arXiv:2303.03970v1 [math.CT] 7 Mar 2023

预序群的中心扩张

MARINO GRAN 和 ALINE MICHEL

摘要。我们证明，预序群范畴包含两个全反射子范畴，它们产生了一些有趣的伽罗瓦理论。第一个是所谓交换对象的范畴，即群运算交换的预序群。第二个是阿贝尔对象范畴，它恰好是阿贝尔群范畴中的单态射范畴。我们精确描述了到此子范畴的反射函子，并证明它诱导出一个可容许伽罗瓦结构，进而给出一种自然的范畴论中心扩张概念。随后，我们用纯代数的方式刻画预序群的中心扩张：它们就是具有如下附加性质的群的中心扩张——其在正锥上的限制是幺半群的特殊齐次满射。

引言

一个预序群 $(G,\leq)$是一个群 $G=(G,+,0)$，赋有一个预序关系 $\leq$，该关系与群 G的加法 $+$相容，即如果 $a\leq c$和 $b\leq d$，那么 $a+b\leq c+d$（对于 $a,b,c,d\in G$）。预序群及其单调群同态构成一个范畴，记作 PreOrdGrp。这个范畴实际上同构于另一个范畴，其对象由对(G,P_G)给出，其中 G 是一个群，P_G 是 G 的一个在 G中对共轭封闭的子幺半群。这个子幺半群 P_G 通常称为 G的正锥，对象(G,P_G)可表示为

$$P_G \rightarrowtail G$$

其中，态射表示 P_G 在 G中的包含映射。两个此类对象 (G,P_G) 和(H,P_H) 之间的态射由一对 $(f,f):(G,P_G)\to(H,P_H)$ 幺半群态射给出，使图表

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{\bar{f}} & P_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow[f]{} & H \end{array} \tag{0.1}$$

交换，也就是说，$f\colon G\to H$ 是一个群同态，并且以这样的意义“限制”在正锥上：$f(P_G)\subseteq P_H$。本文将始终采用预序群范畴 PreOrdGrp 的第二种等价定义。正如 [4] 所示，范畴 PreOrdGrp 既完备又余完备，并且是 [14], 意义下的一个正规范畴，即一个有基点正则范畴，其中每个正则满态射都是正规满射（即余核）。

本文证明，任意预序群 (G,P_G) 上的正规子对象格是模的 （命题 2.5），这意味着，从范畴伽罗瓦理论的角度看，PreOrdGrp 的任何反射子范畴，只要对其中的子对象和正则商对象封闭，就是可容许的 [7] （见命题 2.3）。特别地，预序阿贝尔 群的全子范畴 PreOrdAb 满足这一性质，从而得到伴随

$$\mathsf{PreOrdGrp} \underset{V}{\overset{C}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{PreOrdAb} \tag{0.2}$$

关键词与短语。预序群、预序阿贝尔群、范畴伽罗瓦理论、阿贝尔对象、交换对象、中心扩张、特殊齐次满射。第二作者的研究由比利时法语共同体的 FRIA 博士奖学金资助。

其中 V 是包含函子，其左伴随 C 将预序群 (G, P_G) 映为预序阿贝尔群 $(G/[G,G], \eta_G(P_G))$，其中 η_G: $G \twoheadrightarrow G/[G,G]$ 是 G 对其导出子群 $[G,G]$ 取商所得。事实证明，预序阿贝尔群恰好是范畴 PreOrdGrp 中的交换对象（按 [2] 的意义）。定理 2.9 给出了相对于此伴随的预序群正规扩张的刻画：它们恰好是正规满态射 $\bar{}(f,f)$: (G,P_G) (H,P_H)，满足 $f\colon G \twoheadrightarrow H$ 是群的中心扩张；此外，当 $a, b, c \in P_G$ 满足 $\eta_G(a) = \eta_G(b)$ 且 $f(b) = f(c)$ 时，$a - b + c \in P_G$。

接下来，我们将关注复合伴随

$$\mathsf{PreOrdGrp} \underset{V}{\overset{C}{\rightleftarrows}} \mathsf{PreOrdAb} \underset{W}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathsf{Mono(Ab)}$$

其中 Mono(Ab) 是阿贝尔群范畴 Ab 中单态射构成的范畴，W 是包含函子，A 是其左伴随（详见第 3 节）。我们证明 Mono(Ab) 是 PreOrdGrp 中的阿贝尔对象范畴（推论 3.8），并刻画正规满态射

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{\bar{f}} & P_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow[f]{} & H \end{array} \tag{0.3}$$

$\bar{}$ 在 PreOrdGrp 中（即 f 和 f 均为满射），且依据范畴伽罗瓦理论 [10]，它们是关于该复合伴随的中心扩张。利用 [15] 中建立的结果，我们在定理 6.3 中证明，这些态射的特征是：满射态射 f 是群的中心 $\bar{}$ 扩张，且 f 是 [3]意义下的特殊齐次满射。这一结果为采用 [5] 所用的方法研究预序群的非阿贝尔同调开辟了道路（该方法本身基于 [9]中的方法）；这项工作留待未来开展。

1. 范畴伽罗瓦结构与中心扩张

我们首先回顾本文所需的范畴伽罗瓦理论的一些定义和结果。本节主要依据 [7, 8, 10]。

定义 1.1. 一个伽罗瓦结构 是一个系统 $\Gamma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, F, U, \mathscr{E}, \mathscr{Z})$，其中

- $\mathscr{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{F}$ 是一个伴随，其单位为 η，余单位为 ϵ；
- $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{Z}$ 分别是 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{F}$ 中的一类态射，

使得

- $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{F}$ 分别沿着来自 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{Z}$ 的态射都存在拉回；
- $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{Z}$ 对复合封闭，包含所有同构，并且是拉回稳定的；
- $F(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{Z}$；
- $U(\mathscr{Z}) \subseteq \mathscr{E}$。

设 $\Gamma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, F, U, \mathscr{E}, \mathscr{Z})$ 是一个伽罗瓦结构。对于任意对象 B，在 $\mathscr{C}$ 中，令 $\mathscr{E}(B)$ 表示由属于类 $\mathscr{E}$ 的态射 $A \overset{f}{\to} B$ 所确定的切片范畴 $\mathscr{C} \downarrow B$ 的全子范畴。该子范畴中的对象称为 B 的扩张，记作 (A, f)。设 $p\colon E \to B$ 是 $\mathscr{C}$ 中任意一个态射。那么，$p^*\colon \mathscr{E}(B) \to \mathscr{E}(E)$ 是基变函子，它将 $\mathscr{E}(B)$ 中的任意对象 $f\colon A \to B$ 对应到对象 $p^*(f) = \pi_1\colon E \times_B A \to E$，如以下拉回图所示：

$$\begin{array}{ccc} E \times_B A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ E & \xrightarrow[p]{} & B. \end{array}$$

众所周知，伽罗瓦结构 $\Gamma=(\mathscr{C},\mathscr{F},F,U,\mathscr{E},\mathscr{Z})$ 对于任意对象 $B\in\mathscr{C}$，都会诱导扩张范畴之间的一个伴随，如图表所示

$$\mathscr{E}(B)\underset{U^B}{\overset{F^B}{\rightleftarrows}}\mathscr{Z}(F(B))\quad(\perp)\tag{1.1}$$

单位和余单位分别记为 η^B 和 ϵ^B。左伴随 $F^B\colon \mathscr{E}(B)\to\mathscr{Z}(F(B))$ 对任意 $(A,f)\in\mathscr{E}(B)$ 定义为 $F^B(A,f)=(F(A)\ F(f))(\in\mathscr{Z}(F(B)))$，而右伴随$U^B\colon \mathscr{Z}(F(B))\to\mathscr{E}(B)$ 将任意 $(X,\phi)\in\mathscr{Z}(F(B))$ 映射为沿 η_B 的 $U(\phi)$ 的拉回 $\eta_B^*(U(\phi))$:

$$\begin{array}{ccc} B\times_{UF(B)}U(X) & \longrightarrow & U(X) \\ {\scriptstyle \eta_B^*(U(\phi))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U(\phi)} \\ B & \xrightarrow[\eta_B]{} & UF(B). \end{array}$$

定义 1.2。 当对于任意 $B\in\mathscr{C}$，伴随 (1.1) 的余单位态射 ϵ^B 是同构时，伽罗瓦结构 $\Gamma=(\mathscr{C},\mathscr{F},F,U,\mathscr{E},\mathscr{Z})$ 是 可容许的 。

定义伽罗瓦结构 $\Gamma=(\mathscr{C},\mathscr{F},F,U,\mathscr{E},\mathscr{Z})$ 的可容许性还有一种等价方式，它对应于下述命题中的等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。在伽罗瓦结构满足一个附加条件时，我们还可以得到它与 (3) 的等价性。这个附加条件是伴随 $F\dashv U$ 的余单位 ϵ 是同构。本文中，我们始终处于这种情形，因此可以使用可容许性的这一最后一种等价定义。

命题 1.3. 设 $\Gamma=(\mathscr{C},\mathscr{F},F,U,\mathscr{E},\mathscr{Z})$ 是一个伽罗瓦结构，且伴随 $F\dashv U$ 的余单位 ϵ 是同构。那么，以下条件等价:

