中轴的豪斯多夫和格罗莫夫-豪斯多夫稳定子集

André Lieutier
andre.lieutier
@gmail.com 无隶属机构 普罗旺斯地区艾克斯，法国

Mathijs Wintraecken
mathijs.wintraecken@inria.fr Inria Sophia-Antipolis，蔚蓝海岸大学 法国瓦尔бон 奥地利科学技术研究所 奥地利克洛斯特新堡

arXiv:2303.04014v1 [cs.CG] 7 Mar 2023

摘要

本文介绍一种对中轴进行剪枝的方法，称为（λ，α）-中轴（$\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}$）。我们证明，在较弱的假设下，集合 K的（λ，α）-中轴具有格罗莫夫-豪斯多夫意义下的稳定性。更正式地说，我们证明，若 K和 K'在豪斯多夫（d_H）意义下足够接近，那么 K和 K'的（λ，α）-中轴作为度量空间也彼此接近；也就是说，两者之间的格罗莫夫-豪斯多夫距离（d_{GH}）关于 $d_{GH}\left(\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K), \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K')\right) \lesssim d_H(K, K')^{\frac{1}{4}}$是赫尔德连续的，即 $(\mathrm{ax}(\cdot), \mathrm{ax}(\cdot'))(\cdot, \cdot')$。两个中轴之间的豪斯多夫距离也有上界，为 $d_H(\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K), \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K')) \lesssim d_H(K, K')^{1/2}$。这些定量稳定性结果为基于近似进行中轴的实际计算提供了保证。此外，它们还为在可计算分析背景下研究中轴的可计算性提供了关键要素。

CCS 概念

• **计算理论 → 计算几何**。

关键词

中轴，格罗莫夫-豪斯多夫距离，度量稳定性，可计算分析

ACM 引用格式：
André Lieutier 和 Mathijs Wintraecken。2023。中轴的豪斯多夫稳定子集与格罗莫夫-豪斯多夫稳定子集。载于第*55*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集（*STOC '23*），*2023*年*6*月*20*日至*23*日，美国佛罗里达州奥兰多。ACM，美国纽约，23页。https://doi.org/10. 1145/3564246.3585113

这是被 *STOC '23* 接收的论文完整版。第一部分与 *STOC* 论文几乎完全相同，而第二部分未收录于会议论文中。

第一部分：引言、研究动机及结果的非技术性概述

1 引言

给定欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭子集 K，其中轴记为 $\mathrm{ax}(K)$，是补集 K^c of K 中的点集，其中每个点在 K中至少有两个最近点；或者，等价地，位于其边界 ∂K 上。请注意，此前关于同一主题的论文 [20, 42] 中使用的中轴定义 $\subset \mathbb{R}^n$ 则考虑开子集 O。由于当时中轴被定义为 O 中在补集 O^c 上至少有两个最近点的点集，因此只需令 $K = \mathrm{O}^c$，便可看出两种定义的差异仅在形式上。中轴的性质及其计算已在理论和具体应用领域得到深入研究；综述请参见 [6]，有关形状骨架的一般概念及其计算方法的应用导向综述请参见 [50][1]。

研究中轴稳定性的一个显而易见的动机，是能够保证从精确形状（或理想形状）K的近似形状 K'的中轴 K'中提取的信息（近似）正确。这里的近似误差可能源于物理测量不可避免的精度有限，也可能由舍入或几何数据转换引起的一些微小扰动所致。

研究稳定性的另一个更正式的动机，与其形式化计算有关。事实上，在针对映射 $K \mapsto \mathrm{ax}(K)$提出的大量实用算法中，计算模型通常是隐含的；我们认为，对于这种特别不稳定的对象而言，这会带来问题。有关这一问题的更详尽讨论，请参见第 4.1 节。

为了提高中轴的稳定性，对其进行剪枝或滤波的想法，一直是实用算法中的关键要素，有时虽未明确提出，但始终如此。例如，在 [28]，θ-简化中轴被定义为 K 的中轴上满足以下条件的点 x的集合：K至少有 2 个最近点 $x\ p$，$q \in K$ 且角度$\angle pxq$ 大于 θ。由于有限离散集$S \subset \mathbb{R}^d$的中轴是 S的沃罗诺伊图的（$d-1$）骨架，沿袭 [24]，中 [4, 8]，等开创性研究的做法，点样本的 Voronoi 单元会依据某种参数化准则进行剪枝，即根据最近点集合的外接半径与中轴上该点到其最近投影的距离之间的角度条件或比率条件进行剪枝。

本文旨在为欧几里得空间中一般闭子集的中轴构造可证明稳定的滤过，这一思路承袭自 [20]。例如，[7, 11, 23, 30, 43, 48, 57, 58]提出了其他中轴剪枝方法。每种剪枝方法都有其不足之处（也有其优点）。关于这些方法各自的具体缺陷，[18]进行了更详细的讨论。

STOC '23，*2023*年*6*月*20*日至*23*日，美国佛罗里达州奥兰多© 2023 版权所有归作者所有。出版权授权给 ACM。本文为作者版本，仅供个人使用。请勿再分发。最终版本发表于第*55*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集（*STOC '23*），*2023*年*6*月*20*日至*23*日，美国佛罗里达州奥兰多，https://doi.org/10.1145/3564246.3585113。

