arXiv:2303.03969v1 [math.OA] 7 Mar 2023

连续模型论导论

BRADD HART

摘要。我们介绍现代连续模型论，重点讨论其与本卷所涉及主题的相互作用，例如 C*-代数和冯·诺依曼代数。文中特别强调超积的作用，并介绍可定义集、虚元素、量词消去和可分范畴性。

1. 导论

拥有真和假以外的更多真值并不是什么新思想。例如，Łukasiewicz 和 Tarski 在 20 世纪 30 年代提出了实值逻辑 [38]。现代连续模型论的思想还源自其他先驱。Chang 和 Keisler 撰写了一本著作 [15] ，其中考虑了真值取自任意紧豪斯多夫空间的逻辑。这种逻辑包含许多量词，但未能流行起来；有关进一步的评论，参见 Ben Yaacov [5] 。Henson 引入了正有界逻辑 [30], ，主要用于研究带有附加结构的赋范向量空间的模型论。Ben Yaacov 在 [6] 中引入了非常一般的 cats（即紧抽象理论），旨在刻画一阶逻辑的扩张，使得能够无缝使用 [31] 中引入的超虚元；这一研究方向建立在 Hrushovski、Pillay 及其他人早期关于 Robinson 理论的工作之上。特别是，人们认识到豪斯多夫紧抽象理论解释了一种度量。随后，Ben Yaacov、Berenstein、Henson 和 Usvyatsov 为度量结构引入了一种逻辑，这正是本文的主题。这种逻辑最早发表于 [12],，但奇怪的是，该文的发表时间晚于事实上已成为标准的文献 [10]。

超积的历史非常有趣，也比大多数模型论学者所了解的更加丰富多彩。 [41]中介绍了一段简史。简要来说，20世纪50年代初，Kaplansky和Wright在算子代数语境中引入了一种类似超积的构造。Sakai也在20世纪60年代初使用了超积，同样是服务于算子代数。

2020 数学主题分类。03C66,03C98, 46L05.关键词和短语。连续模型论，度量结构，乌雷松球，C*-代数。作者获得了 NSERC 的资助。. 1

麦克达夫在其论文 [39] 中系统地使用超积，凸显了这一构造在算子代数领域已经变得多么重要。与此同时，洛斯在模型论中开创性地引入超积 [37]，以及罗宾逊在发展非标准分析过程中对超积的使用，都是模型论早期的关键时刻。当时似乎没有人看出超积的这两种用途之间存在超越形式联系的其他关系。Keisler [34] 从模型论角度简要介绍了这段历史，他将超积的先驱归功于斯科伦，并且有趣的是也提到了休伊特[33]，；当时休伊特正在研究连续函数环。尽管克里温、斯特恩等人此前已经开展过相关工作，但第一个系统地建立解析超积构造与模型论之间联系，尤其是在巴拿赫空间方面的工作，是Henson [30]，完成的；在该工作中，他还引入了自己的正有界逻辑。关于这一逻辑的一般性论述见Iovino与他在 [32]中的合作成果。

与经典逻辑相比，超积在连续模型论的发展中扮演着略有不同的角色。虽然超积构造与紧致性定理之间的联系在两种逻辑中相同，但超积的探索性用途有所不同。所谓探索性用途，是指分析中出现了一些结构类，在其中会使用超积，却没有相应的形式语言。数学家在某些情境中“自发地”使用超积，这往往会促使人们考察该类是否实际上可以置于模型论框架中。本书中与此相关且已成功实现这一点的例子包括巴拿赫空间、C*-代数、带迹冯·诺依曼代数和 W*-概率空间。

正如我们将在例 3.8 中看到的，每个经典初等类都可以看作一个连续初等类。然而，连续逻辑是经典一阶逻辑的*真* 扩张。对此有多种理解方式，下面介绍一种基于 Farah、汤姆斯和特恩奎斯特提出的博雷尔复杂性论证的解释。在 [21]，中，他们证明了可分 C*-代数类上的同构关系具有湍流性，且不能博雷尔归约到任何可数经典结构类（相关定义见他们的文章）。当然，每个可数经典结构类上的同构关系都可以博雷尔归约到其自身，因此，可分 C*-代数类上的同构关系不等价于任何可数经典结构类。正如我们将在本文中看到的，C*-代数类是一个初等类（例 5.18），根据这一复杂性论证，该类不等价于任何经典初等类。

现在，我们简要概述本文的内容。在第 2 节快速回顾超滤子的基础知识后，我们将在第 3 节和第 4 节介绍连续

逻辑的句法和语义。随后，我们将在第 5 节发展基础连续模型论，并在其中引入公式集的推广概念。如上文所述，超积在连续模型论中发挥着关键作用，第 6 节将介绍度量结构的超积。第 7 节介绍连续模型论中的类型概念，并利用类型空间给出一般公式的另一种刻画。第 8 节是一个关键章节，其中讨论可定义集，并将其与经典逻辑中的可定义集概念进行比较。第 9 节重点阐述连续逻辑中的量词消去，并给出若干示例。在第 10 节中，我们考察连续背景下的虚元素，并在这一背景下陈述概念性的完备性定理。最后，我们将在第 11 节讨论省略类型，并在第 12 节讨论可分范畴性。

不可避免地，有些主题被我们略去了。特别是，我们没有讨论连续逻辑的证明系统。这一主题在[11] 中有所介绍，对于连续逻辑中的可判定性问题也很重要（例如，参见本卷中 Goldbring 论文的第 3 节）。这里没有讨论的另一个主题是连续逻辑中的稳定性理论； [10] 和 [12]介绍了这一理论的基础。

我要感谢 Isaac Goldbring 与我就本文进行的多次讨论，也感谢他作为编辑的耐心。

2. 超滤子与超积预备知识

超滤子和超积将在连续模型论中发挥重要作用。本节将介绍所需的相关事实。

定义 2.1。设 X 是一个集合，且 $F \subset P(X)$，其中 $P(X)$ 是 X的幂集。

(1) 若满足以下条件，则称 F是 X 上的（真）滤子：(a) $\varnothing \notin F$，(b) $A, B \in F$ 蕴含 $A \cap B \in F$，且 (c) $A \subset B \subset X$ 和 $A \in F$ 蕴含 $B \in F$。(2) 若 F 是 X 上的滤子，且对每个 $A \subset X$，$A \in F$ 或 $X \backslash A \in F$ 成立（二者不能同时成立），则称其为 X 上的超滤子 。

以下是超滤子的一个重要刻画。请注意，本文始终假设选择公理成立。

练习 2.2。假设 $F \subset P(X)$。

(1) F 是 X 上的超滤子，当且仅当 F 是 X上的极大（按包含关系）滤子。
(2) F 包含于 X 上的某个超滤子，当且仅当 F 具有有限交性质，即对于任意有限多个 A_1，……，$A_n \in F$，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$。

例 2.3.

(1) 若 X 是任意无限集，且 F 是 X的余有限子集所构成的集合，那么F 是 X上的一个滤子，称为 X上的*Fréchet*滤子。注意，Fréchet滤子不是超滤子。
(2) 若 X 是任意集合，$a \in X$ 是任意元素，且 F 是 X中包含 a的子集所构成的集合，那么 F 是 X上的一个超滤子，称为由 a生成的 X 主超滤子（定义在 X 生成于 a）。

练习 2.4. 若 X 是无限集，则 X 上的超滤子是非主超滤子，当且仅当它包含 X上的Fréchet滤子。因此，X 上存在非主超滤子。

超极限这一概念将在本文中始终发挥重要作用。

练习 2.5. 设 $(r_i : i \in I)$ 是一个实数序列，$\mathcal{U}$是 I上的一个超滤子。再设存在实数 B 使得$\{i \in I : |r_i| < B\} \in \mathcal{U}$。证明存在唯一的实数 r，使得对每个 $\epsilon > 0$，都有 $\{i \in I : |r_i - r| < \epsilon\} \in \mathcal{U}$。

定义 2.6。在上一道习题的背景下，我们称 r 是 $(r_i : i \in I)$ 沿 $\mathcal{U}$ 的超极限，记作 $r = \lim_{\mathcal{U}} r_i$。

现在我们引入有界度量空间的度量超积这一概念。设 (X_i, d_i) 是一个以 I 为指标的度量空间族，且一致有界，也就是说，存在某个 $B > 0$，使得每个 X_i 的直径都被 B 所界定（意即对所有 $i \in I$ 和 a，$b \in X_i$, $d_i(a, b) \leqslant B$）。固定一个定义在 I 上的超-滤子 $\mathcal{U}$。令 $X = \prod_{i \in I} X_i$，并对 $\bar{a}, b \in X$, $d(\bar{a}, b) = \lim_{\mathcal{U}} d(a_i, b_i)$ 定义。容易看出，d 是 X 上的伪度量。我们定义族 (X_i, d_i) 关于 $\mathcal{U}$ 的超积，记作 $\prod_{\mathcal{U}} X_i$，为由 X 对伪度量 d 取商所得的度量空间。对于 $\bar{x} \in X$，我们用 $[\bar{x}]_{\mathcal{U}}$ 表示 $\bar{x}$ 在商中的等价类。如果对所有 $i \in I$，X_i 都是某个固定的 X，我们将该超积记作 $X^{\mathcal{U}}$，并称其为 X 关于 $\mathcal{U}$ 的超幂。存在一个将 $x \in X$ 映到常值序列 $(x : i \in I)$ 的等价类的自然等距嵌入，它将 X 嵌入 $X^{\mathcal{U}}$，称为对角嵌入。

习题 2.7。

(1) 假设 $(X_i : i \in I)$ 是一族完备、一致有界的度量空间，且 $\mathcal{U}$ 是 I 上的超滤子。证明 $\prod_{\mathcal{U}} X_i$ 是完备的。

(2) 假设 $(X_n : n \in \textbf{自然数集})$ 是一族一致有界的度量空间（不一定假设它们是完备的），且 $\mathcal{U}$ 是**自然数集**上的非主超滤子。证明 $\prod_{\mathcal{U}} X_n$ 是完备的。

练习 2.8. 设 X 是一个紧有界度量空间。证明：对于任意指标集 I 及其上的超滤子 $\mathcal{U}$，从 X 到 $X^{\mathcal{U}}$ 的对角嵌入是满射（因而是度量空间之间的等距映射）。

本文将讨论若干带有附加结构的度量空间。这里着重指出一点：当我们需要处理这类附加结构时，会遇到这个关键问题。为简化讨论，设我们有一个完备有界度量空间 (X, d)，此外，在 X上还有一个一元函数 f。我们可以自然地定义配备上确界度量的积 $X^{\mathbb{N}}$，并将 f 视为在 $X^{\mathbb{N}}$上逐坐标定义。我们要问：如果希望将 (X, d, f) 的超幂构造成积结构的商，那么 f必须满足什么约束？注意，在经典情形下没有任何限制（总能构造离散超幂）。我们断言，f一致连续是充要条件。充分性显而易见，留作读者练习。为验证必要性，假设存在 $\epsilon > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$（关于本文中 $\mathbb{N}$ 的用法，见脚注[1]），都能找到 a_n, $b_n \in X$，满足 $d(a_n, b_n) < 1/n$，但，而 $d(f(a_n), f(b_n)) \geqslant \epsilon$。令 $\bar{a} = (a_n : n \in \mathbb{N})$，并令 $b = (b_n : n \in \mathbb{N})$。若 $\mathcal{U}$是 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子，则 $\lim_{\mathcal{U}} d(a_n, b_n) = 0$，因此 $[\bar{a}]_{\mathcal{U}} = [b]_{\mathcal{U}}$作为超幂 $X^{\mathcal{U}}$中的元素。然而，$\lim_{\mathcal{U}} d(f(a_n), f(b_n)) \geqslant \epsilon$，因此

$$f([\bar{a}]_{\mathcal{U}}) \neq [f(b)]_{\mathcal{U}},$$

其中 $f(\bar{a}) = (f(a_n) : n \in \mathbb{N})$，$f(b)$也同理。由此可知，$f$ 无法在超幂上定义为积结构的商。

我们从上一段得出的结论是，如果想把超积构造扩展到度量空间上的附加结构，就必须假设某种形式的一致连续性。事实上，类似于刚才给出的论证可以说明，若要构造一致有界度量空间 (X_n, d_n) 的超积，其中 $n \in$ **自然数集** 中的每个空间都配备了一个一致连续的一元函数 f_n，那么这种一致连续性必须在整个结构序列上统一成立；也就是说，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对任意 $n \in$ **自然数集** 以及任意 $a, b \in X_n$，若 $d_n(a, b) < \delta$，则 $d_n(f_n(a), f_n(b)) \leqslant \epsilon$（关于上述不等式中的不对称性，请参见第 3 节开头的讨论）。

[1]我们约定，当 $n \in$ **自然数集** 被视为一个数而非索引时，则 $n \neq 0$。这样可以避免除以零的问题。

3. 度量结构与语言

3.1. 连续语言及其解释。我们现在同时介绍感兴趣的结构，以及预期逻辑所用的语言。度量结构 $\mathcal{M}$ 是经典结构的连续对应物，它是多排序的。该语言包含一组类型 $\mathfrak{S}$。对于每种类型 $S \in \mathfrak{S}$，语言都会指定一个正实数 B_S。在度量结构 $\mathcal{M}$ 中，S 的预期解释是一个有界、完备且非空的度量空间 $S^{\mathcal{M}}$，其直径至多为 B_S。语言中还有一个关系符号 d_S，其解释为度量空间 $S^{\mathcal{M}}$ 上的度量。

语言还包含一组函数符号 $\mathfrak{F}$ 和关系符号 $\mathfrak{R}$（在其他表述中，这些符号有时称为谓词符号）。每个符号都附带一些额外信息；我们先讨论函数符号。若 $f \in \mathfrak{F}$，则 f 的定义域和陪域由语言指定。f的定义域记作 $\mathrm{dom}(f)$，它是某个 $n_f \in \mathbf{N}$的类型的积 $S_1 \times \cdots \times S_{n_f}$；而 f的陪域记作 $\mathrm{cod}(f)$，是一个类型 S_f。此外，语言还指定一个递增连续函数 $\delta_f : [0,1] \to [0,1]$，满足 $\lim_{\epsilon \to 0^+} \delta_f(\epsilon) = 0$；$\delta_f$ 称为 f的一致连续模。函数 δ_f 由语言指定（其动机源于上一节的讨论）。

注释 3.1. 坚持要求上述一致连续模是连续函数，似乎要求过高。事实证明，总能做到这一点：

命题 3.2. [10, 命题 2.10 和注释 2.12] 设 $F, G \colon X \to [0,1]$ 满足

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(F(x) < \delta \textit{ implies } G(x) \leqslant \epsilon).$$

那么存在一个递增连续函数 $\alpha \colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ 使得 $\alpha(0) = 0$，并且对所有 $x \in X$，都有 $G(x) \leqslant \alpha(F(x))$。事实上，可以选择 α，使其仅依赖于映射 $\epsilon \mapsto \delta$，而不依赖于特定的函数 F 和 G。

命题 3.2 在连续模型论中处处都很有用。例如，它有助于表达某些蕴含式（鉴于连续逻辑是一种“正”逻辑，这些蕴含式原本很难表达）；参见 [10, 第 7] 节。我们将在下文第 8 节中用到这个命题。

在该语言的度量结构 $\mathcal{M}$ 中，函数符号 f 被解释为一个一致连续函数

$$f^{\mathcal{M}} : S_1^{\mathcal{M}} \times \ldots \times S_{n_f}^{\mathcal{M}} \to S_f^{\mathcal{M}}$$

其中，$f^{\mathcal{M}}$ 的一致连续性由 δ_f见证，也就是说，对于所有满足 $d_{S_i}(a_i$的 $\epsilon > 0$ 和 a_i，以及对所有 $i = 1$、.....、n，都有 $b_i \in S_i^{\mathcal{M}}$，

$$d_{S_f}(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_{n_f}), f^{\mathcal{M}}(b_1, \ldots, b_{n_f})) \leqslant \epsilon.$$

细心的读者会注意到，在这个一致连续性的定义中，严格不等式与弱不等式之间存在不对称性。造成这种不对称性的简要解释是，我们希望这个定义能够轻松地通过超积构造。不过，这里的定义等价于两边都采用严格不等式的定义。

常元符号将被视为定义域为空的类型序列、陪域为某个类型的函数符号。在度量结构中的解释将是所选陪域中的一个元素。

对于关系符号，若 $R \in \mathfrak{R}$，语言会指定一个定义域，记作 $\mathrm{dom}(R)$，它是某些类型的积 $S_1 \times \cdots \times S_{n_R}$，其中 $n_R \in \mathbf{N}$。语言还会给出一个界 $B_R > 0$ 和一个一致连续模 δ_R。在该语言的度量结构 $\mathcal{M}$ 中，R 被解释为一致连续函数 $R^{\mathcal{M}} : S_1^{\mathcal{M}} \times \ldots \times S_{n_R}^{\mathcal{M}} \to [-B_R, B_R] \subseteq \mathbb{R}$，其一致连续性由上述的 δ_R 见证。

总之，度量语言 $\mathcal{L}$ 包含：

- 一个类型集 $\mathfrak{S}$，并且对于每个 $S \in \mathfrak{S}$，都有一个关系符号 d_S 和一个数 $B_S > 0$，
- 一个函数符号集 $\mathfrak{F}$，并且对于每个 $f \in \mathfrak{F}$，都有一个类型的积 $\mathrm{dom}(f)$、一个类型 $\mathrm{cod}(f)$和一个一致连续模 δ_f，以及
- 一个关系符号集 $\mathfrak{R}$，并且对于每个 $R \in \mathfrak{R}$，都有一个类型的积 $\mathrm{dom}(R)$、一个数 $B_R > 0$和一个一致连续模 δ_R。

度量结构 $\mathcal{M}$（也称为 $\mathcal{L}$-结构）指定以下内容：

- 对于每个类型 $S \in \mathfrak{S}$，一个完备的非空度量空间 $S^{\mathcal{M}}$，其度量$d_S^{\mathcal{M}}$的直径有界于 B_S；
- 对于每个 $f \in \mathfrak{F}$，一个一致连续函数 $f^{\mathcal{M}}$，其一致连续性由 δ_f见证，定义域为 $S_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times S_n^{\mathcal{M}}$，陪域为$S^{\mathcal{M}}$，其中 $\mathrm{dom}(f) = S_1 \times \ldots \times S_n$且 $\mathrm{cod}(f) = S$；以及
- 对于每个 $R \in \mathfrak{R}$，一个实值、有界且一致连续的函数$R^{\mathcal{M}}$，其一致连续模为 δ_R，定义域为 $S_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times S_n^{\mathcal{M}}$，其中$\mathrm{dom}(R) = S_1 \times \ldots \times S_n$，陪域为 $[-B_R, B_R]$。

对于 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，若满足以下条件，我们称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$的子结构

- 对于每个 $S \in \mathfrak{S}$，$S^{\mathcal{N}}$ 都是 $S^{\mathcal{M}}$的闭子空间；
- 对于每个 $f \in \mathfrak{F}$，$f^{\mathcal{N}}$ 是 $f^{\mathcal{M}}$ 在 $S_1^{\mathcal{N}} \times \ldots \times S_n^{\mathcal{N}}$上的限制，其中 $\mathrm{dom}(f) = S_1 \times \ldots \times S_n$；并且
- 对于每个 $R \in \mathfrak{R}$，$R^{\mathcal{N}}$是 $R^{\mathcal{M}}$在 $S_1^{\mathcal{N}} \times \ldots \times S_n^{\mathcal{N}}$上的限制，其中 $\mathrm{dom}(R) = S_1 \times \ldots \times S_n$。

如果 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ 是两种语言，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，那么我们用 $\mathcal{M}\restriction\mathcal{L}'$ 表示从 $\mathcal{M}$ 得到的 $\mathcal{L}'$-结构，它只解释源自 $\mathcal{L}'$的那些类型、关系和函数。我们称 $\mathcal{M}\restriction\mathcal{L}'$ 为将 $\mathcal{M}$ 约化为 $\mathcal{L}'$ 所得的约化结构，并称 $\mathcal{M}$为将 $\mathcal{M}\restriction\mathcal{L}'$ 扩张为 $\mathcal{L}$所得的扩张。