(1) Γ 是可容许的；(2) 对于任意 $B\in\mathscr{C}$，函子 $U^B\colon \mathscr{Z}(F(B))\to\mathscr{E}$ (B) 是全忠实的；(3) F 保持所有形如以下形式的拉回

$$\begin{array}{ccc} B\times_{UF(B)}U(X) & \xrightarrow{\pi_2} & U(X) \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U(\phi)} \\ B & \xrightarrow[\eta_B]{} & UF(B) \end{array}$$

其中 $\phi\in\mathscr{Z}$。

从现在起，我们假设已固定一个命题 1.3 中的可容许伽罗瓦结构 $\Gamma=(\mathscr{C},\mathscr{F},F,U,\mathscr{E},\mathscr{Z})$。接下来回顾 (Γ-)平凡、(Γ-)中心的 和 (Γ-)正规扩张的概念。

定义 1.4。 $\mathscr{E}$ 中的态射 $f\colon\ A\to B$ 称为(Γ-)平凡扩张 ，当且仅当下图是

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & UF(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle UF(f)} \\ B & \xrightarrow[\eta_B]{} & UF(B) \end{array}$$

一个拉回。等价地， $\mathscr{E}$ 中的 $A\to B$ 上的态射: f(Γ-)平凡扩张 ，当且仅当 f 属于函子 $U^B\colon\ \mathscr{Z}(F(B))\to\mathscr{E}(B)$的像。

请注意，上述定义中的等价性直接源于伽罗瓦结构 Γ 的可容许性。

我们将单子扩张 定义为 $\mathscr{E}$ 中的态射 $p\colon E\to B$ ，且它同时也是一个有效下降态射 （例如参见 [11, 12], ）。

定义 1.5。 $f\colon A\to B$ 在 $\mathscr{E}$ 中的态射是一个(Γ-)中心扩张，当且仅当存在一个单子扩张 $p\colon E\to B$，使得 $p^*(f)\colon E\times_B A\to E$是一个(Γ-)平凡扩张，也就是说，下面的图表

$$\begin{array}{ccc} E \times_B A & \xrightarrow{\eta_{E\times_B A}} & UF(E\times_B A) \\ {\scriptstyle p^*(f)=\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle UF(\pi_1)} \\ E & \xrightarrow[\eta_E]{} & UF(E) \end{array}$$

是一个拉回，其中 π_1 是该拉回中的第一投影

$$\begin{array}{ccc} E \times_B A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ {\scriptstyle p^*(f)=\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ E & \xrightarrow[p]{} & B. \end{array}$$

定义 1.6. 态射 $f\colon A \to B$ 在 $\mathscr{E}$ 中是一个(Γ-)正规扩张，当且仅当 f 是单子扩张，且 $f^*(f)$ 是一个(Γ-)平凡扩张。

显然，任何平凡扩张都是中心扩张，任何正规扩张也是中心扩张。伽罗瓦结构 Γ 的可容许性也保证了任何平凡扩张都是正规扩张。

2. 反射函子 $C\colon$ PreOrdGrp $\to$ PreOrdAb 及其诱导的可容许伽罗瓦结构

文献 [4] 对预序群范畴 PreOrdGrp 的性质进行了深入研究，尤其描述了该范畴的极限和余极限，这些内容将用于我们的工作。为方便读者，我们简要回顾这些构造。

首先，p 两个预序群 (G, P_G) 和 (H, P_H) 的乘积由如下预序群给出 $(G \times H, P_G \times P_H)$。那么，两个平行态射的等化子

$$(G, P_G) \underset{(g,\bar{g})}{\overset{(f,\bar{f})}{\rightrightarrows}} (H, P_H) \tag{2.1}$$

由 $((E, P_E), (e, \bar{e}))$ 给出，其中 (E, e) 是群范畴 Grp 中 f 和 g 的等化子，而 $P_E = E \cap P_G$，即下图中的方块在 Mon 中是一个拉回:

$$\begin{array}{ccc} P_E & \overset{\bar{e}}{\rightarrowtail} & P_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \underset{e}{\rightarrowtail} & G. \end{array}$$

不难看出，这等价于说 (E, e) 是¯Grp 中 f 和 g 的等化子，而 $(P_E, \bar{e})$ 是 Mon 中 f 和 $\bar{g}$ 的等化子。因此，具有相同陪域 (H, P_H) 的两个态射¯$(f, f) : (G, P_G) \to (H, P_H)$ 和 $(g, \bar{g}) : (C, P_C) \to (H, P_H)$ 的拉回由 $((P, P_P), (p_1, \bar{p}_1), (p_2, \bar{p}_2))$ 给出，其中 (P, p_1, p_2) 是 Grp 中 f 和 g 的拉回，而 $(P_P, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$ 是 Mon 中 f 和 $\bar{g}$ 的¯拉回。更一般地，PreOrdGrp 的所有极限都是“逐分量”计算的。¯特别地，请注意，PreOrdGrp 中一个态射 $(f, f) : (G, P_G) \to (H, P_H)$ 的核 (K, P_K) 也可通过令 K 为 Grp 中 f 的核 Ker(f)，并令 P_K 为交集 $K \cap P_G$ 来计算。

一般来说，PreOrdGrp 中的余极限比较难描述，因为它们并非简单地“逐分量”计算。我们主要关注余等化子：给定如 (2.1) 中的两个平行态射，其余等化子为 $((Q, P_Q), (q, \bar{q}))$，其中 (Q, q) 是 f和 g 在 Grp 中的余等化子，且 $P_Q = q(P_H)$（即 $\bar{q}$ 是满射）：

$$\begin{array}{ccc} P_H & \overset{\bar{q}}{\twoheadrightarrow} & P_Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \underset{q}{\twoheadrightarrow} & Q. \end{array}$$

¯特别地，PreOrdGrp 中态射 $(f, f)\colon (G, P_G) \to (H, P_H)$ 的余核由一对 $(q, \bar{q})$ 给出，使得上图交换，其中 q 是 f 在 Grp 中的余核，且 $\bar{q}$ 为满射。

正如引言中回顾的，[4] 的一个重要结果是，预序群范畴 PreOrdGrp 是正规的。尽管预序群范畴 PreOrdGrp 并非*Barr*-正合 [1] （见 [4, 注

2。6]），但其有效下降态射（例如见 [11], ）很容易刻画。在此背景下，有效下降态射与正规满同态一致，因此预序群范畴 PreOrdGrp 中的有效下降态$^{-}$ $^{-}(f,\ f):\ (G,\ P_G)\ \to(H,\ P_H)$ 如式（0.1）所示，其中 f和 f均为满射。PreOrdGrp 中的满态射$^{-}$是指形如$(f,\ f)$的态射，其中只要求 f为满射；单态射则是$^{-}$ $^{-}$形如$(f,\ f)$的态射，其中 f为单射（这反过来也意味着 f为单射）。

因此，我们将 PreOrdGrp 的全子范畴记为 PreOrdAb，其对象 (G, P_G) 是预序阿贝尔群，也就是说， G 是阿贝尔群。

命题 2.1。 存在一个伴随

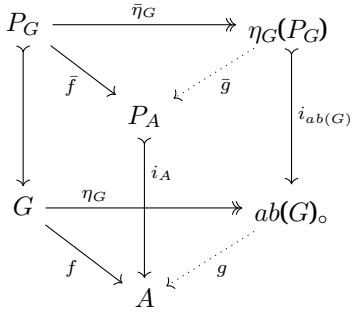
$$\mathsf{PreOrdGrp} \underset{V}{\overset{C}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{PreOrdAb} \tag{2.2}$$

它位于预序群范畴 PreOrdGrp 与其由预序阿贝尔群构成的全子范畴 PreOrdAb 之间，其中右伴随 V 是包含函子，左伴随 C 定义如下：对任意 $(G,\ P_G)\in\mathsf{PreOrdGrp}$，有 $C(G,\ P_G)=(G/[G,G],\ \eta_G(P_G))$

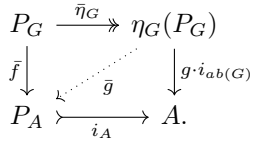
$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{\bar{\eta}_G} & \eta_G(P_G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow[\eta_G]{} & G/[G,G]=ab(G), \end{array}$$

其中 $\eta_G(P_G)$ 是 P_G 在 G 对其导出子群 $[G,G]$取商 η_G 下的直像。

证明。 令 (G, P_G) 为任意预序群。那么，伴随 (2.2) 的单位的 (G, P_G)-分量由上述态射 $(\eta_G, \bar{\eta}_G)$ 给出。事实上，考虑任意预序阿贝尔群 $(A, P_A)^{-}$以及任意态射 (f, f): $(G, P_G)\ \to(A, P_A)$，其中的态射属于 PreOrdGrp:



于是， G 的阿贝尔化的泛性质给出唯一的态射 g: $ab(G)\ \to A$ ，使得$g\cdot\eta_G\ =\ f$ 在群范畴 Grp 中成立。由于 $\bar{\eta}_G$ 是幺半群范畴 Mon 中的强满态射，因此还存在唯一的幺半群态射 $\bar{g}$: $\eta_G(P_G)\ \to P_A$ ，使得下图交换:



因此，存在唯一的态射 $(g, \bar{g})$: $(ab(G)\ \eta_G(P_G))\ \to(A, P_A)$，它属于 PreOrdGrp，并且满足$^{-}(g, \bar{g})\ \cdot(\eta_G, \bar{\eta}_G)\ =\ (f, f)$。□

