Getzler 重标度的伪微分解析视角

Georges HABIB [ab] 和 *Sylvie PAYCHA* [c]

a) 黎巴嫩大学科学学院第二系数学系，邮政信箱 *90656*，*Fanar-Matn*，黎巴嫩电子邮箱： *ghabib@ul.edu.lb*

b) 洛林大学 ´法国国家科学研究中心、*IECL*网址：
https://iecl.univ-lorraine.fr/membre-iecl/habib-georges/
c) 数学研究所，波茨坦大学 ¨， ¨波茨坦校区 *Golm*，*9*号楼，*Karl-Liebknecht-Str. 24-25*，*14476* 波茨坦，德国电子邮箱：*paycha@math.uni-potsdam.de*网址：
https://www.math.uni-potsdam.de/~paycha/paycha/Home.html

收稿日期：2023年3月8日，定稿日期：2024年1月11日；在线发表：2024年1月30日
https://doi.org/10.3842/SIGMA.2024.010

摘要。受 Gilkey不变性理论、Getzler缩放方法以及 Scott通过 Wodzicki 留数研究指标的方法启发，我们为一类作用于偶维流形上旋量丛截面的微分算子的对数的 $\mathbb{Z}_2$-分次 Wodzicki 留数给出了一个局部化公式。该公式用另一种局部密度表示，该局部密度由作用于微分形式的重标度微分算子之极限的对数的符号构造而成。将其应用于狄拉克算子平方的复幂时，该公式便将狄拉克算子的指标表示为一种局部密度，而该密度涉及其平方的 Getzler 重标度极限的对数。

关键词： 指标；狄拉克算子；Wodzicki 留数；旋量丛

*2020*年数学主题分类： 58J40;47A53; 15A66

谨以此文献给 *J.P. Bourguignon*，祝贺他 *75* 岁生日

1 引言

在闭黎曼流形 (M^n, g) 上，作用于有限秩向量丛 E over M 的光滑截面上的经典伪微分算子代数 $\Psi_{\rm cl}(M, E)$ 存在唯一的（相差一个乘法因子）迹，称为 Wodzicki 留数或非交换留数，它由如下定义的留数密度构造而成。给定 Q in $\Psi_{\rm cl}(M, E)$， Q 的留数是留数密度 $\omega_Q^{\rm Res}(x)$ 在 M 上的积分：$= \operatorname{res}(\sigma(Q)(x,\cdot))\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$，定义见 (2.1)，其中

$$\operatorname{res}(\sigma(Q)(x,\cdot)) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|=1} \operatorname{tr}^E(\sigma_{-n}(Q)(x,\xi))\mathrm{d}_S\xi.$$

这里， n 是 M的维数，tr^E 表示 $\operatorname{End}(E)$ 上的纤维迹，(x,ξ) 是 T^*M中的一个元素，而 $\sigma_{-n}(Q)(x,\xi)$ 是符号在 (x,ξ) 处的第 $-n$ 个齐次部分。Wodzicki 留数的适用范围不仅限于经典伪微分算子，也扩展到对数算子 $\log_\theta(Q)$

本文是“致敬 Jean-Pierre Bourguignon 75 岁生日：数学物理启发的微分几何”专题的投稿。专题全集可见 https://www.emis.de/journals/SIGMA/Bourguignon.html

arXiv:2303.04013v2 [math.DG] 1 Feb 2024

（精确定义见附录 B ）的伪微分算子 Q，其 Agmon 角为 θ（见（2.11））， 由此得到对数留数$\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(Q)}(x)$。Wodzicki 留数具有局部性，因为它可以表示为 M 上的积分，积分中的体积形式涉及符号的$(-n)$次齐次分量。因此，狄拉克算子的指标可以用留数表示也就不足为奇了。对于一个 $\mathbb{Z}_2$分次向量丛 $E = E^+ \oplus E^-$，带有形式伴随算子 $\not{D}^- = \left(\not{D}^+\right)^*$的椭圆奇算子 $\not{D}^+$: $C^\infty(M, E^+) \to C^\infty(M, E^-)$ 的指标可写为 [16]

$$\mathrm{Index}\left(\not{D}^+\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{sres}\left(\log_\theta\left(\not{D}^2\right)\right) = -\frac{1}{2}\int_M \omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(\not{D}^2)}(x),$$

其中 $\not{D} := \begin{bmatrix} 0 & \not{D}^- \\ \not{D}^+ & 0 \end{bmatrix}$ 作用于 $E^+ \oplus E^-$，因此 $\not{D}^2 = \not{D}^-\not{D}^+ \oplus \not{D}^+\not{D}^-$ 和 $\theta = \pi$。分次留数“sres”的定义与留数相同，只需将 $\mathrm{End}(E)$ 上的纤维迹替换为 $\mathbb{Z}_2$-分次迹，并令 $\omega^{\mathrm{sRes}}{}_{\text{对数}_\theta\left(\not{D}^2\right)}(x) := \mathrm{sres}\left(\sigma\left(\log_\theta\left(\not{D}^2\right)\right)(x, \cdot)\right)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$。

受 [16]，中所采用方法的启发，我们从对数 Wodzicki 留数的角度，重新审视指标理论背景下的 Geztler 重标度。对于一类作用于旋量的微分算子（其中包括 $\not{D}^2$），我们将点 p 处的对数留数密度表示为 M 上的另一局部密度 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{sres}}\ \log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{lim}})(x)$（见公式 (1.1)），该密度涉及算子族 $\tilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$在参数 λ 趋于零时的极限 $\tilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{lim}}$；此算子族由原算子在点 p 处进行重标度而得（见方程（6.1））。从这个意义上说，当 λ 趋于零时，方程 (1.3) 可视为点 p处对数留数的局部化公式。为此，我们首先选取一类作用于向量丛 E的光滑截面上的微分算子，并称其相对于度量 g 是几何的；在某个局部平凡化下，其系数是几何截面（定义 5.8）。我们考察度量 g 的标架场射流的多项式（定义 5.3），并受 Gilkey 启发，定义它们的 Gilkey 阶（在点 p处）（见方程（5.5））为这些射流的阶。若一个微分算子的系数是几何多项式，且其 Gilkey 阶满足涉及算子阶的相容条件（见方程（5.8）），则称该算子为几何的。几何微分算子在沿局部测地线的局部收缩（$\mathfrak{f}_\lambda$）$_{\lambda\in[0,1]}$ 下具有良好的变换性质，这些局部测地线由指数测地法坐标定义（定义见方程（2.5））。具体而言，相对于 g 的几何微分算子会变换为相对于 g_λ 的几何微分算子（命题 5.15），其中 $g_\lambda = \lambda^{-2}\mathfrak{f}^*_\lambda g$。这个变换后的度量可视为变形流形 $\mathbb{M}$ 在 p处沿法锥变形后，经典范投影 $\hat{}\pi$: $\mathbb{M} \to M$ 拉回所得的度量，见方程（4.3）。

我们首先考虑丛 $E = \Lambda T^*M$。对于一个作用于微分形式的微分算子 Pin $\Psi_{\mathrm{cl}}(M, \Lambda T^*M)$, 我们定义一族算子 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda := \lambda^{\mathrm{ord}(P)}U^\sharp_\lambda \mathfrak{f}^\sharp_\lambda P$（见（6.1）），其记法借鉴自 [18],，而这些算子是由前面提到的收缩 $\mathfrak{f}_\lambda$ 与所谓的作用于张量的 Getzler映射 U_λ 共同作用得到的，见定义 3.1。若一个几何微分算子 P 在 $\lambda \to 0$ 时， $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$存在极限 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{lim}}$（定义 6.1），则称其为可重标度的。在命题 6.6 中，我们给出了 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M, \Lambda T^*M)$ 中几何微分算子可重标度的充要条件，并证明极限 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{lim}}$ 的系数是黎曼曲率张量各阶喷流的多项式表达式。

第一个结果是局部化公式（1.2），适用于作用在微分形式上的微分算子 P。该公式涉及一个局部 n-次数微分形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_Q(x)$，其灵感来自 Scott的证明（指标定理[16, 第 3.5 节）。3] 并定义于算子 Q 在 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M, \Lambda T^*M)$ 中的情形，如下所示（见公式（3.5））：

$$\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_Q(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{S^*_xU_p}[\sigma_{-n}(Q)(x,\xi)\mathbf{1}_x]_{[n]}\,\mathrm{d}_S\xi. \tag{1.1}$$

这里， U_p 是 M中点 p 的局部指数邻域， $S^*_xU_p$ 是点 x处余切空间 $T^*_xU_p$中的单位球面，而被积项是微分形式的 n次部分

$\sigma_{-n}(Q)(x,\xi)\mathbf{1}_{x\circ}$。当限制在 Clifford映射像空间中的算子时，局部形式 $\widetilde{\omega}_Q^{\mathrm{Res}}$与 Wodzicki 留数密度成正比（推论 3.10），因此成为一个整体形式。此外，它还扩展到微分算子 P（其 Agmon 角为 θ）的对数伪微分算子 $Q=\log_\theta(P)$。在命题 3.6中，我们证明，点 $\mathfrak{f}_\lambda(x)$处的局部 n 形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}$是点 x 处拉回算子 $U_\lambda^\sharp\mathfrak{f}_\lambda^\sharp(\log_\theta(P))$ 所对应的局部 n 形式。此外，若 P 可重标度，则令 λ 趋于零取极限，可得局部化公式

$$\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}(p)=\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})}(x),\qquad \forall x\in U_p. \tag{1.2}$$

这个公式可用于 Hodge拉普拉斯算子；它是一个几何的、可重标度的算子（参见例 6.8）。

接下来，我们考虑旋量模 $E=\Sigma M$ 的情形，其中 M 是一个偶数维自旋流形。为了定义 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\Sigma M)$ 中几何微分算子的可重标度性，我们使用恒等映射 $\mathrm{C}\ell(TM)\otimes\mathbb{C}\simeq\mathrm{End}(\Sigma M)$，以及 Clifford映射 $c^g\colon \mathrm{C}\ell(TM)\longrightarrow\mathrm{End}(\Lambda T^*M)$（参见 (C.1)）。该映射将切丛上的 Clifford 代数 $\mathrm{C}\ell(TM)$ 中的元素映射为 ΛT^*M 的自同态。若 P 是 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\Sigma M)$ 中的几何微分算子，并且通过对微分算子 P 的系数应用 c^g，得到公式 (3.11) 中定义的 $c^g(P)$，且后者在 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\Lambda T^*M)$ 中可重标度，则称该几何微分算子可重标度。我们还给出了 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\Sigma M)$ 中几何微分算子可重标度的充要条件，参见命题 6.9。[1]

由命题 3.8 可知，对于具有 Agmon 角 $P\in\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\Sigma M)$ 的微分算子 θ，形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(c^g(P))}$ 定义了一个全局密度。在推论 6.10中，我们由上述局部化公式（1.2）推得适用于 微分算子空间 $\mathrm{Diff}(M,\Sigma M)$ 中算子的第二个局部化公式：

$$\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(P)}(p)=(-2\mathrm{i})^{n/2}\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})}(x), \tag{1.3}$$

其中，P是微分算子空间 $\mathrm{Diff}(M,\Sigma M)$ 中一个具有 Agmon 角 θ、且关于 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\Sigma M=\Sigma^+M\oplus\Sigma^-M$ 为偶的可缩放几何微分算子。该公式将点 p 处的留数密度 $\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(P)}(p)$ 表示为重标度算子 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$ 的极限 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$ 的局部密度 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}{}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})}(x)$。

将局部化公式（1.3）应用于狄拉克算子的平方（见命题 7.1），可确认第 [16, 3.5.3 节3]（(3.5.3.12) 与 (3.5.3.40) 的对应关系）中的结果；已证明狄拉克算子的平方是一个可缩放几何微分算子。尽管预期极限算子 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$ 的形式会比原算子简单（狄拉克算子的情形正是如此），计算 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}{}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})}(x)$ 仍然颇具挑战，因为这涉及其第 $(-n)$ 阶齐次符号。

2 经典伪微分算子的 Wodzicki 留数密度

本节回顾作用于给定向量丛截面上的经典伪微分算子的 Wodzicki 留数定义。我们回顾 Wodzicki 留数在局部压缩映射下的协变性（见命题 2.3）。我们还回顾具有适当谱性质的经典伪微分算子的对数如何扩展出 Wodzicki 留数，并将这一扩展称为对数 Wodzicki 留数。对于平凡

[1]在本文这一部分中，我们考虑偶维自旋流形；不过，我们的研究也适用于具有自旋^c 结构的流形。事实上，该构造依赖于如下同一$\ell(TM)\otimes\mathbb{C}\simeq\mathrm{End}(\Sigma M)$，并且这一同一可以推广到具有自旋^c 结构的流形；在这种情况下，我们有如下同一$\ell(TM)\otimes\mathbb{C}\simeq\mathrm{End}(E)$[4, 定理 2。13] 其中 E 某个向量丛与自旋丛中的旋量丛同构^c。为简单起见，我们仅考虑自旋流形。

向量丛，我们给出标量微分算子的对数留数局部化公式。该公式将微分算子 p 在点 P处的对数留数密度，与同一算子在 x 附近小邻域内任意一点 p 处局部化后的对数留数密度联系起来（见命题 2.5）。

2.1 经典伪微分算子的 Wodzicki 留数

设 (E,π,M) 是 M 上的一个向量丛，其中 M 是一个 n 维光滑流形；该向量丛秩有限。记 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,E)$ 为作用于 E 的光滑截面空间 $C^\infty(M,E)$ 上的经典多齐次伪微分算子代数。这些算子是线性映射 $Q\colon C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E)$，其形式为 $Q=\sum_{i\in I}Q_{U_i}+S_Q$。其中，给定 M 的一个单位分解 $(\chi_i,i\in I)$，它从属于 M 的一个有限开覆盖 $(U_i,i\in I)$，算子 $Q_{U_i}:=\psi_iQ\chi_i$ 是 Q 在 M 的开子集 U_i 上的局部化，而 S_Q 是一个平滑算子——它将任意 Sobolev 截面映射为光滑截面。这里，$(\psi_i,i\in I)$ 是支集紧包含于 U_i 的光滑函数，并且对任意 $i\in I$，它们在 χ_i 的支集上恒等于 1。由于我们关注的是在平滑算子上取值为零的奇异线性形式，因此将研究范围缩减到局部化算子 Q_U。这些选择不会影响我们的结果，所以省略对局部化的明确说明，简记为 Q。作用于 $C^\infty(U,E)$ 上的伪微分算子（局部化于 M 的某个开子集 U）称为经典或多齐次算子，若它是若干伪微分算子 Q 的线性组合，且这些算子的（局部）符号 $\sigma(Q)$——在 E 于 U 上的任意局部平凡化中，属于 $C^\infty(T^*U,\mathrm{End}(V))$——具有如下多齐次展开

$$\sigma(Q)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_{m-j}(Q),$$

其中 m 属于 $\mathbb{C}$， Q的阶。具体而言，对于任意 N属于 $\mathbb{N}$，差值 $\sigma(Q)-\sum_{j=0}^{N}\chi\sigma_{m-j}(Q)$ 是阶不高于 $\mathrm{Re}(m)-N$ 的光滑伪微分符号，其中 χ 是一个在零点邻域内恒为零的光滑函数，而 $\sigma_\alpha(Q)$ 是次数为 $\alpha\in\mathbb{C}$ 的正齐次函数，也就是说，

$$\sigma_\alpha(Q)(x,\lambda\xi)=\lambda^\alpha\sigma_\alpha(Q)(x,\xi)$$

对于任意 $(x,\ \xi)\in T^*U$ 以及 $\lambda>0$。关于更多细节，可参阅该主题的经典著作，例如 [17], 另见 [16, 例 1.1。8]。我们还考虑对数伪微分算子类，即其符号具有如下形式的对数多齐次展开

$$\sigma(Q)(x,\xi)=m\log(|\xi|)\mathrm{Id}+\sigma_{\mathrm{cl}}(Q)(x,\xi),$$

其中 $\sigma_{\mathrm{cl}}(Q)$ 是一个非正阶经典符号。我们定义局部留数密度[2]

$$\omega_Q^{\mathrm{Res}}(x):=\mathrm{res}(\sigma(Q)(x,\cdot))\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n, \tag{2.1}$$

其中，$\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$是 M 上的（定向） n维流形在局部坐标中的平坦体积形式，并且

$$\mathrm{res}(\sigma(Q)(x,\cdot)):=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^E(\sigma_{-n}(Q)(x,\xi))\mathrm{d}_S\xi,$$

[2] s-密度在一个 $|\quad A\ |^s\mu\ v_1\ \dots\ v_n$ $A\quad V$ μ μ $|\Lambda|^s\ V$ =

维实向量空间 V上是满足如下条件的函数：$:V^n\to\mathbb{R}$ 使得对于任意线性同构，有 $(Av_1,\ Av_2,\ \dots,\ Av_n)\ \det(\ )(\ ,\ ,\ )$，并构成一维向量空间 $(\ )$。流形 M 上的s-密度是 s-密度丛 $|\Lambda|^s(TM)$ 的一个截面，其基底为 M，在 x 上的纤维由切空间 T_xM上的 s-密度构成。在 n 维定向流形 M上，1-密度（也称为密度）可与 M上的 n-形式自然地等同。

其中，tr^E 表示 End(E) 上的纤维迹，$\mathrm{d}_S\xi$ 表示单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的标准密度，它由平坦体积形式 $\mathrm{d}\xi^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi^n$ 与径向向量场 $\mathcal{R}:=\sum_{i=1}^n \xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}$ 的内积得到，即

$$\mathrm{d}_S\xi := \mathcal{R}\lrcorner\big(\mathrm{d}\xi^1\wedge\cdots\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi^n\big)=\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\xi^j\mathrm{d}\xi^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}\xi^j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi^n.$$