我们希望考察若干个 $\mathcal{L}$-结构范畴。这些范畴的对象本身都是 $\mathcal{L}$-结构；这些范畴的区别在于态射。现在，我们考虑两种在两个 $\mathcal{L}$-结构 $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 之间定义映射的选择，其中映射是指满足 $\rho_S : S^{\mathcal{M}} \to S^{\mathcal{N}}$ 的一族映射$(\rho_S : S \in \mathfrak{S})$ 。下文中，我们用 $\bar{a} \in \mathcal{M}$ 表示 $\bar{a}$ 是来自 $\mathcal{M}$ 各类型的解释之并集的一个元组；用 $\rho(\bar{a})$ 表示将 $\rho_S^{\mathcal{M}}$ 应用于元组 $\bar{a}$ 中的元素，其中各 S 取适当的值。

- ρ 是一个 同态，当且仅当：– 对于 $\mathcal{L}$ 中的所有函数符号 f 以及类型适当的 $\bar{a} \in \mathcal{M}$，都有 $\rho(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\rho(\bar{a}))$；– 对于 $\mathcal{L}$ 中的所有关系符号 R 以及类型适当的 $\bar{a} \in \mathcal{M}$，都有 $R^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \geqslant R^{\mathcal{N}}(\rho(\bar{a}))$。• ρ 是一个 嵌入，如果它是一个同态，且进一步满足：对于 $\mathcal{L}$ 中的所有关系符号 R 以及类型适当的 $\bar{a} \in \mathcal{M}$，都有 $R^{\mathcal{M}}(\bar{a}) =R^{\mathcal{N}}(\rho(\bar{a}))$。注意，如果 ρ 是一个嵌入，那么对于 $\mathcal{L}$ 的所有类型 S， ρ_S 都是等距嵌入。

在我们考虑的所有范畴中， ρ 是一个同构，当且仅当它是一个嵌入，并且对于所有 S, ρ_S 都是满射。如果 $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个嵌入，那么我们用 $\rho(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{N}$ 在所有类型 S上由映射 ρ_S 的像所诱导的子结构。

3.2. **例子**。

例 3.3. 有界完备度量空间是度量结构的一个简单例子。其语言有一种类型和一个用于度量的二元关系符号。这里没有一致连续性要求。

若要考虑一个无界完备度量空间 (X, d)，情况会稍微复杂一些。虽然没有处理这种情况的规范方法，但下面的方法很有帮助，尤其是在具有更多结构时，正如我们稍后将看到的那样。固定一个基点 $\star \in X$。在语言中引入类型 S_n ，对应于 $n \in \mathbf{N}$。 $\{a \in X : d(a, \star) \leqslant n\}$ 是类型 S_n的预期解释。 S_n 上的度量就是 d 在该类型上的限制。对于$m < n$，我们还引入函数符号$i_{m,n}$ ，其定义域为 S_m，陪域为S_n，且一致连续性的模取恒等函数。$i_{m,n}$ 的预期解释是 S_m 到 S_n 的自然包含。

例 3.4。 从模型论的角度来看，一个特别有趣的有界度量空间是乌雷松球 U。在 [42], 中，乌雷松构造了一个

可分完备的 1-有界度量空间，它既是通用的，也就是说，其他任何可分的 1-有界度量空间都可以等距嵌入其中 $\mathbb{U}$；它还是超齐性的，也就是说，如果 A、$B \subset \mathbb{U}$ 是有限集，且 $f : A \to B$ 是等距双射，那么 f 可以扩展为 $\mathbb{U}$的一个自同构。 $\mathbb{U}$ 是唯一一个既通用又超齐性的可分完备的 1-有界度量空间。由于 $\mathbb{U}$ 有界，它自然是一个度量结构的例子。

构造 $\mathbb{U}$ 的一种方法是通过 Fraïssé 型构造，使用由有理距离不超过 1 的有限度量空间组成的类 $\mathcal{C}$。（若想了解如何在连续情形下进行 Fraïssé 构造，请参阅本卷中 Vignati 的文章。） $\mathcal{C}$ 中只有可数多个对象，因此，除去一些琐碎的整理工作，我们要解决的问题是：给定 A、B、$C \in \mathcal{C}$，满足 $A \subset B$ 和 $A \subset C$，如何将 B 和 C 在 A 上粘合起来？为此，需要确定 $b \in B\backslash A$ 和 $c \in C\backslash A$ 之间的距离 $d(b, c)$。我们记录下以下引理，其证明留作练习。

引理 3.5. 设 A, B, C 都是有限度量空间，满足 $A \subset B$ 和 $A \subset C$，且 B 和 C 都是 A 的扩张。那么 B 和 C 可以在 A 上粘合，形成度量空间 $B \cup_A C$，并具有以下性质：

- 底集为 $B \cup C$,
- 度量在 B 和 C上均为原度量，

并且
- 该度量还满足

$$d(b, c) := \min_{a \in A}(d(b, a) + d(a, c))$$

对于 $b \in B\backslash A$ 和 $c \in C\backslash A$。

练习 3.6. 证明引理 3.5。

利用引理 3.5，可以按照弗雷歇构造的方式，从 $\mathcal{C}$ 构造出一列有限度量空间，从而得到一个可数度量空间 $\mathbb{U}_0$，它具有如下性质：只要 A、$B \in \mathcal{C}$ 满足 $A \subset B$ 和 $A \subset \mathbb{U}_0$，就存在一个 $B_0 \subset \mathbb{U}_0$，使得 $A \subset B_0$，并且存在一个等距映射 $i : B \to B_0$，它在 A上是恒等映射。一项稍显繁琐的练习表明，$\mathbb{U}_0$ 的完备化 $\mathbb{U}$ 满足乌雷松球的定义性质。

练习 3.7. 验证上一个例子结尾处的断言。

例 3.8。 经典（离散）结构可以如下视为一种度量结构。设 $\mathcal{M}$ 是经典语言 $\mathcal{L}$ 中的经典结构。为 $\mathcal{M}$ 的每个类型赋予离散度量（即，当 $a \neq b$ 时，$d(a, b) = 1$）。此外，对于每个关系符号 $R \in \mathcal{L}$，将 R 重新解释为函数 $g_R = 1 - \mathrm{char}(R^{\mathcal{M}})$，其中 $\mathrm{char}(R^{\mathcal{M}})$ 是 $R^{\mathcal{M}}$ 的特征函数。注意

当且仅当 $g_R(\bar{a}) = 0$ 时，$\bar{a} \in R^M$。[2] 此外，g_R 是一致连续的，每个函数符号的解释也同样如此。为完整起见，我们应说明，恒等函数是所有函数符号和关系符号的连续模。这样，我们可以将连续逻辑视为经典逻辑的一种扩张。

例 3.9. 回忆一下，希尔伯特空间是一个关于诱导度量完备的复内积空间。我们希望将希尔伯特空间这一类刻画为度量结构的一个例子。下面给出我们将使用的语言$\mathcal{L}_{HS}$及其标准解释：

(1) 对每个 $n \in$ 自然数集，都有一个类型 S_n。在希尔伯特空间中，S_n的预期解释是以 0 为中心、半径为 n的球。在 S_n上，有一个界为 $2n$ 的度量符号，其预期解释是由内积诱导的度量。(2) 对每个 $n \in$ 自然数集，都有一个二元函数符号 $+_n$，其定义域为 $S_n \times S_n$，陪域为 S_{2n}。在希尔伯特空间中的预期解释是半径为 n的球上的加法。一致连续模为$\epsilon \mapsto \epsilon/2$。(3) 对每个 $n \in$ 自然数集，都有一个类型为 S_n 的常元符号 0_n，其解释为 0。(4) 对每个 $n \in$ 自然数集和 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有一个一元函数符号 λ_n，其定义域为 S_n，陪域为 S_m，其中 $m = \lceil |\lambda| \rceil$。一致连续模可以取为 $\epsilon \mapsto \epsilon/m$ 其预期解释是乘以 λ的数乘。(5) 对每个满足 $m < n$的 m、$n \in$ 自然数集，都有一元函数符号 $i_{m,n}$，其定义域为 S_m，陪域为 S_n。其预期解释是从半径为 m 的球到半径为 n 的球的包含映射，一致连续模为恒等函数。(6) 对每个 $n \in$ 自然数集，都有两个二元关系符号 $Re(\langle \cdot, \cdot \rangle)_n$ 和$Im(\langle \cdot, \cdot \rangle)_n$，定义在 S_n上。这些符号的预期解释是内积的实部和虚部在 S_n 上的限制。每个符号的界为 n^2，其一致连续模可以取为 $\epsilon \mapsto \epsilon/2n$。

如果 H 是一个希尔伯特空间，那么上述 $\mathcal{L}_{HS}$-结构将记作$D(H)$，并称为 H的剖分。实际使用中，我们会用这种语言书写公式，并在意图明确时省略下标。如果可以清楚地看出能够按照上述形式体系写出等价公式，我们也可以不区分实部和虚部，直接使用内积符号。

[2]尽管这只是一种约定，连续逻辑中仍规定 0 表示真；更多讨论见第 4 节。

本卷最重要的例子之一是 C*-代数类。下面我们详细考察这一类。

例3.10. 给定一个 C*-代数 A，A 上的自然度量由算子范数诱导。与前例中讨论的希尔伯特空间一样，这个度量无界。我们再次通过引入一系列类型来表示不同半径的算子范数球，从而解决这一问题。和之前一样，对每个 $n \in$ **自然数集**，我们固定类型 S_n，其预期解释为 A中半径为 n 的算子范数球。每个类型上的预期度量，就是算子范数所诱导的度量在给定类型上的限制。语言还将包含若干函数符号。由于我们将对 C*-代数进行分解，与希尔伯特空间的情形一样，我们需要考虑加法和乘法等函数在各个类型上的限制，并通过嵌入映射将这些类型联系起来。基于这一点，我们引入语言 $\mathcal{L}_{C^*}$，其预期解释如下：

(1) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有二元函数符号 $+_n$ 和 $\cdot_n$，其定义域为 $S_n \times S_n$，陪域分别为 S_{2n} 和 S_{n^2}。其预期解释是将 A 上的加法和乘法限制在半径为 n 的算子范数球上。$+_n$ 的一致连续模为 $\epsilon \mapsto \epsilon/2$，而 $\cdot_n$ 的一致连续模为 $\epsilon \mapsto \epsilon/2n$。(2) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有一个一元函数符号 $\cdot^{*_n}$，其定义域和陪域均为 S_n。其预期解释是将伴随限制在半径为 n 的算子范数球上。一致连续模为恒等函数。(3) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有一个属于 S_n 的常元符号 0_n。其预期解释为 0。(4) 对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都有一个一元函数符号 λ_n，其定义域为 S_n，陪域为 S_m，其中 $m = \lceil |\lambda| \rceil$。此符号的一致连续模为 $\epsilon \mapsto \epsilon/m$。(5) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，S_n 上的度量符号记作 d_n；当 x、y 属于半径为 n 的 A 算子范数球时，该符号将解释为 $\|x - y\|$。(6) 对于每个满足 $m < n$ 的 m、$n \in \mathbb{N}$，都有一元函数符号 $i_{m,n}$，其定义域为 S_m，陪域为 S_n。其预期解释是 S_m^A 与 S_n^A 之间的包含映射。一致连续模为恒等映射。

给定一个 C*-代数 A，上面所考虑的 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构记作 $D(A)$，称为 A 的 剖分。显然，如果我们从 A 出发并考虑 $D(A)$，那么随后便可以从 $D(A)$ 恢复出 A（只需取各类型的并集，并按照给定方式将各运算拼接起来）。此外，$D(A) \cong D(B)$（作为 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构）当且仅当 $A \cong B$（作为 C*-代数）。

现在我们来讨论一个微妙的问题。假设对于某个 C*-代数 A，我们有一个 $\mathcal{L}_{C^*}$-子结构 $\mathcal{M} \subseteq D(A)$。$\mathcal{M}$ 是否可以作为某个子代数 $B \subseteq A$ 的 $D(B)$ 出现？明确地说，很容易看出，如果沿着由映射 $i_{m,n}$ 所产生的嵌入，对各类型 $S_n^{\mathcal{M}}$ 取直极限，我们确实得到 A 的一个 C*-子代数 B（每个单独类型的完备性保证了并集是完备的）。问题在于，每个单独的类型 S_n 是否恰好捕获了 B 中算子范数不超过 n 的元素。为了确保这一点能够实现，我们需要下面的事实。支撑该事实的泛函分析论证见 [19, 第 3.1 节第 486] 页上方。

事实 3.11. 对于任意 $n \in$ **自然数集**，存在单变量多项式 q_k^n $(k \in$ **自然数集**$)$，使得若 A 是一个 C*- 代数，且 $a \in A$ 满足 $\|a\| \leqslant n$，则 $\|q_k^n(a)\| \leqslant 1$ 对所有 $k \in$ **自然数集**均成立。此外，若 $\|a\| \leqslant 1$，则当 $k \to \infty$ 时，$q_k^n(a) \to a$。

此后我们假设，对于每个 k，$n \in \mathbb{N}$，我们都已向语言 $\mathcal{L}_{C^*}$ 添加了函数符号 $\mathbf{q}_\mathbf{k}^\mathbf{n}$，其定义域为 S_n，陪域为 S_1。连续模可以取为多项式 q_n^k 在算子范数半径为 n 的球上的限制所对应的连续模。在 C*-代数的剖分中，我们将 $\mathbf{q}_\mathbf{k}^\mathbf{n}$ 解释为相应多项式的值（取值于 S_1）。由于每个多项式 q_k^n 自然都是 C*-代数语言中函数的复合，因此存在某个 $m \geqslant n$，使得当 q_k^n 限制在 S_n 上时，S_m 将是它的（朴素）陪域。当在 C*-代数的剖分中解释 $\mathbf{q}_\mathbf{k}^\mathbf{n}$ 时，我们有

$$i_{1,m}(\mathbf{q}_\mathbf{k}^\mathbf{n}(x)) = q_k^n(x)$$

对类型 S_n 中的所有 x。添加这些函数符号的理由如下。

设 $\mathcal{M}$ 和 B 如上，并且对于某个 $a \in B$ 有 $\|a\| \leqslant 1$。取满足 $a \in S_n^{\mathcal{M}}$ 的 $n \in$ **自然数集**。按照事实 3.11，考虑对于 $k \in$ **自然数集** 的 q_k^n。那么在 B 中，$q_k^n(a)$ 在算子范数下趋于 a。另一方面，由于 $\mathbf{q}_\mathbf{k}^\mathbf{n}$ 的陪域是 S_1，$(\mathbf{q}_\mathbf{k}^\mathbf{n})^{\mathcal{M}}(a)$ 收敛于 $S_1^{\mathcal{M}}$ 中的某个元素，将其记为 b。由于 $i_{1,n}$ 是等距嵌入，$i_{1,n}^{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_\mathbf{k}^\mathbf{n}(a))$ 在 $S_n^{\mathcal{M}}$ 中收敛于 a，因此 $i_{1,n}^{\mathcal{M}}(b) = a$，这意味着 a 和 b 在 B 中被视为同一元素。我们得出 $D(B) \cong M$。

剖分函子 D 实际上是以下范畴之间的范畴等价：以同态为态射的 C*-代数范畴，以及形式为 $D(A)$ 的 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构范畴，其中对象是 C*-代数 A，态射同样为同态。这些范畴之间的等价实际上具有更强的性质，但这项更强的陈述要等到我们定义结构的超积之后才能介绍。

4. 公式

4.1. 基本公式。 现在我们来介绍连续逻辑中公式的句法。固定一个连续语言 $\mathcal{L}$，其中包含类型 $\mathfrak{S}$、函数符号 $\mathfrak{F}$和关系符号 $\mathfrak{R}$。

对于每个类型 $S \in \mathfrak{S}$，我们为 $n \in$ **自然数集**引入变量 x_n^S。与经典逻辑一样，我们需要先定义项，再定义公式。$\mathcal{L}$中的项，以及它们的定义域、陪域和相应的一致连续模，按如下方式归纳定义：

(1) 如果 x 是类型为 S的变量，那么 x 是一个项。它的定义域和陪域均为 S，其一致连续模为恒等函数。(2) 如果 $f \in \mathfrak{F}$ 是一个定义域为 $S_1 \times \ldots \times S_n$、陪域为$S$ 的函数符号，且 τ_1、……、τ_n 是陪域分别为 S_1、……、S_n 的项，那么$f(\tau_1$、……、$\tau_n)$ 是一个陪域为 S 的项，其定义域由复合确定。该项的一致连续模也由复合确定；例如，可以取

$$\epsilon \mapsto \min\{\delta_1(\delta_f(\epsilon)/2), \ldots, \delta_n((\delta_f(\epsilon)/2)\},$$

其中，对于每个 $k = 1$、……、n，δ_f 是 f 的一致连续模，而 δ_k 是 τ_k 的一致连续模。

练习 4.1。 验证上述第 (2) 项末尾给出的函数确实是 $f(\tau_1$、……、$\tau_n)$ 的一致连续模。

$\mathcal{L}$ 的基本公式现在通过归纳法定义。我们使用“基本公式”这一术语，是因为正如我们将在本文后面看到的，为了适应连续逻辑的近似性，我们将希望引入一种更一般的公式概念。[3] 每个基本公式都具有定义域、界和一致连续模，这与关系符号的情形相同。

(1) 假设 $R \in \mathfrak{R}$ 的定义域为 $S_1 \times \ldots \times S_n$，界为 B_R，且 τ_1、……、τ_n 是陪域分别为 S_1、……、S_n 的项。那么 $R(\tau_1$、……、$\tau_n)$ 是一个界为 B_R 的基本公式，其定义域和一致连续模由复合确定。特别地，由于类型上的所有度量符号都包含在 $\mathfrak{R}$ 中，如果 τ_1 和 τ_2 是具有相同陪域 S 的类型，那么 $d_S(\tau_1$、$\tau_2)$ 是一个基本公式。

(2) 如果 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数，且 φ_1、…、φ_n 是基本公式，那么 $\psi := f(\varphi_1$、…、$\varphi_n)$ 也是一个基本公式。如果 B_1、…、B_n 分别是 φ_1、…、φ_n 的界，那么 ψ 的界是最小值

[3] 我们希望，这里对“基本公式”一词的用法不会与它在经典逻辑中的各种用法混淆。

B使得

$$f(\prod_{i=1}^{n}[-B_i, B_i]) \subseteq [-B, B].$$

ψ 的定义域由复合决定。ψ 的一致连续模也由复合决定，具体来说，它由各个 φ_i 的一致连续模以及将 f 限制在 $\prod_{i=1}^{n}[-B_i, B_i]$ 上所得的固定一致连续模决定。

(3) 设 x 是一个变量，φ 是一个公式。于是我们可以构造两个量化基本公式 $\sup_x \varphi$ 和 $\inf_x \varphi$。这些公式的界和一致连续模与 φ 相同。其定义域仅因可能移除与 x 相关联的类型而改变。

第一条款所产生的基本公式称为原子公式。前两条款所产生的基本公式称为无量词基本公式。

注释 4.2。在上面的第二条款中，我们对允许使用的函数——即联结词——作了非常宽泛的选择。从理论上说，允许所有连续函数是很方便的（由于我们实际上只关心它们在$\mathbf{R}^n$中的某个超立方体上的取值，这些函数实际上都是一致连续的）。有时使用范围较小的联结词集合也值得考虑。如果使用在全体连续函数集合中稠密的联结词集合，连续逻辑的表达能力不会改变。例如，我们可以只使用系数为有理数的多项式作为联结词。也有人提出了其他受限的联结词集合（更多细节见 [10, 第 6] 节）。正如我们将看到的，在连续逻辑中，最重要的是公式集合的稠密特征，而不是公式集合的基数。

另一类值得重点介绍的基本公式是前束公式，即以量词块开头、后接无量词基本公式的基本公式。在所有基本公式构成的空间上定义的一种自然（伪）度量中（见第 5.1 小节），前束公式是稠密的。我们将在第 7.2 小节再次讨论前束公式。

现在我们来考察度量结构中基本公式的解释。固定一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$。

项 τ 在 $\mathcal{M}$ 中的解释 $\tau^{\mathcal{M}}$ 与经典逻辑中的解释完全相同，遵循归纳定义并进行复合即可。

练习 4.3。验证可知，τ 语言所知的 τ asknown 的定义域、陪域和一致连续模，实际上就是 $\tau^{\mathcal{M}}$ 的定义域、陪域和一致连续模。