[1]遗憾的是，[50] 在该论文的图11中混淆了 θ-中轴和 λ-中轴。

2 临界函数与λ-中轴

本节回顾 [19, 20] 中关于紧集的临界函数及一些相关概念的若干结果。这些结果既是我们证明中的关键要素，也为部分论述提供了灵感。集合 K 的可达半径 是该集合与其中轴之间的最小距离。Federer [27] 引入了可达半径，以便将曲率测度推广到更一般的集合。可达半径也是该集合上局部特征尺寸 [5, 27], 的最小上界；局部特征尺寸是点到中轴的距离。[2] 紧集的临界函数 $\chi_K\colon (0,\infty) \to [0,1]$（[19]和 [12, 第 9]节）旨在量化如何从该集合的豪斯多夫逼近中确定其拓扑；尤其是在可达半径为 0 时，而这在非光滑集中很常见。

对于一点 $x \in \mathbb{R}^n$，我们用 $R_K(x)$ 表示它到 K 的距离，并用 $\mathrm{F}_K(x)$ 表示包围 K 中最接近 x的点的最小球的半径，详情见第 8.2 节。于是，K 的临界函数 χ_K 定义如下：

$$\chi_K(t) \underset{\text{def.}}{=} \inf_{R_K(x)=t} \sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{F}_K(x)}{R_K(x)}\right)^2}. \tag{1}$$

中轴 $\mathrm{ax}(K)$ 可定义为 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $\mathrm{F}_K(x) > 0$的点 x所构成的集合。由此可知，当 K具有正可达时，对于小于可达半径的 t，$\chi_K(t) = 1$。

我们记作

$$K^{\oplus t} \underset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n, d(x,K) \le t\}$$

t的 K偏移集。对于 $t > 0$，该偏移集的拓扑只会在距离函数的临界值处发生变化，也就是说，当 χ_K 消失时对应的值。对于给定的 $\mu \in (0,1]$，μ可达半径（r_μ）定义为

$$r_\mu(K) \underset{\text{def.}}{=} \inf\{t \mid \chi_K(t) < \mu\}.$$

如果 K对某个 $\mu > 0$具有正的 μ可达半径，那么 $K^{\oplus r_\mu}$ 可变形收缩到 K，参见 [34, 定理 12]。注意，r_1（K）是 K的可达半径。

在 [20] 中，引入了 K的 λ-中轴，此处记为 $\mathrm{ax}_\lambda(K)$。中轴是 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $\mathrm{F}_K(x) > 0$的点集；而 K的 λ-中轴是对其进行过滤后的版本，定义为 $\mathbb{R}^n$中满足 $\mathrm{F}_K(x) \ge \lambda$的点集。由于 F_K 是上半连续的，[42, 推论4.7], $\mathrm{ax}_\lambda(K)$是一个闭集。对于给定的滤波（剪枝）参数值 λ，$\mathrm{ax}_\lambda(K)$具有一定的几何稳定性和拓扑稳定性，详情参见 [20] 以及第5节的概述。

中轴是 λ-中轴的极限，其意义如下：$\lambda \le \lambda \Rightarrow \mathrm{ax}_{\lambda'}(K) \supset \mathrm{ax}_\lambda(K)$，并且

$$\bigcup_{\lambda>0} \mathrm{ax}_\lambda(K) = \mathrm{ax}(K). \tag{2}$$

3 结果概述

本文表明，对先前的滤波 $\lambda \mapsto \mathrm{ax}_\lambda(K)$ 采用一种简单的变体，即可得出显著更强的稳定性结论。

[2]这一术语由 Amenta 等人 [5]提出，用于陈述在何种条件下可以根据对一个集合的采样确定其拓扑；不过，Federer [27]早已知晓这一概念。

闭集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的（λ,α）-中轴，在此记作 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$，是该集合的 α-偏移集[3] 的 λ-中轴：

$$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K) \underset{\text{def.}}{=} \mathrm{ax}_\lambda(K^{\oplus\alpha}).$$

这只是另一种类似的中轴滤波方式，其中（2）被替换为

$$\bigcup_{\lambda>0} \bigcup_{0<\alpha<\lambda} \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K) = \mathrm{ax}(K). \tag{35}$$

随后，我们从两个不同方面改进稳定性：首先，对于 λ, $\alpha > 0$，如果 χ_K在某个区间 $[a,b]$上不为零，且满足 $a < \alpha$和 $\alpha + \lambda < b$，那么映射 $(\lambda,\alpha,K) \mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 对输入 K和输出 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 上的（双向）豪斯多夫距离而言是连续的。此外，我们还给出了用 λ、α表示的显式赫尔德指数：对于 $K\colon (\lambda,\alpha,K) \mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$，相对于 λ和 α，赫尔德指数为 1；也就是说，它相对于 λ和 α 是局部利普希茨的（引理 9.4 和引理 9.5）。该映射相对于 K是 ½-赫尔德的（引理 10.7）。

其次，我们将稳定性结果推广到格罗莫夫-豪斯多夫距离，正式定义见第 8.4 节。我们在此证明，连通的 (λ, α)-中轴是欧几里得空间的紧子集，且具有有限测地直径（定理 9.12）。因此，在 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 上配备内在测地距离的 (λ, α)-中轴构成有意义的度量空间。我们证明，将 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 视为度量空间时，在 K 的豪斯多夫距离扰动下具有格罗莫夫-豪斯多夫稳定性；这可表述为映射 (λ, α, K) $\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 关于相应度量的连续性。此外，我们再次在这一新的度量背景下给出赫尔德指数的界：该映射关于 λ 和 α 局部利普希茨（引理 9.14 和 9.15），关于 K 则为 ¼-赫尔德（定理11.1）。

这种格罗莫夫-豪斯多夫稳定性带来了度量稳定性，同时保留补集的同伦类型，并保证豪斯多夫距离稳定性。这是我们所能期望的最强稳定性形式，因为更强的有界弗雷歇距离性质[4] 由于拓扑不稳定性而无法实现。特别是，对一个集合进行微小的光滑变形，就可能改变其中轴的拓扑。