推论 2.2。 若 $\mathscr{E}_C$ 表示 PreOrdGrp 中的正规满射类， $\mathscr{Z}_C$ 表示PreOrdAb中的正规满射类，则

$$\Gamma_C=(\mathsf{PreOrdGrp}, \mathsf{PreOrdAb}, C, V, \mathscr{E}_C, \mathscr{Z}_C) \tag{2.3}$$

是一个伽罗瓦结构。

现在我们将证明该伽罗瓦结构实际上是可容许的。为此，我们将使用以下结果，该结果是对 Janelidze 和 Kelly [10] 所得结果的重新表述：

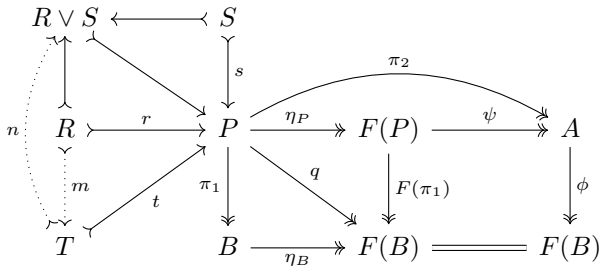
命题 2.3. 设 $\mathscr{C}$ 为正规范畴。设 $\Gamma = (\mathscr{C},\ \mathscr{F},\ F,\ U,\ \mathscr{E},\ \mathscr{Z})$ 为一个伽罗瓦结构，其中 $\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{C}$ 中正规满射的类，$\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{C}$ 的全反射子范畴，且对其子对象和商对象封闭。如果 $\mathscr{C}$ 中正规子对象构成的格 $\mathsf{Norm}(\mathscr{C})$ 是模的，则伽罗瓦结构 Γ 是可容许的。

证明。考虑 $\mathscr{C}$ 中任意一个具有以下形式的拉回

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ B & \xrightarrow[\eta_B]{} & F(B) \end{array} \tag{2.4}$$

其中 η_B 是伴随 $F \dashv U$ 的单位的 B 分量，A 是子范畴 $\mathscr{F}$ 中的一个对象，而 ϕ 是类 $\mathscr{E}$ 中的任意态射。我们将 $s\colon S \rightarrowtail P$ 和 $t\colon T \rightarrowtail P$ 分别记为 π_1 和 π_2 的核。我们需要证明该拉回在反射函子 F 下保持不变。为此，我们考虑下面的交换图

(2.5)



其中，$r\colon R \rightarrowtail P$是伴随 $F \dashv U$, $R \vee S$的单位的 P分量 η_P的核，$R \vee S$是 $\mathsf{Norm}(\mathscr{C})$ 中 R 与 S 的上确界，q是复合态射 $\eta_B \cdot \pi_1 = F(\pi_1) \cdot \eta_P$，而 ψ是由 η_P 的泛性质所诱导的唯一态射，满足 $\psi \cdot \eta_P = \pi_2$。我们计算得$\pi_2 \cdot r = \psi \cdot \eta_P \cdot r = 0$，因此，根据核的泛性质，存在唯一态射 $m\colon R \to T$ 满足 $t \cdot m = r$，从而 $R \leq T$。假设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{C}$ 的全反射子范畴，且对子对象和商对象封闭，这意味着上述图表 (2.5) 的中间方块是一个推出。因此，上确界 $R \vee S$ 存在，并且它是态射 q 的核。相应地，由于 $q \cdot t = F(\pi_1) \cdot \eta_P \cdot t = \phi \cdot \psi \cdot \eta_P \cdot t = \phi \cdot \pi_2 \cdot t = 0$，存在唯一态射 $n\colon T \to R \vee S$ 满足 $\ker q \cdot n = t$，从而 $T \leq R \vee S$ 属于 $\mathsf{Norm}(\mathscr{C})$。于是注意到

$$R = R \vee \{0\} = R \vee (S \wedge T) = (R \vee S) \wedge T = T,$$

其中，第二个等式源于 π_1 和 π_2 是联合单态这一事实；第三个等式由 $\mathsf{Norm}(\mathscr{C})$ 的模性得到（因为 $R \leq T$）；最后一个等式则源于 $T \leq R \vee S$这一事实。这意味着 $\ker(\eta_P) = \ker(\pi_2)$，因此诱导态射 ψ 是一个同构。若将反射函子 F 应用于拉回 (2.4)，便会在 $\mathscr{F}$中得到一个拉回，因此伽罗瓦结构 Γ 是可容许的，正如所需。□

现在我们将把这个命题应用于我们所关注的伴随。我们只需证明 PreOrdGrp 中正规子对象构成的格 Norm(PreOrdGrp) 是模的。为此，我们首先需要描述 PreOrdGrp 中两个正规子对象的上确界。

引理 2.4. 设(A, P_A) 和(B, P_B) 是预序群(G, P_G)在PreOrdGrp 中的两个正规子对象。它们在 Norm(PreOrdGrp) 中的上确界为

$$(A, P_A) \vee (B, P_B) = (A \cdot B, (A \cdot B) \cap P_G)$$

其中， $A \cdot B = \{a + b \mid a \in A \text{ 和 } b \in B\}$ 是群范畴Grp 中正规子群 A 和 B 的上确界。

证明. 我们首先注意到 $(A \cdot B, (A \cdot B) \cap P_G)$ 是 (G, P_G) 的正规子对象。事实上， $A \cdot B$ 是 G 的正规子群，并且这个方块

$$\begin{array}{ccc} (A \cdot B) \cap P_G & \rightarrowtail & P_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \cdot B & \rightarrowtail & G \end{array}$$

是幺半群范畴 Mon 中的一个拉回。显然， $(A, P_A) \leq (A \cdot B, (A \cdot B) \cap P_G)$， 并且 $(B, P_B) \leq (A \cdot B, (A \cdot B) \cap P_G)$（因为 $P_A = A \cap P_G$ 和 $P_B = B \cap P_G$） 。接下来考虑另一个正规子对象 (N, P_N)， 它是 (G, P_G) 的正规子对象，并且满足 $(A, P_A) \leq (N, P_N)$ 以及 $(B, P_B) \leq (N, P_N)$。那么当然有 $A \cdot B \leq N$，因为在 Grp 中 $A \cdot B = A \vee B$。因此， $(A \cdot B, (A \cdot B) \cap P_G) \leq (N, P_N)$。□

命题 2.5. 范畴 PreOrdGrp 中预序群的正规子对象构成的格 Norm(PreOrdGrp) 是模的：对于给定预序群 (G, P_G)在PreOrdGrp 中的任意三个正规子对象(A, P_A)、(B, P_B) 和(C, P_C)，若$(C, P_C) \leq (A, P_A)$，则有

$$(A, P_A) \wedge ((B, P_B) \vee (C, P_C)) = ((A, P_A) \wedge (B, P_B)) \vee (C, P_C).$$

证明. 我们已知 $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee C$，因为 G 的正规子群所成的格 Norm(Grp) 是模的。因此我们计算得

$$\begin{aligned} (A, P_A) \wedge ((B, P_B) \vee (C, P_C)) &= (A, P_A) \wedge (B \cdot C, (B \cdot C) \cap P_G) \\ &= (A \cap (B \cdot C), P_A \cap (B \cdot C) \cap P_G) \\ &= (A \cap (B \cdot C), A \cap P_G \cap (B \cdot C) \cap P_G) \\ &= (A \cap (B \cdot C), (A \cap (B \cdot C)) \cap P_G) \\ &= (A \wedge (B \vee C), (A \wedge (B \vee C)) \cap P_G) \\ &= ((A \wedge B) \vee C, ((A \wedge B) \vee C) \cap P_G) \\ &= (A \cap B) \cdot C, ((A \cap B) \cdot C) \cap P_G) \\ &= (A \cap B, P_A \cap P_B) \vee (C, P_C) \\ &= ((A, P_A) \wedge (B, P_B)) \vee (C, P_C), \end{aligned}$$

这里用到了这样一个事实：Norm(PreOrdGrp) 中两个正规子对象的下确界由它们的拉回给出。□

推论 2.6. 伽罗瓦结构(2.3)是可容许的。

证明. 这是命题 2.3 和命题 2.5 的直接推论。 □

我们将在定理 2.9 中证明， Γ_C-正规扩张由满足下列条件的正规满态射 $(f, f) : (G, P_G) \twoheadrightarrow (H, P_H)$ 给出：

(i) $f : G \twoheadrightarrow H$ 是一个 代数中心扩张，即 $\mathsf{Ker}(f) \subseteq Z(G)$；

(ii) 对于 (f, f)， 下列条件 $(\star)$ 成立：

$$(\star) \qquad \text{for any } (a, b, c) \in Eq(\bar{\eta}_G) \times_{P_G} Eq(\bar{f}),\ a - b + c \in P_G,$$

其中 $\bar{\eta}_G : P_G \twoheadrightarrow \eta_G(P_G)$ 是 $\eta_G : G \twoheadrightarrow G/[G, G]$ 在正锥上的限制 s.