基本公式的解释并没有复杂多少。设 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是 $\mathcal{M}$ 中按类型划分的元素序列，而基本公式 φ 的自由变量 $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 也按类似方式划分类型。我们希望通过归纳定义解释 $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$：

（1）若 $\varphi := R(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ 是项 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ 的，则

$$\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) := R^{\mathcal{M}}(\tau_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, \tau_k^{\mathcal{M}}(\bar{a})).$$

（2）若 $\varphi := f(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ 是基本公式 $\psi_1, \ldots, \psi_k$ 及一个连续实值函数 f 的，则

$$\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) := f(\psi_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, \psi_k^{\mathcal{M}}(\bar{a})).$$

（3）若 $\varphi := \sup_x \psi$，则

$$\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) := \sup\{\psi^{\mathcal{M}}(b, \bar{a}) \colon b \in S^{\mathcal{M}}\}$$

其中，S 是 x的类型。注意，这个定义良好，因为 $\psi^{\mathcal{M}}$ 的陪域有界。

类似地，如果 $\varphi := 是_x \psi$的下确界，那么

$$\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) := \inf\{\psi^{\mathcal{M}}(b, \bar{a}) \colon b \in S^{\mathcal{M}}\}$$

其中，S 同样是 x的类型。

练习 4.4. 验证上述定义的每种情形中，这些公式的界、定义域和一致连续模都是语言已知的。

4.2. **公式的一些例子**。 由于在连续逻辑中书写表达式需要一些练习，我们来看看表达某些陈述的一些标准方式。

例 4.5. 假设我们有两个项 $\tau(\bar{x})$ 和 $\sigma(\bar{x})$，它们的陪域相同。当对它们进行解释时，如何断言它们相等？如果 d 是这些项共同陪域所属类型上的度量符号，那么句子 $\sup_{\bar{x}} d(\tau(\bar{x}), \sigma(\bar{x}))$ 在某个度量结构 $\mathcal{M}$ 中取值为 0，当且仅当函数 $\tau^{\mathcal{M}}$ 和 $\sigma^{\mathcal{M}}$ 相等。

例 4.6. 有时我们希望断言一个公式的值小于或等于另一个公式的值。为此，我们借助截断减法函数 $x \dot{-} y := \max\{0, x - y\}$。注意，$\dot{-}$ 是一个从 $\mathbb{R}^2$到 $\mathbb{R}$ 的连续函数，因此可以用作联结词。设 $\varphi(\bar{x})$和 $\psi(\bar{x})$是两个公式。那么句子

$$\sup_{\bar{x}}(\varphi(\bar{x}) \dot{-} \psi(\bar{x}))$$

当且仅当作为函数时，$\varphi^{\mathcal{M}} \leqslant \psi^{\mathcal{M}}$ 在结构 $\mathcal{M}$ 中取值为 0。

例 4.7。另一个值得能够写出的有用内容，是某个有限度量空间的同构类型。设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是一个具有 n 个不同元素且度量为 δ的有限度量空间。对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，令 $r_{ij} = \delta(a_i, a_j)$。考虑公式

$$D_A(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |d(x_i, x_j) - r_{ij}|,$$

其中 x_1、……、x_n 是类型为 S 的变量，而 d 是该类型的度量符号。注意，max 是一个连续函数（此处有 $n(n-1)$ 个输入），$a \mapsto |a - r|$也是如此，因此它们可以用作构造上文公式 D_A 时的联结词。若我们有一个结构 $\mathcal{M}$，其类型为 S，且 b_1、……、$b_n \in S^{\mathcal{M}}$，那么 $\varphi^{\mathcal{M}}(b_1$、……、$b_n) = 0$ 当且仅当映射 $a_i \mapsto b_i$（对于 $i = 1$、……、n）是从 A 到 $S^{\mathcal{M}}$的等距嵌入。

5. 基础连续模型论

5.1. 一些术语。 在定义更一般的公式概念之前，我们需要介绍一些逻辑术语，它们大致对应于经典情形。

固定一个度量语言 $\mathcal{L}$。$\mathcal{L}$ 中的一个句子 是一个没有自由变量的 $\mathcal{L}$-公式。$\mathcal{L}$-句子的集合记作 $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$。句子集 Γ若可满足，则存在一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$，使得对所有 $\varphi \in \Gamma$，都有 $\varphi^{\mathcal{M}} = 0$[4]；此时我们称 $\mathcal{M}$ 满足 Γ，并记作 $\mathcal{M} \models \Gamma$。当 $\Gamma = \{\varphi\}$时，我们用 $\mathcal{M} \models \varphi$ 代替 $\mathcal{M} \models \{\varphi\}$，并称 $\mathcal{M}$ 满足 φ。我们将此记号扩展如下：对于句子集 Γ和句子 φ，记 $\Gamma \models \varphi$ 表示：每当 $\mathcal{M} \models \Gamma$时，就有 $\mathcal{M} \models \varphi$。

一组可满足的（$\mathcal{L}$-）句子 T称为一个($\mathcal{L}$)-理论。如果存在一个 $\mathcal{L}$-理论 T，使得 $\mathcal{C}$ 是 T的模型的集合，那么我们称一类 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{C}$ 是初等（或可公理化）的。

对于一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$，考虑线性求值映射

$$ev_{\mathcal{M}} \colon \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \to \mathbf{R} \text{ defined by } ev_{\mathcal{M}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{M}}.$$

注意，如果 $ev_M(\varphi) = r$，那么 $ev_M(\varphi - r) = 0$，因此 $ev_{\mathcal{M}}$ 完全由其核决定。有鉴于此，将, 的理论定义为满足 $\varphi^{\mathcal{M}} = 0$ 的语句集合 φ，是很方便的。另请注意，$ev_{\mathcal{M}}$ 不仅是线性的：如果 φ_1、……、φ_n 是 $\mathcal{L}$-句子，且 f 是$\mathbf{R}^n$ 上的连续实值函数，那么

$$ev_{\mathcal{M}}(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = f(ev_{\mathcal{M}}(\varphi_1), \ldots, ev_{\mathcal{M}}(\varphi_n)).$$

[4]这里选择 0 有些任意。如果我们关心某个句子 φ 是否取值为某个实数 r，那么我们也可以等价地询问句子 $\varphi - r$是否成立。

两个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 称为初等等价，记作 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$，如果 $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$。若句子集合 Γ 可满足，且只要 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 满足 Γ，就有 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$，则称其为完备。注意，对于一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$，$\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ 是一个完备的（$\mathcal{L}$-）理论。若 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的子结构，则称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的初等子结构，记作 $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$；如果 $\varphi(\bar{x})$ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，且 $\bar{a} \in \mathcal{N}$ 是一个与变量 $\bar{x}$ 类型顺序相同的序列，那么 $\varphi^{\mathcal{N}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$。若 $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ 且 $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}$，我们记作 $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$。如果 $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个嵌入，那么当 $\rho(\mathcal{M}) \preceq \mathcal{N}$ 时，它就是一个初等嵌入。

现在我们可以定义另一类 $\mathcal{L}$-结构。给定一个 $\mathcal{L}$-理论 T，$\mathrm{Mod}(T)$ 是一个范畴，其对象是 T 的模型，态射是初等嵌入。如果理论 T 为空，也就是说，对象的集合就是所有 $\mathcal{L}$-结构的集合，那么我们将这个范畴称为 $\mathrm{Str}(\mathcal{L})$。

5.2. 公式的一般概念。现在我们将基本公式的概念加以推广。需要注意的是，这个公式的一般概念是相对于背景理论而言的。公式的一般概念源于在基本公式集合上引入以下半范数。固定一个 $\mathcal{L}$-理论 T以及一个固定的变量集 $\bar{x}$。给定一个基本公式 $\varphi(\bar{x})$，定义 $\|\varphi(\bar{x})\|_T$ =上确界$\{|\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a})| : \bar{a} \in \mathcal{M},\ \mathcal{M} \models T\}$。设 $\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T,\ \mathcal{L})$ 是关于由半范数 $\|\cdot\|_T$ 诱导的伪度量，对自由变量 $\bar{x}$ 中的基本 $\mathcal{L}$-公式集合的完备化（也就是说，φ 与 ψ 之间的距离是 $\|\varphi - \psi\|_T$）。如果 $\|\varphi - \psi\|_T = 0$，则称 φ 和 ψ 是 T-等价的。因此，$\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T)$ 是先将 T-等价的公式视为相同，再对所得度量空间进行完备化得到的。$\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T,\ \mathcal{L})$ 中的元素称为 T-公式，并且按照半范数 $\|\cdot\|_T$的意义，它们是基本公式的极限。如果 $T = \varnothing$，我们将 $\mathrm{Form}(\varnothing,\ \mathcal{L})$ 中的元素简单地称为 $\mathcal{L}$-公式。如果 φ 是一个 T-公式，且是基本公式 φ_n的极限，那么我们可以在 $\mathcal{M}$ 的一个 T模型中解释 φ，令$\varphi^{\mathcal{M}} = \text{极限}_n\, \varphi_n^{\mathcal{M}}$。

练习 5.1。验证上述对 φ 的 T-公式所给出的 $\varphi^{\mathcal{M}}$ 定义与代表序列的选择无关。此外，证明对于每个 T-公式 φ，存在 $B > 0$，使得 $\varphi^{\mathcal{M}}$ 对 T 的所有模型 $\mathcal{M}$ 都取值于 $[-B, B]$。

注意，对于理论 T，T-公式的集合在与连续函数复合下是闭的；也就是说，若 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 是 T-公式，且 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是连续函数，则 $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ 是一个 T-公式。此外，T-公式的集合在上确界和下确界运算下是闭的。也就是说，若 $\varphi(x, \bar{y})$ 是一个 T-公式，那么 $\sup_x \varphi(x, \bar{y})$ 和 $\inf_x \varphi(x, \bar{y})$ 也是。

例 5.2. 假设我们有一个理论 T，以及在变量$\bar{x}$ 中、对 $n \in$ **自然数集**有界为 B_n 的 T-公式 φ_n。那么，按照刚才所说的意义，下面是一个 T-公式

定义如下：

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\varphi(\bar{x})}{B_n 2^n}.$$

不难看出，所有 T-公式都可以表示为基本公式的加权和。

$\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T,\mathcal{L})$ 具有实赋范代数的结构：它包含常值函数，并且在加法和乘法下封闭。将这一概念推广如下会很方便。

定义 5.3。 一个实代数系统 A 的 T-公式 由以下对象组成：对于每个变量序列 $\bar{x}$，都有一个 $\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T,\mathcal{L})$ 的闭子代数 $A_{\bar{x}}$。

我们想到实代数系统的三个特例。

例 5.4。

(1) 假设 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$。给定变量序列 $\bar{x}$，定义 $A_{\bar{x}}$ 为基本 $\mathcal{L}'$-公式集在 $\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T,\mathcal{L})$ 中的闭包。于是，A 是由 T-公式构成的实代数系统。(2) 给定变量序列 $\bar{x}$，令 $A_{\bar{x}}$ 为无量词基本 $\mathcal{L}$-公式集在 $\mathrm{Form}_{\bar{x}}(\varnothing,\mathcal{L})$中的闭包。于是，$A$ 是由 $\mathcal{L}$-公式构成的实代数系统，其元素称为无量词公式。(3) 令 A 为 $\mathcal{L}$中自由变量为 $\bar{x}$的前束公式集在 $\mathrm{Form}_{\bar{x}}(\varnothing,\mathcal{L})$ 中的闭包。于是，A 是一个实代数系统。

对于拓扑空间 X，我们用 $\chi(X)$ 表示的稠密特征，即 X的稠密子集的最小基数。我们将语言 $\mathcal{L}$ 相对于理论 的稠密特征记作 $\chi(T,\mathcal{L})$，其定义如下：

$$\sum_{\bar{x}} \chi(\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T,\mathcal{L})),$$

其中，上确界取遍所有变量元组。若 T 是空理论，我们将在记号中省略它，直接写作 $\chi(\mathcal{L})$。若 $\chi(\mathcal{L}) = \aleph_0$，我们称 $\mathcal{L}$ 是可分的。我们还将 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 的稠密特征定义为，记作$\chi(\mathcal{M})$:

$$\sup_{S\in\mathfrak{S}} \chi(S^{\mathcal{M}}).$$

5.3. **首批模型论结果**。

命题 5.5 (Tarski-Vaught 检验**)**。 假设 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$。那么下列条件等价：

(1) $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$。

(2) 对所有基本的 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(y, \bar{x})$ 以及所有 $\bar{a} \in N$,

$$\inf\{\varphi^{\mathcal{M}}(b, \bar{a}) \colon b \in N\} = \inf\{\varphi^{\mathcal{M}}(b, \bar{a}) \colon b \in \mathcal{M}\}.$$

证明。 (1) 蕴含 (2)，这是由初等子结构的定义得出的。为证明 (2) 蕴含 (1)，我们对基本公式的构成进行归纳。值得注意的情形是含有下确界量词的公式。因此，假设 $\varphi(\bar{x}) = \inf_y \psi(y, \bar{x})$ and$\bar{a} \in N$。由归纳法，我们总有 $\varphi^{N}(\bar{a}) \geqslant \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$。为证明反向不等式，固定 $\epsilon > 0$，并取满足 $\psi^{\mathcal{M}}(b, \bar{a}) < \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) + \epsilon$ 的 $b \in \mathcal{M}$。根据条件 (2)，我们可以找到满足 $\psi^{\mathcal{M}}(b', \bar{a}) < \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) + \epsilon$ 的 $b' \in N$，于是由归纳法，并令 ϵ 趋于 0，我们有 $\varphi^{N}(\bar{a}) \leqslant \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$。□

定理 5.6 (向下 Löwenheim-Skolem 定理)。 给定 $X \subseteq \mathcal{M}$，存在 $N \preceq \mathcal{M}$使得 $X \subseteq N$ 且 $\chi(N) \leqslant \chi(X) + \chi(\mathcal{L})$。

证明。 我们通过逐步闭包来构造 N，以满足 Tarski-Vaught 检验；这里只略述细节。固定公式集$\{\varphi_i(y, \bar{x}_i) \colon i \in I\}$，它在 $\mathrm{Form}(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \mathcal{L}) := \bigcup_{\bar{x}} \mathrm{Form}_{\bar{x}}(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \mathcal{L})$中稠密，且满足 $|I| = \chi(\mathcal{L})$。我们构造一个由 $\mathcal{M}$ 的子集组成的递增序列 (X_n)，使得:

(1) $X_0 = X$, (2) 对每个 $n \in$ **自然数集**， $i \in I$和 $\bar{a} \in X_n$，都存在一个包含于 X_{n+1} 的序列 (b_n)，使得

$$(\inf_y \varphi(y, \bar{a}))^{\mathcal{M}} = \inf\{\varphi^{\mathcal{M}}(b_n, \bar{a}) : n \in \mathbf{N}\},$$

and

(3) $\chi(X_n) \leqslant \chi(X) + \chi(\mathcal{L})$。

我们令 N 为 M中 X_n's 的并集的闭包，并将验证 N 是一个子结构 $\mathcal{N}$ 的论域、且事实上是 $\mathcal{M}$的初等子结构这一点留作读者的练习。□

习题 5.7. 验证上一个证明结尾处提出的断言。

定义 5.8. 固定一个 $\mathcal{L}$结构 $\mathcal{M}$ 和一个子集 $A \subseteq \mathcal{M}$。语言 $\mathcal{L}_A$ 是$\mathcal{L}$，再加上对每个 $a \in A$ （且 c_a 与 a具有相同类型）引入的一个新常元符号 c_a。 $\mathcal{M}$ 可通过将每个 c_a 解释为 a（对每个 $a \in A$），规范地扩充为一个 $\mathcal{L}_A$结构 $\mathcal{M}_A$。

我们定义两种类型的 $\mathcal{L}_M$理论（通常称为图表）：

（1） $\mathcal{M}$ 的原子图（记作 $\mathrm{Diag}(\mathcal{M})$）是集合

$$\{\varphi \colon \varphi \text{ is an an atomic } \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\text{-sentence and } \mathcal{M}_{\mathcal{M}} \models \varphi\}.$$

（2） $\mathcal{M}$、 $\mathrm{Elem}(\mathcal{M})$ 的初等图是集合

$$\{\varphi\colon \varphi \text{ is an an basic } \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\text{-sentence and } \mathcal{M}_{\mathcal{M}} \models \varphi\}.$$

命题 5.9. 对于 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，我们有：

(1) $\mathcal{M}$ 可以嵌入到 $\mathcal{N}$ 中，当且仅当 $\mathcal{N}$ 可以扩张为一个满足 $\mathcal{M}$的原子图的 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-结构。*(2)* $\mathcal{M}$ 可以初等嵌入到 $\mathcal{N}$ 中，当且仅当 $\mathcal{N}$ 可以扩张为一个满足 $\mathcal{M}$的初等图的$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-结构。

证明。 两个证明类似，因此我们只证明 (2)。如果 $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个初等嵌入，那么通过用 $f(m)$在 $\mathcal{N}$ 中解释 c_m，很容易证明 $\mathcal{N}$ 的这个扩张满足 $\mathcal{M}$的初等图。反过来，如果 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ 扩张，且满足 $\mathcal{M}$的初等图，那么对所有 $m \in \mathcal{M}$，定义 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 为 $f(m) = c_m^{\mathcal{N}}$。同样，很容易证明这是一个初等映射。□

下述结果类似于关于链的并的经典结果。

命题 5.10. 以初等嵌入为态射的 $\mathcal{L}$-结构范畴具有有向余极限。更准确地说，给定：

(1) 一个有向偏序 $(P, <)$ 以及一族 $\mathcal{L}$-结构 $(\mathcal{M}_i : i \in P)$，和 *(2)* 对每个 $i < j$，满足当 $i < j < k$时 $\rho_{jk} \circ \rho_{ij} = \rho_{ik}$的初等映射 $\rho_{ij} : \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_j$，

那么存在一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{N}$ 以及初等映射 $\nu_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{N}$，使得

(1) 对于 $i < j$, $\nu_i = \nu_j \circ \rho_{ij}$，且
(2) $\mathcal{N}$ 是 $\bigcup_{i \in P} \nu_i(\mathcal{M}_i)$ 的闭包。

练习 5.11. 证明上一个命题。

5.4. **Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈**。 现在我们介绍 Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈的连续版本，它提供了一种识别初等等价的方法。这些博弈在研究各种算子代数的理论时很有用（例如，见 [25, 28]）。

固定一组关于变量 $\bar{x} = (x_i : 1 \leqslant i \leqslant n)$ 的基本 $\mathcal{L}$ 公式 Δ，以及一个 $\epsilon > 0$。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个 $\mathcal{L}$-结构。我们描述一个在两位玩家（玩家 I 和玩家 II）之间进行的游戏，即 $\mathrm{EF}(\mathcal{M}、\mathcal{N}、\Delta、\epsilon)$-游戏。游戏进行 n 轮。在第 i^{th} 轮中，玩家 I 选择 $a_i \in \mathcal{M}$ 或 $b_i \in \mathcal{N}$，其类型与变量 x_i 所属类型相同，然后玩家 II 分别以 $b_i \in \mathcal{N}$ 或 $a_i \in \mathcal{M}$ 作答。经过 n 轮后，得到两个序列 $\bar{a} = (a_1、 \ldots\ldots、 a_n)$

and $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. 对任意 $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$，若满足以下条件，则玩家 II 赢得该博弈

$$|\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) - \varphi^{\mathcal{N}}(\bar{b})| < \epsilon.$$

定理 5.12. 对于两个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，以下条件等价：

(1) $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. *(2)* 对每个有限的原子 $\mathcal{L}$-公式集 Δ 以及每个 $\epsilon > 0$，玩家 *II* 都有该 $\mathrm{EF}(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Delta, \epsilon)$-博弈的必胜策略。*(3)* 对每个有限的基本 $\mathcal{L}$-公式集 Δ 以及每个 $\epsilon > 0$，玩家 *II* 都有该 $\mathrm{EF}(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Delta, \epsilon)$-博弈的必胜策略。

练习 5.13。 证明定理 5.12。（提示：对于方向 (3) 推出 (1)，请对基本 $\mathcal{L}$-公式的自然量词深度进行归纳。）

想查阅上一道练习解答的读者可参考 [29] .