先验地，$\omega_Q^{\mathrm{Res}}(x)$，它是通过对算子进行局部化 Q 于 x附近定义的，依赖于 x的邻域内局部坐标的选取。M. Wodzicki [19] 证明了它实际上定义了一个全局的 n-形式，该形式可积分，从而在 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,E)$上定义线性形式 Res，称为 Wodzicki 留数或非交换留数：

$$\mathrm{Res}(Q):=\int_M\omega_Q^{\mathrm{Res}}(x).$$

注 2.1。

1. 若 $(M,\ g)$ 是一个 n 维光滑黎曼流形，我们也可以等价地将其定义为

$$\mathrm{res}(\sigma(Q)(x,\cdot)):=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{S_x^*M}\mathrm{tr}^E(\sigma_{-n}(Q)(x,\xi))\nu_x(\xi),$$

在余切单位球面 $S_x^*M:=\{\xi\in T_x^*M,|\xi|=1\}$ 上对其积分，其中该球面赋有诱导的黎曼体积形式 ν_x。

2. 将纤维迹 tr^E 替换为分次迹 $\mathrm{str}^E:=\mathrm{tr}^{E^+}-\mathrm{tr}^{E^-}$ 后，Wodzicki 留数很容易推广到 $\mathbb{Z}_2$-分次向量丛 $E=E^+\oplus E^-$；在这种情况下，我们定义

$$\mathrm{sres}(\sigma(Q)(x,\cdot)):=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1}\mathrm{str}^E(\sigma_{-n}(Q)(x,\xi))\mathrm{d}_S\xi,$$

and

$$\omega_Q^{\mathrm{sRes}}(x):=\mathrm{sres}(\sigma(Q)(x,\cdot))\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

2.2 局部压缩映射

全文中，$(M,\ g)$ 表示一个维数为 n 的光滑黎曼流形，而 p 是 M 中的一个点。局部识别使用指数映射

$$\exp_p:\ T_pM\supset B_r\longrightarrow U_p\subset M \tag{2.2}$$

在 p 附近，它给出一个局部微分同胚，将以 0 为中心、半径为 $r>0$ 的球 B_r 映射到 p 的局部测地邻域 U_p。将此指数映射与一个重缩放结合，得到映射（这就是 [9, 中公式 (4.4.7)] 里的映射 $\exp\circ T_\epsilon$）

$$\exp_p\circ h_\lambda:\ T_pM\supset B_{r/\lambda}\longrightarrow U_p\subset M,$$

其中

$$\begin{aligned}h_\lambda:\ T_pM\supset B_{r/\lambda}&\longrightarrow B_r\subset T_pM,\\ \mathbf{x}&\longmapsto\lambda\mathbf{x}.\end{aligned}$$

下文中，我们采用以下记号。给定 T_pM 在 $p\in M$处的标准正交基 $e_1(p)$.....，$e_n(p)$，我们构造：

- 通过映射 $B_r \subset \mathbb{R}^n \to U_p$在任意点 $x \in U_p$处构造正规测地坐标；$\big(x^1, \ldots\ldots, x^n\big) \mapsto x$

$$x = \exp_p\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i(p)\right) \in \exp_p(B_r) \tag{2.3}$$

通过局部指数映射 exp 定义$_p$ 于（2.2）中；

- 一个局部标准正交标架

$$O_p(x,g) := \{e_1(x,g), \ldots, e_n(x,g)\}, \qquad x \in U_p \tag{2.4}$$

T_xM 通过平行移动 τ_c沿测地线 $c(t) = \exp_p(tx)$，其中 x 属于 $B_r \subset T_pM$，它将 p 映射到 $x = c(1)$，从而使得 $e_j(x, g) = \tau_c(e_j(p))$。

除非另有说明，我们使用正规测地坐标。照例，我们将任意点 $x \in U_p$ 与其坐标 $X := \big(x^1、\ldots、x^n\big)$等同起来。令 $1 > \lambda > 0$。借助映射 h_λ，我们定义一个重标度坐标系

$$Y := \big(y^1 := \lambda x^1, \ldots, y^n := \lambda x^n\big)$$

在 U_p中的任意点处。由于有包含关系 $B_r \subset B_{r/\lambda}$，映射 h_λ 诱导出一个微分同胚

$$\begin{aligned} &\mathfrak{f}_{p,\lambda}\colon\ U_p \longrightarrow U_p^\lambda := \exp_p(B_{\lambda r}) \subset U_p, \\ &\exp_p(\mathbf{x}) \longmapsto \exp_p \circ h_\lambda(\mathbf{x}) = \exp_p(\lambda \mathbf{x}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

为简便起见，我们将其记作 $\mathfrak{f}_\lambda$。根据上述构造，我们有

$$\mathfrak{f}_\lambda^*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i} = \lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \mathfrak{f}_\lambda \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{f}_\lambda^* \mathrm{d}x^i = \mathrm{d}y^i = \lambda \mathrm{d}x^i \circ \mathfrak{f}_\lambda. \tag{2.6}$$

2.3 局部收缩下 Wodzicki 留数的行为 s

现在回顾算子的拉回的一般事实。任意局部微分同胚 $\mathfrak{f}\colon U \to V$都会在局部化的伪微分算子上诱导如下局部变换：给定任意 Q属于 $\Psi_{\mathrm{cl}}(V, E)$，其中 (E, π, M) 是 M上的一个向量丛，我们定义 $\mathfrak{f}^\sharp Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}(U, \mathfrak{f}^*E)$ 为

$$\big(\mathfrak{f}^\sharp Q\big)s := \mathfrak{f}^*\big(Q\big((\mathfrak{f}^*)^{-1}(s)\big)\big) = Q\big(s \circ \mathfrak{f}^{-1}\big) \circ \mathfrak{f}, \tag{2.7}$$

其中 s 是 U上方 $\mathfrak{f}^*E$ 中的任意局部截面。这里，$\mathfrak{f}^*E$ 是丛 E 在 U 上的拉回丛，其定义为

$$\mathfrak{f}^*E = \{(x, y) \in U \times E \mid \mathfrak{f}(x) = \pi(y)\}.$$

下面的引理可由符号在局部微分同胚 $\mathfrak{f}_\lambda$下的变换性质直接推出。不过，我们仍给出一个明确的证明。

引理 2.2 (参见 [16, 第 381] 页)。任意给定 Q 属于 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M, E)$，对于足够小的正数 λ，

$$\sigma\big(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp Q\big)(x,\xi) = \sigma(Q)\big(\mathfrak{f}_\lambda(x), \big((\mathfrak{f}_\lambda)_*^{\,t}\big)^{-1}(\xi)\big) = \sigma(Q)\big(\mathfrak{f}_\lambda(x), \big(\mathfrak{f}_\lambda^*\big)^t(\xi)\big), \tag{2.8}$$

在 U_p 中的任意给定点 x。

证明。 局部微分同胚 $\mathfrak{f}\colon\ U\to V$两个开子集 U和 V属于 M的映射，诱导出一个映射（$\mathfrak{f}^*$）$^t_x\colon\ T^*_xU\to T^*_{\mathfrak{f}(x)}V$，并且符号 σ（Q）的 Q变换方式如下（例如，参见 [17, 公式 (4.2.1)]）

$$\sigma\big(\mathfrak{f}^\sharp Q\big)(x,\xi)=\sigma(Q)\big(\mathfrak{f}(x),\big((\mathfrak{f}_*)^t\big)^{-1}(\xi)\big)+\text{lower order terms.}\tag{2.9}$$

这里，“低阶项”表示由 $\mathfrak{f}$ 对和 $\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\Phi_\alpha(x,\xi)\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)$ 的推前，其中

$$\Phi_\alpha(x,\xi):=D_z^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\varphi^{\mathfrak{f}}_x(z),\xi\rangle}\big|_{z=x}\qquad\text{and}\qquad\varphi^{\mathfrak{f}}_x(z):=\mathfrak{f}(z)-\mathfrak{f}(x)-\mathrm{d}\mathfrak{f}(x)(z-x),$$

它是 ξ 的一个多项式，次数为 $\le\frac{|\alpha|}{2}$，其系数是导数乘积的线性组合 $\prod_\gamma\partial^\gamma\mathfrak{f}(x)$ 在 $\mathfrak{f}$ 处的 x，其中 $\sum|\gamma|=|\alpha|$ 且 $|\gamma|\ge 2$。当 $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}_\lambda$，且 $U=U_p$ 以及$V=U_p^\lambda$ 时，对于任意指标 $\partial_i\partial_j\mathfrak{f}\equiv 0$，$i$，$j$从 1 到 n，因此低阶项消失，从而得到（2.8）。■

命题 2.3。设 E 是定义在 M 上的有限秩向量丛。对于任意给定的 $Q\in\Psi_{\mathrm{cl}}(M,E)$，$n$-形式 ω_Q^{Res} 在压缩映射 $\mathfrak{f}_\lambda$ 下协变变换为

$$\omega_Q^{\mathrm{Res}}\circ\mathfrak{f}_\lambda=\omega^{\mathrm{Res}}_{\mathfrak{f}_\lambda^\sharp Q},$$

对任意足够小的 $\lambda>0$。

证明。 应用局部留数密度（2.1）于点 $\mathfrak{f}_\lambda(x)$（其中 $x\in U_p$，我们有 ave

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\omega_Q^{\mathrm{Res}}(\mathfrak{f}_\lambda(x))&=\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^E(\sigma_{-n}(Q)(\mathfrak{f}_\lambda(x),\xi))\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n\\&=\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^E\big(\sigma_{-n}(Q)\big(\mathfrak{f}_\lambda(x),\lambda^{-1}\xi\big)\big)\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&=\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^E\big(\sigma_{-n}(Q)\big(\mathfrak{f}_\lambda(x),(\mathfrak{f}_\lambda^*)^t(\xi)\big)\big)\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&\overset{(2.8)}{=}(2\pi)^n\omega^{\mathrm{Res}}_{\mathfrak{f}_\lambda^\sharp(Q)}(x).\end{aligned}$$

引理得证。■

2.4 对数留数密度

为便于后续讨论，我们在此回顾如何将 Wodzicki 留数扩展到附录 B 中定义的伪微分算子的对数。与前文相同，我们考虑一个有限秩向量丛 E，其基空间为 M。若算子 Q 属于 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,E)$，且具有正实数[3] 阶 m，并且主角为 $\theta\in[0,2\pi)$（参见 [16, 第 1.5.7 节.1]），则称其具有主角；若首符号矩阵 $\sigma_L(Q)(x,\xi):=\sigma_m(Q)(x,\xi)$ 在射线 $L_\theta:=\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},r\ge 0\}$ 上没有特征值，则对每个 $(x,\xi)\in T^*U\setminus U\times\{0\}$ 均如此。特别地，该算子是椭圆的，因此具有纯离散谱。若算子 Q 的主角 θ 满足存在一个包含该射线的立体角，则称其为 Agmon 角[4]

$$\Lambda_{\varepsilon,\theta}=\big\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},r\ge 0,\theta-\varepsilon\le\alpha\le\theta+\varepsilon\big\},$$

对于某个 $\varepsilon>0$，其中不包含 Q 的特征值。在这种情况下，算子 Q 可逆。

[3]假设阶为实数，以确保其不与任何射线相交。[4]实际上，可以通过对任意主角作微小扰动来构造一个 Agmon 角。

注 2.4. 当我们可以选择 $\theta = \pi$ 时，将不再明确提及主角。

对于这样的算子 Q，我们可以定义其复幂 Q_θ^z （当 $z \in \mathbb{C}$ 时），以及对数 $\log_\theta(Q)$，如附录B所述。就其局部符号与经典符号相差一个对数项而言，它“近乎”经典。事实上， [16, 公式 (2.6.1.11)] 表明，对数的符号为

$$\sigma(\log_\theta(Q))(x,\xi) = m\log(|\xi|)\mathrm{Id} + \sigma_{\mathrm{cl}}(\log_\theta(Q))(x,\xi), \tag{2.10}$$

其中 $\sigma_{\mathrm{cl}}(\log_\theta(Q))$ 是一个零阶经典符号，其齐次分量$\sigma_{-j}(\log_\theta(Q))$的次数为 $-j$， $j \geq 0$ 由下式给出（这可由 [16]第 219 页上公式 (2.6.1.11) 之前的公式推出）

$$\sigma_{-j}(\log_\theta(Q))(x,\xi) = |\xi|^{-j}\left(\partial_z\left(\sigma_{mz-j}(Q_\theta^z)\left(x,\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right)\right)_{z=0}.$$

符号的对数部分在余切单位球面上消失，这一事实使得 Wodzicki 留数能够推广到对数伪微分算子（关于详细讨论，请参阅 [16, 第 2.7 节。1]）。仿照 (2.1)，我们设

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}(\sigma(\log_\theta(Q))(x,\cdot)) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{S_x^*M}\mathrm{tr}^E(\sigma_{-n}(\log_\theta(Q))(x,\xi))\mathrm{d}_S\xi,\\
&\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(Q)}(x) := \mathrm{res}(\sigma(\log_\theta(Q))(x,\cdot))\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

我们称之为 的对数留数密度 P。给定局部微分同胚 $\mathfrak{f}\colon U \to V$以及算子 $Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}(M,E)$，其 Agmon 角为 θ，则由 ($\mathfrak{f}^\sharp Q$ 2.7) 定义的算子属于$\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\mathfrak{f}^*E)$，且具有相同的 Agmon 角 θ，因为方程 (2.9) 表明

$$\sigma_L\big(\mathfrak{f}^\sharp Q\big)(x,\xi) = \sigma_L(Q)\big(\mathfrak{f}(x),(\mathfrak{f}^*)^t(\xi)\big).$$

此外，关系式 $\mathfrak{f}^\sharp(Q-\lambda)^{-1} = \big(\mathfrak{f}^\sharp Q - \lambda\big)^{-1}$ 给出

$$\mathfrak{f}^\sharp(Q_\theta^z) = \big(\mathfrak{f}^\sharp Q_\theta\big)^z \tag{2.12}$$

对于实部为负的任意复数 z 。由于 $\mathfrak{f}^\sharp(Q^k) = \big(\mathfrak{f}^\sharp Q\big)^k$ 对任意正整数 k都成立，因此根据将延拓 Q_θ^z 到任意复数 z的构造，性质 (2.12) 可推广至 $z \in \mathbb{C}$。类似地，可以证明

$$\mathfrak{f}^\sharp(\log_\theta(Q)) = \log_\theta\big(\mathfrak{f}^\sharp Q\big),$$

换言之， $\mathfrak{f}^\sharp$ 与函数演算可交换。根据公式 (2.10)， $\sigma_{-n}(\log_\theta(Q)))$ $=(\sigma_{\mathrm{cl}})_{-n}(\log_\theta(Q)))$ 因此，只需稍作调整命题 2.3 的证明，即可证明对数留数的协变性：

$$\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(Q)}\circ\mathfrak{f}_\lambda = \omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp Q)}, \tag{2.13}$$

这里我们利用了 $\mathfrak{f}_\lambda^\sharp$ 与 $\log_\theta$ 可交换这一事实。

2.5 对数留数密度的局部化公式

现在我们聚焦于标量微分算子的对数，并为 Wodzicki 留数密度证明一个局部化公式。下文中，我们采用以下记号。对于任意多重指标 $\gamma = \{i_1, \dots, i_s\}$，我们定义

$$D_X^\gamma := \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}, \tag{2.14}$$

在局部正规测地坐标 $X = \left(x^1, \dots, x^n\right)$ 下，点 x 通过通常的识别$x \leftrightarrow X$。为简化记号，除非因此产生歧义，以下我们均用 D^γ代替 D_X^γ。

给定一个秩为 k 的向量丛 $E \to M$，它在 M 的开子集 U 上平凡化， D^γ 通过以下方式作用于 U 上的局部截面 $s|_U = \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i\big|_U$：

$$D^\gamma s := \sum_{i=1}^k D^\gamma(\alpha_i) s_i. \tag{2.15}$$

这里，$\{s_i\}_{i=1,\dots,k}$ 是向量丛 $E|_U$ 在局部平凡化 $E|_U \simeq U \times \mathbb{R}^k$ 下的一组基。一个 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 阶微分算子写作 $P = \sum_{|\gamma| \leq m} P_\gamma D^\gamma$，这意味着在 E 的局部平凡化 $E|_U \simeq U \times \mathbb{R}^k$ 下，它的作用方式为

$$P\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j s_j\right) = \sum_{|\gamma| \leq m} \sum_{i,j=1}^k (P_\gamma)_{ij} D^\gamma(\alpha_j) s_i, \tag{2.16}$$

其中我们使用了方程（2.15）。微分算子构成一个代数 $\mathbf{Diff}(M,\ E)$，并且我们有如下 C^∞-模同构：

$$\mathrm{Diff}(M, E) \simeq \mathrm{Diff}(M) \otimes_{C^\infty(M)} C^\infty(M, \mathrm{End}(E)),$$

其中我们定义 $\mathbf{Diff}(M) := \mathrm{Diff}(M,\ M \times \mathbb{R})$。仿照 [18],，我们为任意 $P \in \mathrm{Diff}(M,\ M \times \mathbb{R})$ 定义一族重标度微分算子：

$$\mathbb{P} := \lambda^m P, \qquad \lambda > 0, \tag{2.17}$$

并对任意小的正数 λ 定义

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda := \lambda^m \mathfrak{f}_\lambda^\sharp P. \tag{2.18}$$

在局部正规测地坐标中，我们有 $\mathfrak{f}_\lambda^\sharp D^\gamma = \lambda^{-|\gamma|} D^\gamma$，因此，由微分算子 $P = \sum_{|\gamma| \leq m} P_\gamma D^\gamma$ 构造的重标度算子族在局部可写为（这些记号以及上文的记号 $\mathbb{P}_\lambda$ 均引自 [18]）

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda = \sum_{|\gamma| \leq m} \lambda^{m-|\gamma|} (P_\gamma \circ \mathfrak{f}_\lambda) D^\gamma.$$

As $\sim\lambda$ 趋于零， $\mathbb{P}_\lambda$ 收敛到在极限点 p 处取值的算子 P

$$\lim_{\lambda \to 0} \widetilde{\mathbb{P}}_\lambda\big|_{U_p} = \sum_{|\gamma| = m} P_\gamma(p) D^\gamma|_p = P|_p, \tag{2.19}$$

其中， $P_\gamma(p)$ 对应于在参考点 p 处取值的 $P_\gamma(x)$。下面，我们陈述微分算子的对数的留数的局部化公式（参见 [16,公式 (3.5.3.33)，第 382]页，其中有一个类似的公式）。