图1展示了三种情形：红色和蓝色的两个形状具有相同的同伦类型，因为它们都可以变形收缩为一个圆；同时，按照豪斯多夫距离衡量，它们彼此接近：红色形状中的任意一点都靠近蓝色形状，反之亦然。在第一个例子中，弗雷歇距离（d_F）和格罗莫夫-豪斯多夫距离（d_{GH}）都很大，因为之字形结构使“尾部”的距离差异显著。由于我们对格罗莫夫-豪斯多夫距离给出了上界（定理11.1），如果红色和蓝色集合分别是两个豪斯多夫距离较小的集合的中轴，就不会出现这种情况。

在图1接下来的两个例子中，红色和蓝色的形状确实分别对应于两个彼此接近的集合的中轴，这里的接近是指

[3] α偏移集记作 $K^{\oplus\alpha}$，记号的解释请参见 (20) 及该公式后的文字。[4]回顾一下，同一度量空间中两个子集 S_1, S_2 之间的弗雷歇距离，是在所有可能的同胚 $h : S_1 \to (,())$ 的下 S_2 确界。因此，当两个形状不同胚时，该距离为无穷大。请注意，我们不考虑集合 S_1 和 S_2的方向。

豪斯多夫距离（以虚线表示）。中间的例子中，中轴相似但不同胚，因此弗雷歇距离为无穷大。最后一个例子中，它们是同胚的，但弗雷歇距离仍然很大（为了实现同胚，你需要将其中一个旋转90◦）。相比之下，正如定理11.1所述，它们之间的格罗莫夫-豪斯多夫距离很小。

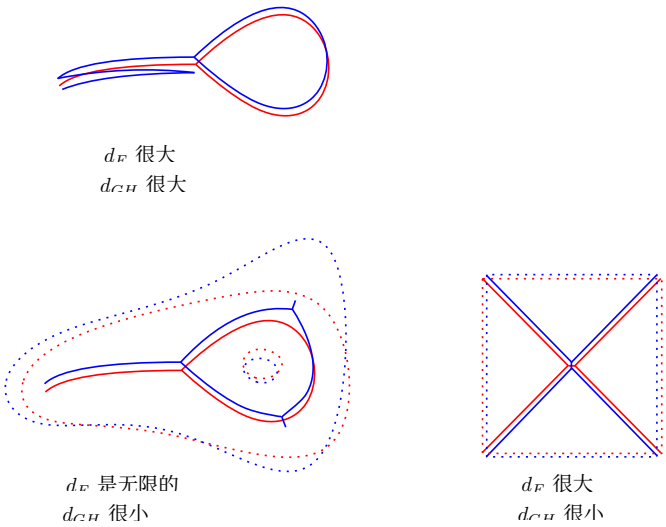


图1：Fréchet（d_F）与格罗莫夫-豪斯多夫（d_{GH}）稳定性的比较。在下面的两个例子中，这些形状是邻近集合（以点线表示）的（λ，α）滤波中轴；正如定理11.1所述，它们之间的格罗莫夫-豪斯多夫距离很小。

非正式地说，格罗莫夫-豪斯多夫稳定性可以看作是对弗雷歇距离的一种弱化，它忽略了小尺度特征。

4 动机

4.1 中轴计算算法与计算模型

从理论上说，中轴是不稳定的 [6]，，因此在实践中往往难以计算。一个典型的不稳定性示例是：当 K^c 是平面上的一个开圆盘时，其中轴是一个点；但对其 C^0 边界进行微分拓扑意义下 [33], 任意小的扰动 C^∞，都可能导致所得中轴发生任意大的扰动（以豪斯多夫距离衡量）。

中轴的计算是指：给定闭集 K的某种表示作为输入，计算 $\mathrm{ax}(K)$ 的某种表示作为输出。下面回顾两种可能的计算模型，在这些模型下，“计算” $K \mapsto \mathrm{ax}(K)$ 的含义各不相同。

在计算几何中，隐式计算模型（有时称为精确计算范式，以便与不切实际的“实数 RAM”计算模型相区别）假设输入和输出都可以用计算机中的有限数据精确表示。这意味着输入和输出必须属于可数集，例如整数、有理数或代数数，或者以它们为基础构造的多项式。给定一组有理点或代数点，或者给定一个顶点坐标为有理数或代数数的多面体，例如，我们知道中轴是一个有限代数复形，因此属于可数集，从而可以在计算机上精确表示。在这些情形下，即使计算中轴可能很困难，采用这种精确计算模型来计算中轴也是有意义的。

可计算分析始于图灵在其 1936 年关于不可判定性的论文中[51, 52], 引入可计算实数这一概念，它在逻辑和理论计算机科学文献中 [10, 14, 31, 37–41, 56], 得到了研究，但其形式体系在应用中往往被忽视。

然而，许多涉及实数和实函数的实际计算中，实际上都隐含着这一点，例如数值分析，其中一个典型例子是有限元方法。在这种情境下，我们认为输入和输出可以属于具有可数邻域基的拓扑空间，通常是具有稠密可数子集的度量空间，称为可分度量空间；因此，这类空间的基数至多与实数集相同。这类度量空间的例子包括：

- 带有自然拓扑的实数（有理数稠密）。
- 带有上确界范数的紧集上的连续函数（根据斯通-魏尔斯特拉斯定理，具有有理系数的多项式稠密）。
- L^p 带有相应 L^p 范数的函数（类）（有理阶梯函数稠密）。
- 赋有豪斯多夫距离的欧几里得空间的紧子集（$\mathbb{Q}^n$ 中的有限点集稠密）。