5.5. **连续理论的例子**。

例 5.14 （乌雷松球）。 乌雷松球的理论由一组公理化语句刻画，这些语句表达了扩张性质，并由此刻画出我们在例 3.4 中描述的空间。我们令理论 $\mathrm{T}^{\mathrm{ext}}$ 由以下语句组成$\varphi_{A,\,B}$ 其定义如下（回顾例 4.7 中的记号）

$$\sup_{\bar{x}}(\inf_{y} D_B(\bar{x}, y) \dot{-} D_A(\bar{x})),$$

其中 $n \geqslant 1$、 $A = \{a_1, \ldots\ldots, a_n\}$ 和 $B = \{a_1, \ldots\ldots, a_n, b\}$ 是 1-有界度量空间，而 $\bar{x} = x_1, \ldots\ldots, x_n$。
从我们对乌雷松球的原始刻画可知， U满足所有语句$\varphi_{A,\,B}$。

在证明 $\mathrm{T}^{\mathrm{ext}}$ 公理化了 U 的理论之前，我们先介绍一种不同于例 3.4 中所用方法的融合构造。假设 A、$B = A \cup \{b\}$ 和 $C = A \cup \{c\}$ 都是有限度量空间，且有 $b \neq c$，它们的度量分别为 d_A、 d_B 和 d_C，其中 d_B 和 d_C 都扩张了度量 d_A。我们希望在 $B \cup C$ 上定义一个度量 d，使其同时扩张 d_B 和 d_C；换言之，我们必须确定 $d(b, c)$ 的取值。为进行下面的论证，我们设

$$d(b, c) = \max_{a \in A} |d_B(b, a) - d_C(c, a)|.$$

练习 5.15。 证明 d 确实是 $B \cup C$ 上的度量。

我们将得到的度量空间记为 $B \sqcup_A C$。
现在，为了证明 $\mathrm{T}^{\mathrm{ext}}$ 实际上公理化了 U的理论，只需证明更强的命题： $\mathrm{T}^{\mathrm{ext}}$ 的任意可分模型都与 U同构。因此，假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathrm{T}^{\mathrm{ext}}$的一个可分模型。我们将证明 $\mathcal{M}$ 与 U同构

这可以通过标准的来回论证来证明。我们将重点讨论归纳步骤，其余细节留给读者。考虑一个有限度量空间$A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathcal{M}$，以及 A的一个抽象单点扩张 $B = A \cup \{b\}$。我们希望在 $\mathcal{M}$中找到一个 B 的同构副本，使其扩张 A 。首先，我们利用 $\varphi^{\mathcal{M}}_{A,\,B} = 0$这一事实，找到某个 $b_0 \in \mathcal{M}$，使得 $D^{\mathcal{M}}_B(a_1, \ldots, a_n, b_0) < 1/2$。若令 $r_a = d(b, a)$ 对应于 $a \in A$，则对所有$a \in A$，都有 $|d(b_0, a) - r_a| < 1/2$。

集合 $B_0 := \{a_1、 \ldots\ldots、 a_n、 b_0\}$。现在，我们通过归纳法从 $\mathcal{M}$ 构造一个序列 (b_m)，令 $B_m := \{a_1、 \ldots\ldots、 a_n、 b_m\}$ 和 $\hat{B}_m := B_m \sqcup_A B$，使得

$$D_{\hat{B}_m}(a_1, \ldots, a_n, b_m, b_{m+1}) < 1/2^{m+1}.$$

注意，利用 $\varphi^{\mathcal{M}}_{B_m,\,\hat{B}_m} = 0$ 这一事实，确实可以得到 $b_{m+1} \in \mathcal{M}$。此构造得到 $|d(b_m、 a) - r_a| < 1/2^{m+1}$，以及 $d(b_m、 b_{m+1}) < 3/2^{m+2}$。˜现在显然，$(b_m \colon m \in \textbf{自然数集})$ 是 $\mathcal{M}$ 中的柯西序列；令 $b \in \mathcal{M}$ 为该序列的极限，则有 $d(\tilde{b}、 a) = r_a$，对所有 $a \in A$ 均成立。因此，映射 $\langle a_1、 \ldots\ldots、 a_n、 b \mapsto a_1、 \ldots\ldots、 a_n、 b$ 是一个等距映射，从而在 $\mathcal{M}$ 中得到所需的 B 的副本。

现在我们来看一些结构不止包含度量符号的例子；这些例子是本卷许多文章的关键。

例 5.16（希尔伯特空间）。现在我们用语言 $\mathcal{L}_{HS}$ 写出在所有希尔伯特空间（的剖分）中都成立的语句（或公理）。事实上，这些语句将公理化希尔伯特空间（的剖分）理论。

第一组公理将表达我们所讨论的是一个复向量空间。由于存在类型 S_n，我们需要无穷多个句子来表达通常的公理。例如，对于每个 $n \in \textbf{自然数集}$，我们都有一个句子

$$\sup_{x,y \in S_n} d_n(\lambda_n(x +_n y), \lambda_n(x) +_m \lambda_n(y)),$$

其中 $\lambda \in \mathbf{C}$，而 S_m 是 λ_n 的陪域。当然，如果这些句子在我们的结构中成立，那么我们就知道，对于所有 x 和 y，$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$。我们把以类似方式写出所有其他确保我们得到一个复向量空间所需的句子留作练习。

第二组公理表达了我们拥有一个内积，并说明了它与每个类型上的度量之间的关系。例如，我们有以下语句：

$$\sup_{x \in S_n} |d_n(x, 0)^2 - Re\langle x, x\rangle|.$$

关于内积的其他公理留作练习。

我们还需要第三组公理，用来说明不同类型之间的包含映射是保持代数运算的等距嵌入。首先，我们需要表达这些包含映射本身彼此兼容：对于 $n < m < k$，我们加入如下语句

$$\sup_{x \in S_n} d_k(i_{m,k} i_{n,m}(x), i_{n,k}(x)),$$

它们断言 $i_{m,\,k} i_{n,\,m} = i_{n,\,k}$ 保持代数结构的包含映射的一个例子是以下语句：对于 $n < m$ 和 $\lambda \in \mathbf{C}$，

$$\sup_{x \in S_n} d_l(i_{k,l}(\lambda_n x), \lambda_m i_{n,m}(x)),$$

其中，S_k 是 λ_n 的陪域，而 S_l 是 λ_m 的陪域。

最后，我们希望表达各类型得到了正确的解释，即 S_n 应当是半径为 n 的球。我们用两条公理来表达这一事实：

$$\sup_{x \in S_1}(d_1(x, 0) \dot{-} 1)$$

and

$$\sup_{x \in S_n} \min\{1 \dot{-} \|x\|, \inf_{y \in S_1} d_n(y, i_{1,n}(y)\}.$$

第一条公理说，S_1 中的每个元素的范数都应至多为 1；通过缩放，S_n 中的每个元素的范数都应至多为 n。第二条公理说，如果 S_n 中的某个元素的范数小于 1，那么它就在来自 S_1 的包含映射之像的闭包中。利用各类型的完备性，我们得到 S_n 中任何范数至多为 1 的元素都来自 S_1 中的某个元素。因此，若这两条公理（连同上述所有其他公理）都得到满足，则 S_1 是某个希尔伯特空间的单位球，而各类型经由这些嵌入的直极限是一个希尔伯特空间。

如果我们用 T_{HS} 表示上面列出的语句集合，那么可以得出：

定理 5.17。 T_{HS} 公理化了希尔伯特空间的剖分类。此外，以同态为态射的 T_{HS} 模型范畴，与以同态为态射的希尔伯特空间范畴，通过剖分函子等价。

例 5.18 (C*-代数)。 与前面的例子一样，我们现在写出一些语句，用来公理化语言 $\mathcal{L}_{C^*}$ 中 C*-代数（的剖分）类；该语言见例3.10。

首先，我们需要说明该结构是一个复 *-代数。这需要按照上面希尔伯特空间示例中所描述的方式，写出若干方程。我们不会写出全部方程，但下面是一个示例：

$$\sup_{x,y \in S_n} d_n((xy)^*, y^* x^*).$$

对于每个 $n \in$ **自然数集**，都有这样一个句子。当然，这组句子表达了 C*-代数中乘法与伴随之间的关系，即对于所有 x 和 y，$(xy)^* = y^*x^*$。

我们还希望说明底层结构是一个赋范代数。同样，我们只写出一个示例，其余部分留作练习。我们很容易想到将三角不等式写成

$$\forall_{x,y \in S_n} \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

但更形式化地，它写作

$$\sup_{x,y \in S_n} \left(\|x + y\| \dot{-} \left(\|x\| + \|y\|\right)\right),$$

其中，$\|z\|$ 是 $d(z, 0)$的简写。后一个句子在 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构中恰好在三角不等式成立时取值为 0。

我们还希望我们的 Banach *-代数是一个 C*-代数。C*-恒等式写作

$$\sup_{x \in S_n} \left|\|x^*x\| - \|x\|^2\right|,$$

其中，我们采用上述关于 $\|\cdot\|$的约定。对于每个 $n \in$ **自然数集**，我们都包含这样一个句子，不过鉴于其他公理，只需将这条公理纳入 $n = 1$即可。

与希尔伯特空间的情形一样，现在需要加入一些句子，使连续逻辑的形式体系与通常的算子代数框架相匹配。首先，我们有嵌入映射$i_{m,\,n}$。我们可以写出一些句子，表达这些映射是等距嵌入，并且保持相关的代数结构（加法、乘法和伴随）。这些句子的具体表述留给读者。

我们还希望将类型 S_n 解释为半径为n的算子范数球。我们需要两组句子。首先，加入一些句子

$$\sup_{x \in S_n}(\|x\| \dot{-} n),$$

这些句子说明类型 S_n 中的每个元素的范数都不超过 n。最后，我们记录一些句子，以保证所有范数不超过 n的元素都属于 S_n。回顾例3.10中引入的函数符号$\mathbf{q}^n_k$，其定义域为 S_n，陪域为 S_1。它们表示多项式 q^n_k，因此我们写出一些句子

$$\sup_{x \in S_n} d_m(i_{1,m}(\mathbf{q}^n_k(x)), q^n_k(x)),$$

其中 S_m 是项 q^n_k 的陪域。我们将这个例子中概述的语句集合称为 T_{C^*}。根据引理3.11之后的论证，我们看到

满足 T_{C^*} 的 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构恰好是某个 C*-代数 A 对应的 $D(A)$ 形式。由此我们得出：

定理 5.19。 T_{C^*} 公理化了C*代数的剖分类。此外，C*代数的范畴与 T_{C^*} 的模型范畴（以同态作为态射）通过剖分函子等价。

6. 超积

6.1. 度量结构的超积。 固定一个度量语言 $\mathcal{L} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R})$，一个指标集 I，一个定义在 I 上的超滤子 $\mathcal{U}$，以及适用于 $i \in I$的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}_i$。我们如下构造（度量）超积 $\mathcal{N} := \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$：

- 对于每个类型 $S \in \mathfrak{S}$，令 $S^{\mathcal{N}}$ 为度量空间 $\prod_{\mathcal{U}}(S^{\mathcal{M}_i}, d_i)$，其中 d_i 是定义在 $S^{\mathcal{M}_i}$上的度量。我们将 $S^{\mathcal{N}}$ 上的度量解释为 $\lim_{\mathcal{U}} d_i$。回忆一下，这是良定义的，因为所涉及的所有度量空间都由界 B_S一致有界。• 对于定义域为 $S_1 \times \ldots \times S_n$的每个 $f \in \mathfrak{F}$，我们通过以下方式定义 $f^{\mathcal{N}}$：

$$f^{\mathcal{N}}([(a_i^1)]_{\mathcal{U}}, \ldots, [(a_i^n)]_{\mathcal{U}}) = [(f(a_i^1, \ldots, a_i^n))]_{\mathcal{U}},$$

  其中，对于所有 $j = 1, \ldots, n$，$[(a_i^j)]_{\mathcal{U}} \in S_j^{\mathcal{N}}$。同样，由于f 的所有解释都满足相同的一致连续模，因此 $f^{\mathcal{N}}$ 的这个定义是良定义的，并且 $f^{\mathcal{N}}$ 满足语言所规定的一致连续模。

- 对于每个 $R \in \mathfrak{R}$，我们定义 $R^{\mathcal{N}}$ 如下：

$$R^{\mathcal{N}}([(a_i^1)]_{\mathcal{U}}, \ldots, [(a_i^n)]_{\mathcal{U}}) = \lim_{\mathcal{U}} R^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n),$$

  其中，对于所有 $j = 1, \ldots, n$，$[(a_i^j)]_{\mathcal{U}} \in S_j^{\mathcal{N}}$。与函数符号的情形一样，由于 R 在所有 $\mathcal{M}_i$ 中都一致有界，且具有相同的一致连续模，因此 $R^{\mathcal{N}}$ 的这个定义是良定义的，并且 $R^{\mathcal{N}}$ 满足语言所规定的一致连续模。

练习 6.1。 验证$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ 确实是一个 $\mathcal{L}$-结构。

如果所有 $\mathcal{M}_i$ 都是同一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$，那么我们就称所得的超积为超幂，并将其记作 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$。

与经典逻辑一样，我们需要能够在超积中计算公式的值。以下是相应版本的***Łoś***定理。

定理 6.2. 假设对于所有 $i \in I$，$\mathcal{M}_i$ 都是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $\mathcal{U}$ 是 I上的超滤子。设 $\mathcal{N} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$。对于一个 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(\bar{x})$ 以及与

变量 $\bar{x}$ 类型相同的，我们有

$$\varphi^{\mathcal{N}}(\bar{a}) = \lim_{\mathcal{U}} \varphi^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i).$$

证明。 证明采用对基本公式的构成进行归纳法。我们只处理 $\varphi(\bar{x}) =$ 下确界$_y\, \psi(y, \bar{x})$ 的情形。
假设 $\lim_{\mathcal{U}} \varphi^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) > r$，其中 $r \in \mathbf{R}$。令 $X = \{i \in I : \varphi^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) > r\}$，并注意到 $X \in \mathcal{U}$。固定 $b = [(b_i)]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}$。对于每个 $i \in X$，我们有 $\psi^{\mathcal{M}_i}(b_i, \bar{a}_i) > r$。由归纳法，得到 $\psi^{\mathcal{N}}(b, \bar{a}) \geqslant r$。由于这对所有 $b \in \mathcal{N}$ 都成立，因此我们有$\varphi^{\mathcal{N}}(\bar{a}) \geqslant r$，从而有 $\varphi^{\mathcal{N}}(\bar{a}) \geqslant \lim_{\mathcal{U}} \varphi^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i)$。

现在假设 $s = \varphi^{\mathcal{N}}(\bar{a}) > r$，但 $\lim_{\mathcal{U}} \varphi^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) \leqslant r$。选取足够小的 $\epsilon > 0$，使得 $r + \epsilon < s$，并令 $X = \{i \in I\colon \varphi^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) < r + \epsilon\} \in \mathcal{U}$。对于 $i \in X$，选择 $b_i \in \mathcal{M}_i$，使得 $\psi^{\mathcal{M}_i}(b_i, \bar{a}_i) < r + \epsilon$。令 $b = [(b_i)]_{\mathcal{U}}$。由归纳法，我们有$\psi^{\mathcal{N}}(b, \bar{a}) \leqslant r + \epsilon < s$，这就产生了矛盾。□

练习 6.3. 验证 Łos 定理证明中其余的情形，包括如何将基本公式推广到任意公式。

6.2. **超积的应用**。 如果一组句子 Γ的每个有限子集都可满足，我们就称它是有限可满足的 。如果对于每个有限子集 $\Gamma_0 \subset \Gamma$和每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$，使得 $|\varphi^{\mathcal{M}}| \leqslant \epsilon$ 对每个 $\varphi \in \Gamma_0$都成立，我们就称 Γ 是近似有限可满足的。等价地，如果句子集 $\{|\varphi| \dot{-} \epsilon\colon \varphi \in \Gamma、\ \epsilon > 0\}$ 是有限可满足的，那么 Γ 就是近似有限可满足的。

定理 6.4 (紧致性定理)。 对于度量语言 $\mathcal{L}$ 和一组 $\mathcal{L}$-句子 Γ，以下各项等价：

(1) Γ 可满足。*(2)* Γ有限可满足。
(3) Γ近似有限可满足。

证明。显然，这些条件的强度依次递减。为证明 (3) 蕴含 (1)，考虑将 I 视为 $\Gamma \cup N$ 的有限子集（不交并）的集合，其中每个集合都与 Γ和 N 均有非空交。若 $i = F \cup X$ 是 I 中的一个元素，且$F \subset \Gamma$和 $X \subset N$，则令 M_i 为一个 $\mathcal{L}$-结构，使得对所有 $\varphi \in F$，$|\varphi^{M_i}| \leqslant 1/m$ 成立，其中 $m = \max\{n\colon n \in X\}$。对于 $\varphi \in \Gamma$和 $n \in N$，令 $O_{\varphi,n}$ 为包含 φ和 n的 $i \in I$的集合。注意，$Y = \{O_{\varphi,n}\colon \varphi \in \Gamma, n \in N\}$ 具有有限交性质。令 $\mathcal{U}$ 为 I 上的一个包含 Y的超滤子。考虑超积 $\mathcal{N} = \prod_{\mathcal{U}} M_i$。对于每个 $\varphi \in \Gamma$和每个 $n \in N$，我们有 $O_{\varphi,n} \in \mathcal{U}$，因此根据洛斯定理，对于所有 n，都有 $|\varphi^{\mathcal{N}}| \leqslant \frac{1}{n}$，从而 $\varphi^{\mathcal{N}} = 0$。由此可得，$\mathcal{N}$ 满足 Γ。□

我们可以利用紧致性定理和常元扩张法，给出连续情形下向上 Löwenheim-Skolem 定理的一个版本。若一个度量结构 $\mathcal{M}$ 满足：对于语言中的每个类型 S， $S^{\mathcal{M}}$ 都是紧致度量空间，则称其为紧致。

定理 6.5. 假设 $\mathcal{M}$ 是一个非紧致的 $\mathcal{L}$-结构，且 $\chi(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \mathcal{L}) \leqslant \lambda$。那么 $\mathcal{M}$ 有一个初等扩张 $\mathcal{N}$，使得 $\chi(\mathcal{N}) = \lambda$。

证明。 由于 $\mathcal{M}$ 不是紧致的，因此存在一个类型 S 和一个 $\epsilon > 0$，使得 $S^{\mathcal{M}}$ 的 ϵ-球集族没有有限子覆盖。现在考虑语言$\mathcal{L}'$，它由 $\mathcal{L}$ 通过引入类型为 S的新常元符号 c_α 得到，这些符号对应于 $\alpha < \lambda$。考虑由 $\mathrm{Elem}(\mathcal{M})$ 以及以下内容组成的 $\mathcal{L}'$理论 T'

$$\{d(c_\alpha, c_\beta) \geqslant \epsilon : \alpha < \beta < \lambda\}.$$

注意， T'是有限可满足的，且 $\chi(T', \mathcal{L}') = \lambda$。根据紧致性定理和向下勒文海姆–斯科伦定理， T' 有一个稠密特征为 λ的模型。将此模型约化到 $\mathcal{L}$，我们就得到所需的、稠密特征为 λ的T 模型。□

6.3. **初等等价与超积**。我们以一道练习开始本节。

练习 6.6。对于 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，有： $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ 当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 都初等嵌入到 $\mathcal{P}$ 中。

这个练习可以得到显著加强：

定理 6.7 (Keisler-Shelah)。对于 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，有： $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ 当且仅当存在超滤子 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，使得 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \cong \mathcal{N}^{\mathcal{V}}$。

经典情形下的证明见 [35, 40]。在连续情形下， [27] 中给出了一个证明，而正有界情形下的证明见 [32]。需要注意的是，在 Keisler-Shelah 定理中，超滤子的指标集不必是可数的。

在连续情形中，要明确写出一个区分两个结构理论的句子通常很困难。通过证明两个超幂不可能同构来进行区分的方法，在区分 II_1 因子理论方面已取得良好效果（见 [14], [16] 以及本卷作者与 Goldbring 合著文章中的第 4 节）。

上一节讨论了 EF 博弈。EF 博弈还有一种涉及超幂的无限版本，有时更容易处理。我们只描述 $\mathcal{L}$ 可分时的这种博弈。给定两个 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$， ∞-EF($\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$)-博弈是玩家之间的一种双人博弈，玩家