以下两个引理将有助于建立这一刻画。

引理 2.7。 考虑以下拉回

$$\begin{array}{ccc} (P,P_P) & \xrightarrow{(p_2,\bar{p}_2)} & (G,P_G) \\ {\scriptstyle (p_1,\bar{p}_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f,\bar{f})} \\ (E,P_E) & \xrightarrow[(p,\bar{p})]{} & (H,P_H) \end{array}$$

在PreOrdGrp中，其中所有态射都是正则满态射。

(1) 若条件 $(\star)$ 对 (f,f)成立，则它对 $(p_1,\bar{p}_1)$也成立。

(2) 若 $(p,\bar{p})=(f,f)$，则条件 $(\star)$对 $(p_1,\bar{p}_1)$成立，当且仅当它对 (f,f)成立。

证明。 (1) 令 $((e_1,x_1),(e_2,x_2),(e_3,x_3)) \in Eq(\bar{\eta}_P) \times_{P_P} Eq(\bar{p}_1)$。那么，这意味着

- $e_i \in P_E$ 并且 $x_i \in P_G$ 对任意 $i=1$、2、3 均成立；
- $p(e_i)=f(x_i)$对任意 $i=1$、2、3 均成立；
- $\eta_P(e_1,x_1)=\eta_P(e_2,x_2)$，这意味着 $(e_1-e_2,x_1-x_2) \in \mathrm{Ker}(\eta_P)=[P,P]$，因此特别有 $x_1-x_2 \in [G,G]$；
- $p_1(e_2,x_2)=p_1(e_3,x_3)$，即 $e_2=e_3$。因此，
- $\eta_G(x_1)=\eta_G(x_2)$，即 $(x_1,x_2) \in Eq(\bar{\eta}_G)$；
- $f(x_2)=p(e_2)=p(e_3)=f(x_3)$，即 $(x_2,x_3) \in Eq(f)$。

换言之，$(x_1,x_2,x_3) \in Eq(\bar{\eta}_G) \times_{P_G} Eq(f)$。根据假设，元素 $x_1-x_2+x_3$ 随后属于 P_G，并且有

$$(e_1,x_1)-(e_2,x_2)+(e_3,x_3)=(e_1-e_2+e_3,x_1-x_2+x_3)=(e_1,x_1-x_2+x_3) \in P_P,$$

如所需。

(2) 由 (1) 可知，只需验证：若对于 $(p_1,\bar{p}_1)$，条件 $(\star)$ 成立（其中 $(p_1,\bar{p}_1)$ 是 (f,f) 的核对的第一投影），则它对于 (f,f) 也成立。

设 $(a,b,c) \in Eq(\bar{\eta}_G) \times_{P_G} Eq(f)$。特别地，这意味着 $a,b,c \in P_G$, $a-b \in \mathrm{Ker}(\eta_G)=[G,G]$，且 $f(b)=f(c)$。由 $a-b \in [G,G]$ 可得

$$(a,a)-(b,b)=(a-b,a-b)=([x_1,x_2]+[x_3,x_4]+\cdots+[x_{n-1},x_n],[x_1,x_2]+[x_3,x_4]+\cdots+[x_{n-1},x_n]),$$

对于某些合适的元素 $x_i \in G$（其中 $i \in \{1,\cdots,n\}$）。由此可得

$(a,a)-(b,b)=(x_1,x_1)+(x_2,x_2)-(x_1,x_1)-(x_2,x_2)+\cdots+(x_{n-1},x_{n-1})+(x_n,x_n)-(x_{n-1},x_{n-1})-(x_n,x_n)$，从而 $(a,a)-(b,b) \in [Eq(f)\ Eq(f)]=\mathrm{Ker}(\eta_{Eq(f)})$。这意味着 $((a,a),(b,b)) \in Eq(\bar{\eta}_{Eq(f)})$。另一方面，$p_1(b,b)=p_1(b,c)$，这意味着 $((b,b),(b,c)) \in Eq(\bar{p}_1)$，进而

$$((a,a),(b,b),(b,c)) \in Eq(\bar{\eta}_{Eq(f)}) \times_{Eq(\bar{f})} Eq(\bar{p}_1).$$

因此，根据假设，

$$(a,a-b+c)=(a,a)-(b,b)+(b,c) \in Eq(\bar{f}),$$

因此，特别是，$a-b+c \in P_G$。 □

引理 2.8。 对于 $(\star)$ *PreOrdGrp* 中的任意态射 $(f,f):(G,P_G) \to (H,P_H)$，其中PreOrdGrp{*style id='34'*}$(G,P_G) \in$ PreOrdAb，条件成立。

证明。 设 $(a,b,c) \in Eq(\bar{\eta}_G) \times_{P_G} Eq(f)$。由于 $G \in$阿贝尔群，我们有 $\eta_G=1_G$，进而有$a=\eta_G(a)=\eta_G(b)=b$。因此 $a-b+c=c \in P_G$。 □

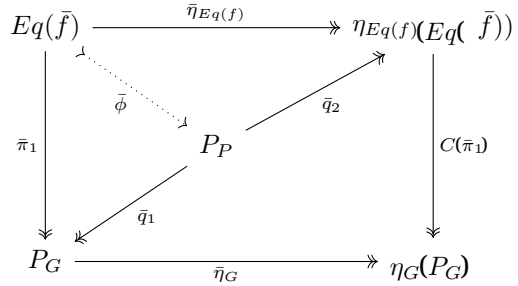
定理 2.9。 设 $(f,f):(G,P_G)(H,P_H)$是PreOrdGrp中的正则满态射。以下条件等价：

(1) (i) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq Z(G)$；(ii) 对于任意 $(a,b,c) \in Eq(\bar{\eta}_G) \times_{P_G} Eq(f)$，都有 $a-b+c \in P_G$.(2) (f,f)是一个$(\Gamma_C$-)正规扩张。

证明。• (1) ⇒ (2)：我们需要证明，核对 (f, f) 的第一投影 $(\pi_1, \bar{\pi}_1)$ 是一个 $(\Gamma_C$-)平凡扩张，也就是说，下面的方块

$$\begin{array}{ccc} Eq(f,\bar{f}) & \xrightarrow{(\eta_{Eq(f)},\bar{\eta}_{Eq(f)})} & C(Eq(f,\bar{f})) \\ \downarrow{\scriptstyle (\pi_1,\bar{\pi}_1)} & & \downarrow{\scriptstyle C(\pi_1,\bar{\pi}_1)=(C(\pi_1),C(\bar{\pi}_1))} \\ (G,P_G) & \xrightarrow[(\eta_G,\bar{\eta}_G)]{} & C(G,P_G) \end{array} \tag{2.6}$$

是预序群范畴 PreOrdGrp 中的一个拉回。首先，众所周知，(i) 蕴含其限制到群范畴 Grp 后是一个拉回（在 Grp 中） [7]。余下需要证明的是，图表中的外部方形



在 Mon 中是一个拉回。于是考虑 PreOrdGrp 中 $(\eta_G, \bar{\eta}_G)$ 与 $C(\pi_1, \bar{\pi}_1)$ 的拉回 (P, P_P)（略微滥用记号，将其记为 $(C(\pi_1)\ C(\bar{\pi}_1))$），其两个投影为 $(q_1, \bar{q}_1)$ 和 $(q_2, \bar{q}_2)$，以及到该拉回所诱导的态射 (ϕ, ϕ): $(Eq(f)\ Eq(f)) \to (P, P_P)$（如前所述，$\phi$ 是一个同构）。由于 ϕ 是一个同构，显然由下列方形的交换性可知 ϕ 是一个单态射：

$$\begin{array}{ccc} Eq(\bar{f}) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & P_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Eq(f) & \xrightarrow[\phi]{\cong} & P. \end{array}$$

因此，只需证明 ϕ 是满射。设 $(a, \eta_{Eq(f)}(b, c)) \in P_P$。换言之，$a$、$b$、$c \in P_G$ 满足 $f(b) = f(c)$，且 $\eta_G(a) = C(\bar{\pi}_1)(\eta_{Eq(f)}(b, c)) = (\eta_G \cdot \pi_1)(b, c) = \eta_G(b)$，也就是说，$(a, b, c) \in Eq(\bar{\eta}_G) \times_{P_G} Eq(f)$。由 (ii) 可得 $(a, a - b + c) \in Eq(f)$。我们将证明，该元素经 ϕ 映射后得到 $(a, \eta_{Eq(f)}(b, c))$。首先注意到，由于 $(a, b) \in Eq(\bar{\eta}_G)$，存在 $x_i \in G$ (对应于 $i \in \{1, \cdots, n\}$)，使得

$$a - b = x_1 + x_2 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_3 - x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_{n-1} - x_n.$$

这意味着

$$\begin{aligned} (a-b, a-b) =& (x_1, x_1) + (x_2, x_2) - (x_1, x_1) - (x_2, x_2) \\ &+ \cdots + (x_{n-1}, x_{n-1}) + (x_n, x_n) - (x_{n-1}, x_{n-1}) - (x_n, x_n), \end{aligned}$$

即 $(a - b, a - b) \in [Eq(f)\ Eq(f)] = \mathrm{Ker}(\eta_{Eq(f)})$。因此我们可以计算

$$\begin{aligned} \phi(a, a-b+c) &= (a, \eta_{Eq(f)}(a, a-b+c)) \\ &= (a, \eta_{Eq(f)}(a-b, a-b) + \eta_{Eq(f)}(b, c)) \\ &= (a, \eta_{Eq(f)}(b, c)), \end{aligned}$$

