表示 $A_{\mathcal{E}}$ 开始。在课程计划 4 中，我们将这些概念推广到 $n-$空间和 $A_{\mathcal{U}}$的任意基 $\mathcal{U} = \{u_i\}$，即 $A_{\mathcal{E}}$的$\mathcal{U}$基表示。我们的目标是找到 A的一个基 $\mathcal{U}$，其中包含$A_{n,n}$的特征向量 $u_i \neq o_n$；也就是说，找到一个 $n-$空间的基 $\{u_i\}$，使得 $Au_i = \lambda_i u_i$对应于 $i = 1$、.....、n。

随后在课程计划 5 中，利用克雷洛夫向量迭代计算特征子空间和矩阵特征值。我们还通过为 A 的最小多项式给出存在性证明，并运用代数基本定理，证明每个方阵都有特征值和特征向量。

我们的课程教案 以空间中角和正交性的学习告终，内容包括平面旋转、三角 -
恒等式 ，涉及正弦和余弦，以及计划 6 中的正交矩阵。

课程计划 7 以矩阵的 LR分解形式重新探讨高斯消元，随后通过 Householder变换将矩阵分解扩展到正交QR分解，并介绍其简单应用，以最小二乘的意义求解无解的线性方程组。

这套课程教案为教授初等线性代数课程内容——以及更多一点内容——提供了一条连贯的数学路径，使教学完全立足于现代矩阵理论并贯穿其中。每份课程教案需要用时 2 至 6 个课时。

其他类似的路径（例如 Gilbert Strang 的《线性代数导论》第 6 版）也确实存在，它们或许同样能够将线性代数课程从柯西两百年前那些站不住脚的思想中解放出来。

3 改变我们的线性代数课程大纲所面临的更深层挑战；如何做到这一点

通过这套以矩阵理论讲授线性代数的课程教案，我们已经应对了从数学上重构初等线性代数课程所面临的挑战。

但要真正从人的层面、个人层面变革美国的初级线性代数课程，仍然是一个几乎难以逾越、复杂得多的挑战。人们往往固守数十年乃至数百年前的思维、行事和感受方式，因此要进入一个新的计算时代，并有意识地在其中立足，需要付出极大努力，也需要时间，参见 [2] 。我们身处个体性时代已有数十年，但它尚未完全掌控我们的精神。这远比纯粹的数学挑战更加深刻。

教师要多久才能认识到我们如今必须做出的改变，并转而在初等线性代数课程中教授现代方法？我们还要多久才能明确摒弃柯西两百年前那种令人沮丧、毫无成效的方法？我们何时才会放弃它？其他领域（如工程学）又要多久才会认识到，格拉姆-施密特正交化过程——例如——并不稳定且不可取，却仍在考试中要求学生掌握这种“知识”？

学生会主动转向并学习采用矩阵方法的在线电子书，而不再学习那些可能仍在教授的过时内容吗？评分者和授课教师能否接受学生提交的作业，即使学生可能更偏好并实际使用课程计划式的矩阵知识和矩阵方法来解决“经典”的抽象线性代数或矩阵特征值问题？是否应该编写并在线发布入门指南，展示如何解决标准线性代数问题，同时仍能理解或“说”那套陈旧重复的语言，并通过课程计划式电子书中的矩阵方法解答旧式考试题？以客户为基础、由学生主导的基层革新，能否真正推动我们的初等线性代数课程改革？我希望它能实时、迅速而全面地实现，而且我知道这做得到。

能否出现某种基层运动，通过行阶梯形化简，具体地解决“经典”的抽象线性无关问题，并借助软件，为我们那些已有数百年历史的教科书中抽象表述的问题快速给出具体答案，从而打破课堂的沉闷局面？

教师和学生，谁会先改变？是在本地、区域范围内，还是在全球范围内？我们如何证明，在今天刻意教授过时内容是合理的？正如我们的教师反复传授他们的教师那些不充分的理解，而我们也一直如此接受这种没有正当理由的教学，已有一个多世纪。我们能否终于打破这个错误循环，摆脱未能履行学术职责的失职，依据学科领域最前沿的知识开展教学，并让教学内容与每一代学生的知识基础同步更新？用于矩阵特征值计算的QR算法如今已有60年历史。当前的线性代数研究正借助张量研究和参数变化矩阵问题，在机器人、控制、人工智能等领域不断向前推进。未来，这些内容以及更多知识都必须在初等线性代数课程中讲授。

鉴于矩阵方法的强大作用，如今有必要、也有意愿为数学专业、工程学专业以及所有理科专业学生开设第二门初等线性代数课程。要让当今的学生在未来的职业生涯中取得成功，就需要教他们学习并掌握更多关于矩阵的知识。