I 和玩家 II 进行的博弈，现将持续 ω 个回合。玩家按照有限 EF 博弈的方式进行，这次会构造两个序列 $(a_i : i \in \textbf{自然数集})$，其中元素属于 $\mathcal{M}$，以及 $(b_i : i \in \textbf{自然数集})$，其中元素属于 $\mathcal{N}$。如果映射 $a_i \mapsto b_i$（对 $i \in \textbf{自然数集}$）可扩展为 $\mathcal{L}$ 的子结构与 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的子结构之间的同构，那么玩家 II 赢得这场博弈。

定理 6.8。 假设 $\mathcal{L}$ 是可分的。那么，对于两个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，以下条件等价：

(1) $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$。*(2)* 对于 $\mathbb{N}$上的某个（等价地，任意）非主超滤子 $\mathcal{U}$，玩家 *II* 在 ∞-$\mathrm{EF}(\mathcal{M}^{\mathcal{U}}, \mathcal{N}^{\mathcal{U}})$-博弈中拥有必胜策略。

练习 6.9。 证明上一定理。

6.4. **初等类**。 现在我们给出初等类的一个刻画，这与经典一阶逻辑中的一个结果相对应。固定一个由 $\mathcal{L}$-结构组成的类 $\mathcal{C}$。如果对于任意超滤子 $\mathcal{U}$，只要 $\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \in \mathcal{C}$，就有 $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$，则称 $\mathcal{C}$ 对超根闭合 。

定理 6.10。 设 $\mathcal{C}$ 是一个由 $\mathcal{L}$-结构组成的类。以下条件等价：

(1) $\mathcal{C}$ 是一个初等类。*(2)* $\mathcal{C}$ 在同构、超积和初等子模型下封闭。*(3)* $\mathcal{C}$ 在同构、超积和超根下封闭。

证明。 显然，(1) 推出 (2) 和 (3)。我们先证明 (2) 推出 (1)，然后修改证明以得到 (3) 推出 (1)。因此，假设 (2)，并令 T 为 $\mathcal{C}$ 的理论，也就是说，令 T 为所有满足如下条件的句子 φ 的集合：对所有 $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$，都有 $\varphi^{\mathcal{N}} = 0$。我们证明 $\mathcal{C}$ 是 T 的模型集。显然，$\mathcal{C}$ 中的所有元素都是 T 的模型。另一方面，取一个 T 的模型 $\mathcal{M}$。根据 (2)，只需将 $\mathcal{M}$ 初等嵌入由 $\mathcal{C}$ 中的结构构成的某个超积中。为此，设对于某个由常元 $c_{\bar{m}}$ 组成且满足 $\bar{m} \in \mathcal{M}$ 的序列，$\varphi(c_{\bar{m}})$ 属于 $\mathrm{Elem}(\mathcal{M})$。现在考虑 $\inf_{\bar{x}} |\varphi(\bar{x})|$，这是一个 $\mathcal{L}$-句子，其在 $\mathcal{M}$ 中的值为 0。固定$\epsilon > 0$。那么存在 $\mathcal{N}_{\varphi, \epsilon} \in \mathcal{C}$ 满足 $\inf_{\bar{x}} |\varphi(\bar{x})| < \epsilon$（否则，句子 $\epsilon \dot{-} \inf_{\bar{x}} |\varphi(\bar{x})|$ 属于 T，这与 $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ 的事实矛盾）。对所有$\mathcal{N}_{\varphi, \epsilon}$ 取超积，其中 φ 和 ϵ 变化，我们便可将$\mathcal{M}$ 初等嵌入 $\mathcal{C}$ 中元素的某个超积，正如所需。

要证明 (3) 推出 (1)，注意到前面的论证表明（假设 $\mathcal{C}$ 仅在同构和超积下封闭），对于某个 $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$（即由 $\mathcal{C}$中的结构构成的一个超积），有 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$。根据 Keisler-Shelah 定理，对于某些超滤子 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，有 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \cong \mathcal{N}^{\mathcal{V}}$。假设 (3) 成立，则有 $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$。 □

虽然在连续逻辑中，初等类的语义刻画与经典逻辑中的相同，但它在连续逻辑的语境中作用更大一些，因为要明确写出公理化给定度量结构类的语句往往很困难。例如，尽管 W*-概率空间类（定义见 [2] ）在 [17], 中用一种复杂的语言公理化了，但利用上述语义刻画，相对容易证明该类在一种更自然的语言 [26]中是初等的；直到 [3]中，这种语言下的显式公理化才终于出现。

练习 6.11。 回顾例3.10中关于 C*-代数及其作为度量结构的剖分，我们希望说明度量结构意义下的超积与 C*-代数意义下的超积相吻合。回想一下，若 $(A_i : i \in I)$ 是一个 C*-代数族，且 $\mathcal{U}$ 是 I上的一个超滤子，那么我们令$\prod_I^\infty A_i$ 为

$$\{\bar{a} \in \prod_I A_i : \text{there is } B > 0 \text{ so that } \|a_i\| \leqslant B \text{ for all } i \in I\}$$

and

$$J = \{\bar{a} \in \prod_I^\infty A_i : \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\| = 0\}.$$

The 相对于 $\mathcal{U}$ 的 (A_i) 的 C*-代数超积定义为

$$\prod_{\mathcal{U}} A_i = \prod_I^\infty A_i/J.$$

证明$D(\prod_{\mathcal{U}} A_i) = \prod_{\mathcal{U}} D(A_i)$，其中右侧出现的超积是度量结构的超积。

这个练习与例3.10一起表明，根据定理 6.10，C*-代数的剖分构成一个初等类，并且通过剖分函子与 C*-代数的类范畴等价；该函子甚至保持超积。当然，我们已经知道剖分构成一个初等类，因为它们恰好是满足例5.18中的理论 T_{C^*} 的 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构。

7. 类型

7.1. 类型空间。 假设 T 是某种语言 $\mathcal{L}$中的一个理论。固定一个分层变量序列 $\bar{x}$。T 的空间 $\bar{x}$-类型记作 $S_{\bar{x}}(T)$，它是如下形式的函数构成的集合：
$tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})(\varphi(\bar{x})) := \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$，其中 $\mathcal{M}$是 T的一个模型，$\bar{a} \in \mathcal{M}$（其分层方式与 $\bar{x}$中的变量相同），而 φ 是一个 $\mathcal{L}$公式，其自由变量均属于 $\bar{x}$。 $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ 称为 a 在 $\mathcal{M}$ 中的完备类型（完备意味着每个公式 φ 的值都得到了完全确定）。我们

用 p 和 q 等字母表示完备类型。如果 $p \in S_{\bar{x}}(T)$ 和 $\bar{a} \in \mathcal{M}$ 满足 $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = p$，那么我们称 $\bar{a}$ 实现了 p，并称 p 在 $\mathcal{M}$中实现。与完备理论一样，完备类型由类型泛函的核确定：

$$tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})(\varphi(\bar{x})) = r \text{ iff } \varphi(\bar{x}) - r \in \ker(tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})).$$

讨论部分类型也很方便。假设 Σ 是自由变量 $\bar{x}$ 上的一组 $\mathcal{L}$-公式，且 p 是变量 $\bar{x}$ 上的一个完备类型。那么相应的部分（Σ）类型是函数 $p\restriction\Sigma$。如果 Σ 是自由变量 $\bar{x}$ 上所有无量词公式的集合，我们就称 Σ-类型为无量词类型。

与经典情形一样，类型空间 $S_{\bar{x}}(T)$ 带有一种自然拓扑。对于 $\varphi \in \mathrm{Form}_{\bar{x}}(T、\ \mathcal{L})$ 和实数 $r < s$，定义

$$O^T(\varphi, (r, s)) = \{p \in S_{\bar{x}}(T) \colon p(\varphi) \in (r, s)\}.$$

练习 7.1。

(1) 证明所有 $O^T(\varphi、\ (r、\ s))$ 的集合构成 $S_{\bar{x}}(T)$ 上豪斯多夫拓扑的一个基，称为逻辑拓扑。**(2)** 证明 $S_{\bar{x}}(T)$ 上的逻辑拓扑是紧致的。（提示：使用紧致性定理。）**(3)** 证明如果 $\pi(\bar{x})$ 是一个部分类型，那么集合 $\{p \in S_{\bar{x}}(T) : p$ 延伸 $\pi\}$ 是 $S_{\bar{x}}(T)$ 的一个闭子集。**(4)** 事实上，证明 $S_{\bar{x}}(T)$ 上逻辑拓扑中的每个非空闭集都具有 $\{p \in S_{\bar{x}}(T) : p$ 延伸 $\pi\}$ 的形式，其中 π 是一个部分类型。（提示：证明满足 $p(\varphi) \leqslant r$ 的那些 $p \in S_{\bar{x}}(T)$，恰好就是延伸部分类型 π 的那些，其中 $\pi(\varphi \dot{-} r) = 0$。）

如果理论 T 完备，类型空间也有一个自然的度量拓扑：对于 $p、\ q \in S_{\bar{x}}(T)$，我们定义 $d(p,\ q)$ 为 $d(\bar{a},\ \bar{b})$ 的下确界，其中 $p = tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ 和 $q = tp^{\mathcal{M}}(\bar{b})$ 对某个模型 $\mathcal{M}$（属于 T）以及某些 $\bar{a}、\ \bar{b} \in \mathcal{M}$ 成立。理论的完备性保证，对于每一对类型 p 和 q，$d(p,\ q)$ 都有定义（且不是无穷大）。$d(p,\ q)$ 的对称性和自反性显然成立。为证明三角不等式成立，固定 $p、\ q、\ r \in S_{\bar{x}}(T)$。根据紧致性，我们可以找到 T 的模型 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，以及 $\bar{a}、\ \bar{b} \in \mathcal{M}、\ \bar{b}'、\ \bar{c} \in \mathcal{N}$，使得 $p = tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})、\ q = tp^{\mathcal{M}}(\bar{b}) = tp^{\mathcal{N}}(\bar{b}')、\ r = tp^{\mathcal{N}}(\bar{c})、\ d(p、\ q) = d(\bar{a}、\ \bar{b})$ 和 $d(q、\ r) = d(\bar{b}'、\ \bar{c})$。我们把以下结论留作习题：通过取 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的共同初等扩张，可以假设 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$，使得 $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ 和 $b = b'$。由（三角不等式）（在 $\mathcal{M}$ 中），$d(p、\ q) + d(q、\ r) \geqslant d(\bar{a}、\ \bar{c}) \geqslant d(p、\ r)$。

练习 7.2。**(1)** 证明度量拓扑比 $S_{\bar{x}}(T)$ 上的逻辑拓扑更细。**(2)** 证明 $S_{\bar{x}}(T)$ 关于度量拓扑是完备的。

我们稍后会看到，当这两个拓扑（即使仅在局部）一致时，会产生模型论上的推论。

7.2. 连续逻辑中斯通-魏尔施特拉斯定理的一些应用。 为了更抽象地理解从基本公式到更一般公式的扩张，我们提醒读者注意斯通-魏尔施特拉斯定理所需的背景知识。

设 X 是一个拓扑空间，并令 $C(X,\mathbf{R})$ 为从 X 到$\mathbf{R}$的连续函数集。 $C(X,\mathbf{R})$ 具有自然的实代数结构，其运算为逐点加法和乘法，以及由$\mathbf{R}$中的元素进行的数乘。它也自然地带有由一致收敛赋予的拓扑；也就是说，对于 $f \in C(X,\mathbf{R})$ 和 $\epsilon > 0$，集合

$$\{g \in C(X,\mathbf{R}) : |f(x) - g(x)| < \epsilon \text{ for all } x \in X\}$$

是一个基本开集。当 X 是紧致的， $C(X,\mathbf{R})$ 可由上确界范数度量。对于 $A \subseteq C(X,\mathbf{R})$，若对所有 $x, y \in X$，都存在 $f \in A$使得 $f(x) \neq f(y)$，我们就称 A 分离点 。

定理 7.3 (斯通-魏尔施特拉斯定理**)。** 设 X 是一个紧致豪斯多夫空间， A 是 $C(X,\mathbf{R})$ 的实子代数。如果常值函数 1 属于 A，那么 A 在 $C(X,\mathbf{R})$ 中稠密，当且仅当 A 分离点。

若 $\varphi(\bar{x})$ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，且 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论，那么存在一个自然的求值映射 $f_\varphi : S_{\bar{x}}(T) \to \mathbf{R}$，由 $f_\varphi(p) = p(\varphi)$ 给出。在类型空间 $S_{\bar{x}}(T)$ 上赋予逻辑拓扑后，很容易看出 f_φ 是连续的。我们希望利用斯通-魏尔施特拉斯定理，从另一个角度理解连续模型论中的公式。事实上，这种替代视角正是扩展公式类别的真正原因。

定理 7.4。 设 T 是一个理论， $\bar{x}$ 是一列变量，且 $X = S_{\bar{x}}(T)$。那么，由 $ev(\varphi) = f_\varphi$ 给出的求值映射 ev，从 $\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T, \mathcal{L})$ 到 $C(X, R)$，是一个等距映射，并且与所有连续实值函数可交换；也就是说，若 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数，且 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Form}_{\bar{x}}(T, \mathcal{L})$，那么

$$f \circ (ev(\varphi_1), \ldots, ev(\varphi_n)) = ev(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)).$$

证明。 注意，限制在基本公式上的求值映射的值域是一个包含 1 且分离点的实子代数。因此，由斯通-魏尔施特拉斯定理可知，求值映射是满射。该映射保持范数，因为如果 $\varphi(\bar{x})$ 是一个满足 $\|\varphi\|_T = r$ 的基本公式，那么一方面， $\|ev(\varphi)\| \leqslant r$ 属于 $C(X,\mathbf{R})$；另一方面，由紧致性可知，我们可以找到某个 $p \in S_{\bar{x}}(T)$ 使得 $ev(|\varphi|)(p) = r$，因此 $\|ev(\varphi)\| = r$。与连续函数的交换性是显然的。□

对于实代数系统（见定义 5.3），我们需要对前一个定理稍作加强。证明可由紧致性和斯通-魏尔施特拉斯定理推出。

命题 7.5。 假设 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论，且 A 是由 T-公式构成的实代数系统。令 X 为 $S_{\bar{x}}(T)$ 中元素在 $A_{\bar{x}}$ 中公式上的限制所组成的集合。那么

(1) X 是紧致的；*(2)* 如果从 $A_{\bar{x}}$ 到 $C(X, \mathbf{R})$ 的求值映射的值域分离点，那么该求值映射是等距映射，并且与所有连续函数交换。

习题 7.6。 证明上一个命题。

如前所述，上一个命题在以下三个实代数系统中会派上用场：

(1) $A_{\bar{x}}$ 是 $\mathrm{Form}_{\bar{x}}(T$ 中基本 $\mathcal{L}'$-公式的闭包，其中 $\mathcal{L})$ 是针对 $\mathcal{L}'$ 的子语言，而 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论。(2) $A_{\bar{x}}$ 是自由变量为 $\bar{x}$ 的无量词 $\mathcal{L}$-公式集合。(3) $A_{\bar{x}}$ 是 $\mathcal{L}$ 中自由变量为 $\bar{x}$ 的前束公式集合。注意，$\mathcal{L}$ 中的前束公式在所有 $\mathcal{L}$-公式的集合中稠密。（详情见 [10] 的第 6 节。）

7.3. **饱和性**。 假设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $A \subset \mathcal{M}$。如果 p 是相对于$\mathcal{M}_A$的理论、定义在 $\mathcal{L}_A$ 中的（部分）类型，我们就称 p 是一个定义在 A 上的（部分）类型。因此，如果 p 是定义在 A 上的部分类型，那么存在 $\mathcal{M}$ 的一个初等扩张$\mathcal{N}$，以及实现 p 的 $b \in \mathcal{N}$；也就是说，如果 $\varphi(\bar{x}$，且 $\bar{a})$ 是一个 $\mathcal{L}_A$-公式（定义在 p 的定义域中），那么 $p(\varphi(\bar{x},$ $\bar{a})) = \varphi^{\mathcal{N}}(\bar{b},\ \bar{a})$。

定义 7.7。 对于一个无限基数 κ，如果每当 $A \subseteq \mathcal{M}$ 满足 $\chi(A) < \kappa$，且 p 是定义在 A 上的类型时，p 都在 $\mathcal{M}$ 中实现，我们就称 $\mathcal{M}$ 这个 $\mathcal{L}$-结构为 κ-饱和的。若 $\mathcal{M}$ 是 $\chi(\mathcal{M})$-饱和的，则称其为饱和的。

与经典一阶逻辑的情形一样，饱和模型通常只有在附加的集合论假设下才存在。例如，若 $2^\kappa = \kappa^+$，那么下面的命题表明，若 $\chi(\mathcal{M}) = \kappa$，则 $\mathcal{M}$ 有一个稠密特征为 κ^+的饱和初等扩张。

命题 7.8. 设 $\mathcal{M}$是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $\chi(\mathcal{L}) \leqslant \chi(\mathcal{M}) = \kappa$。那么存在 $\mathcal{M}$ 的一个初等扩张 $\mathcal{N}$，使得 $\mathcal{N}$ 是 κ^+-饱和的，并且 $\chi(\mathcal{N}) \leqslant 2^\kappa$。

*Pr*证明。 我们将 $\mathcal{N}$ 构造为一个递增链 $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ 的并，且该链满足 t:

(1) $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$，(2) 如果 $\delta < \kappa^+$ 是极限序数，那么 $\mathcal{M}_\delta$ 是$\bigcup_{\alpha<\delta} \mathcal{M}_\alpha$ 的完备化（也就是说，我们取命题 5.10 中所述的 $\mathcal{M}_\alpha$ 的直极限），

(3) 对所有 $\alpha < \kappa^+$， $\chi(\mathcal{M}_\alpha) \leqslant 2^\kappa$；并且 (4) 对每个 $\alpha < \kappa^+$、 $\mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_{\alpha+1}$，以及每个满足 $\chi(A) \leqslant \kappa$ 的 $A \subseteq \mathcal{M}_\alpha$， A 上的每个类型 p 都在 $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ 中实现。

只有最后一点需要说明。一个大小为 2^κ 的集合有 2^κ 个大小为 κ 的子集，而稠密特征为 κ 的集合上的类型至多有 2^κ 个。因此，我们需要实现 2^κ 个类型；这可以通过一条长度为 2^κ 的链逐一完成，因为任何单个类型都可以在稠密特征至多为 2^κ 的初等扩张中实现。□

使用超积的一个模型论的理由是，它们总是某种程度上饱和的：

练习 7.9。设 $\mathcal{L}$ 是一个可分语言，对于所有 $n \in \mathbf{N}$， $\mathcal{M}_n$ 都是一个 $\mathcal{L}$-结构，并且 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbf{N}$ 上的一个非主超滤子。证明 $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_n$ 是 $\aleph_\Gamma$-饱和的。

如下述命题所示，超积也可以产生具有更高饱和度的结构。本命题的证明中所使用的超滤子称为良超滤子（见 [22]）。良超滤子的存在性证明可见于 [36]，而超积的饱和性可见于 [35]；另见 [22,第 8] 章。

命题 7.10. 对于每个无限基数 κ，存在一个关于 κ 的超滤子 $\mathcal{U}$，使得如果 $\mathcal{L}$ 的稠密特征至多为 κ，且对于所有 $\alpha < \kappa$， $\mathcal{M}_\alpha$ 都是一个 $\mathcal{L}$-结构，那么 $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_\alpha$ 是 κ^+-饱和的。

7.4. 贝思可定义性。 现在我们来证明连续逻辑中的贝思可定义性定理。这个定理为我们提供了一个抽象准则，用以识别哪些关系可以由公式表示。正如我们将看到的，由于在连续情形下难以确定哪些关系恰好是公式，这个定理在连续逻辑中比在经典逻辑中发挥着更广泛的作用。

定理 7.11 (贝思可定义性)。 设 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ 是两个具有相同类型的连续语言。进一步设 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论。若由 $F(\mathcal{M}) = \mathcal{M}{\restriction}\mathcal{L}'$ 给出的遗忘函子 $F : \mathrm{Mod}(T) \to \mathrm{Str}(\mathcal{L}')$ 是到 F 的像上的范畴等价，则每个 $\mathcal{L}$-公式都与一个 $\mathcal{L}'$-公式 T-等价。