并据此推得同态 ϕ 是满射，因而是同构。这就证明了方形（2.6）是 PreOrdGrp 中的一个拉回，即（f, f）是一个（Γ_C-）正规扩张。

• (2) ⇒(1): 由于（$f, \bar{f}$）是一个（Γ_C-）正规扩张，下面两个方形因而是 PreOrdGrp 中的拉回:

$$\begin{array}{ccc} (Eq(f), Eq(\bar{f})) & \xrightarrow{(\pi_2,\bar{\pi}_2)} & (G, P_G) \\ {\scriptstyle (\pi_1,\bar{\pi}_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f,\bar{f})} \\ (G, P_G) & \xrightarrow[(f,\bar{f})]{} & (H, P_H) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (Eq(f), Eq(\bar{f})) & \xrightarrow{(\eta_{Eq(f)},\bar{\eta}_{Eq(f)})} & (ab(Eq(f)), \eta_{Eq(f)}(Eq(\bar{f}))) \\ {\scriptstyle (\pi_1,\bar{\pi}_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C(\pi_1,\bar{\pi}_1)} \\ (G, P_G) & \xrightarrow[(\eta_G,\bar{\eta}_G)]{} & (ab(G), \eta_G(P_G)). \end{array}$$

在第二个图表中， $C(\pi_1, \bar{\pi}_1) \in$ PreOrdAb。因此，根据引理 2.8，我们知道$C(\pi_1, \bar{\pi}_1)$ 满足条件（$\star$）。现在，利用引理 2.7(1) 处理第二个拉回，我们得到条件（$\star$）对（$\pi_1, \bar{\pi}_1$）成立。接下来，将引理 2.7(2) 应用于第一个拉回，¯即可得出条件（$\star$）对（f, f）成立，这对应于 (ii)。条件 (i) 直接源于以下事实：f: $G \twoheadrightarrow H$ 是相对于由阿贝尔化函子 ab: Grp $\to$Ab 所诱导的可容许伽罗瓦结构的正规扩张（见 [7, 10]）。□

3. 预序群范畴中的交换对象与阿贝尔对象

本节旨在刻画预序群范畴中的交换对象和阿贝尔对象。为方便读者，我们先回顾一些定义和结果（更多详情请参见 [2] ）。

具有有限极限的带基点范畴 $\mathscr{C}$称为幺元 的，当对任意对象 X、 $Y \in \mathscr{C}$，图表中的一对（l_X， r_Y）

$$X \xrightarrow{l_X} X \times Y \xleftarrow{r_Y} Y$$

是强满态，其中 $l_X = \langle 1_X、\ 0\rangle$ 以及 $r_Y = \langle 0、\ 1_Y\rangle$。

定义 3.1。 设 $\mathscr{C}$ 是一个幺元范畴。若存在一个态射 ϕ: $X \times X \to X$，使得下图交换，则称对象 $X \in \mathscr{C}$ 为交换 对象:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{l_X} & X \times X & \xleftarrow{r_X} & X \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \phi} & \swarrow & \\ & & X. & & \end{array}$$

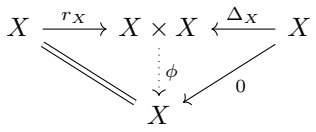
注意，由范畴 $\mathscr{C}$的幺元性可知，上述态射 ϕ 必定唯一。事实证明，幺元范畴中的任意交换对象都是一个（内部）交换幺半群。

命题 3.2。 [2] 设 $\mathscr{C}$ 是一个幺元范畴。其内部交换幺半群范畴 ComMon($\mathscr{C}$) 是 $\mathscr{C}$ 中交换对象构成的全子范畴。

定义 3.3。 [2] 设 $\mathscr{C}$ 是一个幺元范畴。若对象 $X \in \mathscr{C}$ 是交换对象，且相应的内部交换幺半群是内部阿贝尔群，则称其为阿贝尔对象。

以下 命题给出了幺元范畴中阿贝尔对象的一个有用刻画 :

命题 3.4. [2] 设 $\mathscr{C}$ 是一个幺元范畴。则 $\mathscr{C}$ 中的对象 X 是阿贝尔对象，当且仅当存在一个态射 ϕ: $X \times X \to X$ 使图表



交换，其中 $\Delta_X = \langle 1_X,\ 1_X\rangle$ 是 X的对角。

带基点范畴 $\mathscr{C}$ 具有有限极限；如果对于任意对象 $X \in \mathscr{C}$，图表中的有序对（$r_X,\ \Delta_X$）

$$X \xrightarrow{r_X} X \times X \xleftarrow{\Delta_X} X$$

是强满态的，其中 $r_X = \langle 0、\ 1_X\rangle$ 以及 $\Delta_X = \langle 1_X、\ 1_X\rangle$。

根据定义，任何阿贝尔对象都是交换对象，但反之一般并不成立。不过，在强幺半范畴的语境下，反之成立：

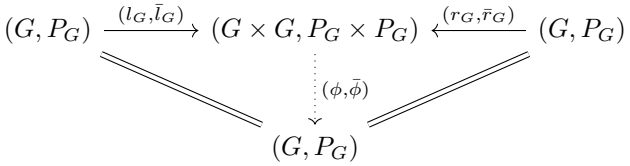
命题 3.5. [2] 在强幺半范畴中，任何交换对象都是阿贝尔对象 $t.$

正如 [4], 所证明的，预序群范畴 PreOrdGrp 是一个幺元范畴，因此交换对象和阿贝尔对象的概念在这一情形下都有意义。事实证明，PreOrdGrp 中的交换对象恰好就是预序阿贝尔群：

命题 3.6. 预序阿贝尔群范畴 PreOrdAb 与ComMon(PreOrdGrp) （PreOrdGrp 中的内部交换幺半群范畴）相同：

$$\mathsf{PreOrdAb} = \mathsf{ComMon}(\mathsf{PreOrdGrp}).$$

证明。 设 (G, P_G) 是 PreOrdGrp 中的一个交换对象。这意味着存在一个¯态射 (ϕ, ϕ): $(G, P_G) \times (G, P_G) \to (G, P_G)$，属于 PreOrdGrp，且使图表



交换。特别地，对于任意 $x \in G$ 和任意 $y \in G$,

$$\begin{aligned} x + y &= (\phi \cdot l_G)(x) + (\phi \cdot r_G)(y) \\ &= \phi(x, 0) + \phi(0, y) \\ &= \phi((x, 0) + (0, y)) \\ &= \phi(x, y) \\ &= \phi((0, y) + (x, 0)) \\ &= \phi(0, y) + \phi(x, 0) \\ &= (\phi \cdot r_G)(y) + (\phi \cdot l_G)(x) \\ &= y + x, \end{aligned}$$

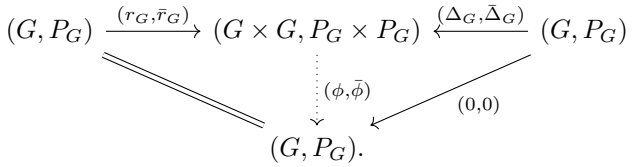
这意味着 G 是一个阿贝尔群，因此 $(G, P_G) \in$ 属于 PreOrdAb。

反过来，考虑 $(G, P_G) \in$PreOrdAb，并对任意的 $(x, y) \in G\times G$，定义所需的态射ϕ:

$G \times G \to G$如下： $\phi(x, y) = x + y$。容易验证， ϕ是一个群态射，且¯ $\phi \cdot l_G = 1_G$和 $\phi \cdot r_G = 1_G$。此外，显然， ϕ在 $P_G \times P_G$上的限制 ϕ 的取值均属于 P_G，因为 P_G是 G的子幺半群。因此，(ϕ, ϕ): $(G, P_G) \times (G, P_G) \to (G, P_G)$ 是 PreOrdGrp 中的一个态射，使上述图表在 PreOrdGrp 中交换。这意味着 (G, P_G) 是 PreOrdGrp 中的一个交换对象。由命题 3.2 即得所需结果。□

命题 3.7. PreOrdGrp 中的阿贝尔对象是预序群(G, P_G)，其中 G 是阿贝尔群，而 P_G 是 G的一个（正规）子群。

证明. 设 (G, P_G) 是 PreOrdGrp 中的一个阿贝尔对象。特别地，它是一个交换对象，因此$G \in$ Ab（由命题 3.6）。根据命题 3.4，还可知存在一个态射$\bar{}(\phi, \phi)$: $(G, P_G) \times (G, P_G) \to (G, P_G)$，使得下图交换:



$\bar{}\,\phi$ 到 $P_G \times P_G$ 的限制 ϕ 取值于 P_G。因此，对于任意 $x \in P_G$， $\phi(x, 0) \in P_G$。现在我们计算得

$$\phi(x,0) = \phi((0,-x) + (x,x)) = \phi(0,-x) + \phi(x,x) = (\phi \cdot r_G)(-x) + (\phi \cdot \Delta_G)(x) = -x + 0 = -x.$$

因此 ， $-x \in P_G$ 对于任意 $x \in P_G$，这证明了 P_G 是 G的子群，正如所需。

反过来，考虑任意预序阿贝尔群（G, P_G），其中正锥 P_G 是 G的子群。定义态射 ϕ: $G \times G \to G$，使得对任意（x, y） $\in G \times G$， $\phi(x, y) = -x + y$。容易看出， ϕ 是群态射，因为群 G 是阿贝尔群。此外，对于任意 $x \in G$,

- $(\phi \cdot r_G)(x) = \phi(0, x) = -0 + x = x$, so that $\phi \cdot r_G = 1_G$;
- $(\phi \cdot \Delta_G)(x) = \phi(x, x) = -x + x = 0$, so that $\phi \cdot \Delta_G = 0$.