命题 2.5. 对于 微分算子空间$(M, M\times\mathbb{R})$ 中的任意微分算子 P，若其 *Agmon* 角为 θ，则有如下局部化公式：

$$\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}(p)=\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P|_p)}(x)$$

对所有 $x\in U_p$。

证明。 我们首先注意到，对于足够小的正 λ

$$\log_\theta\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda\big)=\log_\theta\big(\lambda^m \mathfrak{f}^\sharp_\lambda P\big)=(m\log\lambda)\mathrm{Id}+\log_\theta\big(\mathfrak{f}^\sharp_\lambda P\big),$$

其中，m 是 P的阶。由于留数密度在微分算子上消失，因而在恒等算子 Id 上也消失，我们有 $\omega^{\mathrm{Res}}\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda)=\omega^{\mathrm{Res}}\log_\theta(\mathfrak{f}^\sharp_\lambda P)$。公式（2.13）意味着 $\omega^{\mathrm{Res}}\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda)=\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}\circ\mathfrak{f}_\lambda$。然后我们取 $\lambda\to 0$趋于 $\mathbb{P}_\lambda$ 时的极限，此时根据（2.19），$\widetilde{\ }$趋于 $P|_p$。对数的连续性与 Wodzicki 留数关于恒阶（对数）经典算子的 Fr´echet 拓扑的连续性相结合，便得到该命题的结论。■

3 Ψcl(M, ΛT M) 上的一个局部 Berezin 型 n-形式

在本节中，我们定义 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\Lambda T^*M)$ 上的一个局部 n-形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}$（见公式（3.5））。不同于 Wodzicki 密度，该形式在上一节定义的压缩映射下并不具有协变性。我们在命题 3.6 中给出这一局部 n-形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}$ 在 Getzler 重标度映射（见定义 3.1）与局部压缩映射复合下的行为。当流形 M 为自旋流形，且微分算子 P 作用于其旋量丛的光滑截面上时，我们利用超迹关于 Berezin 积分的表达式（见（C.2）），将 $c^g(P)$（定义见公式（3.11））的对数（带有谱切口 θ）的局部 n-形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta}(c^g(P))$ 与其（超）Wodzicki 留数 $\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta}(c^g(P))$ 联系起来。本节的大部分内容受到 Simon Scott 通过 Wodzicki 留数证明局部 Atiyah–Singer 指标定理的方法启发 [16, 第 3.5 节3]。

3.1 Getzler 重标度映射

为简化记号，令 $\otimes^q_r V:=V^{\otimes q}\otimes(V^*)^{\otimes r}$。

定义 3.1. Getzler 重标度映射是一个张量丛态射，对任意 $\lambda>0$ 定义如下：

$$\begin{aligned}U_\lambda\colon\ &\otimes^q_r V\longrightarrow\otimes^q_r V,\\ &t\longmapsto\lambda^{q-r}t.\end{aligned}\tag{3.1}$$

将 Getzler 重标度映射 U_λ 限制到 ΛV，可诱导出一个映射

$$\begin{aligned}&U^\sharp_\lambda\colon\ \mathrm{End}(\Lambda V)\longrightarrow\mathrm{End}(\Lambda V),\\ &Q\longmapsto U^\sharp_\lambda Q\colon\ \omega\mapsto U_\lambda Q U_\lambda^{-1}\omega,\end{aligned}\tag{3.2}$$

它满足

$$U^\sharp_\lambda(v\wedge\bullet)=\lambda^{-1}v\wedge\bullet\qquad\text{and}\qquad U^\sharp_\lambda\big(v^{\sharp_g}\lrcorner\bullet\big)=\lambda v^{\sharp_g}\lrcorner\bullet\,.\tag{3.3}$$

对任意 $v\in V^*$。结合（3.3）与 Clifford 映射 $c^g\colon \mathrm{C}\ell(V)\longrightarrow\mathrm{End}(\Lambda V)$，其定义见（C.1）附录 C，对余向量 $v\in V^*$ 施以 $c^g(v)\bullet=v\wedge\bullet-v^{\sharp_g}\lrcorner\bullet$，可得到映射

$$U^\sharp_\lambda\circ c^g\colon\ \mathrm{C}\ell(V)\longrightarrow\mathrm{End}(\Lambda V)$$

由.....给出

$$\big(U^\sharp_\lambda\circ c^g\big)(v)\bullet=\lambda^{-1}v\wedge\bullet-\lambda v^{\sharp_g}\lrcorner\bullet\,.$$

我们有如下将在后文使用的直接引理。

引理 3.2。 设$\mathrm{e}^I := \mathrm{e}^{i_1} \cdot_g \mathrm{e}^{i_2} \cdots \cdot_g \mathrm{e}^{i_k}$对于满足 $|I| = k$的 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$，则有

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{|I|} \big(U_\lambda^\sharp \circ c^g\big)(\mathrm{e}^I) = \mathrm{e}^I \wedge, \tag{3.4}$$

其中 $\mathrm{e}^I \wedge := \mathrm{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{e}^{i_k}$。

3.2 $\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\ \Lambda T^*M)$ 上的局部 n-形式与 Getzler 重标度

为定义局部 n-形式，我们固定 M 中点 p 周围的正规测地邻域 U_p。对于 $(x,\ \xi) \in T^*U_p$，我们考虑相应坐标图中算子 $Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}(M,\ \Lambda T^*M)$ 的符号 $\sigma(Q)(x,\ \xi) \in \mathrm{End}(\Lambda T_x^* U_p)$。其次数为 $-n$ 的齐次分量$\sigma_{-n}(Q)(x,\ \xi)$ 在 $\mathbf{1}_x$ 处取值后，得到微分形式 $\sigma_{-n}(Q)(x,\ \xi)\mathbf{1}_x \in \Lambda T_x^* U_p$。因此我们定义

$$\widetilde{\omega}_Q^{\mathrm{Res}}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|=1} [\sigma_{-n}(Q)(x,\xi)\mathbf{1}_x]_{[n]} \mathrm{d}_S \xi, \tag{3.5}$$

其中 $\alpha_{[n]}$ 表示形式 α 在 $\Lambda T_x^* M$ 中次数为 n 的部分。

注 3.3。

- 请注意，这不同于 Wodzicki 留数密度。与 $\omega_{\mathrm{Res}Q}$ 不同，后者关于 $\mathfrak{f}_\lambda$ 的作用是协变的，正如我们很快将看到的，$\widetilde{\omega}_{\mathrm{Res}Q}$ 则不是。Getzler 重标度映射将使我们能够弥补这种协变性的缺失。

- 上述构造可推广到经典伪微分算子之外，即推广到对数型伪微分算子。对于一个微分算子 P 属于 $\mathrm{Diff}(M, \Lambda T^*M)$，其 Agmon 角为 θ，类似于（3.5），我们定义

$$\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|=1} [\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\xi)\mathbf{1}_x]_{[n]} \mathrm{d}_S \xi.$$

由 $U_\lambda^\sharp$ 在（3.2）中定义的映射如下诱导出微分算子上的一个变换：对于任意 $P = \sum_{|\gamma| \le m} P_\gamma D^\gamma$属于 $\mathrm{Diff}(M, \Lambda T^*M)$、阶为 m的算子，我们定义

$$U_\lambda^\sharp P := \sum_{|\gamma| \le m} U_\lambda^\sharp(P_\gamma) D^\gamma \in \mathrm{Diff}(M, \Lambda T^*M). \tag{3.6}$$

（3.6）的第一个直接推论是 $\sigma_L\big(U_\lambda^\sharp P\big) = U_\lambda^\sharp \sigma_L(P)$，因此算子 $U_\lambda^\sharp P$也具有 m 阶，并且其 Agmon 角为 θ。我们按照第 2.4 节中的构造来构造 $\big(U_\lambda^\sharp P\big)_\theta^z$及 $\log_\theta\big(U_\lambda^\sharp P\big)$。

引理 3.4。 对于任意微分算子 $P \in$微分算子空间$(M, \Lambda T^*M)$，其 *Agmon* 角为 θ，阶数为 m，有

$$\begin{aligned} &\sigma_{mz-j}\big(\big(U_\lambda^\sharp P\big)_\theta^z\big)(x,\xi) = U_\lambda^\sharp(\sigma_{mz-j}(P_\theta^z)(x,\xi)), \\ &\sigma_{-j}\big(\log_\theta\big(U_\lambda^\sharp P\big)\big)(x,\xi) = U_\lambda^\sharp(\sigma_{-j}(\log_\theta(P))(x,\xi)) \end{aligned} \tag{3.7}$$

对于任意 $(x,\xi) \in T^*U$和 $j \ge 0$。

证明。我们证明第一个恒等式，第二个恒等式可用类似方法证明。设 μ 位于围道 Γ_θ 上。由于 $U_\lambda^\sharp P - \mu = U_\lambda^\sharp(P - \mu)$，符号层面也具有相同的性质$\sigma\big(U_\lambda^\sharp P\big) - \mu = U_\lambda^\sharp\big(\sigma(P) - \mu\big)$。因此，乘积公式 $\sigma\big(\big(U_\lambda^\sharp P - \mu\big)^{-1}\big) \star \big(\sigma\big(U_\lambda^\sharp P\big) -$

$\mu\big) = $ 恒等算子（参见，例如， [16, 方程 (4.8.2.2)]），它确定了预解式的齐次分量 $\sigma_{-m-j}\big(\big(U_\lambda^\sharp P-\mu\big)^{-1}\big)$，其中 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，可写为 $\sigma\big(\big(U_\lambda^\sharp P-\mu\big)^{-1}\big)\star\big(U_\lambda^\sharp(\sigma(P)-\mu 1)\big) =$恒等算子。由此可得 $\sigma_{-m-j}\big(\big(U_\lambda^\sharp P-\mu\big)^{-1}\big) = U_\lambda^\sharp\sigma_{-m-j}\left((P-\mu)^{-1}\right)$ 当 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$时。利用附录 B.3中的方程 (B，可得当 Re(z) 时 <0 以及 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}\sigma_{mz-j}\big(\big(U_\lambda^\sharp P\big)_\theta^z\big)(x,\xi) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\Gamma_\theta}\mu_\theta^z\sigma_{-m-j}\big(\big(U_\lambda^\sharp P-\mu\big)^{-1}\big)(x,\xi)\mathrm{d}\mu\\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\Gamma_\theta}\mu_\theta^z U_\lambda^\sharp\sigma_{-m-j}\big((P-\mu)^{-1}\big)(x,\xi)\mathrm{d}\mu\\ &= U_\lambda^\sharp(\sigma_{mz-j}(P_\theta^z)(x,\xi)).\end{aligned}$$

随后，这些恒等式可以推广到任意复数 z。对于 Re$(z) < k$ 且 $k\in\mathbb{N}$，我们记作 $\big(U_\lambda^\sharp P\big)_\theta^z = \big(U_\lambda^\sharp P\big)^k\big(U_\lambda^\sharp P\big)_\theta^{z-k}$。由于 $\sigma_{mk-j}\big(\big(U_\lambda^\sharp P\big)^k\big) = \sigma_{mk-j}\big(U_\lambda^\sharp P^k\big) = U_\lambda^\sharp\sigma_{mk-j}(P^k)$ 对任意 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$均成立，由 (B.4) 可得

$$\begin{aligned}\sigma_{mz-j}\big(\big(U_\lambda^\sharp P\big)_\theta^z\big) &= \sum_{a+b+|\alpha|=j}\frac{(-\mathrm{i})^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_{mk-a}\big(\big(U_\lambda^\sharp P\big)^k\big)\partial_x^\alpha\sigma_{m(z-k)-b}\big(\big(U_\lambda^\sharp P\big)_\theta^{z-k}\big)\quad\forall j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ &= \sum_{a+b+|\alpha|=j}\frac{(-\mathrm{i})^{|\alpha|}}{\alpha!}U_\lambda^\sharp\partial_\xi^\alpha\sigma_{mk-a}\big(P^k\big)U_\lambda^\sharp\partial_x^\alpha\sigma_{m(z-k)-b}\big(P_\theta^{z-k}\big)\quad\forall j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ &= U_\lambda^\sharp\sigma_{mz-j}(P_\theta^z).\end{aligned}$$

■

引理 3.5。 给定任意 $P\in$微分算子空间$(M,\Lambda T^*M)$，对任意 $\lambda>0$

$$\big(U_\lambda^\sharp\circ\mathfrak{f}^\sharp\big)(P) = \big(\mathfrak{f}^\sharp\circ U_\lambda^\sharp\big)(P) \tag{3.8}$$

对任意局部微分同胚 $\mathfrak{f}\colon U\to V$。

证明。 首先，我们证明 $U_\lambda\circ\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}^*\circ U_\lambda$，根据定义， $\mathfrak{f}^*\omega = \omega\circ\mathfrak{f}$对任意微分形式 ω。事实上，我们计算得

$$(U_\lambda\circ\mathfrak{f}^*)\omega = U_\lambda(\omega\circ\mathfrak{f}) = \sum_{i=1}^n\lambda^{-i}(\omega\circ\mathfrak{f})_{[i]} = \sum_{i=1}^n\lambda^{-i}\omega_{[i]}\circ\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}^*\circ U_\lambda)\omega.$$

因此，对于 $P\in$微分算子空间$(M,\ \Lambda T^*M)$，我们得到

$$\big(U_\lambda^\sharp\circ\mathfrak{f}^\sharp\big)(P) = U_\lambda\circ\mathfrak{f}^*\circ P\circ\mathfrak{f}_*\circ U_\lambda^{-1} = \mathfrak{f}^*\circ U_\lambda\circ P\circ U_\lambda^{-1}\circ\mathfrak{f}_* = \big(\mathfrak{f}^\sharp\circ U_\lambda^\sharp\big)(P).$$

■

作为方程（3.7）的直接推论，我们得到如下结果

命题 3.6。 对于任意微分算子 $P\in$微分算子空间$(M,\Lambda T^*M)$，其 *Agmon* 角为 θ，以及任意 $\lambda>0$:

$$\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp P)} = \omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta P},\qquad \tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp P)} = \lambda^{-n}\tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta P},\qquad \tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P)} = \lambda^n\tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta P}\circ\mathfrak{f}_\lambda. \tag{3.9}$$

特别地，我们得到

$$\tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P)} = \tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta P}\circ\mathfrak{f}_\lambda. \tag{3.10}$$

证明。对于任意 $\lambda>0$，我们记

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp P)}(x)&=\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^{\Lambda T^*M}\big(\sigma_{-n}\big(\log_\theta\big(U_\lambda^\sharp P\big)\big)(x,\xi)\big)\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&\overset{(3.7)}{=}\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^{\Lambda T^*M}\big(U_\lambda^\sharp(\sigma_{-n}(\log_\theta P)(x,\xi))\big)\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&=\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^{\Lambda T^*M}\big(U_\lambda\sigma_{-n}(\log_\theta P)(x,\xi)U_\lambda^{-1}\big)\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&=\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{tr}^{\Lambda T^*M}(\sigma_{-n}(\log_\theta P)(x,\xi))\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&=(2\pi)^n\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta P}(x).\end{aligned}$$

为证明另外两个等式，我们还计算

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp P)}(x)&=\int_{|\xi|=1}\big[\big(\sigma_{-n}\big(\log_\theta\big(U_\lambda^\sharp P\big)\big)(x,\xi)\big)\mathbf{1}_x\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&\overset{(3.7)}{=}\int_{|\xi|=1}\big[\big(U_\lambda^\sharp(\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\xi))\big)\mathbf{1}_x\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\int_{|\xi|=1}\big[U_\lambda(\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\xi)\mathbf{1}_x)\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\int_{|\xi|=1}\sum_{i=0}^n\big[U_\lambda[\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\cdot)\mathbf{1}_x]_{[i]}\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\int_{|\xi|=1}\sum_{i=0}^n\big[\lambda^{-i}[\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\cdot)\mathbf{1}_x]_{[i]}\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\lambda^{-n}\int_{|\xi|=1}[\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\cdot)\mathbf{1}_x]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\lambda^{-n}(2\pi)^n\tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}(x).\end{aligned}$$

为证明（3.9）中的最后一个等式，我们利用等式（2.8）将其写为

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P)}(x)&=\int_{|\xi|=1}\big[\sigma_{-n}\big(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp\log_\theta P\big)(x,\xi)\mathbf{1}_x\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\int_{|\xi|=1}\big[\big(\sigma_{-n}(\log_\theta P)\big(\mathfrak{f}_\lambda(x),(\mathfrak{f}_\lambda^*)^t(\xi)\big)\big)\mathbf{1}_x\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\int_{|\xi|=1}\big[\big(\sigma_{-n}(\log_\theta P)\big(\mathfrak{f}_\lambda(x),\lambda^{-1}\xi\big)\big)\mathbf{1}_x\big]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\&=\lambda^n(2\pi)^n\tilde\omega^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta P}(\mathfrak{f}_\lambda(x)).\end{aligned}$$

最后，等式（3.10）通过结合（3.9）中的最后两个恒等式得到。这就证明了该陈述。■

3.3 Wodzicki 留数密度与局部 Berezin 型密度

在本段中，我们将著名的代数恒等式（C.2）推广为自旋流形上的一个鲜为人知的局部密度恒等式。现在设（M，g）是一个偶数维 n自旋流形，并设 ΣM 是其旋量丛。由（c^g C.1）中定义的态射 $P=\sum_{|\gamma|\le m}P_\gamma D^\gamma$在阶为 m的微分算子 c^g（P）上诱导出算子

$$c^g(P):=\sum_{|\gamma|\le m}c^g(P_\gamma)D^\gamma\in\mathrm{Diff}(M,\Lambda T^*M),\tag{3.11}$$

其中我们使用了命题C.1中的识别 $\mathrm{C}\ell(TM)\otimes\mathbb{C}\simeq\mathrm{End}(\Sigma M)$。显然，算子 $c^g(P)$ 与 P的阶相同。为了找出 $\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}$ 与 ω^{Res}之间的关系，我们需要以下引理:

引理 3.7。 对于任意具有 *Agmon* 角 θ、阶为 m 的微分算子 $P\in$微分算子空间$(M,\Sigma M)$，算子 $c^g(P)$ 也具有 *Agmon* 角 θ。此外，我们有

$$\sigma_{-j}(\log_\theta(c^g(P)))(x,\xi)=c^g(\sigma_{-j}(\log_\theta(P))(x,\xi)),\qquad\forall j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

证明。从 c^g 的单射性可轻易推出，$c^g(\sigma_L(P)(x,\xi))$（分别为 $c^g(P)$）的特征值集合是 $\sigma_L(P)(x,\xi)$（分别为 P）的特征值集合的子集。因此，P 的 Agmon 角 θ 也是 $c^g(P)$ 的 Agmon 角。该断言的第二部分可以沿用方程 (3.7) 的证明思路证明，其中 c^g 扮演 $U_\lambda^\sharp$ 的角色。■

通过选取 $a=\sigma_{-n}$(对数$_\theta(P))(x,\ \xi)$ 在 (C.2) 中，对于任意属于 $P\in$微分算子空间$(M,\ \Sigma M)$ 且具有 $\mathbb{Z}_2$-分次的微分算子，我们得到

命题 3.8。 对于任意微分算子 $P\in\mathrm{Diff}(M,\Sigma M)$，若其 *Agmon* 角为 θ，且关于 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\Sigma M=\Sigma^+M\oplus\Sigma^-M$ 为偶，则有

$$\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(c^g(P))}(x)=j_g(x)(-2\mathrm{i})^{-n/2}\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(P)}(x),$$

其中 $j_g(x)=\sqrt{\det(g_{ij}(x))}$。

证明。 利用引理 3.7 处理 $j=n$，我们计算得

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(c^g(P))}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1}[\sigma_{-n}(\log_\theta(c^g(P)))(x,\xi)\mathbf{1}_x]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1}[c^g(\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\xi))\mathbf{1}_x]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1}[\mathbf{s}^g(\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\xi))]_{[n]}\mathrm{d}_S\xi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1}(T\circ\mathbf{s}^g)(\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\xi))\mathrm{e}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}^n\mathrm{d}_S\xi\\
&\overset{(C.2)}{=}\frac{j_g(x)(-2\mathrm{i})^{-n/2}}{(2\pi)^n}\left(\int_{|\xi|=1}\mathrm{str}(\sigma_{-n}(\log_\theta(P))(x,\xi))\mathrm{d}_S\xi\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\
&=j_g(x)(-2\mathrm{i})^{-n/2}\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(P)}(x).
\end{aligned}$$

这里，我们利用了以下事实： P是 $\mathbb{Z}_2$-分次的，这意味着 $\sigma_{-j}(\log\theta(P))(x,\xi)$ 属于 $\mathrm{End}(\Sigma_x^\pm M)\simeq\mathrm{C}\ell(T_xM)^+\otimes\mathbb{C}$，因此应用了公式 (C.2)。■

注记 3.9。 由命题 3.8 可知，对于 Agmon 角为 θ 的微分算子 $P\in\Psi_{\mathrm{cl}}(M,\Sigma M)$，$\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(c^g(P))}$ 确实定义了一个全局密度，因为 $\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(P)}$ 确实如此。

推论 3.10。 对于任意 *Agmon* 角为 θ、阶为 m 且关于 $\mathbb{Z}_2$-分次为偶的微分算子 $P\in$微分算子空间 $(M,\Sigma M)$ $\Sigma M=\Sigma^+M\oplus\Sigma^-M$，我们有

$$\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp\mathfrak{f}_\lambda^\sharp(c^g(P)))}=(j_g\circ\mathfrak{f}_\lambda)(-2\mathrm{i})^{-n/2}\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(P)}\circ\mathfrak{f}_\lambda.$$

证明。 将（3.10）应用于微分算子 $c^g(P)$ 后，我们写作

$$\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(c^g(P))}\circ\mathfrak{f}_\lambda=\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp\mathfrak{f}_\lambda^\sharp(c^g(P)))}.$$

因此，结论可由命题3.8在点 $\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)$ 处得出。 ■

4 几何设置

本节回顾 Getzler 重标度背后的几何构造。具体而言，按照 [6, 第 1 节1], 中的表述，我们通过对给定点 M 作法锥变形，将流形 $\mathbb{M}$ 变形为流形 p，并通过典范投影 $\hat{}\ g$ 将流形上的黎曼度量 $\pi\colon\ \mathbb{M}\to M$ 拉回为一族 $\{g_\lambda\}_{\lambda>0}$ 膨胀度量（见（4.4））。在变形算子时，这一族度量将发挥关键作用。

4.1 点的法锥变形

对于一个嵌入 两个流形的 $M_0\hookrightarrow M$，法锥变形定义为 s

$$D(M_0,M):=(M\times\mathbb{R}_+)\cup(\mathcal{N}M_0\times\{0\}),$$

其中 $\mathcal{N}M_0$是 M_0在 M中的法丛的全空间。法锥变形推广到群胚底空间嵌入群胚的情形，便得到 Connes 引入的切群胚 [5] ，它在奇异流形的研究中颇有用处。在此，选取一个 $p\in M$ 在全文中固定不变的参考点，我们令$M_0=\{p\}$ 使得 $\mathcal{N}M_0=T_pM$，此时该变形相当于将 M替换为以 p 为中心定义的变形流形

$$\mathbb{M}:=(M\times\mathbb{R}_+)\cup(T_pM\times\{0\}).$$

这两部分的粘合，即 $M\times\mathbb{R}_+$和 $T_pM\times\{0\}$通过局部微分同胚 $\mathfrak{f}_\lambda$ 实现，该微分同胚在（2.5）中描述如下。我们构造映射（在 Θ第 [7, 3 节中记作1]„ 但此处采用 [18]中的记号）

$$\mathbf{Exp}_p\colon\ T_pM\times\mathbb{R}\supset\mathbb{B}_{p,r}\longrightarrow\mathbb{M}$$

定义在

$$\mathbb{B}_{p,r}:=(\{(\mathbf{x},\lambda)\in T_pM\times\mathbb{R}_+,\mathbf{x}\in B_{r/\lambda}\})\cup(T_pM\times\{0\})$$

由 $T_pM\times\{0\}$ 上的恒等映射以及在 $\mathbb{B}_p$ 的其余部分上r 定义如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{Exp}_p\colon\ \{(\mathbf{x},\lambda)\in T_pM\times\mathbb{R}_+,\mathbf{x}\in B_{r/\lambda}\}&\longrightarrow U_p\times\mathbb{R}_+\subset\mathbb{M},\\(\mathbf{x},\lambda)&\longmapsto(\exp_p(\lambda\mathbf{x}),\lambda),\qquad\text{for }\lambda>0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

我们考察 $\mathbb{M}$ [6, 第 1 节中的开集。1]

$$W_p:=(U_p\times\mathbb{R}_+)\cup(T_pM\times\{0\})\subset\mathbb{M}.$$

变形流形 $\mathbb{M}$ 赋予了这样一种光滑结构：在此结构下，$\mathbf{Exp}^p$ 是一个微分同胚，并且该结构在 $M\times\mathbb{R}_+$ 上限制为标准光滑结构（更多细节请参阅上文引理 4.3] 之前的 [12, ）。通过 $\mathbf{Exp}^p$ ，点 $(x=\mathbf{exp}^p(\mathbf{x})\ \lambda)$ 与点 $\mathfrak{f}_\lambda(x)=\mathbf{exp}^p(\lambda\mathbf{x})$ 相对应，而点 p 与 $\mathbf{x}$ 相对应。我们将由 (4.1) 给出的坐标称为 λ-重标度指数坐标。为从变形流形 $\mathbb{M}$恢复流形 M，我们考虑投影映射

$$\begin{aligned}&\hat{\pi}\colon\ \mathbb{M}\xrightarrow{p_1}M\times\mathbb{R}_{\geq0}\xrightarrow{\pi}M,\\&(x,\lambda)\longmapsto(x,\lambda)\longmapsto x\quad\text{if }\lambda>0,\\&(\mathbf{x},0)\longmapsto(p,0)\longmapsto p.\end{aligned}$$

赋予 $\mathbb{M}$上述光滑结构后，映射 $\hat{}\pi$ 是光滑的，因此可以将 M 上的几何拉回到 $\mathbb{M}$。对于 M上的向量丛 E 的任意截面 s，其拉回是拉回丛 $\mathbb{E} := \hat{}\pi^* E \subset \mathbb{M} \times E$ 上的一个截面，该丛位于 $\mathbb{M}$ 上，定义如下

$$(\hat{\pi}^* s)(x, \lambda) = s(x), \qquad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in M$$

and

$$(\hat{\pi}^* s)(\mathbf{x}, 0) = s(p), \qquad \forall \mathbf{x} \in T_p M.$$

特别地，切丛 $TM \to M$ 被拉回到

$$\begin{aligned}\hat{\pi}^* TM = \{&(x, \lambda, y, u) \in M \times \mathbb{R}_+ \times TM \mid x = y\} \\ &\cup \{(\mathbf{x}, 0, y, u) \in T_p M \times \{0\} \times TM \mid p = y\}.\end{aligned}$$

此外，局部微分同胚（4.1）诱导出向量丛同构（见 [7, 注 3.4(e)] 以及 [9, 第 67–68]页）

$$\begin{aligned}(TM \times \mathbb{R}_+) \cup (T_p M \times \{0\}) &\longrightarrow T\mathbb{M}, \\ (x, u, \lambda) &\longmapsto (x, \lambda u = h_\lambda(u), \lambda) \quad \text{if } \lambda > 0, \\ (\mathbf{x}, 0) &\longmapsto \mathbf{x} \in T_p M \quad \text{if } \lambda = 0.\end{aligned}$$

现在，在 的局部指数图（4.1）中，截面 s 在 E 上的拉回是映射 $\hat{}\pi^* s \circ \mathbf{Exp}_p \colon \mathbb{B}_{p,\ r} \longrightarrow \mathbb{E}$ 可写为

$$(\hat{\pi}^* s \circ \mathbf{E}\mathrm{xp}_p)(\mathbf{x}, \lambda) = (s \circ \hat{\pi})(\exp_p(\lambda \mathbf{x}), \lambda) = s(\exp_p(\lambda \mathbf{x}))$$

对于任意 $\lambda > 0$ 和$\mathbf{x} \in B_{r/\lambda}$。此外，在 $\mathbb{B}_p$的其余部分r上，我们有

$$(\hat{\pi}^* s \circ \mathbf{E}\mathrm{xp}_p)(\mathbf{x}, 0) = (s \circ \hat{\pi})(\mathbf{x}, 0) = s(p).$$

因此，取$\mathbf{x} \in B_r \subset B_{r/\lambda}$ 使 $\lambda > 0$ 足够小，并将其与点$x := \exp_p \mathbf{x} \in U_p$认同，我们可以写成

$$(\hat{\pi}^* s)(x, \lambda) \overset{\mathbf{Exp}_p}{=} (s \circ \mathfrak{f}_\lambda)(x),$$

对于 $x \in U_p$。

4.2 由 ˆπ 拉回的张量丛

回到法锥变形，张量丛 $T_r^q M := TM^{\otimes q} \otimes T^* M^{\otimes r}$ 被拉回到 $\hat{}\pi^* T_r^q M \longrightarrow \mathbb{M}$，张量场 t 在点 $x \in U_p$ 处的坐标为 X 的正规测地坐标图中写作

$$t(x) = \sum t^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_q}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_r} \Big|_x \tag{4.2}$$

被拉回到

$$\begin{aligned}(\hat{\pi}^* t)(x, \lambda) &\overset{\mathbf{Exp}_p}{=} t \circ \mathfrak{f}_\lambda(x) \\ &= \sum (t^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_r} \circ \mathfrak{f}_\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ \mathfrak{f}_\lambda \right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_q}} \circ \mathfrak{f}_\lambda \right) \otimes (\mathrm{d}x^{j_1} \circ \mathfrak{f}_\lambda) \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}x^{j_r} \circ \mathfrak{f}_\lambda) \Big|_x,\end{aligned}$$

对于足够小的 $\lambda \geq 0$。将（2.6）与（3.1）结合起来，我们推得

$$(\hat{\pi}^* t)(x,\lambda) \overset{\mathbf{Exp}_p}{=} \lambda^{q-r}(\mathfrak{f}_\lambda^* t)(x),$$

对于任意足够小的 $\lambda > 0$ 和 $(\hat{\pi}^* t)(x,\ 0) \overset{\mathbf{Exp}_p}{=} t(p)$，对于 $\lambda = 0$。取 $q = 0$ 和 $r = 2$的特例，可得度量 g 在 M上的拉回的局部描述，将其视为协变二阶张量，则为

$$(\hat{\pi}^* g)(x,\lambda) \overset{\mathbf{Exp}_p}{=} \lambda^{-2}(\mathfrak{f}_\lambda^* g)(x) \tag{4.3}$$

对于足够小的 $\lambda > 0$，它是 $g(p)$，对于 $\lambda = 0$。因此，自然地引入

$$g_\lambda := \lambda^{-2}\mathfrak{f}_\lambda^* g, \tag{4.4}$$

因此，在 U_p中的任意点，我们有 $(g_\lambda)_{ij}(x) = g_{ij}(\mathfrak{f}_\lambda(x))$。由最后一个恒等式并借助 Koszul 公式，Christoffel 符号 $\Gamma_{ij}^k(\cdot,\ g) := g\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^k}\big)$对于任意足够小的正数 λ，满足

$$\Gamma_{ij}^k(\cdot, g_\lambda) = \lambda \Gamma_{ij}^k(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g).$$

类似地，沿测地线平行移动所得的正交标架中读出的 Christoffel 符号 $\tilde{\Gamma}_{ls}^t(\cdot,\ g) := g(\nabla_{e_l} e_s,\ e_t)$ 满足

$$\tilde{\Gamma}_{ls}^t(\cdot, g_\lambda) = \lambda \tilde{\Gamma}_{ls}^t(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g). \tag{4.5}$$

5 几何微分算子

本节将定义相对于给定度量的几何多项式的概念，它们是给定向量丛的光滑截面（定义 5.3），并用相应的标架场来描述（见附录 A）。我们为这些多项式赋予一种称为 Gilkey 阶的阶数，其灵感来自 Gilkey 在不变性理论背景下提出的“喷射阶” [11, 第 2 节。4], 另见 [15,第 3], 二者都使用度量喷射。几何多项式是根据标架场的喷流，因而也是根据度量张量的喷流定义的；而 Gilkey 阶不依赖于度量的选择。如果一个微分算子的系数在局部平凡化中写出后是几何多项式，我们就称该算子为几何微分算子（定义5.8）。命题 5.14证明，相对于 g 进行压缩后，几何多项式仍变换为相对于 $\mathfrak{f}_\lambda$ g_λ的几何多项式。命题5.15证明，几何微分算子也具有类似性质。

5.1 局部截面的赋值

我们回顾一下向量丛喷流的一些基本事实。给定任意向量丛 (E, π, M)，其中 $\pi\colon E \to M$是正交投影，我们令 $\Gamma(E) := C^\infty(M, E)$ 为 E 的截面向量空间，并令 $\Gamma_p(E)$ 为点 p处局部截面的茎[5] 。若 $\Gamma_p(E)$ 中的两个局部截面 s 和 s'在 p 处具有相同的 r-喷流 $(r \in \mathbb{Z}_+)$，则

$$(D^\gamma s)|_p = (D^\gamma s')|_p$$

[5]令 S_U 表示在 M 的开子集 U 上定义且包含 p的 E 的局部截面集合。在点 p 处的局部截面茎是由 $\sim$ 等价类构成的集合，其中，对于 S_U 中的两个元素 s_U 和 S_V中的 s_V，$s_U \sim s_V$ s_U s_V p 当且仅当它们在某个邻域内相等。

对任意满足 $0 \leq |\gamma| \leq r$的多重指标 γ 均成立。关系

$$s \sim s' \iff s \text{ 与 } s' \text{ 在 } p\text{处具有相同的 } r\text{-喷射}$$

定义了一个等价关系，我们用 $j_p^r s$ 表示 s的等价类。整数 r 称为喷射阶数。集合

$$J^r(E) := \left\{ j_p^r s \mid p \in M,\, s \in \Gamma_p(E) \right\}$$

是一个流形，称为 π的第 r喷射流形。三元组 $(J^r(E)\ \pi_r, M)$ 是一个纤维丛，其中π_r：$J^r(E) \to M$；$j_p^r s \mapsto p$并且，在局部坐标中，

$$j_p^r s = (s(p), D^\gamma s|_p; 1 \leq |\gamma| \leq r),$$

可由多项式 $\sum_{|\gamma|\leq r} D^{|\gamma|}s|_p X^\gamma$ 局部表示（此处变量为 X）。参考向量丛 E 通常会被省略，只有在需要时才会提及。

定义5.1。给定点 p处的正规测地坐标系 $X = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$，以及一个非负整数 r，局部截面 $s \in \Gamma_p(E)$ 的 r-赋值定义为

$$\mathrm{val}^r_{X,p}(s) = \min \left\{ |\gamma| \leq r, D^\gamma_X s\big|_p \neq 0 \right\}$$

采用（2.14）中的记号，前提是该最小值存在。否则，按照通常约定，我们令 $\mathrm{val}^r_{X,p}(s) = +\infty$。相应地，我们将 s 的赋值定义为

$$\mathrm{val}_{X,p}(s) = \min_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathrm{val}^r_{X,p}(s) = \min \left\{ |\gamma| \mid D^\gamma s\big|_p \neq 0 \right\} \in [0, +\infty]. \tag{5.1}$$

例5.2。我们取 $E = T^*M \otimes T^*M$，并将 g视为 E的一个截面，它借助 U_p上的正规测地坐标在 U_p上平凡化。在该平凡化下，度量在点 p 附近的展开为

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iklj}\Big|_p x^k x^l - \frac{1}{6} R_{iklj;m}\Big|_p x^k x^l x^m + O\big(|x|^4\big), \tag{5.2}$$

其中 $R_{iklj;m} = (\nabla R)^{miklj}$. 因此，在该平凡化下，$g$ –恒等算子的赋值至少为 2。相比之下，在通过平行移动得到的 E 平凡化下，g –恒等算子的赋值为 $+\infty$。