4 如何帮助教师和学生从抽象线性代数过渡到线性代数与矩阵

仅仅制定强调将矩阵理论作为理解线性代数工具的现代课程计划是不够的。当周围谈论的都是一个多世纪以前的柯西行列式思想、特征多项式求根技术、克拉默法则、格拉姆-施密特等方法——这些方法在现代应用中毫无用处时，学生或教师该如何转换思路？我们需要用矩阵理论解释标准的线性代数概念和经典的“求解”路径。还需要一套替代性的“课程计划*”，以缓解两种思维方式之间的转换，并提供从一种观点到另一种观点的实用转换方法。以下是初步尝试：

4.1 线性无关及更多

这里，我们希望翻译通常作为抽象线性代数课程习题给出的基础线性代数概念和证明，并尝试从矩阵视角对其进行求解。

（a）标准抽象表述：给定 k 向量 z_i 属于 $\mathbb{R}^n$。存在一个向量 z_ℓ 是向量 $\{z_i|i \neq \ell\}$ 的线性组合，当且仅当向量集 z_i 是线性相关的。

经典课程中的证明表述了 $z_\ell = \sum_{i\neq\ell} \alpha_i z_i$ 并将该等式改写为 $\sum_{i\neq\ell} \alpha_i z_i - 1 \cdot z_\ell = 0 \in \mathbb{R}^n$ 根据定义，这使 z_i 线性相关，因为 z_ℓ 的系数非零，而 z_i 的线性组合是零向量。

矩阵论方法：这里所有线性（无）关问题的核心是矩阵 $A_{n,k}$ 的行阶梯形 $R_{n,k}$，其列为 z_i。任意矩阵 A 的行阶梯形 R 的不变量是其主元所在的行、列位置，以及不允许列交换时自由列的位置。

如果 z_i 线性相关，那么列向量矩阵 $A_{n,k}$ 的行阶梯形 R 在某个位置至少有一列是自由列 $\ell \leq k$，并且线性方程组 $A_{n,\ell-1} = z_\ell$ 有解，从而$z_\ell \in$张成$\{z_1, ..., z_{\ell-1}\}$。这个问题很简单。

（b）一个分为三部分的较难问题：
如果一组 m 向量 $\{z_1, ..., z_m\}$ 张成线性子空间 $\mathcal{V}$，且 $\mathbb{R}^n$ 和 $z_i \in$张成$\{z_j|j \neq i\}$，那么这组$m-1$向量 $\{z_1 + z_i, ..., z_{i-1} + z_i, z_{i+1} + z_i, ..., z_m + z_i\}$ 张成 $\mathcal{V}$。
1）正确还是错误？证明或给出反例？2）当给定的 m 向量 $\{z_1, ..., z_m\}$ 集合中只包含互不相同的向量时，可以得出什么结论？3）如果这组 $m-1$ 向量 $\{z_1 + z_i, ..., z_{i-1} + z_i, z_{i+1} + z_i, ..., z_m + z_i\}$ 随后成为 V的基，会发生什么？

（c）“维数”的多重含义：1）在日常用语中，“维数”指桌子、床、门或包裹的尺寸。2）对于向量，我们通常把其分量的个数称为它的维数。例如，一个实向量 x 如果包含 n 个实数分量，其维数就是 n。3）矩阵 A 有行维数和列维数，分别指行数和列数。4）如果一个向量空间 V的任意一个基都包含 k 个向量，那么它的维数为 k。

(d) 符号 ’0’ 的多重角色，称为 ’零’：列出数学中至少六种不同的 0 的用法。重复这一过程，试着找出数学中 1 或 ’一’ 的不同用法。

(e) 线性无关张成集的大小：
标准抽象表述：如果 ℓ 个向量 $w_1, ..., w_\ell$ 张成 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间 $\mathcal{W}$，且 S 是 $\mathcal{W}$ 中的一组$m > \ell$ 向量，那么 S 中的 m 向量线性相关。
矩阵论方法：ℓ 个向量 w_i 对应的列向量矩阵的行阶梯形恰好包含 $\mathcal{W}$维数 $k =$ 个主元，显然 $k \leq \ell$。S 中 m个向量对应的列向量矩阵的行阶梯形不可能有超过 $\mathcal{W}$维数 $k =$ 个主元。但是 $\mathcal{W}$维数 $m > \ell \geq k$，所以 S中的 m 向量必定存在线性相关向量。

(f) 线性子空间 $\mathcal{U}$ of $\mathbb{R}^n$中的线性无关向量和张成向量：
标准抽象表述：对于维数为 k 的线性子空间 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$，其中任意由 k 个向量组成的线性无关集合都张成 $\mathcal{U}$；反之，在维数为 k 的子空间 $\mathcal{U}$ 中，任何张成该子空间的由 k 个向量组成的集合都是线性无关的。

矩阵论方法：我们再次考察列向量矩阵 $A_{m,k}$ 的行阶梯形，其中 $k = \dim(\mathcal{U})$。1) 从 k 个 $\mathcal{U}$中的线性无关向量 $\{u_1, ..., u_k\}$ 出发：这些向量能否张成整个子空间 $\mathcal{U}$? 也就是说，对于列向量矩阵 A，由 u_j 和$b = b_m \in \mathcal{U}$ 构成的每个线性方程组 $A_{m,k}x_k = b_m$ 是否都有解?