$\bar{}$现在证明 ϕ 到 $P_G \times P_G$ 的限制 ϕ 取值于 P_G。令（x, y） $\in P_G \times P_G$。由于 P_G 是 G的子群，因此 $-x \in P_G$，进而 $-x + y = \phi(x, y) \in P_G$。因此，映射对$\bar{}(\phi, \phi) : (G, P_G) \times (G, P_G) \to (G, P_G)$ 是 PreOrdGrp 中的一个态射，使上方的图表交换。根据命题 3.4，我们得出（G, P_G）是 PreOrdGrp 中的阿贝尔对象。□

推论 3.8. 范畴 阿贝尔群(PreOrdGrp) （即PreOrdGrp 中的内部阿贝尔群所构成的范畴）与阿贝尔群范畴 Mon(阿贝尔群) 中的单态射所构成的范畴阿贝尔群 同构:

$$\mathsf{Ab}(\mathsf{PreOrdGrp}) = \mathsf{Mono}(\mathsf{Ab}).$$

证明. 这是命题 3.7 和定义 3.3 的直接推论。 □

命题 3.7 的另一个推论是以下注记，这一注记最初见于 [4]:

注 3.9. 预序群范畴 PreOrdGrp 不是强幺的。

证明. 这由命题 3.6、3.7 和 3.5 得出。例如，非负整数幺半群 $\mathbb{N}$ 到整数阿贝尔群 $\mathbb{Z}$ 的包含映射 $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ ，是 PreOrdGrp 中一个交换对象的例子，但它不是阿贝尔对象。□

推论 3.10. 范畴 PreOrdGrp 不具可减性（依照 [13] 中的定义）。

证明。 这由注 3.9 以及众所周知的事实可得，即

$$\text{strongly unital} = \text{unital} + \text{subtractive}$$

（例如，参见 [6],）。 □

现在我们将考察函子 F，它从预序群范畴 PreOrdGrp 映射到其子范畴 Mono(Ab)（阿贝尔对象构成的子范畴）。我们将其视为以下两个函子的复合

$$\mathsf{PreOrdGrp} \xrightarrow{C} \mathsf{PreOrdAb} \xrightarrow{A} \mathsf{Mono}(\mathsf{Ab})$$

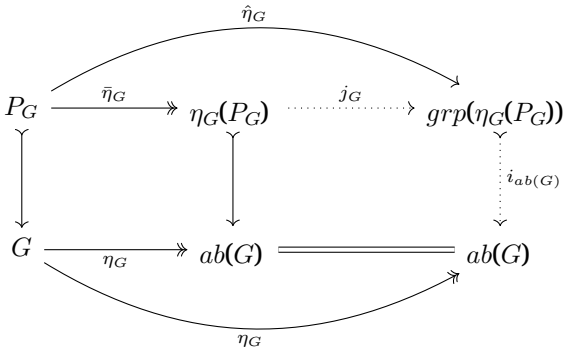
其中， C 的定义见第2节，而对于任意预序阿贝尔群（G， P_G）， A 定义为

$$A(G, P_G) = (G, grp(P_G))$$

其中 $grp(P_G)$ 为 幺半群 P_G 的群完备化。因此，对于任意 $(G, P_G) \in$ PreOrdGrp，

$$F(G, P_G) = (ab(G), grp(\eta_G(P_G))).$$

(3.1)



让我们回顾加法交换幺半群 M 的群完备化（也称为格罗滕迪克群）的一般构造。在笛卡尔积 $M \times M$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下：$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ 当且仅当存在元素 k 属于 M，使得 $m_1 + n_2 + k = m_2 + n_1 + k$。于是，$M$ 的格罗滕迪克群 $grp(M)$ 定义为商 $(M \times M)/\sim$，它是一个阿贝尔群。注意，存在一个幺半群同态j：$M \to grp(M)$，它将 M 中的任意元素 m 映射到等价类 $[(m, 0)]$（相对于 $\sim$）。这个同态满足泛性质：对于任意从 M 到阿贝尔群 X 的幺半群同态 ϕ: $M \to X$，存在唯一的群同态 ψ：$grp(M) \to X$，使得 $\phi = \psi \cdot j$。

由此泛性质可知，存在唯一的态射 $i_{ab(G)}$，使图表 (3.1) 交换。下面的引理表明，$grp(\eta_G(P_G))$ 还构成 $ab(G)$ 的一个子幺半群，因此 $(ab(G)\ grp(\eta_G(P_G)))$ 确实是一个预序群。

引理 3.11. 设 M 是阿贝尔群 X 的一个子幺半群，并且

$$Y = \{x \in X \mid x = a - b, \text{ for } a, b \in M\},$$

它是 X的一个（正规）子群。那么存在一个群同构

$$grp(M) \cong Y$$

这意味着 $grp(M)$ 是 X的一个（正规）子群。

证明。根据定义，$grp(M) = (M \times M)/\sim$。现在我们注意到，对于 (m_1, m_2)、$(n_1, n_2) \in M \times M$，$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ 当且仅当存在一个 k 属于 M，使得 $m_1 + n_2 + k = m_2 + n_1 + k$。我们可以在群 X 中看到这个等式，因此根据消去律，$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ 当且仅当 $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$，这等价于 $m_1 - m_2 = n_1 - n_2$。因此，群同态 Φ: $grp(M) \to Y$定义为：对任意属于 $grp(M)$ 的 $[(m_1, m_2)]$，$\Phi([(m_1, m_2)]) = m_1 - m_2$，是一个同构。□

4. 与群完备化函子对应的伽罗瓦理论

如果我们考察函子 A 在正锥上的限制（即交换幺半群的范畴 ComMon），那么便得到在 [15] 中研究的 群完备化函子 grp。本节将回顾该文中对我们工作有用的结果。

在其论文 [15], 中，Montoli、Rodelo 和 Van der Linden 研究了以下伴随

$$\mathsf{Mon} \underset{mon}{\overset{grp}{\rightleftarrows}} \mathsf{Grp} \quad (\perp)$$

介于 幺半群的范畴 Mon 与群的范畴 Grp 之间，其中右伴随 mon 是遗忘 l
函子，而 左伴随 grp 是群完备化函子。

文章 [15] 的重要部分致力于证明伽罗瓦结构 e

$$\Gamma_{grp} = (\mathsf{Mon}, \mathsf{Grp}, grp, mon, \mathscr{E}_{grp}, \mathscr{Z}_{grp})$$

当 $\mathscr{E}_{grp}$ 和 $\mathscr{Z}_{grp}$ 分别是 Mon 和 Grp 中满射同态的类时，该结构是可容许的。文章末尾给出了（Γ_{grp}-）正规扩张和（Γ_{grp}-）中心扩张的刻画：这两个概念都与我们现在要回顾的特殊齐次满射概念相同。

定义 4.1。 [3] 设 $f\colon X \to Y$ 是范畴 Mon 中的一个分裂满同态，其截面为 s，核为 k ：

$$K \overset{k}{\rightarrowtail} X \underset{s}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y. \tag{4.1}$$

当对于任意 $y \in Y$，由任意 $x \in K$ 定义的函数 $\mu_y\colon K \to f^{-1}(y)$ 和$\nu_y\colon K \to f^{-1}(y)$，分别为 $\mu_y(x) = x + s(y)$ 和 $\nu_y(x) = s(y) + x$，均为双射时，分裂满同态 (f, s) 称为齐次 。

定义 4.2。 [3] 设 $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ 是幺半群范畴 Mon 中的一个满同态。考虑其核对 $(Eq(f)\ \pi_1, \pi_2)$ 及其对角 Δ:

$$Eq(f) \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y.$$

态射 f 称为特殊齐次满射，当(π_1, Δ) 是一个齐次分裂满态射时。

特殊齐次满射具有拉回稳定性，并且还满足以下性质:

命题4.3。 [3] 在Mon 中考虑如下拉回，其中 f 和 f' 均为满射同态:

$$\begin{array}{ccc} P & \overset{f'}{\twoheadrightarrow} & Z \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \underset{f}{\twoheadrightarrow} & Y. \end{array}$$

如果 g' 是特殊齐次满射，那么 g也是。

现在回顾定理4.5，其中刻画了 [15]中讨论的（Γ_{grp}-）正规扩张和（Γ_{grp}-）中心扩张。

命题 4.4。 [15] 考虑(4.1)中的任意分裂满同态(f, s) 。则以下条件等价:

(1) f 是(Γ_{grp}-)平凡扩张。(2) f 是特殊齐次满射。

定理4.5。 [15] 设 $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ 是幺半群的一个满同态。则以下条件等价:

（1） f 是特殊齐次满射。（2） f 是（Γ_{grp}-）正规扩张。（3） f 是（Γ_{grp}-）中心扩张。

5. 函数 子 F: PreOrdGrp $\to$ Mono(Ab) 及其诱导的可容许伽罗瓦结构

命题 5.1。 存在一个伴随

$$\mathsf{PreOrdGrp} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{Mono(Ab)} \tag{5.1}$$