在这些可分度量空间的情境下，该计算模型中的算法以属于稠密子集的序列作为输入，因此，序列中的每个元素都属于一个可数空间，因而可以有限表示。[6] 随后，它对输入序列中的每个元素进行计算，得到输出序列中的一个元素，使输出序列收敛到输入序列极限的像。这个定义本身假设，输入序列极限的（理论）输出，是输入序列各项的（实际）输出所构成序列的极限。这就是为什么在可计算分析中，只有与极限运算相交换的连续函数才是可计算的[7]。例如，在这一模型中，取整函数只有在非整数处才是可计算的。在十进制表示中，如果小数点后出现无限个连续的 9，算法就会一直读取输入。

回忆一下，连续函数 ω $\omega(0) = 0$，$\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 $\omega(0) = 0$，是映射 $f: X \to Y$ 在度量空间之间的连续模，如果对于所有 $x_1, x_2 \in X$，

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega(d_X(x_1, x_2)).$$

[5]因为只有可数集中的每个元素才能用有限词表示。[6]形式上，稠密集必须是递归可枚举的。[7]事实上，该函数的可计算性还要求映射的连续模也是可计算的，尤其是它趋于 0 的速度不能慢于任何递归函数。

如果希望在可计算分析的背景下控制某种形式的理论算法效率，就需要估计该算子的连续模；该算子将输入上的某种不确定性与输出上由此诱导的不确定性上界相关联。

我们无需在此深入讨论可计算分析的技术细节。我们的贡献在于给出一些明确的连续性模数；在理论方面，这将是可计算分析背景下可计算性和复杂性证明的关键组成部分；而在应用方面，它也为保证实际计算中的某种精度提供了一种方法。事实上，中轴计算的实际实现会在计算过程中进行某种近似。在实际情况下，这一近似过程本身已经内在于数据采集过程中，因为任何物理数值测量都只能达到某种有限精度。其次，算法的实际输入往往是前一个算法的输出，而不能合理地假设前一个算法能够通过递归，从精确输入计算出精确输出：代数数表示上的递归只能在有限的计算深度内实现。当计算过程中执行某种形式的舍入、像素化、小特征消失或滤波时，能够给出其对输出影响的上界似乎是合理的，而且事实上对于可证明正确的算法而言也是必要的。

由于当输入和输出的拓扑都由豪斯多夫距离定义时，$K \mapsto \mathrm{ax}(K)$通常不连续，因此我们看到，对于算子 $K \mapsto \mathrm{ax}(K)$ 的连续性或稳定性，可以有两种表述方式。一种可能是对输入采用更强的拓扑，例如基于 Fréchet 距离或环境微分同胚的形式，这适用于光滑对象及其表示。

另一种可能是考虑滤波中轴，从而对输出采用较弱的拓扑。在此模型中，输入序列以近似形式 $(\tilde{K}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 编码 K，并在豪斯多夫距离下收敛到 K。对于 $\tilde{K}_i$，通常会选择有限点集或（几何）单纯复形（网格/三角剖分）。随着 i 的增加，不仅会向 K_i 添加更多点或单形，还会通过增加坐标中的数字位数，使点/顶点的坐标更加精确。

输出序列以渐进近似的形式编码 $\mathrm{ax}(K)$，即在 λ, α 递减时，对映射 $(\lambda,\mu) \mapsto \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$ 进行渐进近似。这些近似（实际上）收敛，其中 $(\lambda,\alpha) \mapsto \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$ 在（函数空间中的）邻域基由满足 $,\star(f(,),\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(\,))$ 的映射集合 $($ $\lambda\ \alpha\ \mapsto f\ \lambda\ \alpha$ $\lambda\ \alpha > t \Rightarrow ,)\ (,)$ 给出，d λ,α K $< \epsilon$ $\epsilon\ t > 0$ 其中某个 $,.$

这种方法不要求 K 具备任何光滑性。本文聚焦于这种滤波方法，其中集合之间的距离 $d_\star$ 要么是豪斯多夫距离，要么是测地度量空间上的格罗莫夫-豪斯多夫距离。

对中轴的计算，形式化地描述有效类型和算法超出了本文的范围。不过，我们可以就这一方向的后续研究提出一些建议。最简单的模型或许是将有理坐标的有限点集构成的空间视为输入。这些输入共同构成一个可数且递归可枚举的集合，并且自然地赋有豪斯多夫距离。输入集的拓扑完备化给出欧几里得空间中的所有紧子集。相应的输出空间则由沃罗诺伊顶点坐标为有理数的滤波沃罗诺伊图构成。本文证明的赫尔德连续模将使我们能够形式化地陈述该模型的有效性。

该模型也可以在 Scott 域 [1, 26], [3, Chapter 1] 及其相关信息序的背景下形式化。[8] 在此背景下，我们的结果回答了以下问题：如果关于某个紧集 K，我们唯一掌握的信息是它的豪斯多夫逼近 $K\prime$，那么我们能推断出它的中轴 $\mathrm{ax}(K)$ 的哪些信息？

4.2 数学动机：割迹的稳定性。

中轴与割迹密切相关。我们回顾

定义 *4.1*。设 M 是一个光滑（闭）黎曼流形，且 $p \in \mathrm{M}$。对于每个 $v \in T_p\mathrm{M}$，满足 $|v| = 1$，我们可以考虑从 p 沿方向 v 出发的测地线 $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$。设