证明。 假设 $\varphi(\bar{x})$ 是一个 $\mathcal{L}$-公式。对于 $\epsilon > 0$，考虑语言 $\mathcal{L}$ 中的句子集合 Σ_ϵ，其中加入了两组常元 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$，该集合由 T 以及以下内容组成

$$\{|\psi(\bar{a}) - \psi(\bar{b})| \dot{-} \frac{1}{n} : \psi(\bar{x}) \text{ is an } \mathcal{L}'\text{-formula}, n \in \mathbf{N}\} \cup \{\epsilon \dot{-} |\varphi(\bar{a}) - \varphi(\bar{b})|\}.$$

如果对于所有 ϵ， Σ_ϵ 都不可满足，那么根据紧致性， φ 在变量 $\bar{x}$ 中的 $\mathcal{L}$-类型的 $\mathcal{L}'$- 限制上定义了一个连续实值函数，因此根据

将命题 7.5 应用于 $\mathcal{L}'$-公式的实代数可得， φ 与某个 $\mathcal{L}'$-公式 T 等价，这就是所需的结论。

根据上一段，我们现在反设，对于某个 $\epsilon > 0$， Σ_ϵ 是可满足的。因此，我们可以找到一个 T 和 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}$ 的模型 $\mathcal{M}$，使得 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 具有相同的 $\mathcal{L}'$-类型，但 $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \neq \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{b})$。

取 $\mathcal{M}$ 的一个 $|M|^+$-饱和初等扩张 $\mathcal{N}$。令 $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{N}'$ 分别为 $\mathcal{M}$ 和 N 在 $\mathcal{L}'$ 下的约化结构。由于 $\mathcal{N}'$ 也是 $|\mathcal{M}'|^+$- 饱和的，我们可以找到一个 $\mathcal{L}'$-¯ 初等映射 $\rho\colon \mathcal{M}' \to \mathcal{N}'$，使得 $\rho(b) = \bar{a}$。由于 F 是范畴等价， ρ 也是一个 $\mathcal{L}$-初等映射，这与 $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \neq \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{b})$ 矛盾。□

8. 可定义集

8.1. 引入可定义集。 现在我们来探讨连续模型论与经典模型论之间最大的差异之一。在经典情形下，能够对由公式描述的论域子集进行量化往往很有优势。例如，如果 $\varphi(x)$ 是表达某种性质的公式，那么表达“对于所有 x，若 $\varphi(x)$ 则 .....”或“存在 x，使得 $\varphi(x)$ 且.....”就很直接。在连续情形下，公式取实数值，因此可以对哪些子集进行量化是个微妙的问题。

设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构， $\varphi(\bar{x})$ 是一个 $\mathcal{L}$-公式。 φ 在$\mathcal{M}$中的零点集，记作 $Z^{\mathcal{M}}(\varphi)$，是集合 $\{\bar{a} \in \mathcal{M}\colon \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = 0\}$。人们可能会天真地认为，可以对公式的零点集进行量化，但我们很快就会看到，事实并非如此。

¯假设 T是一个 $\mathcal{L}$-理论，且 S 是来自 $\mathcal{L}$的类型元组。 T-函子（对于_S）是一个函子 $X\colon \mathrm{Mod}(T) \to \mathrm{Met}$，其中 Met是以等距嵌入为态射的度量空间范畴， $X(\mathcal{M})$ 是 $S(\mathcal{M})$的闭子空间；若 $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是 $\mathrm{Mod}(T)$中的初等映射，则 $X(\rho)$ 是 ρ 在 $X(\mathcal{M})$上的限制。

例 8.1。 </style} T-函子的一个自然例子是某个公式 φ对应的 X_φ，其中 $X_\varphi(\mathcal{M}) = Z(\varphi^{\mathcal{M}}) = \{\bar{a} \in \mathcal{M}\colon \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = 0\}$是 φ的零点集。

¯**定理 8.2**。 假设 T是一个 $\mathcal{L}$-理论，且 X 是关于 S的 T-函子。以下条件等价：

（*1*）存在一个 T-公式 $\varphi(\bar{x})$，使得对于 T 的任意模型 $\mathcal{M}$ 以及任意 $\bar{a} \in \mathcal{M}$,

$$\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = d(\bar{a}, X(\mathcal{M})).$$

（2）对于任意 T-公式 $\psi(\bar{x},\ \bar{y})$，存在一个 T-公式 $\chi(\bar{y})$，使得对于 T 的任意模型$\mathcal{M}$以及任意 $\bar{a} \in \mathcal{M}$，

$$\chi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \inf\{\psi^{\mathcal{M}}(\bar{b}, \bar{a}) \colon \bar{b} \in X(\mathcal{M})\}$$

（或等价地，将下确界 替换为上确界后的类似陈述）。

（3）对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个 T-公式 $\varphi(\bar{x})$和 $\delta > 0$，使得对于 T 的所有模型$\mathcal{M}$：

- $X(M) \subseteq Z(\varphi^{\mathcal{M}})$，并且• 对于所有 $\bar{a} \in \mathcal{M}$，如果 $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) < \delta$，那么 $d(\bar{a},\ X(\mathcal{M})) \leqslant \epsilon$。

（4）对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个基本 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(\bar{x})$ 和 $\delta > 0$，使得对于 T 的所有模型 $\mathcal{M}$：

- $X(\mathcal{M}) \subseteq Z(\varphi^{\mathcal{M}})$，且• 对于所有 $\bar{a} \in \mathcal{M}$，如果 $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) < \delta$，那么 $d(\bar{a},\ X(\mathcal{M})) \leqslant \epsilon$。

(5) 对于任意集合 I、$\mathcal{L}$-结构族 $\mathcal{M}_i$（其中 $i \in I$），以及 I 上的超滤子 $\mathcal{U}$，

$$X(\mathcal{N}) = \prod_{\mathcal{U}} X(\mathcal{M}_i),\ \textit{where}\ \mathcal{N} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i.$$

注释 8.3。 在开始证明定理 8.2 之前，我们想先说明一个小问题。空函子该如何处理？也就是说，对于 T 的所有模型 $\mathcal{M}$，都满足 $X(\mathcal{M}) = \varnothing$ 的函子 X 应该如何处理？空函子显然满足上面的条件 (5)；那么另外四个条件呢？在条件 (1) 中，我们必须确定到空集的距离是多少——它应当是度量可能取到的最大值（因此可由一个公式给出）。在 (2) 中，下确界是在空集上取的，因此等于 ψ 可能取到的最大值 —— 这同样是一个公式。在 (3) 和 (4) 中，我们度量的是到空集的距离，因此同样将其取为度量的上界。因此，在对条件 (1)-(4) 作适当解释后，空函子满足定理 8.2 的等价条件。此外，如果 X 满足定理中的任一条件，并且对于 T 的某个模型 $\mathcal{M}$，$X(\mathcal{M})$ 为空，那么对于 T 的所有模型 $\mathcal{M}$，$X(\mathcal{M})$ 都为空（因而满足定理中的其他所有条件）。

定理 *8.2* 的证明。 根据前面的评论，我们可以不失一般性地假设，$X(\mathcal{M}) \neq \varnothing$ T 的所有模型 $\mathcal{M}$ 都满足。

（1）推出（2）的证明见 [10, 定理 9.17]。我们只说明，如果 $d_X(x)$ 是一个公式，它在T的任意模型中表示 x 到 X 的距离，并且 α 是公式 ψ的一致连续模，那么在 T的任意模型$\mathcal{M}$中（记住，$X(\mathcal{M})$非空），$\inf\{\psi^{\mathcal{M}}(\bar{b}, \bar{a}) \colon \bar{b} \in X(\mathcal{M})\}$等于

$$\inf_{\bar{b} \in \mathcal{M}} (\psi^{\mathcal{M}}(\bar{b}, \bar{a}) + \alpha(d_X^{\mathcal{M}}(\bar{b}))).$$

容易看出（2）推出（3）。要证明（3）推出（4），只需记住， T-公式可以由基本的 $\mathcal{L}$-公式一致逼近。为证明（4）推出（5），我们先证明$\prod_{\mathcal{U}} X(\mathcal{M}_i) \subseteq X(\mathcal{N})$。为此，固定 $\epsilon > 0$，并令 φ 和 δ 如（4）中所述。若$[(a_i)]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}} X(\mathcal{M}_i)$，则对所有 $i \in I$都有$\varphi^{\mathcal{M}_i}(a_i) = 0$，因此 $\varphi^{\mathcal{N}}([a_i]_{\mathcal{U}}) = 0$，从而 $d([(a_i)]_{\mathcal{U}}, X(\mathcal{N})) \leqslant \epsilon$。由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，我们有 $[(a_i)]_{\mathcal{U}} \in X(\mathcal{N})$。现在反设存在$[(a_i)]_{\mathcal{U}} \in X(\mathcal{N}) \setminus \prod_{\mathcal{U}} X(\mathcal{M}_i)$。由于$\prod_{\mathcal{U}} X(\mathcal{M}_i)$ 在 $\mathcal{N}$中是闭集，存在 $\epsilon > 0$ 使得$d([(a_i)]_{\mathcal{U}}, \prod_{\mathcal{U}} X(\mathcal{M}_i)) > \epsilon$。令 φ 和 $\delta > 0$ 如（4）中所述。由于 $X(\mathcal{N}) \subseteq Z(\varphi^{\mathcal{N}})$，对 $\mathcal{U}$-几乎所有 $i \in I$都有 $\varphi^{\mathcal{M}_i}(a_i) < \delta$，因此对 $\mathcal{U}$-几乎所有 $i \in I$都有 $d(a_i, X(\mathcal{M}_i)) \leqslant \epsilon$，矛盾。

还需证明 (5) 蕴含 (1)。令 $\mathcal{C}$ 为结构类

$$\{(\mathcal{M}, d_X^{\mathcal{M}}) : \mathcal{M} \models T\},$$

其中 $d_X^{\mathcal{M}}$度量元素到 $X(\mathcal{M})$的距离。注意，度量到闭集的距离确实是连续逻辑中允许的关系：¯其界是各度量界的最大值，而一致连续性的模是恒等函数。根据定理 6.10，条件 (5) 保证 $\mathcal{C}$ 是一个初等类。从 $\mathcal{C}$ 到$\mathrm{Mod}(T)$ 的遗忘函子是范畴等价，因为 T 的任一模型都唯一扩展为 $\mathcal{C}$中的一个对象。根据 Beth 可定义性定理，我们得出 d_X 实际上等价于一个 T-公式。□

¯如果 X 是一个 T-函子（其中 S) 满足前一定理中任一等价条件），那么我们称 X 为一个 T-可定义集。根据前一定理的条件 (2)， (T-)可定义集恰好是度量结构中可以对其进行量化的那些集合。

8.2. **例子与非例子**。 我们从一些可定义集的例子开始。

例 8.4。 任何类型相对于任何理论都是可定义集，类型的任何有限乘积也是如此。或许不那么显而易见的是，任何项的值域都是可定义的，因为给定一个项 $\tau(\bar{x})$，如果我们希望对 τ 的值域进行量化，例如 $\inf\{\varphi^{\mathcal{M}}(y) : y \in \mathrm{range}(\tau^{\mathcal{M}})\}$，我们就计算 $\inf_{\bar{x}} \varphi(\tau(\bar{x}))$。这一事实在算子代数的情形中已大有裨益：我们可以将任意自伴元素表示为 $(x + x^*)/2$，将任意正元素表示为 x^*x，因此这两类元素相对于 C*-代数理论都是可定义的。

例 8.5。 一个稍微不那么平凡的例子是，投影的集合相对于 C*-代数类是可定义的。回忆一下，在 C*-代数A 中，元素 p 是投影，当且仅当它是自伴的并满足 $p^2 = p$。为了说明投影的集合是可定义的，我们使用一些函数演算。假设在某个满足 $\|b^2 - b\| < \epsilon$的 C*-代数 A 中有一个自伴元素 b，其中

$\epsilon < 1/4$。我们知道，由 b 和 1_A 生成的 A 的子代数 B 通过一个同构映射同构于 $C(\sigma(b))$，该同构将 b 映射为恒等函数，将 1_A映射为常值函数 1，其中 $\sigma(b)$ 是 b 的谱，而 $C(\sigma(b))$ 是定义在 $\sigma(b)$上的复值连续函数的 C*-代数。应用该同构，在 $C(\sigma(b))$中，我们有 $\|x^2 - x\| < \epsilon$，因此 $\sigma(b)$ 可以被划分为两个不相交的开集 O_0 和 O_1，并且对于 $i = 0, 1$，有 $i \in O_i$。如果令 π 为在 O_i上恒等于 i 的函数，那么它是$\sigma(b)$上的连续函数。此外，π 是一个投影，并且 $\|\pi - x\| < \epsilon$。将该同构从 $C(\sigma(b))$ 拉回到 B中，我们得到一个投影 $p \in B$，使得 $\|b - p\| < \epsilon$。根据定理 8.2 (3)，投影的集合相对于 C*- 代数的理论是可定义的。

现在我们给出两个反例，以说明可定义集的概念与零点集的概念截然不同。第一个例子有些抽象。

例 8.6. 结构 $\mathcal{M}$只有一个类型，其底集为 $[0,1]$，配备离散度量和一个关系符号 R，其解释为$R(x) = x$。令 $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$，并考虑 T-函子 X，其中 $\mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(T)$, 定义为 $X(\mathcal{N}) = \{a \in \mathcal{N} \colon R^{\mathcal{N}}(a) \leqslant 1/2\}$。有多种方法可以证明 X 不是可定义的。我们将使用超积刻画。注意，如果 $\mathcal{U}$ 是 **自然数集**上的非主超滤子，那么序列 $(1/2 + 1/n : n \in$ **自然数集**$)$在 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ 中的 R-值为$1/2$，但该元素到 $[0,1/2]^{\mathcal{U}}$ 中每个元素的距离都是 1。这表明 $X(\mathcal{M})^{\mathcal{U}} \neq X(M^{\mathcal{U}})$，因此 X 不是 T-可定义的。

例 8.7。 在 C*-代数的语境中， [18] 中出现过一个例子：正规元素集。在 C*-代数中，如果元素 a 与其伴随元可交换，就称其为正规元素，因此我们考察的是 $\|a^*a - aa^*\|$的零点集。C*-代数中的正规元素集不是可定义集。（证明见 [18, 命题 3.2.0.8]。）

8.3. **主类型**。 为强调这一点，我们记录下在注释 8.3 中作出的如下说明。

命题 8.8。 若 X 是一个 T-可定义集，那么对于理论 T 的某个模型 $\mathcal{M}$，$X(\mathcal{M})$ 非空，当且仅当对于理论 T 的所有模型 $\mathcal{M}$，$X(\mathcal{M})$ 都非空。

下面的命题揭示了 $S_{\bar{x}}(T)$ 上逻辑拓扑与度量之间的联系。若一个（部分）类型相对于某个理论T是主的，我们就称其为主类型，如果将 $\mathcal{M}$映射到 $\mathcal{M}$ 中 p 的实现集的 T-函子 X是一个 T-可定义集。根据命题 8.8，任何主类型都在 T 的所有模型中实现；这一说法的逆命题就是省略类型定理的连续形式（将在下文第 10 节证明），而下一个结果在证明中起着关键作用。

命题 8.9。 对于 $p \in S_{\bar{x}}(T)$，以下命题等价：

(1) p 相对于 T是主的。*(2)* p 周围的每个 ϵ球都包含 p的一个逻辑开邻域。*(3)* p 周围的每个 ϵ球在逻辑拓扑中都有非空内部。

证明。 如果 p 是主的，那么 (2) 由定理 8.2 (4) 得出。

现在我们证明 (2) 蕴含 (1)。这个论证基于 [10,定理 9.12]的证明。固定 $n \in$ **自然数集**，并考虑一个公式 $\varphi_n(x)$，使得 $p(\varphi_n) = 0$和$p \in O^T(\varphi_n, (-\infty, \delta_n)) \subseteq B(p, 1/n)$。由此可知，如果 $\mathcal{M}$ 是 T的模型，且 $a \in \mathcal{M}$满足 $\varphi_n^{\mathcal{M}}(a) < \delta_n$，那么 $d(tp^{\mathcal{M}}(a), p) \leqslant 1/n$。现在考虑由下式定义的 T-公式$P(x)$

$$\sum_n \frac{|\varphi_n(x)|}{B_n 2^n},$$

其中 B_n 是公式 φ_n 的界（见例 5.2）。注意，对于所有$\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于 T的所有模型 $\mathcal{M}$ 以及所有 $a \in \mathcal{M}$，若 $P^{\mathcal{M}}(a) < \delta$，则 $d(tp^{\mathcal{M}}(a), p) < \epsilon$。利用命题 3.2，我们可以找到一个递增连续函数 α，满足 $\alpha(0) = 0$，使得对于 T的所有模型 $\mathcal{M}$ 以及所有 $a \in \mathcal{M}$，$d(tp(a), p) \leqslant \alpha(P^{\mathcal{M}}(a))$ 均成立。令 $D(x) =$ 下确界$_y(\alpha(P(y)) + d(x, y))$，我们断言，对于 T的所有模型 $\mathcal{M}$，$D(x) = d(x, p(\mathcal{M}))$ 均成立。

为证明这一点，先假设 $\mathcal{M}$ 是 ω-饱和的，这尤其意味着对所有 $a \in \mathcal{M}$，都有 $d(a, p(\mathcal{M})) = d(tp^{\mathcal{M}}(a), p)$。固定 $a \in \mathcal{M}$；我们先证明$D^{\mathcal{M}}(a) \leqslant d(a, p(\mathcal{M}))$。回想一下，当 y 实现 p时，$P(y) = 0$ 成立，因此我们得到

$$D^{\mathcal{M}}(a) = (\inf_y(\alpha(P(y)) + d(a, y)))^{\mathcal{M}} \leqslant \inf_{y \in p(\mathcal{M})} d(a, y) = d(a, p(\mathcal{M})).$$

注意，这个不等式并未用到 ω-饱和这一假设。对于另一个不等式，给定 $b \in \mathcal{M}$，有 $\alpha(P^{\mathcal{M}}(b)) \geqslant d(tp^{\mathcal{M}}(b), p) = d(b, p(\mathcal{M}))$，因此

$$D^{\mathcal{M}}(a) = (\inf_y(\alpha(P(y)) + d(a, y)))^{\mathcal{M}} \geqslant \inf_{y \in \mathcal{M}}(d(y, p(\mathcal{M})) + d(a, y)) \geqslant d(a, p(\mathcal{M})).$$

现在假设 $\mathcal{N}$ 是 T的任意模型，而 $\mathcal{M}$ 是一个 ω-饱和的初等扩张，因此根据上一段，$D^{\mathcal{M}}(x) = d(x, p(\mathcal{M}))$。现在我们证明，对所有 $a \in \mathcal{N}$，都有 $D^{\mathcal{N}}(a) = d(a, p(\mathcal{N}))$。如上所述，不等式$D^{\mathcal{N}}(a) \leqslant d(a, p(\mathcal{N}))$ 在没有 ω-饱和这一假设时也成立。对于另一个不等式，固定 $\epsilon > 0$；我们将证明 $d(a, p(\mathcal{N})) \leqslant D^{\mathcal{N}}(a) + \epsilon$，只需令 ϵ 趋于0即可。为此，先注意，如果 $a \in \mathcal{N}$ 满足 $P^{\mathcal{N}}(a) = 0$，那么 a 实现 p，因此 $p(\mathcal{N}) = Z(P^{\mathcal{N}})$。

现在选取 $a = a_0 \in \mathcal{N}$。我们知道 $D^{\mathcal{M}}(a) = d(a, p(\mathcal{M}))$，这意味着存在 $c \in \mathcal{M}$，使得 $D^{\mathcal{M}}(c) = 0$ 且 $d(a, c) = D^{\mathcal{M}}(a)$。因此 $\mathcal{M}$ 满足 $\inf_y \max\{D(y), |d(a, y) - D(a)|\}$。根据初等性，我们可以选取 $a_1 \in \mathcal{N}$，使得

$D^{\mathcal{N}}(a_1) \leqslant \frac{\epsilon}{8}$ 且 $|D^{\mathcal{N}}(a_0) - d(a_0, a_1)| \leqslant \frac{\epsilon}{8}$。我们继续构造一个柯西序列 (a_n)，它位于 $\mathcal{N}$ 中，并满足

- $D^{\mathcal{N}}(a_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$, and
- $|D^{\mathcal{N}}(a_n) - d(a_n, a_{n+1})| \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$.