预序群范畴 PreOrdGrp 与其阿贝尔对象全子范畴 Mono(Ab)之间，其中右伴随 U 是包含函子，左伴随 F 的定义如第 *3* 节所述：对于任意 $(G, P_G) \in$ PreOrdGrp,

$$F(G, P_G) = (ab(G) = G/[G, G], grp(\eta_G(P_G))).$$

证明。 伴随 (5.1) 可视为以下两个伴随的复合

$$\mathsf{PreOrdGrp} \underset{V}{\overset{C}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{PreOrdAb} \underset{W}{\overset{A}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{Mono(Ab)}$$

其中，左边的伴随已在第2节中研究过，而右边伴随（限制到正锥上的情形）已在第4节中讨论过。注意，复合伴随的单位的（G, P_G）分量由态射（η_G, $\hat{}\eta_G$）给出（采用图表 (3.1) 中的记号）。□

注5.2。 对于给定的预序群（G, P_G），伴随 (5.1) 的单位的（G, P_G）分量（η_G, $\hat{}\eta_G$）一般不是正则满态射。态射（η_G, $\hat{}\eta_G$）只是一个满态射，因为 η_G 是满射，而 $\hat{}\eta_G$ 不一定是满射。还要注意，态射 $j_G\colon \eta_G(P_G) \to grp(\eta_G(P_G))$ 是一个单态射，因为 $\eta_G(P_G)$ 是满足消去律的交换幺半群。

命题5.3。 若 $\mathscr{E}$ 表示PreOrdGrp 中正则满态射的类，而 $\mathscr{Z}$ 表示Mono(阿贝尔群)中的正则满态射的类，则

$$\Gamma = (\mathsf{PreOrdGrp}, \mathsf{Mono(Ab)}, F, U, \mathscr{E}, \mathscr{Z}) \tag{5.2}$$

是一个伽罗瓦结构。

由于伽罗瓦结构 (5.2) 是由两个“相容”且可容许的伽罗瓦结构复合而成，我们可以利用以下已知结果来证明其可容许性（例如，在 [5], 中证明引理 6.2 时所给出的论证，在我们的情形下仍然适用）。

命题 5.4。 考虑以下一串伴随

$$\mathscr{C} \underset{L}{\overset{J}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathscr{B} \underset{H}{\overset{I}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathscr{A} \tag{5.3}$$

其中 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的全子范畴， $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{C}$的全子范畴。此外，假设

- $\Gamma_J = (\mathscr{C}, \mathscr{B}, J, L, \mathscr{E}_J, \mathscr{Z}_J)$;
- $\Gamma_I = (\mathscr{B}, \mathscr{A}, I, H, \mathscr{E}_I, \mathscr{Z}_I)$

是可容许伽罗瓦结构，并且按照以下意义“相容”： $J(\mathscr{E}_J) \subset \mathscr{E}_I$且 $H(\mathscr{Z}_I) \subset \mathscr{Z}_J$。那么，这两个可容许伽罗瓦结构的复合

$$\Gamma = (\mathscr{C}, \mathscr{A}, I \cdot J, L \cdot H, \mathscr{E}, \mathscr{Z}),$$

其中 $\mathscr{E} = \mathscr{E}_J$ 和 $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_I$构成一个可容许伽罗瓦结构。

推论5.5。 伽罗瓦结构 (5.2)是可容许的。

6. Characterization of Γ-normal and Γ-central extensions

本节致力于研究 Γ-正规扩张和 Γ-中心扩张，它们将在定理 6.3 中得到刻画。证明该结果需要以下两个引理。

引理 6.1。 考虑如 (5.3) 所示的一串伴随，并假设我们有命题 *5.4* 中所述的可容许伽罗瓦结构 Γ_J 和 Γ_I 。此外，假设伴随 $J \dashv L$ 的单位的每个分量都是下降态射。那么，对于 $\mathscr{C}$中的一个扩张 $f\colon X \to Y$，以下条件等价:

(1) f 是命题 *5.4* 中所述可容许伽罗瓦结构 Γ 下的 Γ-平凡扩张。(2) f是 Γ_J-平凡扩张，并且 $J(f)$ 是 Γ_I- 平凡扩张。

Proof。 • (1) ⇒(2): 根据假设，该方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & (I\cdot J)(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (I\cdot J)(f)} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & (I\cdot J)(Y) \end{array}$$

i是 $\mathscr{C}$ 中的一个拉回。注意，这个拉回可分解为以下两个方块：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta^J_X} & J(X) & \xrightarrow{\eta^I_{J(X)}} & (I\cdot J)(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J(f)} & & \downarrow{\scriptstyle (I\cdot J)(f)} \\ Y & \xrightarrow[\eta^J_Y]{} & J(Y) & \xrightarrow[\eta^I_{J(Y)}]{} & (I\cdot J)(Y) \end{array} \tag{6.1}$$

（其中 η^J 和 η^I 分别是伴随 $J \dashv L$ 和 $I \dashv H$ 的单位）。等价地， f 是 Γ-平凡扩张这一事实，也可以表述为

$$f = (L\cdot H)^Y(g)$$

对于某个扩张 g: $A \to (I\cdot J)(Y)$，其中对象属于 $\mathscr{A}$。现在，

$$(L\cdot H)^Y(g) = L^Y(H^{J(Y)}(g)),$$

从而 $f = L^Y(\bar{g})$，其中 $\bar{g} = H^{J(Y)}(g)$ 是 $\mathscr{B}$ 中陪域为 $J(Y)$ 的一个扩张。这恰好意味着 f 是 Γ_J-平凡扩张，因此在图表 (6.1) 中，左侧方块和外部矩形都是拉回。由于 η^J_Y 是下降态射，由此可知右侧方块也是拉回，这意味着 $J(f)$ 是 Γ_I-平凡扩张。

• (2) ⇒(1)：陈述 (2) 意味着图表 (6.1) 中的两个方块都是拉回，因此外部矩形也是拉回，且 f 是 Γ-平凡扩张。□

引理 6.2。 设 (f, f): $(G, P_G) \twoheadrightarrow (H, P_H)$ 是 PreOrdGrp 中的正则满态射。那么 f 是 Mon 中的特殊齐次满射，当且仅当，对于任意 $(x, y) \in Eq(f)$， $y - x \in P_G$ 且 $-x + y \in P_G$。

证明。 满同态 $\bar{f}$ 是特殊齐次的，当且仅当 $Eq(\bar{f}) \underset{\bar{\Delta}}{\overset{\bar{\pi}_1}{\leftleftarrows}} P_G$ 是齐次分裂满态射（见定义 4.2）。这当且仅当，对于任意 $x \in P_G$，以下函数

$$\mu_x \colon \mathsf{Ker}(\bar{\pi}_1) \cong \mathsf{Ker}(\bar{f}) \to \bar{\pi}_1^{-1}(x); (0, a) \mapsto (0, a) + \bar{\Delta}(x) = (x, a + x)$$

and

$$\nu_x \colon \mathsf{Ker}(\bar{\pi}_1) \cong \mathsf{Ker}(\bar{f}) \to \bar{\pi}_1^{-1}(x); (0, b) \mapsto \bar{\Delta}(x) + (0, b) = (x, x + b)$$

是双射。这等价于：对于任意 $(x, y) \in Eq(f)$，存在唯一的 $a \in \mathsf{Ker}(f)$ 和唯一的 $b \in \mathsf{Ker}(f)$，使得 $(x, y) = (x, a+x)$ 且 $(x, y) = (x, x+b)$。这个条件还等价于要求存在唯一的 $a \in \mathsf{Ker}(f) \cap P_G$ 和唯一的 $b \in \mathsf{Ker}(f) \cap P_G$，使得 $y = a+x$ 且 $y = x+b$，从而 a 和 b 是 G 的元素，形式为 $a = y - x$ 和 $b = -x + y$。因此，对于任意 $(x, y) \in Eq(f)$， $y - x \in P_G$ 且 $-x + y \in P_G$，当且仅当 f 满同态是特殊齐次的。□

定理 6.3。 设 (f, f): $(G, P_G) \twoheadrightarrow (H, P_H)$ 是 PreOrdGrp 中的正则满态射。那么以下条件等价：

(1) (a) $\mathsf{Ker}(f) \subseteq Z(G)$; (b) f 是 Mon 中的特殊齐次满射。(2) (f, f) 是一个(Γ-)正规扩张。(3) (f, f) 是一个(Γ-)中心扩张。

证明。• (1) ⇒ (2)：首先注意到，条件 (b) 意味着，对于任意 $(a,b,c) \in Eq(\bar{\eta}_G) \times_{P_G} Eq(f)$，都有 $a - b + c \in P_G$。事实上，根据引理 6.2，我们知道 $-b + c \in P_G$，因为 $(b,c) \in Eq(f)$，于是 $a - b + c \in P_G$，因为 $a \in P_G$，且 P_G 是 G的子幺半群。因此，条件 (b) 蕴含定理 2.9 的条件 (ii)；再根据条件 (a) 的有效性可知，(f,f) 是一个 Γ_C-正规扩张。换言之，$(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 的核对的第一投影 $Eq(f) \;\; Eq(f)) \twoheadrightarrow (Eq(f)$ (G,P_G) 是一个 Γ_C-平凡扩张。根据引理 6.1，现只需证明 $C(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 是一个 Γ_A-平凡扩张（其中 Γ_A 表示与反射 $A \dashv W$相关联的可容许伽罗瓦结构）。根据条件 (b)，f 是特殊齐次满射；由拉回稳定性可知，$\bar{\pi}_1$ 同样是特殊齐次满射。根据命题4.3，这进一步意味着，将 $C(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 限制到正锥上所得的 $C(\bar{\pi}_1)$ 是特殊齐次满射。事实上，该方形

$$\begin{array}{ccc} Eq(\bar{f}) & \xrightarrow{\bar{\eta}_{Eq(f)}} & \eta_{Eq(f)}(Eq(\bar{f})) \\ {\scriptstyle \bar{\pi}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C(\bar{\pi}_1)} \\ P_G & \xrightarrow[\bar{\eta}_G]{} & \eta_G(P_G) \end{array}$$