$\gamma_v\ \tau$ γ_v $\gamma_v\ t$ $|(\,)$ 是沿该 $t \in [0,\pi]$ p

测地线的第一个点，使得测地线 $\{(\,)\}$ 不再是到 的唯一极小测地线。p 的割迹是这些点的集合，其中 v 是 $T_p\mathrm{M}$ 中任意单位长度的向量。

因此，割迹的定义更具一般性，因为它适用于一般的黎曼流形；但另一方面，它的定义范围更受限制，因为它只考虑单个点。[9]

割迹奇异点的稳定性和结构一直受到深入研究。Buchner [16] 推导出了以下结果：

定理4.2. 设 G 为光滑流形上的度量空间，并赋予惠特尼拓扑。每个度量 $g \in G$ 和 $p \in \mathcal{M}$ 都确定一个割迹 $C_{p,g}$。若存在 $W \subset G$ 的一个邻域，使得对于任意 $g\prime \in W$，都存在一个微分同胚 $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 满足 $\Phi(C_{p,g\prime}) = C_{p,g}$，则称割迹 $C_{p,g}$ 稳定。如果$\mathcal{M}$ 的维数较低（≤ 6），那么对于 G的一个开稠密子集，$C_{p,g}$ 是稳定的。

Wall [54] 将这一结果推广到任意维数，但代价是将微分同胚弱化为同胚。Buchner 也在 [17]中描述了割迹奇异点的结构。关于光滑流形中中轴奇异点的类似描述，可参见 [59], , 另见 [44], 以及 [53]。

本文延续了有关割迹和中轴稳定性的研究传统。不过，本文也存在一些显著差异。首先，也是最重要的一点，我们采用度量视角，而非分析视角。这一视角不要求我们区分低维空间和高维空间。考虑到

[8]可以按照 [26], 的方法，将输入和输出度量空间拓扑嵌入为某些 Scott 域的极大元。这样，我们的有界连续性模便可为它们提供有效结构。[9]可为黎曼流形的闭子集定义可达半径和中轴[9, 13, 35, 36]。

其在计算机科学中的应用，尤其是计算几何与拓扑、形状识别、形状分割以及流形学习，我们明确给出了这些常数。

作者目前正利用本文所发展的工具，研究光滑集合的割迹和中轴的稳定性。

5 λ-中轴稳定性概述

在温和条件下，假设 K^c 有界， λ-中轴具有一些良好的稳定性。简而言之：

(1) 当 χ_K 在 $(0, \lambda]$ 上不为零时， λ-中轴保留 K [20,补集的同伦类型 K^c 2],定理 (2) 对输入 K 取豪斯多夫距离，对输出 $\mathrm{ax}_\lambda(K)$ 取单侧Hausdorff距离，我们得到某种连续模。如果 $d_h(K, K\prime)$ 很小，那么 $\mathrm{ax}_\lambda(K)$ 中的点与 $\mathrm{ax}_{\lambda'}(K\prime)$ 中的点“接近”，且这种接近程度可以量化；其中某个 $\lambda\prime < \lambda$ 接近 λ [20, 3]定理。(3) 对于“ λ的正则值”，映射 $K \mapsto \mathrm{ax}_\lambda(K)$ 关于豪斯多夫距离是连续的 [20, 5] 定理。然而，通常情况下，连续模可能任意大。

性质1对 K的豪斯多夫扰动下的同伦类型提供了一定的稳定性，因为在 K的临界函数满足类似条件时，如果 $d_h(K, K\prime)$足够小，那么$K\prime$的偏移集可能与 K [19, 21]具有相同的同伦类型。性质2和3给出了精确的定量稳定性结果，远强于中轴本身仅有的半连续性，参见例如 [6]。

6 贡献：(λ, α)-中轴稳定性的改进

在进入正式证明之前，我们先来直观了解一下(λ, α)-中轴的稳定性。

对于有限集 K，这种稳定性的改善可以得到说明。图2展示了最简单的非平凡情形下的 (λ, α)-中轴，其中 K 由平面上的两个点组成。在这种情况下，只要 λ 严格大于这两点间距离的一半， λ-中轴就为空；而当 λ 小于或等于该值时，它就会变成整条垂直平分线。

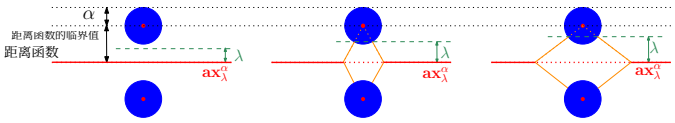


图2：在平面上由两个点组成的特例中，随着 λ增大，比较 λ-中轴与(λ,α)-中轴的演变。 λ-中轴要么是这两个点的整条垂直平分线（当 λ 小于或等于两点间距离的一半时），要么是空集（当其取值较大时）。

λ。**相比之下，随着 λ增大，(λ, α)-中轴（它也是两个半径为 α的圆盘之并集的 λ-中轴）的演变，在豪斯多夫距离意义下随 λ 增大而连续变化。**

相比之下，对于固定的 $\alpha > 0$（此处为 K 的 α-偏移集的两个圆盘的半径），(λ, α)-中轴关于 λ 是豪斯多夫连续的。事实上，随着 λ 增大，当 $\alpha + \lambda$ 等于两点间距离的一半时，$\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$（此前为整条垂直平分线）开始断开，形成一个孔洞。不过，由于孔洞连续扩大，其产生并不会导致豪斯多夫距离不连续。然而，在这一事件附近，孔洞的大小随λ呈二次增长：这并不与映射 $\lambda \mapsto \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 是利普希茨映射这一断言相矛盾，因为该断言的精确条件要求我们避开 $\alpha + \lambda$ 为 χ_K 零点的情形。