既然我们已经构造了 a_n，注意到由于 $D^{\mathcal{N}}(a_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$，在 $\mathcal{M}$ 中可以找到实现 p 的 c，使得 $D^{\mathcal{M}}(c) = 0$ 且 $D^{\mathcal{M}}(a_n) = d(a_n,\ c)$。由 $\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{M}$中的初等性，我们可以构造满足上述性质的 a_{n+1}。由 $\mathcal{N}$的完备性，序列 (a_n) 有极限 $b \in \mathcal{N}$，并且由$D^{\mathcal{N}}$的连续性可知 $D^{\mathcal{N}}(b) = 0$，因此 b 实现了 p。我们还可以从上述两项得出，对于所有 n，$d(a_n,\ a_{n+1}) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$。因此我们有

$$d(a, p(\mathcal{N})) \leqslant d(a, b) = \lim_n d(a, a_n) \leqslant \lim_n (d(a_0, a_1) + \sum_{j=1}^{n-1} d(a_j, a_{j+1})) \leqslant D^{\mathcal{N}}(a) + \epsilon.$$

至此，我们完成了证明，即 (2) 蕴含 (1)。

(2) 蕴含 (3) 显然成立，因此只需证明 (3) 蕴含 (2)。设非空逻辑开集 $O^T(\varphi,\ (r,\ s))$ 包含在以 p为中心的 ϵ-球内。取 r' 和 s'，使得 $r < r' < s' < s$，并且令 $\psi(x) =$下确界$_y$最大值$(r' \dot{-} \varphi(y),\ \varphi(y) \dot{-} s',\ d(x,\ y) \dot{-} \epsilon)$，有 $p(\psi) = 0$。由此可知，对于任意 $s'' > 0$，p 属于逻辑开集 $O^T(\psi,\ (-\infty,\ s''))$；如果 $r < r' - s''$，$s' + s'' < s$ 且 $s'' < \epsilon$，那么 $O^T(\psi,\ (-\infty,\ s''))$ 包含在以 p为中心的3ϵ-球内。由于 ϵ任意，这就证明了 (2)。□

9. 量词消去

我们称语言 $\mathcal{L}$ 中的理论 T 具有量词消去，如果对于每个 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(\bar{x})$，都存在一个与 T 等价于 $\varphi(\bar{x})$ 的无量词 $\mathcal{L}$-公式 $\psi(\bar{x})$。用基本 $\mathcal{L}$-公式来表述，这意味着：对于每个 $\epsilon > 0$ 和每个基本 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(\bar{x})$，都存在一个无量词的基本 $\mathcal{L}$-公式 ψ，使得 $\|\varphi(\bar{x}) - \psi(\bar{x})\|_T < \epsilon$。

我们将给出量词消去的三种刻画。第一种是句法上的。

命题 9.1. 设 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论。那么，T 具有量词消去，当且仅当每个形如 下确界$_x$ $\varphi(x, \bar{y})$ 的公式，其中 $\varphi(x, \bar{y})$ 是一个基本 $\mathcal{L}$-公式，都与某个无量词 $\mathcal{L}$-公式 T 等价。

证明。正向显然，反向则通过对基本 $\mathcal{L}$公式的构成进行归纳法来证明，其中量词情形由反向假设处理，

而联结词情形显然。□

命题 9.2。 设 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论。当且仅当对于任意 $\mathcal{M}$，若它是 T 的一个模型，且 $\bar{a}$, $\bar{b} \in \mathcal{M}$ 对基本原子公式取值相同，则它们满足相同的完备类型时，T 才具有量词消去。

证明。 将命题 7.5 应用于无量词公式构成的实代数系统，即可得到此结论。□

例 9.3。 我们可以利用命题 9.2 证明，乌雷松球 $\mathbb{U}$ 的理论 T 具有量词消去。事实上，设 $\mathcal{N}$ 是 T 的一个模型，且 $\bar{a}$、$\bar{b} \in \mathcal{N}$ 具有相同的无量词类型。不失一般性，可以假设 $\mathcal{N}$ 是可分的，因此根据例 5.14 中给出的来回论证，还可以进一步假设 $\mathcal{N}$ 本身就是 $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}$。由于 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 具有相同的无量词类型，映射 f（将 $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ 送到.....）是一个等距映射。由于 $\mathbb{U}$ 具有超齐性，f 可以延拓为 $\mathbb{U}$ 的一个自同构，这意味着 $\bar{a}^{\mathcal{U}}$ 和 $\bar{b}$ 在 $\mathbb{U}$ 中具有相同的完备类型，证毕。

下面给出量词消去的一种更具语义性的刻画：

命题 9.4. 设 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论。那么，T 具有量词消去，当且仅当 T 具有如下性质：每当 $\mathcal{M}$ 是 T 的一个模型，且 $\bar{a}$ 与 $\bar{b} \in \mathcal{M}$ 具有相同的 $\mathcal{U}$ 无量词类型时，就存在 $\mathcal{N}$，使得 $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$，并且将 $\bar{a}$ 映射到 $\bar{b}$ 的映射可以扩展为从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的嵌入。

注意，若命题中的 $\mathcal{M}$ 是可分的，那么 $\mathcal{N}$ 可以取为 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$，其中 $\mathcal{U}$ 是 **自然数集** 上的一个非主超滤子。

证明。 正向部分的证明留作读者练习；下面利用命题 9.1 概述反向部分的证明。固定一个基本的无量词 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x, \bar{y})$。假设对某个 ϵ，下列句子集可满足：

$$\{|\psi(\bar{c}) - \psi(\bar{d})| : \psi(\bar{y}) \text{是一个基本的无量词 } \mathcal{L}\text{公式}\}$$
$$\cup \{\epsilon \dot{-} |\inf_x \varphi(x, \bar{c}) - \inf_x \varphi(x, \bar{d})|\},$$

其中 $\bar{c}$ 和 $\bar{d}$ 是新常元序列。因此，存在一个模型 $\mathcal{M}$，它满足 T 和 $\bar{a}$, $\bar{b} \in \mathcal{M}$ 具有相同的无量词类型，但 $(\text{下确界}_x \varphi)^{\mathcal{M}}(x, \bar{a}) < (\text{下确界}_x \varphi)^{\mathcal{M}}(x, \bar{b})$。根据假设，存在 $\mathcal{M}$ 的一个初等扩张 $\mathcal{N}$，使得映射 $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ 可以扩展为一个嵌入 f，将 $\mathcal{M}$ 映入 $\mathcal{N}$。然而，如果我们选择 $c \in \mathcal{M}$ 使得 $\varphi^{\mathcal{M}}(c, \bar{a}) < (\text{下确界}_x \varphi)^{\mathcal{M}}(x, \bar{b}) = (\text{下确界}_x \varphi)^{\mathcal{N}}(x, \bar{b})$，那么考察 $\varphi^{\mathcal{N}}(f(c), \bar{b})$的值时便会得到矛盾。

因此，对于任意 ϵ，上述语句集都不可满足。根据紧致性，对于任意 $\epsilon > 0$，经过一些变换后，我们可以找到一个无量词基本公式 $\psi(\bar{x})$ 和 $\delta > 0$，使得对于 T和 $\bar{a}$的任意模型 $\mathcal{M}$，$b \in \mathcal{M}$，

$$|\psi(\bar{a}) - \psi(\bar{b})| < \delta \text{ implies } |\inf_x \varphi(x, \bar{a}) - \inf_x \varphi(x, \bar{b})| \leqslant \epsilon.$$

根据命题 7.5，将其应用于无量词公式的实代数系统，我们得到 $\inf_x \varphi(x, \bar{y})$ 等价于一个无量词公式。根据命题 9.1，T具有量词消去。□

练习 9.5。证明前一个命题的正向。

例 9.6。我们可以利用前一个命题证明，无限维希尔伯特空间的理论具有量词消去。（我们把验证无限维性可以用连续逻辑表达留作读者的练习。）事实上，设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维希尔伯特空间，且 $\bar{a}$、$b \in \mathcal{H}$ 是具有相同无量词类型的元组。令 $\mathcal{H}_0$和 $\mathcal{H}_1$ 分别表示由 $\bar{a}$ 和 b 生成的 $\mathcal{H}$ 有限维子空间。于是，对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$，映射 $a_i \mapsto b_i$ 可扩张为一个同构 $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$。由于 $\mathcal{H}$ 是无限维的，$\mathcal{H}$ 中 $\mathcal{H}_0$ 的正交补 $\mathcal{H}_0^\perp$与 $\mathcal{H}$中 $\mathcal{H}_1$ 的正交补 $\mathcal{H}_1^\perp$具有相同的维数。因此，将 $\mathcal{H}_0^\perp$同构地映入 $\mathcal{H}_1^\perp$，即可将原映射扩张为 $\mathcal{H}$的一个自同构。请注意，在这个例子中，无需使用初等扩张；在更复杂的例子中，实际上必须经过初等扩张。

10. 虚元素

在经典模型论中，虚元素发挥着重要作用。从 T 构造理论 T^{eq}，会得到使模型范畴等价的最大扩张 T。尽管在连续情形下稍微复杂一些，我们仍可以为具有类似性质的度量结构定义虚元素。我们将在接下来的三个小节中讨论它们。

10.1. 积。固定一个连续语言 $\mathcal{L}$ 和一个 $\mathcal{L}$理论 T。设 $\mathcal{S} = (S_n : n \in$ **自然数集**$)$ 是来自 $\mathcal{L}$ 的类型序列。我们向 $\mathcal{L}$ 添加一个新类型 S，形成 $\mathcal{L}'$。我们的意图是扩张 T 的模型，使 S 的解释包含类型 S_n 的积。我们将每个 T 的模型 $\mathcal{M}$ 扩张，将 S 解释为 $\prod_{n \in \text{自然数集}} S_n^{\mathcal{M}}$。我们需要为这个类型指定一个度量。度量的选择并不唯一，但为明确起见，对于 $\bar{x}$，$\bar{y} \in \prod_{n \in \text{自然数集}} S_n^{\mathcal{M}}$，我们采用

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{d_n^{\mathcal{M}}(x_n, y_n)}{B_n 2^n},$$

其中 d_n 是 S_n 的度量符号， B_n 是该度量的界。 d 的关键性质是：对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $n \in$ **自然数集**，使得若 $\bar{x}$、$\bar{y} \in \prod_{n\in\text{自然数集}} S_n^{\mathcal{M}}$，且对每个 $i < n$ 都有 $x_i = y_i$，那么 $d(\bar{x}、\bar{y}) < \epsilon$。我们向语言 $\mathcal{L}'$ 添加的其他符号只有从 S 到 S_n 的映射 π_n；在将一个 $\mathcal{L}$ 结构典范扩张为 $\mathcal{L}'$ 结构时，我们把 π_n 解释为到 n^{th} 坐标的投影。 π_n 的一致连续模可取为 $\epsilon/B_n 2^n$。

这里记录三组在所有扩张结构中都成立的语句。首先，对于任意 $n \in$ **自然数集**，我们想要陈述

$$\sum_{i\leqslant n} \frac{d_i^{\mathcal{M}}(x_i, y_i)}{B_i 2^i} \leqslant d(x, y) \leqslant \sum_{i\leqslant n} \frac{d_i^{\mathcal{M}}(x_i, y_i)}{B_i 2^i} + \frac{1}{2^n}$$

对所有 x、$y \in S$都成立；在连续逻辑中，我们可以要求以下两组语句的值为 0，以表达这一事实：

$$\sup_{x,y\in S} \left(d(x, y) \dot{-} (\sum_{i\leqslant n} \frac{d_i^{\mathcal{M}}(\pi_i(x), \pi_i(y))}{B_i 2^i} + \frac{1}{2^n}) \right).$$

and

$$\sup_{x,y\in S} \left(\sum_{i\leqslant n} \frac{d_i^{\mathcal{M}}(\pi_i(x), \pi_i(y))}{B_i 2^i} \dot{-} d(x, y) \right).$$

我们还希望有限乘积在 S中稠密。为此，可以满足以下语句，每个 $n \in$ **自然数集**对应一条：

$$\sup_{x_i\in S_i, i<n} \inf_{x\in S} \max_{i<n} \{d_i(\pi_i(x), x_i)\}.$$

令 T' 为由 T 以及前面三组语句组成的 $\mathcal{L}'$-理论。若 $\mathcal{M}'$ 是 T'的一个模型，则它具有 $(\mathcal{M}、 Y)$的形式，其中 $\mathcal{M}$ 是 T的一个模型，而 Y 是类型 S的解释。我们希望证明 S 本质上就是$\prod_{n\in}$自然数集 $S_n^{\mathcal{M}}$。固定 $x_i \in S_i^{\mathcal{M}}$。第三组公理保证，对于每个 $n \in$ 自然数集，都存在 $y^n \in Y$ 使得对每个 $i < n$都有 $d(\pi_i(y^n)、 x_i) < \frac{1}{2^n}$。第一组公理保证序列 $(y^n : n \in$ 自然数集$)$ 收敛到某个 $y \in Y$（因为Y 是完备的）。对于这个 y，对所有 $n \in$ 自然数集都有 $d(\pi_n(y)、 x_n) = 0$。若另有一个 $y' \in Y$ 也具有相同性质，那么再次利用第一组语句可得 $d(y、 y') = 0$，因此 $y = y'$。由此可见，通过投影映射， Y 可以与$\prod_{n\in}$自然数集 $S_n^{\mathcal{M}}$ 等同起来。这个等同是等距映射，因为前两组公理保证 Y 上的度量由下式给出

$$d(x, y) = \sum_n \frac{d_n(\pi_n(x), \pi_n(y))}{B_n 2^n}.$$

我们得到的结果如下：

定理 10.1。 从 $\mathrm{Mod}(T')$ 到 $\mathrm{Mod}(T)$ 的遗忘函子是范畴等价。

10.2. **可定义集**。 虽然下面这类虚元素并非完全不可或缺，但在实践中往往很有用。假设对于某个 $\mathcal{L}$-理论 T， X 是一个可定义的 T-函子。我们通过添加一个新类型 S 和一个新函数符号 i 来创建一种新语言 $\mathcal{L}'$；该函数的定义域为 S，陪域等于 X的定义域。我们的意图是：对于 T的一个模型 $\mathcal{M}$，将 S 解释为 $X(\mathcal{M})$，并将 i 解释为从 S 到 $\mathcal{M}$的包含映射。以下是 $\mathcal{L}'$中的一些语句，它们能实现我们的目标：

$$\sup_{x\in S} d(i(x), X)$$

and

$$\sup_{x,y\in S} |d(x,y) - d(i(x), i(y))|.$$

不难看出，由 T和这两条公理构成的 $\mathcal{L}'$-理论 T'，给出了 T的模型的本质唯一扩张。再次得到：

定理 10.2。 从 $\mathrm{Mod}(T')$ 到 $\mathrm{Mod}(T)$ 的遗忘函子是范畴等价。

10.3. **典范参数**。 以下这类虚元素最接近经典情形中的对应概念。固定一种语言 $\mathcal{L}$ 和一个 $\mathcal{L}$-理论 T。取一个 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$。假设 $\bar{y}$ 的类型为 S。我们的想法是，希望用一个类型来囊括所有形如 $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{x}, \bar{a})$ 的函数，其中$\mathcal{M}$ 是 T的一个模型，且 $\bar{a} \in \mathcal{M}$。我们将这种类型中的元素称为 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$的典范参数 [5]。为此，我们通过在 $\mathcal{L}$ 中添加一个类型 S （带有度量符号 d_S）和一个函数符号 π 来创建一种新语言 $\mathcal{L}'$；该函数的定义域为S，陪域为 S。我们在理论 T中加入以下两条公理，得到 T'：

$$\sup_{z\in S} \inf_{\bar{y}\in \bar{S}} d(z, \pi(\bar{y}))$$

and

$$\sup_{\bar{y},\bar{y}'\in \bar{S}} \left| d_S(\pi(\bar{y}), \pi(\bar{y}')) - \sup_{\bar{x}} |\varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}')| \right|.$$

第一条公理指出， π 在 S 中的值域是稠密的；第二条则明确规定了π值域上的度量。若$\mathcal{M}$ 是T的模型，则可以将其扩展为

[5]这个名称源于这样一个事实： $\bar{a}$ 是函数 $\varphi(\bar{x}$ 的参数， $\bar{a})$ 但也可能存在其他参数给出同一个函数。如果我们将任意两个这样的序列视为等价，那么就为这个函数的参数提供了一个“规范”选择。

to a T' 的模型：令 S 为 $\bar{S}^{\mathcal{M}}$ 除以 d' 所得商的完备化，其中

$$d'(\bar{a}, \bar{b}) = (\sup_{\bar{x}} |\varphi(\bar{x}, \bar{a}) - \varphi(\bar{x}, \bar{b})|)^{\mathcal{M}}.$$

我们为 $\bar{a} \in \bar{S}^{\mathcal{M}}$定义了 $\pi(\bar{a}) = \bar{a}/d'$。同样，将 T的模型扩展为 T'的模型，本质上只有一种方式，因此我们将证明下述结论留作练习：

定理 10.3。 从 $\mathrm{Mod}(T')$ 到 $\mathrm{Mod}(T)$ 的遗忘函子是范畴等价。

10.4. **概念完备性**。 如果将前面三个小节中的构造依次应用于给定的 $\mathcal{L}$理论 T，便可以在扩展语言 $\mathcal{L}^{eq}$ 中构造出一个理论 T^{eq}（Berenstein 和 Henson 在本卷文章中将其称为 T^{meq}）。该理论对于类型的有限积和可数积，以及添加可定义集和典范参数运算是闭的。（事实上，可以采用更经济的方式：先对积运算取闭包，再添加可定义集，最后添加典范参数。）

为了陈述关于 T^{eq} 的主定理，我们需要说明连续逻辑中的解释是什么意思。

定义 10.4。 设 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 是连续语言，并且 T 和 T' 分别是 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 中的理论。T 在 T' 中的解释 I指定如下内容：

(1) 将 $\mathcal{L}$ 的每个类型 S 对应到 $\mathcal{L}'$的一个类型 $I(S)$；(2) 将每个函数符号 $f\colon \prod S_i \to S$ 对应到一个 $\mathcal{L}'$-公式 $I(f)$，其自由变量属于 $\prod S_i \times S$，使得 $T' \models$ “$I(f)(\bar{x}, y) = 0$ 是一个以 $\bar{x}$ 为定义域的全函数的图像”；(3) 将 $\mathcal{L}$中定义域为 $S_1 \times \cdots \times S_n$ 的每个关系符号 R 对应到一个定义域为 $I(S_1) \times \cdots \times I(S_n)$的 $\mathcal{L}'$-公式$I(R)$，

使得，对于任意 $\mathcal{L}$句子 φ， $T \models \varphi$ 当且仅当 $T' \models I(\varphi)$（其中， $I(\varphi)$ 指将语言的解释归纳地应用于 φ 所得的结果）。

虽然这不是解释最一般的定义，但足以证明以下定理，其证明见 [1]。

定理 10.5（概念完备性）。假设 T 是一个 $\mathcal{L}$ 理论。那么T^{eq} 满足以下性质：

(1) 从 $\mathrm{Mod}(T^{eq})$ 到 $\mathrm{Mod}(T)$ 的遗忘函子是范畴等价。*(2)* 如果 T' 是某种语言 $\mathcal{L}'$ 中 T 的扩张，且从 $\mathrm{Mod}(T')$ 到 $\mathrm{Mod}(T)$ 的遗忘函子是范畴等价，那么 T' 可以在 T^{eq}中解释。

11. 省略类型

我们称一个结构 $\mathcal{M}$ 省略 一个（部分）类型 p，如果 p 在 $\mathcal{M}$中未实现。经典情形下，省略类型的判定标准已广为人知。连续情形则更加棘手；参见本节末尾的讨论。我们将在这里看到，可定义性在连续逻辑的省略类型定理中起着关键作用。

在本节中，我们将在可分语言 $\mathcal{L}$中的理论 T 里进行讨论。如前所述，根据命题 8.8，如果在某个模型中省略了 p，那么 p 就不是主的。其逆命题就是连续逻辑中的省略类型定理：

定理 11.1（省略类型定理）。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，设 p_n 是一个非主的完备类型。那么存在一个 T 的可分模型，其中省略了每个 p_n。

证明。 这个证明将展示在连续逻辑情形下 Henkin 构造的样子。我们将略述这样一种情形的证明：在一个变量中省略单个完备类型 p，更一般的情形留给读者处理。为此，我们考虑语言 $\mathcal{L}'$，它由 $\mathcal{L}$ 以及对每个 $n \in \mathbf{N}$的可数多个新常元符号 c_n 组成。我们的意图是构造一个扩展 T 的 $\mathcal{L}'$-理论 T'，以及一个 T' 的模型，使得 c_n 的解释是稠密的。回忆一下逻辑拓扑中开集的记号：相对于理论 T，一个基本开集具有如下形式

$$\{\bar{T} : T \subseteq \bar{T} \text{ is a complete } \mathcal{L}'\text{-theory and } \bar{T} \models a < \psi < b\}$$

对于某个 $\mathcal{L}'$-句子 ψ 和区间 $(a、\ b)$。我们将这个开集记为 $O^T(\psi、\ (a、\ b))$.