类似地，逆映射的展开为

$$g^{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{iklj}\Big|_p x^k x^l + \frac{1}{6} R^g_{iklj;t}\Big|_p x^k x^l x^t + O\big(|x|^4\big), \tag{5.3}$$

因此，在这些坐标下，稍微滥用记号可知，g^{-1} –恒等算子的赋值至少为 2。将方程（A.3）与（5.2）（分别将（A.2）与（5.3））结合，可得以下展开式 [1, 方程（11）]

$$a^l_i(x,g) = \delta_{il} - \frac{1}{6} R_{ijkl}(p) x^j x^k - \frac{1}{12} \nabla_t R_{ijkl} x^j x^k x^t + O\big(|x|^4\big)$$

and

$$b^i_l(x,g) = \delta_{il} + \frac{1}{6} R_{ljki}(p) x^j x^k + \frac{1}{12} \nabla_t R_{ljki} x^j x^k x^t + O\big(|x|^4\big).$$

因此，与之前相同，A –恒等算子（分别为 B –恒等算子，见附录 A）的赋值也至少为 2。

最后，结合（5.2）使用 Koszul 公式以及曲率算子的性质，Christoffel 符号 $\Gamma_{ij}^k(\cdot, g) = g\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\big)$ 在点 p 的正规测地坐标中具有以下泰勒展开

$$\Gamma_{ij}^k(x, g) = \frac{1}{3}(R_{iklj}(p) + R_{ilkj}(p))x^l + O\big(|x|^2\big).$$

此外，正交标架 $\tilde{\Gamma}_{ls}^t(\cdot, g) = g(\nabla_{e_l} e_s, e_t)$ 中的 Christoffel 符号具有类似的泰勒展开

$$\tilde{\Gamma}_{ls}^t(x, g) = -\frac{1}{2}R_{list}(p)x^i + O\big(|x|^2\big), \tag{5.4}$$

这表明这两个 Christoffel 符号的赋值都至少为 1。

5.2 标架场射流中的多项式表达式

我们考虑一个秩为 k 的向量丛 $E \to M$，其上配备了仿射联络。我们利用 $\big(x^1, \ldots\ldots, x^n\big)$ 处的测地法坐标，在 U_p 中点 x 的指数邻域 U_p 上平凡化向量丛 E：通过沿测地线 $c(t) = \exp_p(t\mathbf{x})$，$\mathbf{x} \in T_pM$ 的平行移动，将 $x =$ 上方的纤维 E_x（即 $\exp_p(\mathbf{x})$ 处）与点 p 处的纤维 E_p 识别。我们固定 E_p 的一组基 $(s_1(p)\ldots\ldots, s_k(p))$，然后将其平行移动为 $(s_1(x, g)\ldots\ldots, s_k(x, g))$。在此平凡化下，$E$ 的截面可视为取值于固定纤维 E_p 的 U_p 上的光滑函数。

定义 5.3. 若 U_p 上 E 的一个局部截面 s，当 $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j s_j$ 在上述 E 的局部平凡化 $s_j(\cdot, g)$，$j = 1, \ldots, k$ 中写出时，其坐标 $\alpha_j(\cdot, g)$ 是关于度量 g 的标架场的喷射 $A_p(\cdot, g)$ 和 $B_p(\cdot, g)$ 的单项式（分别为多项式），即它们是如下形式的表达式（分别为此类表达式的线性组合），则我们称其为相对于某个度量 g 的几何单项式（分别为多项式）：

$$\prod_{q=1}^{S_j} D^{\beta_q^j}\big((a_j)_{i_q}^{t_q}(\cdot, g)\big) D^{\gamma_q^j}\big((b_j)_{n_q}^{l_q}(\cdot, g)\big), \tag{5.5}$$

其中 $\sum_{q=1}^{S_j} \big|\beta_q^j\big| + \big|\gamma_q^j\big|$ 与 j 无关。在这种情形下，我们将把 $s(\cdot, g)$ 记作形如（5.5）的表达式，并称 $\mathrm{ord}^{\mathrm{Gil}}(s)$ 为其*Gilkey* 阶。

可以观察到，几何多项式这一概念及其 Gilkey 阶在度量 g 的变换 $g \mapsto f^*(\mathrm{e}^{\varphi} g)$ 下保持不变，其中 f 是 M 上的微分同胚，φ 是 M 上的光滑函数。

注 5.4. 当 E 是张量丛的子丛时，我们也可以利用测地法坐标 $\big(x^1, \ldots, x^n\big)$，在 U_p 中一点 p 的指数邻域 U_p 上将其平凡化。由 (A.1)，有 $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{\ell=1}^n a_i^{\ell}(\cdot, g) e_{\ell}(\cdot, g)$ 和 $\mathrm{d}x^i = \sum_{m=1}^n b_l^i(\cdot, g)\, \mathrm{e}^l(\cdot, g)$，其中 $(e_1(\cdot, g) \ldots, e_n(\cdot, g))$ 是 TM 的基，它由将 T_pM 的某个（固定的）标准正交基平行移动得到。将这些关系代入 (4.2)，得到一个表达式：

$$\mathbf{t}(\cdot) = \sum t_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_q} P_{i_1\ldots i_q}^{\ell_1\ldots\ell_q} Q_{m_1\ldots m_r}^{j_1\ldots j_q} e_{\ell_1}(\cdot, g) \otimes \cdots \otimes e_{\ell_q}(\cdot, g) \otimes \mathrm{e}^{m_1}(\cdot, g) \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}^{m_r}(\cdot, g),$$

其中，$P_{i_1\ldots i_q}^{\ell_1\ldots\ell_q}$ 和 $Q_{m_1\ldots m_r}^{j_1\ldots j_q}$ 是形如 (5.5) 的表达式的线性组合。因此，$\mathbf{t}$ 在 (4.2) 中的坐标 $t_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_q}$ 是形如 (5.5) 的表达式的线性组合，当且仅当它在基 $e_{\ell_1}(\cdot, g) \otimes \cdots \otimes e_{\ell_q}(\cdot, g) \otimes \mathrm{e}^{m_1}(\cdot, g) \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}^{m_r}(\cdot, g)$ 下的坐标 $\tilde{t}_{m_1\ldots m_r}^{\ell_1\ldots\ell_q}$ 也是形如 (5.5) 的表达式的线性组合。因此，在这种情况下，我们可以使用任一种平凡化。

下面给出几何多项式的首批示例。

例 5.5。

1. 取 $E = T^*M \otimes_s T^*M$。度量 g 是 E 的一个局部截面。相对于度量 g，它是一个 Gilkey 阶为零的几何单项式，因为它在由正规测地坐标 $x^1, \dots, x^n$ 所诱导的基 $\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ 中的坐标为 $g_{ij}(\cdot) = \sum_{l=1}^n a_i^l(\cdot, g) a_j^l(\cdot, g)$（见方程（A.2））。其逆映射 g^{-1} 也是一个 Gilkey 阶为零的几何单项式，因为 $g^{ij}(\cdot) = \sum_{l=1}^n b_l^i(\cdot, g) b_l^j(\cdot, g)$（见方程（A.3））。

2. 取 $E = T^*M \otimes T^*M \otimes TM$。克里斯托费尔符号是 E 的一个局部截面，相对于度量 g 是一个几何多项式，因为它在由正规测地坐标 $x^1, \dots, x^n$ 所诱导的基 $\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}\,\mathrm{d}x^k$ 中的坐标 $\Gamma_{ij}^k(\cdot, g)$ 由 Koszul 公式给出

$$\Gamma_{ij}^k(\cdot, g) = \sum_{l=1}^n g^{kl}(\cdot) \left(\partial_{x^i}(g_{jl}(\cdot)) + \partial_{x^j}(g_{il}(\cdot)) - \partial_{x^l}(g_{ij}(\cdot)) \right), \tag{5.6}$$

是 Gilkey 阶为一的标架场喷流多项式。

3. 类似地，通过备注 $\tilde{\Gamma}_{ls}^t(\cdot, g) = g(\nabla_{e_l} e_s, e_t)$ 中的方法经平行移动得到的正交标架 $e_1(\cdot, g) \dots, e_k(\cdot, g)$ 中的 Christoffel 符号，读作（采用爱因斯坦求和约定）5.4（采用爱因斯坦求和约定）

$$\tilde{\Gamma}_{ls}^t(\cdot, g) = b_l^i(\cdot, g) b_t^j(\cdot, g) b_s^k(\cdot, g) \Gamma_{ik}^j(\cdot, g) + b_l^i(\cdot, g) b_t^j(\cdot, g) \partial_{x_i} \left(b_t^k(\cdot, g) \right) g_{kj}(\cdot), \tag{5.7}$$

是 Gilkey 阶为一的标架场喷流多项式。

备注 5.6。 由于喷流与复合和微分相容，几何单项式构成一个在微分下封闭的代数。

备注 5.7。 由于方程（A.2）和（A.3）将度量与标架场联系起来，因此我们在例 5.5 中选出的多项式类，与 [2], [8, 定理 1。2] 和 [11, 方程（2.4.3）]中考虑的度量喷流多项式类是一致的。在那里，多项式依赖于度量张量、其逆映射或其逆行列式（见 [2,公式，第 1 项，第 282] 页）以及度量张量的导数。

5.3 几何算子

本小节基于几何多项式的定义，定义向量丛上的几何微分算子。

定义 5.8. 设 E 是 M 上的一个有限秩向量丛，并配备仿射联络。若微分算子 $P = \sum_{|\gamma| \leq m} P_\gamma D^\gamma$ 属于 Diff(M, E)，其阶为 m，且相对于度量 g 是几何的，则称之为几何微分算子；这里，其系数 $P_\gamma(x) \in$ End(E_x)在由 E_p的某个固定基经平行移动所得的基下表示为关于 x 处标架场喷流的几何多项式，并且对所有 γ

$$\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(P_\gamma(x)) = \mathrm{ord}(P) - |\gamma|. \tag{5.8}$$

注 5.9. 与几何截面类似，当 E 是张量丛的子丛时，我们也可以使用 U_p中某一点处的测地法坐标 $\left(x^1, \dots, x^n\right)$，在 p 的指数邻域 U_p 上对其作平凡化。

例 5.10. 对于 $E = \Lambda T^*M$（分别为 $E = \Sigma M$），任意 $X \in TM$ 的协变导数 ∇_X 定义了一个相对于 g 的 1 阶几何算子。

1. 当 $E=\Lambda T^*M$ 时，我们在围绕 $p\in M$ 的正规测地坐标 $(x^1,\dots,x^n)$ 中，将次数为 k 的微分形式 $\alpha=\sum_I \alpha_I \mathrm{d}x^I$ 上的协变导数表示如下（这里 $I=\{i_1<\cdots<i_k\}$）

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\alpha=&\sum_I\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\alpha_I\right)\mathrm{d}x^I\\&+\sum_{t,I}\alpha_I\left(\sum_{s,l=1}^n g\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^{i_s},\mathrm{d}x^l\big)g_{tl}(\cdot)\right)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathrm{d}x^t}_{s^{\text{th}}\text{-slot}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.\end{aligned}$$

这表明$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$是关于度量 g 的一个一阶几何微分算子，其零阶部分$\sum_{m,l=1}^n g\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^{i_s},\mathrm{d}x^l\big)g_{tl}(\cdot)$的系数是 Gilkey 阶为 1 的单项式（5.5）的线性组合。

2. 当 $E=\Sigma M$ 配备由 Levi-Civita 联络诱导的自旋联络时，相应的 $\mathrm{End}(\Sigma_pM)$ 值函数

$$\mathrm{e}^i\cdot_g\colon\ \sigma\mapsto \mathrm{e}^i\cdot_g\sigma,\qquad i=1,\dots,n$$

在 U_p 上沿测地线保持常数，因此在由平行移动诱导的平凡化 [3, 引理 4。14]中。在正规测地坐标 $x^1,\dots,x^n$ 上 U_p，Clifford 乘法算子 $\mathrm{d}x^i\cdot_g$ 是几何算子，因为根据（A.1），它们可写为 $\mathrm{d}x^i\cdot_g=\sum_{l=1}^n b^i_l(\cdot,g)\mathrm{e}^l\cdot_g$.

3. 当 $E=\Sigma M$ 时，作用于从 U_p 到 E_p 的光滑函数的旋量联络 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ 为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}=\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{1}{4}\sum_{s,t}\underbrace{g\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}e_s,e_t\big)}_{\widetilde{\Gamma}^t_{is}(\cdot,g)}\mathrm{e}^s\cdot_g\mathrm{e}^t\cdot_g\tag{5.9}$$

因此，它定义了一个关于 g 的 1 阶几何微分算子。事实上，~系数 $\Gamma^t_{is}(\cdot,g)$ 是从 U_p 取值的光滑实函数，并且根据（5.7），它们是标架场的 Gilkey 阶为 1 的喷流多项式。

命题 5.11. 关于度量 g的几何微分算子的乘积仍是一个几何微分算子。

证明。 事实上，设

$$P:=\sum_{|\gamma|\le\mathrm{ord}(P)}P_\gamma D^\gamma\qquad\text{and}\qquad Q:=\sum_{|\delta|\le\mathrm{ord}(Q)}Q_\delta D^\delta$$

为两个几何算子。它们的复合为

$$PQ=\sum_{|\gamma_1|+|\gamma_2|=|\gamma|}{\sum_\delta}P_\gamma(D^{\gamma_1}Q_\delta)D^{\gamma_2+\delta}.$$

容易验证

$$\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(D^{\gamma_1}P_\delta)=\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(P_\delta)+|\gamma_1|,$$

so

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(P_\gamma(D^{\gamma_1}Q_\delta))+|\gamma_2+\delta|&=\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(P_\gamma)+\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(Q_\delta)+|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\delta|\\&=\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(P_\gamma)+\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(Q_\delta)+|\gamma|+|\delta|\\&=\mathrm{ord}(P)+\mathrm{ord}(Q)=\mathrm{ord}(PQ).\end{aligned}$$

证明至此完成。 ■

注 5.12. 在 [13], 中，作者为作用于旋量丛光滑截面上的线性偏微分算子指定了 Getzler 阶 D，这些算子可表示为如下形式的有限和 ΣM，其中 M 是光滑函数，且每个 $f \cdot D_1 \cdots D_p$ 或者是协变导数 f，或者是 Clifford 乘法算子 D_j，或者是恒等算子。这种算子按照我们的术语称为几何算子，因为它是几何算子 ∇_X与 $X \cdot_g$的乘积（见例 ∇_X5.10）。稍后我们将在例 6.8 中看到，外微分 d 是几何算子，但不具有 的形式。此外，几何算子的概念也可推广到经典伪微分算子，要求其符号的齐次分量满足类似于（5.8）的条件，见 [15]。

下文中，我们再次考虑一个 E 上的 M 秩为 k 、配备了联络 ∇的向量丛。

引理 *5.13.* 设 E 是 M 上的秩为 k 的向量丛，并令 $s(p) \in E_p$，其中$p \in M$为某个固定值。我们将 $s(\cdot, g)$记为 $\Gamma(E)$中的截面，它是沿着与度量 g 对应的指数曲线 $c(t) = \exp_p(tx)$对 $s(p)$进行平行移动而得到的，其中 $x \in B_r \subset T_pM$。我们还将$s(\cdot, g_\lambda)$记为沿着与度量 g_λ对应的指数曲线 $\gamma(t)$对 $s(p)$进行平行移动而得到的截面。则有

$$\overline{s}(\cdot, g_\lambda) = s(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g).$$

证明。 首先，我们注意到，如果 $c(t) = \exp_p(t\mathbf{x})$是与度量 g对应的指数曲线，且 $\mathbf{x} \in B_r \subset T_pM$，那么由 $\gamma\colon I \to U_p$给出的曲线为

$$\gamma(t) := \mathfrak{f}_\lambda \circ c(t) = \exp_p(t\lambda\mathbf{x})$$

也是度量 $\mathfrak{f}_\lambda^* g$ 的指数曲线，度量 g_λ亦然。截面 $s(\cdot, g) \circ \mathfrak{f}_\lambda$沿曲线 $\gamma(t)$ 平行，这是直接由 $s(\cdot, g)$ 沿曲线 $c(t)$ 平行这一事实得出的。现在，利用初始条件和平行移动的唯一性，即可推出结论。■

命题 5.14。 设 E 是 M 上的一个秩为 k的向量丛。设 s 是 E的一个局部截面，它相对于度量 g 是一个几何单项式（或多项式），其 *Gilkey* 阶为阶 $^{\mathrm{Gi}}(s)$。局部截面 $\mathfrak{f}_\lambda^* s$ 相对于度量 g_λ 是一个具有相同 *Gilkey* 阶阶$^{\mathrm{Gi}}(s)$ 的几何单项式（或多项式）。

证明。由于局部截面 s 相对于度量 g是一个几何单项式，因此可将其写为 $s(\cdot, g) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(\cdot, g) s_j(\cdot, g)$，其中 $\alpha_j(\cdot, g)$ 是标架场的射流中的一个单项式。截面 $\mathfrak{f}_\lambda^* s$ 等于 $\mathfrak{f}_\lambda^* s = \sum_{j=1}^k \alpha_j(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)\ g) s_j(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)\ g)$。为了用度量 g_λ表示 $\mathfrak{f}_\lambda^* s$，我们先对附录 A 中引理 A.1 的关系式求微分，

$$a_i^l(\cdot, g_\lambda) = a_i^l(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g) \qquad \text{and} \qquad b_l^i(\cdot, g_\lambda) = b_l^i(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g),$$

从而得到 $\alpha_j(\cdot, g_\lambda) = \lambda^{\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(s)} \alpha_j(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)\ g)$。另一方面，根据引理 5.13，有$s_j(\cdot, g_\lambda) \equiv s_j(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)\ g)$，对所有 j均成立。因此，我们得到

$$\mathfrak{f}_\lambda^* s = \lambda^{-\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(s)} \sum_{j=1}^k \alpha_j(\cdot, g_\lambda) \overline{s}_j(\cdot, g_\lambda).$$