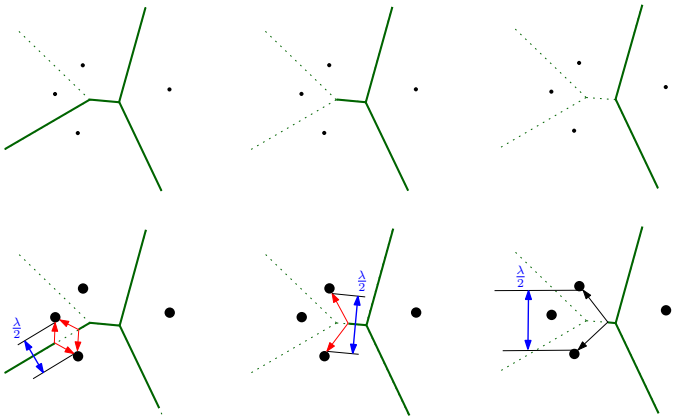


图3：在 K 是平面的有限子集这一特定情形下，随着 λ增大，λ-中轴与(λ, α)-中轴的演变对比。在这种情况下，两个滤波中轴都是沃罗诺伊图边的并集的子集。第二行中，点被半径为 α的圆盘（即点的偏移集）所替代。只要 $\alpha + \lambda$ 不是距离函数的临界值，(λ, α)-中轴的演变就在豪斯多夫意义下连续。另一方面，如第一行所示， λ-中轴恰好包含所有对偶单形位于半径为 λ的球内的沃罗诺伊边或顶点。因此，当λ 取为包围某个德洛内单形的最小球半径时， λ-中轴在该值处豪斯多夫不连续。

图3展示了这样一种情况： K 由平面上的四个点组成。 λ-中轴由满足其对偶德洛内单形的最小外接半径大于或等于 λ的这些边和顶点构成。因此，作为 λ的函数，当 λ 等于某个这样的半径时，它在每个此类取值处都不具豪斯多夫距离连续性。

相比之下，对于固定的$\alpha > 0$，(λ, α)-中轴作为 λ 的函数，仅当 $\alpha + \lambda$ 是临界函数 χ_K的零点时，才会出现豪斯多夫不连续性。我们在图4中描绘了这样一种变化：这里我们进一步增大 λ，直到 $\alpha + \lambda = \rho$；此时， ρ是德劳内图中唯一锐角三角形的外接半径，因此也是与局部极大值对应的到 K 的距离的唯一取值。在 $\alpha + \lambda = \rho$之前，(λ, α)-中轴将包含与这个锐角三角形对偶的沃罗诺伊顶点（对于 $\alpha + \lambda = \rho$，该沃罗诺伊顶点将是一个孤立点）。由于这个点

会在 $\alpha+\lambda>\rho$时从(λ， α)-中轴中消失，因此导致 $\lambda\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 出现豪斯多夫距离不连续性。

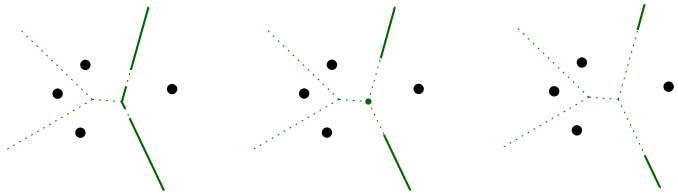


图4：按照图3底行的步骤，(λ,α)-中轴的进一步演变。对于 λ 的一小段取值区间，沃罗诺伊顶点是$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$上的一个孤立点，如中间图所示。当 $\alpha+\lambda$ 等于德劳内三角形外接圆半径时，该点从$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$上消失，这对应于$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 关于豪斯多夫距离的不连续性。

一般而言， $\lambda\mapsto \mathrm{ax}_\lambda(K)$的豪斯多夫距离不连续性可能出现在任意位置，即某些"非正则值"处，正如第5节第3项所述，以及图3顶行（其中λ是 χ_K的一个零点）和图9（其中 λ不是 χ_K的零点）所示。相反，对于 $\alpha>0$，映射 $\lambda\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$在 $\chi_K(\alpha+\lambda)$不为零时是连续的（局部利普希茨），换言之，此时 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$的同伦类型在该区间内保持稳定。

6.1 具有正μ可达半径的集合 $K\subset\mathbb{R}^n$ 及其 Hausdorff逼近 K'

在第一部分中，我们考虑 α偏移集具有正 μ可达半径的集合的一般情形。特别地，引理 10.7 和定理11.1 对集合对 K 和 K' 采用对称表述，以便为映射 $K\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$陈述一个连续模，其中 K 上的度量是豪斯多夫距离，而中轴上的度量可以是豪斯多夫距离或格罗莫夫-豪斯多夫距离。

在本节中，我们考虑更简单的情形：无需对 K取偏移集即可获得正 μ可达半径，即 $r_\mu(K)>0$，并且给定一个集合 K'，它在豪斯多夫距离意义下接近 K。这使我们能够在更简单的背景下简洁地形式化表达主要结果，同时展示一个典型应用。

本节全文中，我们作出如下假设：

假设*6.1*（第*6.1*节的假设）。我们假设 K,K'为闭集，使得对于某些 $\epsilon>0, d_H(K',K)<\epsilon, r_\mu(K)>0$，并且补集 K^c和 K'^c有界：记 $\mathbb{B}(0,R)$ $\mathbb{R}^n$ $R>0$ $K\cup\mathbb{B}(0,R)=K\cup\mathbb{B}(0,R)=\mathbb{R}^n$ 为半径为的球，则有 $(,)\ (,)$。此外，我们假设 $0<\alpha<\alpha_{\max}$ 和 $0<\lambda<\lambda_{\max}$, 其中$\alpha_{\max}+\lambda_{\max}<r_\mu(K)/2$，并记 $\tilde\mu=\min(\mu,\sqrt{3}/2)$。