是 Mon 中正则满态射的拉回，因为 $(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 是一个 Γ_C-平凡扩张。因此，$C(\bar{\pi}_1)$ 是一个分裂满同态，同时也是特殊齐次满射，继而由命题 4.4 可知，它是一个 Γ_{grp}-平凡扩张。这意味着下图

$$\begin{array}{ccc} \eta_{Eq(f)}(Eq(\bar{f})) & \xrightarrow{j_{Eq(f)}} & grp(\eta_{Eq(f)}(Eq(\bar{f}))) \\ {\scriptstyle C(\bar{\pi}_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle grp(C(\bar{\pi}_1))} \\ \eta_G(P_G) & \xrightarrow[j_G]{} & grp(\eta_G(P_G)) \end{array}$$

是一个拉回 交换幺半群范畴 ComMon 中的拉回。因此，下图

$$\begin{array}{ccc} (ab(Eq(f)), \eta_{Eq(f)}(Eq(\bar{f}))) & \xrightarrow{(1,j_{Eq(f)})} & (ab(Eq(f)), grp(\eta_{Eq(f)}(Eq(\bar{f})))) \\ {\scriptstyle C(\pi_1,\bar{\pi}_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (A\cdot C)(\pi_1,\bar{\pi}_1)=F(\pi_1,\bar{\pi}_1)} \\ (ab(G), \eta_G(P_G)) & \xrightarrow[(1,j_G)]{} & (ab(G), grp(\eta_G(P_G))) \end{array}$$

是预序阿贝尔群范畴 PreOrdAb 中的拉回，这就证明了 $C(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 是一个 Γ_A-平凡扩张。由引理 6.1，我们得出 $(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 是一个 Γ-平凡扩张，这等价于说 (f,f) 是一个 Γ-正规扩张。

• (2) ⇒(3)：根据定义，任何正规扩张都是中心的。
• (3) ⇒(1)：根据（Γ-）中心扩张的定义，存在一个有效下降态射（即正则满态射）$(p,\bar{p})$：$(E, P_E) \; (H,P_H)$，位于 PreOrdGrp 中，使得沿着 $(p,\bar{p})$ 对 (f,f) 作拉回所得的 $(p,\bar{p})^*(f,f)$（我们将其记为 $(\pi_1,\bar{\pi}_1)$）是一个 Γ-平凡扩张。利用引理 6.1，这意味着 (α) $(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 是一个 Γ_C-平凡扩张，而 (β) $C(\pi_1,\bar{\pi}_1)$ 是一个 Γ_A-平凡扩张。第一个陈述（α）当然意味着 (f,f) 是一个 Γ_C-中心扩张。特别地，f是代数中心的，即 $f\colon G \twoheadrightarrow H$ 满足条件 (a)。现在，第二个陈述（β）意味着该方格

$$\begin{array}{ccc} (ab(P),\eta_P(P_P)) & \xrightarrowtail{(1,j_P)} & (ab(P),grp(\eta_P(P_P))) \\ \downarrow{\scriptstyle (C(\pi_1),C(\bar{\pi}_1))=C(\pi_1,\bar{\pi}_1)} & & \downarrow{\scriptstyle (A\cdot C)(\pi_1,\bar{\pi}_1)=F(\pi_1,\bar{\pi}_1)} \\ (ab(E),\eta_E(P_E)) & \xrightarrowtail[(1,j_E)]{} & (ab(E),grp(\eta_E(P_E))) \end{array}$$

（其中 $P = E \times_H G$ 和 $P_P = P_E \times_{P_H} P_G$）是 PreOrdAb 中的一个拉回。特别地，其对 ComMon 的限制

$$\begin{array}{ccc} \eta_P(P_P) & \xrightarrowtail{j_P} & grp(\eta_P(P_P)) \\ \downarrow{\scriptstyle C(\bar{\pi}_1)} & & \downarrow{\scriptstyle grp(C(\bar{\pi}_1))} \\ \eta_E(P_E) & \xrightarrowtail[j_E]{} & grp(\eta_E(P_E)) \end{array}$$

是一个拉回。这意味着 $C(\bar{\pi}_1)$ 是一个 Γ_{grp}-平凡扩张，继而是一个 Γ_{grp}-正规扩张。事实上，由于 Γ_{grp} 是可容许的，任意 Γ_{grp}-平凡扩张都是 Γ_{grp}-正规的。借助定理4.5，我们可以得出 $C(\bar{\pi}_1)$ 是一个特殊齐次满射。由于特殊齐次满射具有拉回稳定性，因此可推出 $\bar{\pi}_1$ 也具有这一性质。事实上，陈述（α）意味着（除其他事项外）以下方块

$$\begin{array}{ccc} P_P & \xrightarrow{\bar{\eta}_P} & \eta_P(P_P) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\pi}_1} & & \downarrow{\scriptstyle C(\bar{\pi}_1)} \\ P_E & \xrightarrow[\bar{\eta}_E]{} & \eta_E(P_E) \end{array}$$

是 Mon 中的一个拉回。现在将命题4.3应用于以下正则满态射的拉回

$$\begin{array}{ccc} P_P & \xrightarrow{\bar{\pi}_2} & P_G \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\pi}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ P_E & \xrightarrow[\bar{p}]{} & P_H, \end{array}$$

我们得到 f 是一个特殊齐次满射，即条件（b）得到满足。证明至此完成。□

参考文献

[1] M. Barr, 《正合范畴》, 《正合范畴与层范畴》, 《数学讲义》第236卷, 施普林格出版社, 1971 ↑4 。F. Borceux 和 D. Bourn, 《*Mal'cev*、原型模、同调与半阿贝尔范畴》, 《数学及其应用》566, Kluwer, 2004。 ↑2, 10, 11[2] [3] D. Bourn、N. Martins-Ferreira、A. Montoli 和 M. Sobral, 《幺半群与半环中的*Schreier*分裂满态射》, 《数学文本》（B辑）, 第45, 2014 ↑2 14 科英布拉大学数学系, 。, M. M. Clementino、N. Martins-Ferreira 和 A. Montoli, 《预序群的范畴行为》, 《纯粹与应用代数杂志》223 2019 4226 4245 ↑1 4 11 12 ( ), −。。。, M. Duckerts、T. Everaert 和 M. Gran, 《用交换子和闭包算子描述基本群》, 《纯粹与应用代数杂志》216 2012 1837 1851 ↑2 15 ( ), −。。M. Gran 和 D. Rodelo, 《*Jonsson-Tarski*簇与减法簇的刻画》, Diagrammes, 第S 67 68 2012 101 115 ↑12 卷- ( ), −。G. Janelidze, 《范畴中的纯伽罗瓦理论》, 《代数杂志》132, 第2期（1990）, 270–286。 ↑1, 2, 9, 10[4] [5] [6] [7] [8] ———, 范畴伽罗瓦理论：修订及近期若干进展, 《伽罗瓦连接及其应用》, 《数学及其应用》, 第565卷, Kluwer学术出版社, 2004。 ↑2 [9] ———, 16 2008 653 668 ↑2 伽罗瓦群、抽象交换子与霍普夫公式, 《应用范畴结构》 ( ), −。G. Janelidze 和 G. M. Kelly, 《伽罗瓦理论与中心扩张的一般概念》, 《纯粹与应用代数杂志》97（1994）, 135–161。 ↑2, 6, 10 [10]

[11] G. Janelidze、M. Sobral 和 W. Tholen，《超越*Barr*正合性：有效下降态射，载于：*M.C. Pedicchio*、*W. Tholen*（编），《范畴基础》，载于：《数学及其应用百科全书》》，剑桥大学出版社（ 2004 359 405 ↑3 5），–。G. Janelidze 和 W. Tholen，《下降的若干方面，*II*》，《应用范畴结构》 [12] 5 1997 229 248 ↑3 ( )，–。Z. Janelidze，《可减性范畴》，《应用范畴结构》（），–。[13] 13 2005 343 350 ↑12 [14] ——— 3×3 ，尖点子对象函子、引理与跨度的可减性，《理论与应用范畴》23（11）（ 2010 221 242 ↑1），–。A. Montoli、D. Rodelo 和 T. Van der Linden，《幺半群的伽罗瓦理论》，《理论与应用范畴》29，第7期（2014），198–214。 [15] ↑2，13，14

电子邮箱: marino.gran@uclouvain.be电子邮箱: aline.michel@uclouvain.be

大学 数学与物理研究所，回旋加速器路 2号 ，1348 新鲁汶，比利时