这意味着 $\mathfrak{f}_\lambda^* s$ 关于度量 g_λ 是一个几何单项式，并且 s 与 $\mathfrak{f}_\lambda^* s$ 具有相同的 Gilkey 阶。■

由此可直接得到关于几何微分算子的如下结果。

命题 5.15. 设 E 是 M 上的有限秩向量丛，并配备一个仿射联络。设 P 是 微分算子空间(M, E) 中的一个 m 阶微分算子，且相对于度量 g是几何的。则 微分算子空间(M, E) 中的 m 阶微分算子 $\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P$ 相对于度量 g_λ是几何的。

证明。 若 $P = \sum_{|\gamma|\le m} P_\gamma D^\gamma$，则 $\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P = \sum_{|\gamma|\le m} \mathfrak{f}_\lambda^* P_\gamma \mathfrak{f}_\lambda^\sharp D^\gamma$。由于根据假设，系数 P_γ 是关于度量 g 的几何多项式，因此由前一个命题可知，它们的拉回 $\mathfrak{f}_\lambda^* P_\gamma$ 是关于度量 g_λ 的几何多项式，且其 Gilkey 阶与 P_γ 的相同。由于 $\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P$ 的阶与 P 的阶一致，对任意多重指标 γ，我们有

$$\operatorname{ord}^{\mathrm{Gi}}(\mathfrak{f}_\lambda^* P_\gamma) = \operatorname{ord}^{\mathrm{Gi}}(P_\gamma) = \operatorname{ord}(P) - |\gamma| = \operatorname{ord}\big(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P\big) - |\gamma|,$$

从而 $\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P$ 满足方程（5.8）。 ■

6 Getzler 重标度的几何微分算子

本节重点研究定义 5.8 中给出的、作用于 M、取值于 E 且对应 $E = \Sigma M$（分别为 $E = \Lambda T^*M$）的几何微分算子 $P \in$ 微分算子空间。我们研究它们在压缩 $\mathfrak{f}_\lambda$ 与 (3.2) 中定义的映射 U_λ 的联合作用下的行为，以及所得算子在 λ 趋于零时的极限。为此，我们引入（6.1）中的算子 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}|_{(\cdot,\lambda)}$，以及（6.2）中的算子，其中上标 Ge 表示 Getzler。若当 λ 趋于零时，$\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}|_{(\cdot,\lambda)}$ 存在极限 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$，则称 P 为可重标度的。在 $E = \Lambda T^*M$ 的情形下，我们在命题 6.6 中给出 P 可重标度的充要条件；在 $E = \Sigma M$ 的情形下，我们在命题 6.9 中给出相应条件，并证明极限算子 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$ 的系数是 M 上曲率张量喷流的多项式。对于属于微分算子空间 Diff$(M, \Lambda T^*M)$ 的 P，以及属于 Diff$(M, \Sigma M)$ 的算子，我们分别在定理 6.7 和推论 6.10（针对偶数阶算子）中给出类似于命题 2.5 的局部化公式。这一次，我们的局部化公式涉及局部 n 形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}\ \log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})$，而非局部留数形式 $\omega^{\mathrm{Res}}\ \log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})$。

仿照 (2.17) 和 (2.18)，对于 $P \in$ 微分算子空间$(M, \Lambda T^*M)$ 中阶为 m

$$\mathbb{P}^{\mathrm{Ge}}\big|_{(\cdot,\lambda)} := \lambda^m U_\lambda^\sharp P\big|_{(\cdot)} \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda := \mathfrak{f}_\lambda^\sharp \mathbb{P}^{\mathrm{Ge}}, \tag{6.1}$$

分别对于 $P \in$ 微分算子空间$(M, \Sigma M)$

$$\mathbb{P}^{\mathrm{Ge}}\big|_{(\cdot,\lambda)} := \lambda^m \big(U_\lambda^\sharp \circ c^g(P)\big)\big|_{(\cdot)} \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda := \mathfrak{f}_\lambda^\sharp \mathbb{P}^{\mathrm{Ge}}, \tag{6.2}$$

其中 $U_\lambda^\sharp P$和 $c^g(P)$ 分别由方程 (3.6) 和 (3.11) 给出。

定义 6.1。 我们称微分算子 P属于微分算子空间(M, E)，且 $E = \Lambda T^*M$（分别为 $E = \Sigma M$）在点 p可重标度，当且仅当 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda\big|_{U_p}$在 (6.1)（分别在 (6.2)）中引入的量存在极限 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$，当 λ趋于零时。

注记 6.2。 请注意，可重标度性是一种在点处成立的局部概念，通过局部正规测地坐标来定义。

命题 6.3。 在点 p 处，对于 $E = \Lambda T^*M$（分别为 $E = \Sigma M$），属于 微分算子空间(M, E) 的可重标度算子构成一个子代数。

证明。 设 P_1、P_2是 Diff$(M,\ \Lambda T^*M)$中的两个算子，其阶分别为 m_1和 m_2。由于算子的阶在算子乘积下可加，形式楔积的次数也可加，因此我们有

$$\lambda^{m_1+m_2} \mathfrak{f}_\lambda^\sharp U_\lambda^\sharp (P_1 P_2) = \big(\lambda^{m_1} \mathfrak{f}_\lambda^\sharp U_\lambda^\sharp (P_1)\big)\big(\lambda^{m_2} \mathfrak{f}_\lambda^\sharp U_\lambda^\sharp (P_2)\big).$$

如果 P_1和 P_2是可重标度的，那么当 $\lambda \to 0$时，右侧的极限存在，因此左侧的极限也存在，这表明乘积 P_1P_2是可重标度的。将 $U_\lambda^\sharp$替换为 $U_\lambda^\sharp \circ c^g$，并利用 c^g 是代数态射这一事实，即可得到关于 $E = \Sigma M$的结果。■

以下技术引理将会用到。

引理 6.4. 在局部正规测地坐标 X中，采用 (5.1)中的记号，设 q:=赋值$_{X,p}(h)$ 为局部截面 $h \in \Gamma_p(E)$ 在 p附近的赋值，其中 E 是平凡丛$E := M \times \mathbb{R} \to M$且 $p \in M$。

1. 对任意实数 θ，当 λ趋于零时，表达式 $\lambda^{-\theta} D^\gamma(h \circ \mathfrak{f}_\lambda)$

   - 当且仅当 $\theta \leq \max(|\gamma|, q)$时收敛；
   - 如果 $\theta < \max(|\gamma|, q)$，则它收敛到零。

2。若 $\theta = \max(|\gamma|, q)$，则表达式 $\lambda^{-\theta} D^\gamma(h \circ \mathfrak{f}_\lambda)$ 收敛到 h 在点 p 处泰勒展开中 $\theta - |\gamma|$ 阶项的系数。

证明。 证明基于这样一个事实： $\lambda^{-\theta} D^\gamma(h \circ \mathfrak{f}_\lambda) = \lambda^{|\gamma|-\theta}(D^\gamma h) \circ \mathfrak{f}_\lambda$。根据 q 的定义，我们有 $h = O(|x|^q)$，因此对于 $q \geq |\gamma|$，有 $(D^\gamma h) \circ \mathfrak{f}_\lambda = \lambda^{q-|\gamma|} O\big(|x|^{q-|\gamma|}\big)$。若 $q < |\gamma|$，则有 $(D^\gamma h) \circ \mathfrak{f}_\lambda = O(1)$，由此得证 (1) 和 (2)；注意在收敛情形下，极限对应于泰勒展开中的 $\theta - |\gamma|$ 阶项系数。■

现在我们专门考察一个单项式，比如 P，它是标架场的射流中的单项式，如（5.5）所示，并且用正规测地坐标表示。我们令

$$\Theta^{X,p}_{(x,g)}(P) := \sum_s \max\big(|\beta_s|, \mathrm{val}_{X,p}\big(a^{t_s}_{i_s}(x,g)\big)\big) + \max\big(|\gamma_s|, \mathrm{val}_{X,p}\big(b^{l_s}_{n_s}(x,g)\big)\big).$$

在下文中，我们常常省略对 X、 p、 x、 g 的明确提及，而仅写作 $\Theta(P)$.

例 6.5。

1. 回顾一下，$g_{ij}(x) = \sum_l a^l_i(x, g) a^l_j(x, g)$。我们有 $\Theta(g_{ij}) = 0$，当 $i = j$ 时；否则至少为 2。

2. 利用 Koszul 公式（5.6），Christoffel 符号 $\Gamma^k_{ij}(x, g)$ 可写为 $\Gamma^k_{ij}(x, g) = \sum_l P^l_{i,\,j,\,k}(x, g)$，其中 $\Theta\big(P^l_{i,\,j,\,k}\big) = 1$ 当 $l = i = j = k$ 时；否则至少为 2。

3. 类似地，由关系式（5.7）可将 Christoffel 符号 $\tilde{\Gamma}^t_{ls}(x, g)$ 写成

$$\tilde{\Gamma}^t_{ls}(x,g) = \sum_k P^k_{l,s,t}(x,g)$$

其中 $\Theta\big(P^k_{l,\,s,\,t}\big) \geq 2$。注意，此处 $\Theta\big(P^k_{l,\,s,\,t}\big)$ 不能等于 1，因为这对应于 $l = s = t = k$，从而意味着 $\tilde{\Gamma}^t_{ls}(x, g) = \tilde{\Gamma}^s_{ls}(x, g) = 0$，进而导致矛盾。

命题 6.6。 设 $P \in \mathrm{Diff}(M, \Lambda T^*M)$ 是一个相对于度量 g的 m 阶几何微分算子。在由正规测地坐标 $(x^1 \ldots x^n)$ U_p P $s = \sum_I \alpha_I x^I$ 诱导 $\big(x^I = x^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_{|I|}} \quad I = \{i_1, \ldots, i_{|I|}\}\big)$ 的、围绕 ΛT^*M 中一点 p 的局部平凡化中，算子作用于截面 dd:dd时，得到

$$P\left(\sum_{I \subset \mathbb{N}} \alpha_I \mathrm{d}x^I\right) = \sum_{|\gamma| \leq m} \sum_{I,J \subset \mathbb{N}} (P_\gamma)_{IJ}(\cdot, g) D^\gamma(\alpha_I) \mathrm{d}x^J,$$

其中 $(P_\gamma)_{IJ}(\cdot,g)$ 是式 (5.5)中的多项式。算子 P在一点 p 可重标度，当且仅当 $|J|-|I|\le\Theta((P_\gamma)_{IJ})$成立。在这种情况下，极限重标度算子为

$$\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}=\sum_{|\gamma|\le m}\sum_{|J|-|I|=\Theta((P_\gamma)_{IJ})}(P_\gamma)^{\lim}_{IJ}(p,g)\big((\mathrm{d}x^I)^*\otimes\mathrm{d}x^J\big)D^\gamma,$$

其中

$$(P_\gamma)^{\lim}_{IJ}(p,g)=\lim_{\lambda\to0}\big(\lambda^{|I|-|J|}(P_\gamma)_{IJ}(\cdot,g_\lambda)\big),\qquad\forall I,J\subset\mathbb{N}$$

是黎曼曲率张量的喷流的多项式表达式。

证明。 定理中 P 的局部表达式由备注 5.4、方程（2.16）和（4.2）得出。因此，根据 $U_\lambda^\sharp P=U_\lambda P U_\lambda^{-1}$的定义，我们得到

$$(U_\lambda^\sharp P)\Big(\sum_{I\subset\mathbb{N}}\alpha_I\mathrm{d}x^I\Big)=\sum_{|\gamma|\le m}\sum_{I,J\subset\mathbb{N}}\lambda^{|I|-|J|}(P_\gamma)_{IJ}(\cdot,g)D^\gamma(\alpha_I)\mathrm{d}x^J.$$

由于 P是一个几何微分算子，因此系数（P_γ）$_{IJ}$（$\cdot$，g）属于标架场的喷流，如（5.5）中所示，且 $\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}$（（$P_\gamma$）$_{IJ}$）$+|\gamma|=m$。现在，我们写成

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda(s\circ\mathfrak{f}_\lambda)&=\lambda^m\big(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp U_\lambda^\sharp P\big)(s\circ\mathfrak{f}_\lambda)=\lambda^m\big(U_\lambda^\sharp P\big)(s)\circ\mathfrak{f}_\lambda\\&=\sum_{|\gamma|\le m}\sum_{I,J\subset\mathbb{N}}\lambda^{m+|I|-|J|}(P_\gamma)_{IJ}(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot),g)D^\gamma(\alpha_I)\mathrm{d}x^J\big|_{\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)}\\&=\sum_{|\gamma|\le m}\sum_{I,J\subset\mathbb{N}}\lambda^{|\gamma|+|I|-|J|}(P_\gamma)_{IJ}(\cdot,g_\lambda)\lambda^{-|\gamma|}D^\gamma(\alpha_I\circ\mathfrak{f}_\lambda)\mathrm{d}x^J\circ\mathfrak{f}_\lambda.\end{aligned}\tag{6.3}$$

在最后一个等式中，我们利用了这样一个事实：$(P_\gamma)_{IJ}(\cdot,\ g_\lambda)=\lambda^{\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}(\ (P_\gamma)\ _{IJ})}(P_\gamma)_{IJ}(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)\ g)$。因此，我们推得

$$\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda=\sum_{|\gamma|\le m}\sum_{I,J\subset\mathbb{N}}\lambda^{|I|-|J|}(P_\gamma)_{IJ}(\cdot,g_\lambda)\big((\mathrm{d}x^I)^*\otimes\mathrm{d}x^J\big)\big|_{\mathfrak{f}_\lambda}D^\gamma.$$

现在由附录 A 中的引理 A，我们将 (P_γ) 写作$_{IJ}(\cdot,\ g_\lambda)$

$$\prod_{s=1}^{S}D^{\alpha_s}\big(a_{i_s}^{t_s}(\cdot,g_\lambda)\big)D^{\beta_s}\big(b_{n_s}^{l_s}(\cdot,g_\lambda)\big)=\prod_{s=1}^{S}D^{\alpha_s}\big(a_{i_s}^{t_s}(\cdot,g)\circ\mathfrak{f}_\lambda\big)D^{\beta_s}\big(b_{n_s}^{l_s}(\cdot,g)\circ\mathfrak{f}_\lambda\big).$$

为方便起见，我们省略了对指标 I 和 J的明确说明。将引理 6.4 应用于 $h_a:=a_{i_s}^{t_s}(\cdot,g)$ 和 $h_b:=b_{n_s}^{l_s}(\cdot,g)$，其中 θ_a和 θ_b均为非负整数，且满足 $\theta_a+\theta_b=|J|-|I|$，可知表达式 $\lambda^{-\theta_a}D^\gamma(\mathfrak{f}_\lambda^*h_a)$ 收敛当且仅当 $\theta_a\le\max(|\alpha_s|,q_a)$，其中 $q_a:=\mathrm{val}_{x,p}\big(a_{i_s}^{t_s}(x,g)\big)$，并且当不等式严格成立时，极限为零。若 $\theta_a=\max(|\alpha_s|,q_a)$，则极限是曲率张量的喷流中的一个多项式。对 h_b 和 θ_b也同理。因此，当$\lambda\to0$时，(6.3) 的极限中仅有满足 $\theta_a=\max(|\alpha_s|,q_a)$ 和 $\theta_b=\max(|\beta_s|,q_b)$ 的非零项保留下来，因而 $\Theta((P_\gamma)_{IJ})=|J|-|I|$。这便得到了定理的结论。■

W我们证明局部形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}$在 $E=\Lambda T^*M$ 时的局部化公式。

定理 6.7. 设 *Pin* 微分算子空间$(M,\Lambda T^*M)$是关于度量 g、*Agmon* 角为 θ 的几何微分算子。若 P 可重标度，则

$$\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}(p)=\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})}(x),\qquad\forall x\in U_p,$$

其中 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}:=$ 极限$_{\lambda\to0}\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$。

证明。 将方程（6.1）与方程（3.10）结合可得

$$\tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}(\mathfrak{f}_\lambda(x)) = \tilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(U_\lambda^\sharp(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp P))}(x) = \widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda)}(x),$$

其中我们交换了 $U_\lambda^\sharp$ 和 $\mathfrak{f}_\lambda^\sharp$，这得益于方程（3.8）。由命题 6.6，极限$\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}:=$极限$_{\lambda\to 0}\,\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$存在，由此令上述恒等式中的 λ 趋于零，即可推出定理的结论。■

例 6.8。 外微分 $\mathrm{d}: \Lambda T^*M \to \Lambda T^*M$（以及其 L^2-伴随算子 δ）都不是可重标度算子。事实上，将 d 写成 $=\sum_{j=1}^n \mathrm{d}x^j \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}$ 并利用例 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}$ 中的局部表达式 5.10，对于任意 $\alpha=\sum_I \alpha_I \mathrm{d}x^I$，都有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Big(\sum_I \alpha_I \mathrm{d}x^I\Big) &= \sum_{j,I}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_I\Big)\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^I \\ &\quad + \sum_{t,I}\alpha_I\Big(\sum_{s,l=1}^n g\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathrm{d}x^{i_s},\mathrm{d}x^l\big)g_{tl}(\cdot)\Big)\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \underbrace{\mathrm{d}x^t}_{s^{\mathrm{th}}\text{-slot}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k},\end{aligned}$$

这表明它是一个几何算子。对于右侧第一项求和中不属于 j的 I，我们有 $|J|-|I|=1$ 以及相应的 $\Theta=0$。因此，命题 6.6 中的条件不满足，所以 d 不可重标度。然而，霍奇算子 $\Delta=\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d}$ 是一个几何的可重标度算子。它具有几何性源于命题 5.11。为证明其可重标度性，我们在 ¨上使用 Bochner–Weitzenb k-形式的公式： $\Delta=\nabla^*\nabla+W^{[k]}$，其中 $\nabla^*\nabla$ 由下式给出

$$\nabla^*\nabla = -g^{ij}(x)\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} - \Gamma^k_{ij}(x,g)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\big)$$