我们将 T' 归纳地构造为一列递减的非空基本逻辑开集 O_n 的交集，其中 $n \in \mathbf{N}$。我们令 O_0 为所有扩展 T的完备$\mathcal{L}'$-理论的集合。现在，固定一个由 $\mathcal{L}'$-句子 ψ_n 组成的可数稠密集，其中 $n \in \mathbf{N}$；再固定一个由单个自由变量中的 $\mathcal{L}'$-公式 $\varphi_n(x)$ 组成的可数稠密集，其中 $n \in \mathbf{N}$。我们希望集合 O_n 满足以下条件：

首先，对于每个 m 和每个有理数 r，存在 $n \in \mathbb{N}$ 和有理区间 $(a、\ b)$，使得 $b - a < r$，满足

$$O_n \subseteq O^T(\psi_m, (a, b)).$$

其次，对于每个 $m \in \mathbb{N}$和有理数 r，如果对于某个 n 我们有

$$O_n \subseteq O^T(\inf_x \varphi_m(x), (-\infty, r)),$$

那么，对于某些 $k > n$ 和 $l \in \mathbb{N}$，我们有

$$O_k \subseteq O^T(\varphi(c_l), (-\infty, r)).$$

不难看出，如果我们能够成功获得这些性质，那么$\bigcap_{n\in\text{自然数集}} O_n$就是一个完备的 $\mathcal{L}'$-理论，并且在任何模型中，常元 c_n 的解释的闭包都是一个 T模型的底集。

为了让上述 T 模型省略 p，我们需要对开集 O_n提出更高的要求。在经典情形中，只需要求没有任何新常元满足 p。在这里，由于新常元在我们构造的 T 模型中仅仅是稠密的，我们需要让这些常元与 p 的实现集保持某个固定距离。为此，回想一下，由于 p 不是主的，根据命题 8.9，存在某个 $\epsilon > 0$，使得以 p 为中心、半径为 $\epsilon > 0$ 的开 ϵ 球不包含任何逻辑开集。假设我们处于构造的某个阶段，并且已经构造出逻辑开集 O_n；经过一些处理后，我们可以假定它具有如下形式：$O^T(\theta(c_k, \bar{d}), (-\infty, 0))$，其中 c_k 是我们目前关心、希望使其远离 p 的新常元，$\bar{}$，而 d 是 θ 中其余的新常元。现在考虑逻辑开集 $O^T(\inf_{\bar{y}} \theta(x, \bar{y}), (-\infty, 0))$。根据 p 不是主的这一假设，存在某个 $q \in S_x(T)$，使得 q 属于 $O^T(\inf_{\bar{y}} \theta(x, \bar{y}), (-\infty, 0))$ 和 $d(p, q) > \frac{\epsilon}{2}$。根据紧致性，我们可以找到某个 $\mathcal{L}$-公式 $\psi(x)$，使得：

- 对于所有满足 $\psi^{\mathcal{M}}(a) < 0$ 的 $\mathcal{M} \models T$ 和 $a \in \mathcal{M}$，我们有 $(\inf_{\bar{y}} \theta(a, \bar{y}))^{\mathcal{M}} < 0$，并且• 对于任意满足 a 、实现了 p 和 $\psi^{\mathcal{M}}(b) < 0$ 的 $\mathcal{M} \models T$ 和 a，我们有 $d(a, b) > \frac{\epsilon}{2}$。

现在令 $O_{n+1} = O_n \cap O^T(\psi(c_k), (-\infty, 0))$，并注意到这将保证，在任何T的模型中，$c_k$ 的解释与 p 的实现之间的距离都不会小于 $\frac{\epsilon}{2}$。由于我们可以对所有新常元都做到这一点，因此新常元的任何柯西序列都不会趋近于 p 的一个实现，所以我们构造的模型将省略 p。□

连续逻辑中省略部分类型的情况相当棘手，Farah 和 Magidor 在 [20] 中的结果就证明了这一点。他们在那里证明了以下结论：

(1) 存在一个完备理论 T，其语言可分，且有可数多个部分类型，使得每个有限子集都在 T 的某个模型中被省略，但没有模型能同时省略它们全部。
(2) 存在一个完备理论 T，其语言可分，以及部分类型 s 和 t，它们各自在 T 的某个模型中被省略，但没有模型能同时省略两者。

省略某些类型的部分类型所用的省略类型定理变体，在算子代数领域已被证明颇有用处；例如，参见本卷中 [18]，[24], andGoldbring的文章。

12. 可分范畴性

对于无限基数 λ，我们称理论 T 为 λ-范畴的，如果 $\lambda \geqslant \chi(T、\ \mathcal{L})$，并且只要 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 T 的模型且满足 $\chi(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{N}) = \lambda$，那么$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$。我们将重点讨论 λ 为 $\aleph_0$ 的情形，通常称之为可分范畴，而不是 $\aleph_0$-范畴的。与经典情形一样，我们有以下定理。

定理 12.1。设 T 是一个 $\mathcal{L}$ 理论，其模型的稠密特征均至少为 $\chi(T,\ \mathcal{L})$ 且具有 λ 范畴性。那么 T 是完备的。

证明。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 T 的模型。如果 $\mathcal{M}$ 的稠密特征至少为 λ，那么根据向下 Löwenheim-Skolem 定理，我们可以找到满足 $\chi(\mathcal{M}_0) = \lambda$ 的 $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$。如果 $\chi(\mathcal{M}) < \lambda$，那么将向上 Löwenheim-Skolem 定理应用于 $\mathtt{Elem}(\mathcal{M})$，我们可以找到满足 $\chi(\mathcal{M}_0) = \lambda$ 和 $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_0$ 的 $\mathcal{M}_0$。对 $\mathcal{N}$ 应用相同的推理，我们可以找到 $\mathcal{M}_0$ 和 $\mathcal{N}_0$，使得

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_0 \cong \mathcal{N}_0 \equiv \mathcal{N}.$$

由此我们得出 T 是完备的。 □

现在我们陈述连续逻辑中的 Ryll-Nardewski 定理；这个定理最初在正有界情形下得到证明，证明归功于 Henson。

定理 12.2。假设 $\mathcal{L}$ 可分，且 T 是一个没有紧模型的 $\mathcal{L}$-理论。那么，T 可分范畴，当且仅当 T 完备且每个完备类型都是主的。

证明。如果 T 可分范畴，那么它就是完备的。如果存在一个非主的完备类型 p，那么根据省略类型定理，存在一个省略 p 的 T 可分模型。然而，也存在一个实现 p 的 T 可分模型；由于这两个 T 模型不同构，T 就不是可分范畴的；矛盾。

现在假设 T 完备，并且每个完备类型都是主的。考虑 T 的两个可分模型 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$。我们需要证明 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$。

我们构造两个序列 a_0^0、$a_0^1 a_1^1$、$a_0^2 a_1^2 a_2^2$、.....，它们分别位于 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 中，使得相同长度的所有初始片段具有相同的类型；也就是说，对于任意 k，$a_0^n \dots a_k^n$ 和 $b_0^n \dots b_k^n$ 都有一个固定类型，且该类型与 $n \geqslant k$ 无关。我们还要设法使得对于每个 k，$\langle a_k^n : n \geqslant k\rangle$ 和 $\langle b_k^n : n \geqslant k\rangle$ 都构成柯西序列，分别收敛到 $_k\,a$ 和 $_k\,b$，从而 $\{a_k : k \in N\}$ 和$\{b_k : k \in N\}$ 分别在 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 中稠密。如果我们能够做到这一点，那么将 a_k 映到 b_k 的映射就会延拓为从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的同构。

首先，我们枚举 $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ 中的可数稠密子集；分别将它们记作 $\langle c_k : k \in N\rangle$ and $\langle d_k : k \in N\rangle$。在第 0 阶段，令 $a_0^0 = c_0$。根据假设，

$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(c_0)$ 是主的，因此在 $\mathcal{N}$ 中由某个 b_0^0 实现。一般而言，在每一步，我们交替选择 c_k 或 d_k，并在构造过程中无限多次地访问每个 c_k 和 d_k。假设我们已经选定了 $a_0^n \dots a_n^n$，现在考虑这一阶段给出的任意 c_k。令 $p(x_0, \dots, x_n)$ 为 $a_0^n \dots a_n^n$ 在 $\mathcal{M}$ 中的类型，令 $q(x_0, \dots, x_{n+1})$ 为 $a_0^n \dots a_n^n c_k$ 在 $\mathcal{M}$ 中的类型。由于 q 是主的，我们有一个公式 $d_q(x_0, \dots, x_{n+1})$，它表示到 q 的实现的距离。由于 $d_q^{\mathcal{M}}(a_0^n \dots a_n^n, c_k) = 0$，我们有 $\inf_y d_q^{\mathcal{M}}(a_0^n \dots a_n^n, y) = 0$。由于根据假设，$b_0^n \dots b_n^n$ 满足 p，因此 $\inf_y d_q^{\mathcal{N}}(b_0^n \dots b_n^n, y) = 0$。这意味着我们可以找到实现 q 的 $b_0^{n+1} \dots b_{n+1}^{n+1}$，使得对于 $i = 0, \dots, n$，有 $d(b_i^n, b_i^{n+1}) \leqslant 1/2^n$。这就保证了我们得到了所需的柯西序列，也满足了所需的稠密性。为说明后者，固定 $\epsilon > 0$。选取足够大的 N，使得 $\sum_{n \geqslant N} 1/2^n < \epsilon$。如果我们在第 $t > N$ 阶段访问 c_k，那么某个 $\mathbf{a}_t$ 与 c_k 的距离小于 ϵ，因此这些 $\mathbf{a}_k$ 在 M 中稠密。类似地，这些 $\mathbf{b}_k$ 在 N 中稠密，证明至此完成。□

注意，定理 12.1 中“每个完备类型都是主的”这一条件，等价于对所有有限变量元组 $\bar{x}$，逻辑拓扑与度量拓扑在 $S_{\bar{x}}(T)$ 上一致。

练习 12.3. 证明：在可分语言中，没有紧模型的完备理论 T 是可分范畴的，当且仅当对所有有限变量元组 $\bar{x}$，$S_{\bar{x}}(T)$ 在度量拓扑中是紧致的。

连续理论中有若干非平凡的可分范畴实例：

例 12.4. 以下理论都是可分范畴的：

(1) 无限维希尔伯特空间的理论。(2) 乌雷松球的理论。
(3) 无原子概率代数的理论。

无限维希尔伯特空间理论具有可分范畴性，是因为任意两个可分的无限维希尔伯特空间都同构于 ℓ^2；而乌雷松球理论具有可分范畴性，则可由例 5.14 中给出的论证得出。本卷中 Berenstein 和 Henson 的文章讨论了无原子概率代数理论的可分范畴性 [4]。

在算子代数的语境中，可分范畴理论的例子非常少。例如，对于任意可分的 II_1 因子 N，都有连续多个彼此非同构、且与 N初等等价的可分 II_1 因子（参见本卷作者与 Goldbring 合著文章中的定理 4.1）。一个值得注意的可分范畴 C*-代数是代数 $C(X)$，其对应于 X 一个

完全不连通的紧豪斯多夫空间；在此情形下， $C(2^{\mathbb{N}})$ 是唯一的可分模型。该事实的证明利用了斯通对偶以及存在唯一的可数无原子布尔代数这一事实。

我们以一些相关的讨论结束本节。我们称模型 $\mathcal{M}$（属于 T）是原子 的，如果对每个有限元组 $\bar{a} \in \mathcal{M}$， $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ 都是主的。定理 12.1（及其证明）给出以下结果：

定理 12.5。

(1) 任意两个可分原子模型 T都同构。*(2)* 如果 T是可分语言中的完备理论，那么 T是可分范畴的，当且仅当 T的所有可分模型都是原子模型。

本节余下部分中，为简单起见，我们假设 T是可分语言中的完备理论。

我们称 T 的一个模型是素模型，如果它能初等嵌入 T 的所有其他模型中。

练习 12.6. 证明： T 的模型 $\mathcal{M}$ 是素模型，当且仅当 $\mathcal{M}$ 可分且为原子模型。此外， T 至多有一个在同构意义下唯一的素模型。（提示：要证明 T 的可分原子模型是素模型，可使用定理 12.1 的证明中出现的来回论证的“仅向前”版本。）

练习 12.7. 证明： T 有素模型，当且仅当对于变量 $\bar{x}$ 的所有有限元组，主类型在 $S_{\bar{x}}(T)$ 中稠密。

如果对于变量 $\bar{x}$ 的所有有限元组，$S_{\bar{x}}(T)$ 在度量拓扑下都是可分的，我们就称 T 是小的。以下是 [13] 中的命题 1.17：

命题 12.8. 如果 T 是小的，那么 T 有一个素模型。

参考文献

[1] J. M. Albert 和 B. Hart。一阶连续逻辑的度量逻辑范畴与概念完备性。预印本，2016。[2] H. Ando，见本卷。[3]J. Arulseelan、I. Goldbring 和 B. Hart，具有 QWEP 的不可判定性，arXiv:2205.07102。[4] A. Berenstein 和 C.W. Henson，见本卷。[5]I. Ben Yaacov，连续逻辑中量词的表达能力，arXiv:2207.01863。[6] I. Ben Yaacov，正模型论与紧抽象理论。《数学逻辑杂志》，3，85–118，2003。[7] I. Ben Yaacov，紧抽象理论中的简单性。《数学逻辑杂志》，3，163–191，2003。[8] I. Ben Yaacov，cats 中的不可数稠密范畴性。《符号逻辑杂志》，70，829–860，2005。

[9] I. Ben Yaacov。无界度量结构的连续一阶逻辑。《数学逻辑杂志》，8(2)，225–249，2008。[10] I. Ben Yaacov、A. Berenstein、C. W. Henson 和 A. Usvyatsov，度量结构的模型论，见《模型论及其在代数和分析中的应用》第2卷，伦敦数学学会讲义系列，第350卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008，315–427。[11] I. Ben Yaacov 和 A.P. Pederson，连续一阶逻辑完备性的一个证明，《符号逻辑杂志》75 (2010)，第1期，168–190。[12] I. Ben Yaacov 和 A. Usvyatsov。连续一阶逻辑与局部稳定性。《美国数学会汇刊》，362(10):5213?5259，2010。[13] I. Ben Yaacov 和 A. Usvyatsov，连续结构中的 d-有限性，《数学基础》194 (2007)，67-88。[14] R. Boutonnet、I. Chifan 和 A. Ioana，II_1 因子与非同构超幂，《杜克数学杂志》166 (2017)，2023-2051。[15] C. C. Chang 和 H. J. Keisler。《连续模型论》。普林斯顿大学出版社，1966。[16] I. Chifan、A. Ioana 和 S. Kunnawalkam Elayavalli，两个不初等等价的 II_1 因子且不具有伽马性质，预印本。[17] Y. Dabrowski，冯·诺依曼代数的连续模型论，《泛函分析杂志》277，2019。[18] I. Farah、B. Hart、M. Lupini、L. Robert、A. Tikuisis、A. Vignati 和 W. Winter，C*-代数的模型论，《美国数学会回忆录》（2021）。[19] I. Farah、B. Hart 和 D. Sherman，算子代数的模型论 II：模型论，《以色列数学杂志》201 (2014)，477-505。[20] I. Farah 和 M. Magidor，度量结构逻辑中的省略类型，《数学逻辑杂志》，2018。[21] I. Farah、A. Toms 和 A. Törnquist，湍流、轨道等价与核 C*-代数的分类，《纯粹与应用数学杂志》（Crelle's Journal），688 (2014) 101–146。[22]I. Goldbring，贯穿数学的超滤子，美国数学会数学研究生学习丛书，第220卷（2022）。[23] I. Goldbring，见本卷。[24] I. Goldbring，可强制算子代数，《朱西厄数学研究所杂志》，第20卷（2021），31-63。[25] I. Goldbring 和 B. Hart，关于麦克达夫 II_1 因子的理论，《国际数学研究通报》，27 (2017)，5609–5628。[26] I. Goldbring、B. Hart 和 T. Sinclair，对应、超积与模型论，arXiv:1809.00049。[27] I. Goldbring 和 J. Keisler，在约化积下保持不变的连续句子。《符号逻辑杂志》87(2)，649–681 (2022)。[28] I. Goldbring 和 T. Sinclair，II_1 因子的博弈与初等等价，《太平洋数学杂志》，278 (2015)，103–118。[29] B. Hart，EF 博弈，未发表的笔记，https://ms.mcmaster.ca/~bradd/EF-games.pdf。[30] C. W. Henson。巴拿赫空间的非标准包络。《以色列数学杂志》，25，108–144，1976。[31] B. Hart、B. Kim 和 A. Pillay，简单理论中的坐标化与典范基，《符号逻辑杂志》，65，293–309。[32] C. W. Henson 和 J. Iovino，分析中的超积，见《分析与逻辑》，伦敦数学学会讲义系列，262，2002，1–113。[33] E. Hewitt。实值连续函数环。《美国数学会汇刊》，64，45–99，1948。

[34] J. Keisler，《超积构造》。“数学中的超滤子”，V. Bergelson 等编，当代数学 530（2010），第 163–179 页。[35] H.J. Keisler，超积与饱和模型，《荷兰皇家艺术与科学学院》论文集 A 辑 67（= 《数学研究》26）(1964)，178–186。[36] K. Kunen，超滤子与独立集，《美国数学会汇刊》172（1972），199–206。[37] J. Łoś，《关于代数可定义类的一些评注、定理与问题》。载于《形式系统的数学解释》，98–113。北荷兰，1955。[38] J. Łukasiewicz 和 A. Tarski，《命题演算研究》，《华沙科学与文学学会会报》23（1930），1–21。[39] D. McDuff[40] S. Shelah，《任意两个初等等价模型都有同构超幂》，《以色列数学杂志》10（1971），第 224–233 页。[41] D. Sherman，《II_1 因子超幂的自同构札记》。《数学研究丛刊》195，201–217，2009。[42] P. S. Urysohn，《论一个通用度量空间》，《巴黎科学院报告》180（1925），803–806。

索引

T-可定义，36T-等价，17T-公式，17T-函子，34ℒ-公式，17κ-饱和的，32 Łoś定理，25

近似有限可满足，26 原子图，19 原子公式，14 原子模型，49 可公理化，16

基本公式，13

典范参数，43 范畴的，47 完备理论，17 完备类型，29

可定义集，36 稠密特征，18 对角嵌入，4 剖分，10

初等，16 初等图，20 初等嵌入，17 初等等价，17 初等子结构，17 嵌入，8 扩张，8

滤子，3 有限可满足，26 Fréchet滤子，4

同态，8

解释，44 同构，8

逻辑拓扑，30

度量结构，6 度量拓扑，30

省略类型，45

部分类型，30，32 前束公式，14 素模型，49 主类型，37 主超滤子，4

量词消去，39 无量词公式，14

实代数系统，18 约化结构，8

满足关系，16 饱和的，32 可分范畴的，47 小理论，49 子结构，7

理论，16 类型空间，29

超滤子，3 超极限，4 超幂，4, 25 超积，4,25 超根，28 一致连续模，6 一致有界，4

零集，34

麦克马斯特大学数学与统计系，加拿大安大略省汉密尔顿主街1280号，L8S 4K1电子邮件地址：hartb@mcmaster.ca网址：http://ms.mcmaster.ca/~bradd/