特别地，假设 $\alpha_{\max}+\lambda_{\max}<r_\mu(K)/2$ 可得 $\tilde\mu$ 的一个简单表达式。

6.1.1 豪斯多夫稳定性。由引理 9.4 和引理 9.5 可得：

命题 6.2。对于任意 $\lambda_{\min}>0$，映射 $\lambda\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$在区间 $[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ 内关于豪斯多夫距离是 $\left(\frac{R^2}{\alpha\lambda_{\min}\tilde\mu^2}\right)$-利普希茨的。

类似地，对于 $\alpha_{\min}>0$，映射 $\alpha\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 在区间 $[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ 内关于豪斯多夫距离是 $\left(\frac{R^2}{\alpha_{\min}\lambda\tilde\mu^2}\right)$-利普希茨的。

现在我们将此结果与 [19, 定理 3.4]中的一个结果结合起来。设 $\mu'<\mu$和 $\alpha>0$。根据 $r_\mu(K)$ 的定义， K的临界函数在区间 $(0,r_\mu(K))$ 上大于 μ。 [19] 的定理 3.4 现在指出，如果 K' 在豪斯多夫距离下充分接近 K，那么 K'的临界函数在区间 $(\alpha, r_\mu(K)-\alpha)$ 上也将大于 μ'，见图 7。换句话说，存在 $\epsilon>0$ 使得：

$$d_H(K',K)<\epsilon\Rightarrow r^\alpha_{\mu'}(K')>r_\mu(K)-\alpha. \tag{3}$$

于是，由引理 10 7 可得：

命题 6.3。 记 $\tilde\mu'=$最小值$(\mu',\sqrt{3}/2)$，则存在仅依赖于 K 的 $\epsilon_{\max}>0$，使得对于 $\epsilon<\epsilon_{\max}$，有：

$$d_H\left(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K'),\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)\right)<\frac{22}{3}\frac{R^2}{\alpha^{\frac12}\tilde\mu'^{\frac32}\lambda}\epsilon^{\frac12}. \tag{4}$$

注意，根据命题的条件，也就是说，当 ϵ 足够小时，由于 [19],, $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K')$、$\mathrm{ax}(K)$ 和 K^c 具有相同的同伦类型（见下文定理 9.7）。

6.1.2 格罗莫夫-豪斯多夫稳定性。引理 9.11 和定理9.12给出了 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 的测地直径的一个明确上界，假设 K^c 连通：

$$\mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K))\le 2\frac{R}{\tilde\mu^2}+2\alpha\left(\left(\frac{4R}{\alpha}\right)^n+1+\frac{2}{\mu}\right)e^{\frac{1}{\mu}+\frac{R}{\alpha\tilde\mu^2}} \tag{5}$$

根据 (3)，当 ϵ 足够小时，GeoDiameter($\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K')$) 也有类似的上界。

此上界关于 $\frac{2R}{\alpha\tilde\mu^2}$ 呈指数增长，因此随着 $\alpha\to0$ 而迅速增大。我们不知道此上界是否接近紧确。[10]

引理 9.14 和 9.15 给出：

命题 6.4。对于任意 $\lambda_{\min}>0$，映射 $\lambda\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 在区间 $[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ 上关于格罗莫夫 - 豪斯多夫距离是 $\left(\frac{R^2(2\alpha_{\min}\lambda_{\min}+D_{\min}\tilde\mu^2}{\alpha^2}\right)$-利普希茨的，其中

$$D=\max_{\lambda\in[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]}\mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)).$$

类似地，对于 $\alpha_{\min}>0$，映射 $\alpha\mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 在区间 $[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ 内关于格罗莫夫-豪斯多夫距离是 $\left(\frac{R(2\overline{\alpha_{\min}+D_{\min}}}{\alpha^2}\right)$- *Lipschitz* 的，其中 $D=\max^{\lambda\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]}$ 测地直径$(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K))$。

请注意，测地直径是 Lipschitz 常数的一个因子。这是因为格罗莫夫-豪斯多夫距离定义为长度差异的全局上界，而在这里，度量的差异主要体现为一个乘法因子。从某种意义上说，度量差异若以加法界与乘法界的混合形式来界定，会更加紧确；而格罗莫夫-豪斯多夫距离只考虑加法差异。将 D 替换为其通用上界 (5)，通常可能会导致 Lipschitz 常数被高估；相比之下，使用实际直径 $D=\max^{\lambda\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]}$ 测地直径$(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K))$ 得到的常数更为准确。

此外，定理11.1给出：

[10]但在实际情况下，这种看法似乎过于悲观。

命题6.5。 记 $\tilde{\mu}_\prime = \min(\mu_\prime\sqrt{3}/2)$，则存在一个仅依赖于 K 的 $\epsilon_{\max} > 0$，使得对于 $\epsilon < \epsilon_{\max}$，有：

$$d_{GH}\left(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K'), \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)\right) < 2\left(\frac{22}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{R^3(2\alpha_{\min} + D)}{\alpha_{\min}^{\frac{7}{4}} \tilde{\mu}'^{\frac{9}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}}\, \epsilon^{\frac{1}{4}}, \quad (6)$$

其中 $D = \max(\mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)), \mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K_\prime)))$。