由于假设 A 的 k 列 u_j 线性无关，因此 A 的行阶梯形有 k 个主元，因为没有一列是其他列的线性组合，见(a)部分。如果增广矩阵（$A|b$）中有 $k+1$ 个主元，那么 $b \notin \mathcal{U}$，因为线性方程组 $Ax = b$ 无解。否则，如果 $b \in \mathcal{U}$，则该方程组有解；也就是说，对于任意 $b \in \mathcal{U}$，右端向量 b 都是向量 $\{u_1, ..., u_k\}$的线性组合。因此，向量集 $\{u_i\}$ 张成 $\mathcal{U}$。

2）如果 k向量 u_1、.....、u_k 张成 k维子空间 $\mathcal{U}$，那么其列向量矩阵$A_{m,\ k}$ 的行阶梯形必须有 k 个主元，否则增广矩阵（$A|b$）将表明，对于某些 $b \in \mathcal{U}$，$Ax = b$ 不可解，从而说明它们无法张成 $\mathcal{U}$。当 A 中有 k 个主元时，u_i之间不可能存在线性依赖关系，见（a）。

请注意这里存在某种对偶性：$\mathcal{V}$ 维子空间中的线性无关集最多可包含 k 个向量，而维数为 $k > 1$ 的子空间的向量生成集至少必须包含 k 个向量。当这些向量包含数在 k处相等时，由 k 个张成向量组成的集合和由 k 个线性无关向量组成的集合都构成该 $\mathcal{V}$ 维子空间的一个基。

（g）方阵的行列式：

从历史上看，方阵的行列式 $A_{n,\ n}$ 在16和17世纪被抽象地定义为 A中处于互不重复的行位置和列位置的 n 个元素的带符号乘积之和。

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot ... a_{n,\sigma(n)}$$

其中 Σ_n 是从 1 到 n 的所有整数排列构成的集合。 Σ_n 包含 $n!$ 个 $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \ n$ 排列。行展开或按列展开简化了行列式的这一定义，并且随着时间推移，人们确立了行列式的一些性质规则，例如

> 对于任意两个 $n \times n$ 矩阵 A 和 B，$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$；在 A中交换第 j 行和第 k 行时，$\det(E_{j,k}) = -1$；将 A 的第 k 行乘以 α_k时，$\det(E_{\alpha_k,k} \cdot A) = \alpha_k \det(A)$；将 A的第 k 行的 α_k 倍加到第 j 行时，$\det(\det(E_{(\alpha_k,k)+j} \cdot A) = \det(A)$；对于任意对角元素为 $t_{i,i}$ 的上三角矩阵或下三角矩阵 T，$\det(T) = \prod t_i$。

这五条经典行列式规则使我们能够利用 $A_{n,\ n}$ 的 LR分解来计算

$$\det(A) = \det(L\ R) = (-1)^{ex}\ \det(L)\ \det(R) = (-1)^{ex} \prod r(i,i)$$

对角元素为 $r_{i,\ i}$，以及 $ex =$ 在对 R 进行 LR 分解时行互换的次数。此处 $\det(L) = 1$，因为 L的对角元素全都等于 1。

方阵 $A_{n,\ n}$ 的行列式实际上表示由 A 的列向量作为棱所围成的平行六面体的体积，它就像 n维空间中被压扁的“香烟盒”。如果 A 的列线性相关，这个“压扁的盒子”就位于 $\mathbb{R}^n$ 的一个低于 n维的平坦子空间中，因此其 n维体积为零。

要像柯西在 200 年前所做的那样尝试求出 $f(x) = \det(A - xI_n)$，并找出 $A_{n,\ n}$ 的特征值（其特征多项式 f 的根），除了针对经过特殊处理的矩阵之外，这种尝试从未超越 $n = 4$ 或更进一步。

因此，我们需要摒弃几个世纪前柯西所采用的、并不成功的行列式和多项式根方法。

而应将现代矩阵理论融入基础线性代数课程，并沿着克雷洛夫和 Francis 的向量迭代或矩阵分解方法，学习如何在当今计算机、工程学和软件时代，从任意给定的矩阵中快速、准确地提取矩阵特征数据。

并教授我们如今所知的内容。

参考文献

[1] Frank Uhlig，《Transform Linear Algebra》，Prentice-Hall，2002，ISBN 0-13-041535-9，502 + xx 页。[2] Frank Uhlig，《数学的八个时代：关于过去与未来的矩阵计算》，载于《计算科学与工程近期趋势》，S. Celebi（编），InTechOpen（2018），http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.73329，25页。[附图表和参考文献，见 http://arxiv.org/abs/2008.01900（2020），19页。][3] Frank Uhlig 和 Rachel Quinlan，《线性代数教学教案集》，ILAS Image，（69）2022年秋季刊，第3–4页。https://31g343.p3cdn1.secureserver.net/wp-content/uploads/image69.pdf

位于……Box/local/latex/MadridILAS23Edu/PrimusEdu23 paper.tex

2023年3月8日