并且 $W^{[k]}=\sum_{i,\,j=1}^n e_j^*\wedge(e_i\lrcorner R(e_i,\ e_j))$ 是 Bochner 算子。这里 R 是流形 M 的曲率算子。实际上，将 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ 替换为其表达式并进行一些计算后，可以很容易看出 Δ（我们使用爱因斯坦求和约定）具有如下形式

$$\begin{aligned}\Delta\big(\alpha_I\mathrm{d}x^I\big) = &-g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha_I)\mathrm{d}x^I \\ &-g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha_I)\Gamma^k_{ii_s}g_{tk}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathrm{d}x^t}_{s^{\mathrm{th}}\text{-slot}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}+\cdots.\end{aligned}$$

由于拉普拉斯算子保持次数不变，因此 $|J|-|I|=0\le\Theta$ 始终成立。重标度算子的极限对应于满足 $\Theta=0$的多项式。因此，根据例 Θ中的计算 6.5，我们得到

$$\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}\Big(\sum_I \alpha_I\mathrm{d}x^I\Big) = -\sum_{i,I}\frac{\partial^2\alpha_I}{(\partial x^i)^2}\mathrm{d}x^I.$$

因此，定理6.7 中的局部化公式可应用于 Hodge拉普拉斯算子，我们得到

$$\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\Delta)}(p) = \widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})}(x), \qquad \forall x\in U_p.$$

命题 6.9。 设 $P\in\mathrm{Diff}(M,\Sigma M)$ 是关于度量 g、阶为 m 的几何微分算子。在由平行移动诱导的平凡化 $\{\mathrm{e}^1,\ldots,\mathrm{e}^n\}$ 下，该算子表示为

$$P=\sum_{|\gamma|\le m}\sum_I (P_\gamma)_I(\cdot,g)\mathrm{e}^I\cdot_g D^\gamma, \tag{6.4}$$

其中 $(P_\gamma)_I(\cdot,g)$ 是式 (5.5) 中的多项式，且 $\mathrm{e}^I\cdot_g=\mathrm{e}^{i_1}\cdot_g\cdots\cdot_g\mathrm{e}^{i_k}$ 满足 $i_1<\cdots<i_k$ 且 $|I|=k$。算子 P 当且仅当 $|I|\leq\Theta((P_\gamma)_I)$ 时是可重标度的。在此情形下，式 (6.2) 中的极限重标度算子表示为

$$\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}=\sum_{|\gamma|\leq m}\sum_{|I|=\Theta((P_\gamma)_I)}(P_\gamma)_I^{\lim}(p,g)\mathrm{e}^I\wedge D^\gamma,$$

其中 $(P_\gamma)_I^{\lim}(p,g):=\lim_{\lambda\to0}\big(\lambda^{-|I|}(P_\gamma)_I(\cdot,g_\lambda)\big)$ 是黎曼曲率张量的喷流中的一个多项式表达式。

证明。在 ΣM 的任意局部平凡化中，算子 P 可写为

$$P=\sum_{|\gamma|\leq m}P_\gamma(\cdot,g)D^\gamma,$$

其中 $P_\gamma(\cdot,g)\in\mathrm{End}(\Sigma M)\simeq C\ell(TM)\otimes\mathbb{C}$。在上述由平行移动诱导的正规测地坐标图的局部平凡化中，我们写作

$$P_\gamma(\cdot,g)=\sum_I(P_\gamma)_I(\cdot,g)\mathrm{e}^I.$$

请回忆，取值于 $\mathrm{End}(\Sigma_pM)$ 的函数 $\mathrm{e}^i\cdot_g\colon\sigma\mapsto\mathrm{e}^i\cdot_g\sigma$ 对每个 $i=1,\dots,n$ 在 U_p 上沿测地线为常数，因此在此平凡化中 [3, 引理 4。14]。现在，由于 P 是几何的，我们得到 $(P_\gamma)_I(\cdot,g)$ 属于标架场的射流，如 (5.5) 所示。因此，我们得到 (6.4)。特别地，我们推得

$$c^g(P)=\sum_{|\gamma|\leq m}\sum_I(P_\gamma)_I(\cdot,g)c^g\big(\mathrm{e}^I\big)D^\gamma.$$

现在，我们将方程（6.2）应用于截面 s，得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda^{\mathrm{Ge}}(s\circ\mathfrak{f}_\lambda)&=\lambda^m\big(\mathfrak{f}_\lambda^\sharp U_\lambda^\sharp c^g(P)\big)(s\circ\mathfrak{f}_\lambda)=\lambda^m\big(U_\lambda^\sharp c^g(P)s\big)\circ\mathfrak{f}_\lambda\\&=\sum_{|\gamma|\leq m}\sum_{I\subset\mathbb{N}}\lambda^m(P_\gamma)_I(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot),g)U_\lambda^\sharp\big(c^g\big(\mathrm{e}^I\big)\big)(D^\gamma s)\big|_{\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)}.\\&=\sum_{|\gamma|\leq m}\sum_{I\subset\mathbb{N}}\lambda^{m-|I|}(P_\gamma)_I(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot),g)\lambda^{|I|}U_\lambda^\sharp\big(c^g\big(\mathrm{e}^I\big)\big)\lambda^{-|\gamma|}D^\gamma(s\circ\mathfrak{f}_\lambda)\\&=\sum_{|\gamma|\leq m}\sum_{I\subset\mathbb{N}}\lambda^{-|I|}(P_\gamma)_I(\cdot,g_\lambda)\lambda^{|I|}U_\lambda^\sharp\big(c^g\big(\mathrm{e}^I\big)\big)D^\gamma(s\circ\mathfrak{f}_\lambda).\end{aligned}$$

这里，我们利用了以下事实：

$$(P_\gamma)_I(\cdot,g_\lambda)=\lambda^{\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}((P_\gamma)_I)}(P_\gamma)_I(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot),g)\qquad\text{and}\qquad\mathrm{ord}^{\mathrm{Gi}}((P_\gamma)_I)+|\gamma|=m,$$

因为 $(P_\gamma)_I(\cdot,g)$ 属于标架场的射流。因此，我们推得

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda^{\mathrm{Ge}}=\sum_{|\gamma|\leq m}\sum_{I\subset\mathbb{N}}\lambda^{-|I|}(P_\gamma)_I(\cdot,g_\lambda)\lambda^{|I|}U_\lambda^\sharp\big(c^g\big(\mathrm{e}^I\big)\big)D^\gamma.$$

现在，利用（3.4），可知 $\lambda^{|I|}U_\lambda^\sharp\big(c^g\big(\mathrm{e}^I\big)\big)$ 收敛到 $\mathrm{e}^I\wedge$，当 $\lambda\to0$ 时。此外，根据引理 6.4，项 $\lambda^{-|I|}(P_\gamma)_I(\cdot,g_\lambda)$ 收敛，当且仅当 $|I|\leq\Theta((P_\gamma)_I)$。因此，算子 P 可重标度，当且仅当 $|I|\leq\Theta((P_\gamma)_I$。重标度算子的极限随即容易得到。■

我们证明局部形式 $\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(P)}$ 在 $E=\Sigma M$ 时的局部化公式。

推论 6.10。 设 P属于 微分算子空间$(M,\Sigma M)$，它是关于 *Agmon* 角 θ 的度量 g 的几何微分算子，并且相对于 $\mathbb{Z}_2$分次 $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$是偶的。若 P 可重标度，则有

$$\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim})}(x) = (-2\mathrm{i})^{-n/2}\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(P)}(p), \qquad \forall x \in U_p,$$

其中 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$ ：$=$ 极限$_{\lambda\to 0}\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$其中 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$如 (6.2)。

证明。 利用推论 3.10中的关系，以及 P是可重标度的这一事实，并结合 $j_g \circ \mathfrak{f}_\lambda \to 1$当 $\lambda \to 0$，即可得到结果。 ■

7 狄拉克算子的重标度平方

本节将说明，狄拉克算子 $\not{D}$ （它是几何算子，因此其平方也是几何算子）不可重标度，但其平方可以重标度。随后，我们将上一节的结果应用于 $P = \not{D}^2$，并借助命题 6.9计算 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$。由此可以得到 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\lim}$ 关于 M 的曲率算子 [10]的表达式，如6.10 。接着，我们利用推论 7.1，推导出一个局部化公式，用于计算 $\not{D}^2$的对数的分次留数。

我们回顾一下，自旋流形（M^n， g）上的狄拉克算子是一个一阶微分算子，定义为 $\not{D}$：$=\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^i \cdot_g \nabla_{e_i}$，其中 ∇_{e_i}是沿 e_i方向的自旋丛上的列维-奇维塔协变导数。利用（5.9），可将其写为

$$\not{D} = \sum_{i=l} a^l_i(\cdot,g)\mathrm{e}^i \cdot_g \partial_{x^m} + \sum_{i\neq l} a^l_i(\cdot,g)\mathrm{e}^i \cdot_g \partial_{x^l} + \frac{1}{4}\sum_{i,l,s,t=1}^n \tilde{\Gamma}^t_{ls}(\cdot,g)a^l_i(\cdot,g)\mathrm{e}^i \cdot_g \mathrm{e}^s \cdot_g \mathrm{e}^t \cdot_g .$$

狄拉克算子具有几何性。事实上，上述表达式包含三项之和，每一项都用标架场的喷射 (表示；关于5.5 ，参见例 $\widetilde{\Gamma}$) ，且满足条件（5.8）。然而，它不可重标度。采用命题6.9 中的记号，令 $P = \not{D}$，条件 $|I| \leq \Theta$（$(P_\gamma)_I$）在三项之和的第一项中不成立，因为 $|I| = 1$ 且Θ（$(P_\gamma)_I$）$= 0$。回顾一下，若 a^l_i（·， g）的赋值为零；否则至少为 2。

命题 7.1。 狄拉克算子的平方 $\not{D}^2$ 是一个可缩放几何微分算子。令 P：$=\not{D}^2$，在 $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{Ge}}_\lambda$中的算子 (6.2)，在 ΣM 的点 x 处，通过沿测地线进行平行移动所得到的 U_p 的局部平凡化中读取，收敛于

$$-\sum_i \left(\partial_{x^i} - \frac{1}{8}\sum_{j,s,t} R_{ijst}(p)x^j \mathrm{e}^s \wedge \mathrm{e}^t \wedge\right)^2,$$

其中 $\{e_1(p)\ldots\ldots, e_n(p)\}$ 是一个正交标架 T_pM。

证明。 由于 $\not{D}$ 是几何的，因此根据命题 $\not{D}^2$ 5.11，它的平方也是几何的。现在我们证明它是可重标度的。由于正交标架中向量的 Clifford 乘法 $\mathrm{e}^i\cdot_g$ 在 T_xM上的作用，是由 $\{e_1(p)\ldots, e_n(p)\}$经平行移动得到的，且在 x中为常数，所以下文中我们将简单地记为 $\{e_1,\ldots,e_n\}$。我们使用 Schr¨odinger–Lichnerowicz 公式 [14]将其写为

$$\begin{aligned}\not{D}^2\big|_x &= -\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x)\big(\nabla_{x^i}\nabla_{x^j} - \Gamma^k_{ij}(x,g)\nabla_{x^k}\big) + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}(x)\\ &= -\sum_{i,j=1}^n\sum_{k,l=1}^n g^{ij}(x)\left(\partial_{x^i} + \frac{1}{4}\tilde{\Gamma}^l_{ik}(x,g)\mathrm{e}^k \cdot_g \mathrm{e}^l \cdot_g\right)\sum_{s,t=1}^n\left(\partial_{x^j} + \frac{1}{4}\tilde{\Gamma}^t_{js}(x,g)\mathrm{e}^s \cdot_g \mathrm{e}^t \cdot_g\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij}(x)\Gamma_{ij}^{k}(x,g)\sum_{s,t=1}^{n}\left(\partial_{x^k}+\frac{1}{4}\tilde{\Gamma}_{ks}^{t}(x,g)\mathrm{e}^{s}\cdot_g \mathrm{e}^{t}\cdot_g\right)+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}(x)\\
=&\underbrace{-\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\partial^2_{x^i x^j}}_{\text{(I)}}\underbrace{-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{4}g^{ij}(x)\sum_{s,t=1}^{n}\partial_{x^i}\big(\tilde{\Gamma}_{js}^{t}(x,g)\big)\mathrm{e}^{s}\cdot_g \mathrm{e}^{t}\cdot_g}_{\text{(II)}}\\
&\underbrace{-\sum_{i,j,s,t=1}^{n}\frac{1}{2}g^{ij}(x)\tilde{\Gamma}_{js}^{t}(x,g)\mathrm{e}^{s}\cdot_g \mathrm{e}^{t}\cdot_g\partial_{x^i}}_{\text{(III)}}\\
&\underbrace{-\frac{1}{16}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k\neq l,s\neq t} g^{ij}(x)\tilde{\Gamma}_{ik}^{l}(x,g)\tilde{\Gamma}_{js}^{t}(x,g)\mathrm{e}^{k}\cdot_g \mathrm{e}^{l}\cdot_g \mathrm{e}^{s}\cdot_g \mathrm{e}^{t}\cdot_g}_{\text{(IV)}}\\
&\underbrace{+\sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij}(x)\Gamma_{ij}^{k}(x,g)\left(\partial_{x^k}+\frac{1}{4}\sum_{s,t=1}^{n}\tilde{\Gamma}_{ks}^{t}(x,g)\mathrm{e}^{s}\cdot_g \mathrm{e}^{t}\cdot_g\right)}_{\text{(V)}}+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}(x),
\end{aligned}
$$

其中 Scal 是度量 g的标量曲率。结合方程（A.2）和（5.7）以及 Koszul 公式，我们可以用标架场表示 $\not{D}^2$ 。为避免冗长的计算，我们仅简要说明上式第三项的计算，以表明关系式 $|I|\leq\Theta((P_\gamma)_I)$ 成立。因此，该算子是可重标度的。为证明这个不等式，我们首先注意到 $|I|$ 等于 2。根据例 6.5，(III) 中的系数可以写成标架场的多项式之和，使得相应的 Θ 至少为 2 (，因为与 $\tilde{\Gamma}_{im}^{l}(x,g)$ 相对应的项至少为 2)。利用（4.5）和（5.4），(III) 中重标度算子的极限等于

$$
\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-2}\sum_{i,j,s,t} g_\lambda^{ij}(x)\tilde{\Gamma}_{js}^{t}(x,g_\lambda)\big(\mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}\wedge\big)\partial_{x^i}=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,s,t}\delta^{ij}R_{jkst}(p)x^{k}\big(\mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}\wedge\big)\partial_{x^i}.
$$

对于第一项（I）也可以进行同样的处理，其收敛于 $-\sum_i\partial^2_{x^i}$。第二项（II）收敛于 $\frac{1}{8}\sum_{i,\ j,\ s,\ t}\delta^{ij}R_{ijst}(p)\mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}\wedge$. 第四项（IV）趋于

$$
-\frac{1}{64}\sum_{i,j,k,l,s,t,q}\delta^{ij}R_{iqkl}(p)R_{jlst}(p)x^{q}x^{l}\mathrm{e}^{k}\wedge \mathrm{e}^{l}\wedge \mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}\wedge .
$$

其他各项均收敛于 0。因此，我们 deduce that

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda^{\mathrm{Ge}}=&-\sum_i\partial^2_{x^i}+\frac{1}{8}\sum_{i,j,s,t}\delta^{ij}R_{ijst}(p)\mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,s,t}\delta^{ij}R_{jkst}(p)x^{k}\big(\mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}\wedge\big)\partial_{x^i}\\
&-\frac{1}{64}\sum_{i,j,k,l,s,t,q}\delta^{ij}R_{iqkl}(p)R_{jlst}(p)x^{q}x^{l}\mathrm{e}^{k}\wedge \mathrm{e}^{l}\wedge \mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}\wedge\\
=&-\sum_i\left(\partial_{x^i}-\frac{1}{8}\sum_{j,s,t}R_{ijst}(p)x^{j}\mathrm{e}^{s}\wedge \mathrm{e}^{t}\wedge\right)^2,
\end{aligned}
$$

这证实了一个事实：正如我们在前面繁琐的计算中亲自检验过的那样，该算子是可重标度的。■

我们可以将推论 6.10 应用于狄拉克算子的平方 $P = \not{D}^2$。由于算子 $\not{D}^2$ 是非负自伴算子，因此它有定义良好的对数 $\log_\theta(\not{D}^2)$ （这里 $\theta = \pi$）。因此，我们有

$$\widetilde{\omega}^{\mathrm{Res}}_{\log_\theta(\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{lim}})}(x) = (-2\mathrm{i})^{-n/2}\omega^{\mathrm{sRes}}_{\log_\theta(\not{D}^2)}(p), \tag{7.1}$$

对任意 $x \in U_p$。右侧 Wodzicki 留数的计算十分繁琐。在 [16], 中，它由以下对象的热核渐近展开导出： $\widetilde{\mathbb{P}}^{\mathrm{lim}}$。

一个标架

设 (M^n, g) 是一个黎曼流形。设 $F_p(\cdot, g) := \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ 为 U_p 上由 p 周围的测地坐标构造的笛卡尔标架，如式 (2.3) 所定义。给定 T_pM 在 $p \in \overline{M}$ 处的一个正交基 $e_1(p) \dots, e_n(p)$，我们构造一个局部标准正交标架 $O_p(\cdot, g) := \{e_1(\cdot, g) \dots, e_n(\cdot, g)\}$，它属于 TM，通过沿着短测地线进行平行移动得到，如式 (2.4) 所示。

将基 $F_p(\cdot, g)$ 映射到 $O_p(\cdot, g)$（分别将 $O_p(\cdot, g)$ 映射到 $F_p(\cdot, g)$）的线性映射 $A_p(\cdot, g)$: $TM \to TM$（其逆映射 $B_p(\cdot, g)$）可表示为矩阵 $n \times n$ matrix $A = (a^l_i(\cdot, g))$（分别为 $B = (b^i_l(\cdot, g))$），其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} &= \sum_{l=1}^n a^l_i(\cdot, g) e_l(\cdot, g), \qquad \forall i \in [[1, n]], \\ e_l(\cdot, g) &= \sum_{j=1}^n b^j_l(\cdot, g)\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad \forall l \in [[1, n]]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

此外，我们有

$$\mathrm{d}x^i = \sum_{m=1}^n b^i_l(\cdot, g)\mathrm{e}^l(\cdot, g), \qquad \forall i \in [[1, n]], \qquad \mathrm{e}^l(\cdot, g) = \sum_{j=1}^n a^l_j(\cdot, g)\mathrm{d}x^j, \qquad \forall l \in [[1, n]].$$

采用这些约定，并在不会引起混淆时省略对 p 的显式提及，我们写作 $A(\cdot, g) = \left(a^l_i(\cdot, g)\right)_{i,l}$ 并且有

$$\sum_{l=1}^n a^l_i(\cdot, g) a^l_j(\cdot, g) = g_{ij}(\cdot) \qquad \text{or equivalently } AA^t = G, \tag{A.2}$$

其中 G 的条目为 $g_{ij}(\cdot)$。类似地，我们有

$$\sum_{l=1}^n b^i_l(\cdot, g) b^j_l(\cdot, g) = g^{ij}(\cdot) \qquad \text{or equivalently } B^tB = G^{-1}. \tag{A.3}$$

将式（A.1）中的第一个方程与 e_m 取内积，并代入第二个方程后，得到

$$a^l_i(\cdot, g) = \sum_{l=1}^n g_{ij}(\cdot) b^j_l(\cdot, g) \qquad \text{and} \qquad b^j_l(\cdot, g) = \sum_{l=1}^n g^{ij}(\cdot) a^l_i(\cdot, g). \tag{A.4}$$

第二 在（A.4）中的第二个方程也可通过乘以度量的逆映射推导得出 ic.

引理 *A.1. </style>*在 U_p 和 $\lambda > 0$中的任意一点，我们有

$$a^l_i(\cdot, g_\lambda) = a^l_i(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g) \qquad \textit{and} \qquad b^i_l(\cdot, g_\lambda) = b^i_l(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g).$$

证明。为证明等式 $a_i^l(\cdot, g_\lambda) = a_i^l(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)\ g)$，令 $\{\bar{e}_1(\cdot, g_\lambda)\dots, \bar{e}_n(\cdot, g_\lambda)\}$ 表示相对于度量 g_λ，由 $\{e_1(p)\dots, e_n(p)\}$ 经平行移动得到的正交标架。由引理 5.13 可知 $\bar{e}_i(\cdot, g_\lambda) = e_i(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)\ g)$。相对于度量 g_λ使用 (A.1)，可得

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \mathfrak{f}_\lambda = \sum_{l=1}^{n} a_i^l(\cdot, g_\lambda)\bar{e}_l(\cdot, g_\lambda).$$

此外，(A.1) 应用于点 $\mathfrak{f}_\lambda(\cdot)$ 得到

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \mathfrak{f}_\lambda = \sum_{l=1}^{n} a_i^l(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g)e_l(\mathfrak{f}_\lambda(\cdot), g).$$

比较这两个等式即可得到结果。第二个等式也可用同样的方法证明。■

B 椭圆算子的复幂与对数

设 $E \to M$ 是秩为 k 的向量丛 E，其定义在 M 上。我们考虑正实阶为 m、角为 $\theta \in [0, 2\pi$ 的算子 $Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}(M,\ E)$。对于 $0 < \delta$，我们定义沿射线 L_θ、环绕 Q 的谱的围道：

$$\Gamma_\theta = \Gamma_\theta^1 \cup \Gamma_\theta^2 \cup \Gamma_\theta^3,$$

其中

$$\Gamma_\theta^1 := \left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \delta < r\right\}, \qquad \Gamma_\theta^2 = \left\{\delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \theta - 2\pi < t < \theta\right\}, \qquad \Gamma_\theta^3 = \left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-2\pi)}, \delta < r\right\}.$$

对于任意具有正实阶 $Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}(M,\ E$和 Agmon 角 m 的算子，θ预解式 $\left(Q - \lambda\right)^{-1}$ 是 $L^2(M,\ E)$ 上的有界线性算子，其算子范数为 $O(|\lambda|^{-1})$，当 λ沿围道 Γ_θ周围的扇形区域趋于无穷时成立。对于 $\mathrm{Re}(z) < 0$，柯西积分 [16,方程 (1.5.7.1)]

$$Q_\theta^z := \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\Gamma_\theta} \lambda_\theta^z (Q - \lambda)^{-1}\mathrm{d}\lambda,$$

收敛于 $L^2(M,\ E)$ 上的一个有界线性算子。这里 $\lambda_\theta^z = |\lambda|^z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\arg_\theta\lambda}$，$\arg_\theta\lambda$ 表示 λ 在 $]\theta,\ \theta + 2\pi[$ 中的辐角。对于任意实数 s，它还定义了一个线性算子Q_θ^z：$H^s(M,\ E) \to H^s(M,\ E)$，作用于空间 $C^\infty(M,\ E)$ 的 Sobole夫闭包 $H^s(M,\ E)$；该空间由 E 的光滑截面构成，因此它在 $C^\infty(M,\ E)$ 上诱导一个线性算子。椭圆算子 Q_θ^z 的复幂可扩展至任意满足 $\mathrm{Re}(z) < k$ 的 $z \in \mathbb{C}$，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，方法如下：

$$Q_\theta^z := Q^k Q_\theta^{z-k}, \tag{B.1}$$

从而得到一群定义良好的复幂 Q_θ^z，作用于 $C^\infty(M, E)$（参见 [16,第 1.5.7 节1]）

$$Q_\theta^0 = \mathrm{Id}, \quad Q_\theta^{z+w} = Q_\theta^z Q_\theta^w, \qquad \forall (z, w) \in \mathbb{C}^2.$$

对于 $\mathrm{Re}(z) < 0$，Q_θ^z 的符号为 [16, 公式（4.8.2.6）]

$$\sigma(Q_\theta^z) \sim \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\Gamma_\theta} \lambda_\theta^z (\sigma(Q) - \lambda)^{*-1}\mathrm{d}\lambda,$$

其中， $\sigma(Q)$ 是 Q 的符号，星号表示符号代数中的逆映射，并且

$$\begin{aligned}(\sigma(Q)-\lambda)^{*-1} &= \sigma_L(Q)^{*-1}\big(\sigma(Q)\sigma_L(Q)^{*-1}-\lambda\sigma_L(Q)^{*-1}\big)^{*-1}\\ &= \sigma_L(Q)^{-1}(1+\text{symbol of order}<0)^{*-1}\end{aligned}$$

通过对 ξ 进行展开得到。对于 $\mathrm{Re}(z)<0$，复幂 Q_θ^z 是一个阶为 mz的经典伪微分算子，其符号具有如下渐近展开

$$\sigma(Q_\theta^z)(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_{mz-j}(Q_\theta^z)(x,\xi), \tag{B.2}$$

其中 $\sigma_{mz-j}(Q_\theta^z)(x,\xi)$ 是次数为 $mz-j$ 的正齐次函数，由 [16,公式 (4.8.2.7)]给出：

$$\sigma_{mz-j}(Q_\theta^z)(x,\xi)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\Gamma_\theta}\lambda_\theta^z\sigma_{-m-j}\big((Q-\lambda)^{-1}\big)(x,\xi)\mathrm{d}\lambda. \tag{B.3}$$

对于复数 z，满足 $\mathrm{Re}(z)<k$ 且 $k\in\mathbb{N}$，由 Q_θ^z （B.1）给出的复幂也是一个阶为 mz 的经典伪微分算子的乘积， Q^k 其阶为 mk，且 Q_θ^{z-k} 其阶为 $m(z-k)$。它具有如（B.2）所示的渐近展开，其齐次分量由符号乘积公式 [17,公式 (10.16)]给出：

$$\sigma_{mz-j}(Q_\theta^z)=\sum_{k,a+b+|\alpha|=j}\frac{(-\mathrm{i})^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_{mk-a}\big(Q^k\big)\partial_x^\alpha\sigma_{m(z-k)-b}\big(Q_\theta^{z-k}\big),\qquad\forall j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{B.4}$$

对于 $z_0\in\mathbb{C}$，满足 $\mathrm{Re}(z_0)<0$，并沿用 [16, 公式 (2.6.1.6)], 的记号，我们考虑柯西积分

$$L_\theta(Q,z_0):=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\Gamma_\theta}\log_\theta(\lambda)\lambda_\theta^{z_0}(Q-\lambda)^{-1}\mathrm{d}\lambda,$$

该积分绝对收敛，并定义了一个有界线性算子 $L_\theta(Q,z_0):H^s(M,E)\longrightarrow H^{s-m\,\mathrm{Re}(z_0)^{-\epsilon}}(M,E)$，对任意实数 s 和任意正的 ϵ均成立。与复幂的处理方式相同，我们利用公式 (2.6.1.7)]，将 $L_\theta(Q,z_0)$ 延拓到任意 $k\in\mathbb{N}$ 的 $\mathrm{Re}(z_0)<k$。

$$L_\theta(Q,z_0):=L_\theta(Q,z_0-k)Q^k.$$

从而对满足以下条件的任意 $z_0\in\mathbb{C}$ 定义 $L_\theta(Q,z_0)$

$$L_\theta(Q,z_0)=L_\theta(Q,0)Q_\theta^{z_0}=\log_\theta(Q)Q_\theta^{z_0}.$$

这里我们令 $\log_\theta(Q):=L_\theta(Q,0)$，它定义了一个有界线性算子

$$L_\theta(Q,z_0):\ H^s(M,E)\to H^{s-\epsilon}(M,E)$$

对任意实数 s 及任意 $\epsilon>0$ 均成立。由于 $\log_\theta(\lambda)\lambda_\theta^z=\lambda_\theta^z\log_\theta(\lambda)$，因此改为通过以下方式进行延拓

$$L_\theta(Q,z_0):=Q^kL_\theta(Q,z_0-k),$$

对任意复数 z，都会产生相同的算子族和 $\log_\theta(Q)Q_\theta^z=Q_\theta^z\log_\theta(Q)$。

C 超迹、Berezin 积分与 Getzler 重标度

接下来 [3, 第 3], 节中，我们回顾 Berezin 积分的构造与性质，以及它与超迹的关系，并介绍 Geztler 在微分形式上的重标度。设 V是一个实向量空间。线性映射 $T\colon \Lambda V \to \mathbb{R}$ 称为 Berezin 积分，如果 T在 $\Lambda^k V$上恒为零，其中 $k < n = \dim(V)$。若 V是一个配备内积 g的定向欧几里得向量空间，则存在一个典范的 Berezin 积分，它将 ΛV中的任意元素投影到其 n-形式 $\mathrm{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{e}$分量上，其中 $\{e_1, \dots, e_n\}$是（V， g）的一组标准正交基。我们将此 Berezin 积分记作 T

$$T\big(\mathrm{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{e}^n\big) = 1, \qquad T\big(\mathrm{e}^I\big) = 0 \qquad \text{if } |I| < n.$$

现在考虑（V, g）的 Clifford 代数 $\mathrm{C}\ell(V)$。等距变换 $-\mathrm{Id} \in O(V, g)$ 产生映射

$$\begin{aligned} &\Phi\colon \mathrm{C}\ell(V) \longrightarrow \mathrm{C}\ell(V), \\ &\mathrm{e}^{i_1} \cdot_g \cdots \cdot_g \mathrm{e}^{i_k} \longmapsto (-1)^k \mathrm{e}^{i_1} \cdot_g \cdots \cdot_g \mathrm{e}^{i_k} \end{aligned}$$

其中 $i_1 < \cdots < i_k$。这里的“g”表示关于度量 g 的 Clifford 乘法。映射 Φ 显然满足 $\Phi^2 = \mathrm{Id}$。因此，我们得到 $\mathrm{C}\ell(V)$ 的一个分解，分解为

$$\mathrm{C}\ell(V) = \mathrm{C}\ell(V)^+ \oplus \mathrm{C}\ell(V)^-,$$

其中 $\mathrm{C}\ell(V)^\pm := \{a \in \mathrm{C}\ell(V) \mid \Phi(a) = \pm a\}$。现在给出命题 [3, 命题 3.19] .

命题 C.1。 设 V 是偶数维 n的定向欧几里得向量空间。存在唯一的 $\mathbb{Z}_2$-分次 *Clifford* 模 $S = S^+ \oplus S^-$，使得

$$\mathrm{C}\ell(V) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{End}(S).$$

特别地，维数$S^\pm = 2^{\frac{n}{2}-1}$。此外，我们有 $\mathrm{C}\ell(V)^+ \cdot S^\pm \subset S^\pm$ 以及 $\mathrm{C}\ell(V)^- \cdot S^\pm \subset S^\mp$。因此，我们有如下同构

$$\mathrm{C}\ell(V)^+ \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{End}\big(S^\pm\big).$$

注意， $S^\pm$ 定义为复体积形式 $\omega_{\mathbb{C}} = \mathrm{i}^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^1 \cdot_g \cdots \cdot_g \mathrm{e}^n$ （其中 n 为偶数）对应于特征值 ± 1 的 S 的特征子空间。现在，在 $\mathrm{C}\ell(V) \otimes \mathbb{C}$上有一个自然的超迹，定义如下：

$$\mathrm{str}(a) := \begin{cases} \mathrm{tr}^{S^+}(a) - \mathrm{tr}^{S^-}(a) & \text{if } a \in \mathrm{C}\ell(V)^+, \\ 0 & \text{if } a \in \mathrm{C}\ell(V)^-, \end{cases}$$

其中，与前面一样，tr^E 表示 $\mathrm{End}(E)$上的纤维迹。为了将此超迹与 Berezin 积分联系起来，我们为任意向量 $v \in V^*$ 赋予自同态 $c^g(v) \in \mathrm{End}(\Lambda V)$，它唯一地延拓为代数丛的一个态射

$$c^g\colon \mathrm{C}\ell(V) \longrightarrow \mathrm{End}(\Lambda V) \tag{C.1}$$

由 $c^g(v)\bullet = v \wedge \bullet - v^{\sharp_g} \lrcorner \bullet$定义，其中 $v^{\sharp_g}$ 是 V中与其余向量 v通过升降指标同构对应的向量。符号映射 $\mathbf{s}^g\colon \mathrm{C}\ell(V) \to \Lambda V$是由$\mathbf{s}^g(a) := c^g(a)1$给出的同构。事实上，为证明 $\mathbf{s}^g$ （以及 c^g）是单射，假设对于某个 $a = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\dots i_k} \mathrm{e}^{i_1} \cdot_g \cdots \cdot_g \mathrm{e}^{i_k}$， 有 $\mathbf{s}^g(a) = 0$ 。那么 $c^g(a)1 = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\dots i_k} \mathrm{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{e}^{i_k} = 0$。因此，$a_{i_1\dots i_k} = 0$ ，从而 $a = 0$。$\mathbf{s}^g$ 的双射性来自维数相等。在 [3, 命题 3.21], 中证明了存在唯一的超迹，它与 Berezin 积分之间的关系如下

$$\mathrm{str}(a) = (-2\mathrm{i})^{\frac{n}{2}} (T \circ \mathbf{s}^g)(a). \tag{C.2}$$

对于任意 $a \in \mathrm{C}\ell(V) \otimes \mathbb{C}$。

致谢

第一作者谨向位于格赖夫斯瓦尔德的 Alfried Krupp Wissenschaftskolleg 致以谢意，感谢其提供的支持。我们感谢洪堡基金会资助德国波茨坦大学与黎巴嫩大学以及黎巴嫩贝鲁特美国大学之间的联结计划。我们也感谢各位审稿人提出的非常有帮助的意见。

参考文献

[1] Ammann B., Grosjean J.F., Humbert E., Morel, Aubin不等式的旋量类比, *Math. Z.* **260** 2008 127 151, 0308107 ( ), – arXiv:math.DG/ 。[2] Atiyah M., Bott R., Patodi V.K.，关于热方程和指标定理， *Invent. Math.* **19** (1973)，279–330。[3] Berline N., Getzler E., Vergne M.，热核与狄拉克算子， *Grundlehren Text Ed.*，施普林格，柏林，2004。[4] Bourguignon J.-P., Hijazi O., Milhorat J.-L., Moroianu A., Moroianu S.，黎曼几何与共形几何的旋量方法， *EMS Monogr. Math.*，欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2015。[5] Connes A.，非交换几何，学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1994。[6] Debord C., Skandalis G.，绝热群胚、由 $\mathbb{R}_+^*$ 给出的交叉积与伪微分演算，( )，– arXiv: . 。[7] Debord C., Skandalis G.，李群胚的膨胀构造与 Boutet de Monvel 型演算， *Münster J. Math.* **14** (2021)，1–40，arXiv:1705.09588。[8] Epstein D.B.A.，黎曼流形上的自然张量， *J. Differential Geometry* **10** (1975)，631–645。[9] Freed D.，狄拉克算子讲义，未发表讲义，1987，见 https://web.ma.utexas.edu/ users/dafr/DiracNotes.pdf。[10] Getzler E.，局部 Atiyah–Singer 指数定理的简短证明， *Topology* **25** (1986)，111–117。[11] Gilkey P.B.，不变性理论、热方程与 Atiyah–Singer 指数定理，第 2 版，*Stud. Adv. Math.* 1995 CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，。[12] Higson N.，切群胚与指标定理，载于《数学量子》， *Clay Math. Proc.*，第11卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010，241–256。[13] Higson N., Yi Z.，旋量与切群胚， *Doc. Math.* **24** (2019)，1677–1720，arXiv:1902.08351。[14] Lawson Jr. H.B., Michelsohn M.L.，旋量几何， *Princeton Math. Ser.*，第38卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1989。[15] Mickelsson J., Paycha, 广义拉普拉斯算子的对数留数密度, *J. Aust. Math. Soc.* **90** 2011 53 80, 1008 3039 ( ), – arXiv: . 。[16] Scott S.，伪微分算子的迹与行列式， *Oxford Math. Monogr.*，牛津大学出版社，牛津，2010。[17] Shubin M.A.，伪微分算子与谱理论，施普林格，柏林，2001。[18] van Erp E., Yuncken R.，伪微分演算的群胚方法， *J. Reine Angew. Math.* **756** (2019)，151–182，arXiv:1511.01041。[19] Wodzicki M.，非交换留数。一、基础，载于 K-理论、算术与几何（莫斯科，1984–1986）， *Lecture Notes in Math.*，第1289卷，施普林格，柏林，1987，320–399。