同样，取 D 上界（5）可得到一个一致上界，在理论上已足够。

要为 $d_{GH}\left(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K_\prime), \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)\right)$求一个更实用的上界，计算 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K_\prime)$的测地直径上界会更容易。例如，如果 $K_\prime$ 是有限的（实际上是 $\mathbb{B}_\circ(0, R)$的补集与一个有限集的并集），就可以确定与$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K_\prime)$对应的沃罗诺伊图某一部分的$(n-1)$-骨架子集的测地直径上界。

6.2 方法

本文中的所有证明都基于从一点 x到 K的距离函数的（广义）梯度流，形式化定义见第 8.2 节。该流此前也曾被用于建立以下结果：

- 中轴与集合 [42]具有相同的同伦类型。
- 针对非光滑集的拓扑保证重建 [19]。

该流在关于 λ-中轴 [20]的研究中也发挥着核心作用。这些工具是为非光滑对象开发的，依赖于基于 μ-可达半径和临界函数的弱正则性性质（第 8.2 节）。我们的稳定性结果依赖于在 K 的 Hausdorff 扰动下，流及其梯度的稳定性；同时，通过量化沿梯度流进入（λ, α）-中轴的速度，假设我们开始时距离（λ, α）-中轴不太远。

7 未来工作

除了本文介绍的稳定性之外，还有若干问题尚未解决。我们不知道连续模是否是最优的，也不知道其他滤过能否为稳定性提供更好的赫尔德指数。更具体地说，由于(λ,α)-中轴关于 λ 和 α 的依赖是利普希茨连续的，因此只有 Lipschitz 常数可以改进。这与映射 $K \mapsto \mathrm{ax}^\alpha_\lambda$的赫尔德指数形成对照：对于豪斯多夫距离，其指数为$_{12}$；对于格罗莫夫-豪斯多夫距离，其指数为$_{14}$，而这些指数可能并非最优。

我们用格罗莫夫-豪斯多夫距离表述的稳定性性质，实际上隐含着一个更强的结论。确实，格罗莫夫-豪斯多夫距离适用于两个彼此独立的度量空间，而我们的两个度量空间还是同一个欧几里得空间中的子集。尽管定理11.1的表述中没有明确指出这一点，当 $d_H(K, K_\prime) < \epsilon$时，(82) 给出了一个 $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ 的上界，用于约束对应点对之间的环境欧几里得距离；该关系对 $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{4}})$ 的格罗莫夫-豪斯多夫距离给出了上界。例如，在右侧的图1中，简单旋转即可定义一种关系，使格罗莫夫-豪斯多夫距离为零（即一种等距变换）；但事实上，我们的构造定义了另一种关系，其中对应点在环境空间中彼此近得多。为了充分表达由流所诱导的稳定性性质，我们应在一项未来工作中引入对格罗莫夫-豪斯多夫距离的改进，使这种关系不仅实现较小的测地度量畸变，还实现较小的环境位移。

第二部分：技术陈述与证明

8 定义与前人工作

本节回顾一些定义和结果，这些内容主要由 [19, 20, 42], 引入，以使本文内容完整自足。

在全文中，K 将是 $\mathbb{R}^n$的一个闭子集，其补集 K^c 有界且连通。K^c 连通这一事实对于中轴呈片状连通至关重要，因此也是得到测地直径界所必需的。反过来，测地直径界又是得到格罗莫夫-豪斯多夫距离界所必需的（我们的界与测地直径成正比）。我们强调，豪斯多夫距离方面的结果并不要求连通性假设。

8.1 同伦等价与弱变形收缩

拓扑空间 X与 Y之间的同伦等价，其中 $Y \subset X$，且从 Y到 X的映射是包含映射，称为弱变形收缩，更正式地说：

定义 *8.1*（弱变形收缩）。如果 $Y \subset X$ 且存在连续映射 H: $[0,1] \times X \to X$，使得：

- $\forall x \in X,\ H(0, x) = x$,
- $\forall x \in X\ H\ 1\ x\ ,(,\ ) \in Y$,
- $\forall y \in Y\ \forall t \in [0,1]\ H_{,}(t,\ y) \in Y$,

那么我们称 H是 X在 Y上的弱变形收缩。特别地，X和 Y具有相同的同伦类型。

8.2 中轴与相关流

我们定义以下与 K相关联、作用于 $\mathbb{R}^n$ 上的函数：

$$x \mapsto R_K(x) \underset{\text{def.}}{=} d(x, K) = \min_{y \in K} d(x, y) \quad (7)$$

$$x \mapsto \Theta_K(x) \underset{\text{def.}}{=} \{y \in K \mid d(x, y) = R_K(x)\}. \quad (8)$$

对于有界集 S，我们用 $\mathrm{center}(S)$ 表示包围 S 的最小球的中心，用 $\mathrm{radius}(S)$ 表示该球的半径。

我们进一步定义：

$$\mathcal{F}_K(x) \underset{\text{def.}}{=} \mathrm{radius}(\Theta_K(x)) \quad (9)$$

并且对于 $x \notin K$：

$$\nabla_K(x) \underset{\text{def.}}{=} \frac{x - \mathrm{center}(\Theta_K(x))}{R_K(x)} \quad (10)$$

K 的中轴 $\mathrm{ax}(K)$ 定义如下：

$$\mathrm{ax}(K) \underset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{F}_K(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sharp(\Theta_K(x)) \geq 2\} \quad (11)$$

其中，$\sharp X$表示集合 X的基数。

当 $x \in K$ 时，有 $\Theta_K(x) = \{x\}$，且 $\mathrm{F}_K(x) = 0$。由此可得 $\mathrm{ax}(K) \subset K^c$。

当 $x \notin K \cup \mathrm{ax}(K)$ 时，$\nabla_K(x)$ 与 Lipschitz函数 $x \mapsto R_K(x)$ 的梯度重合。

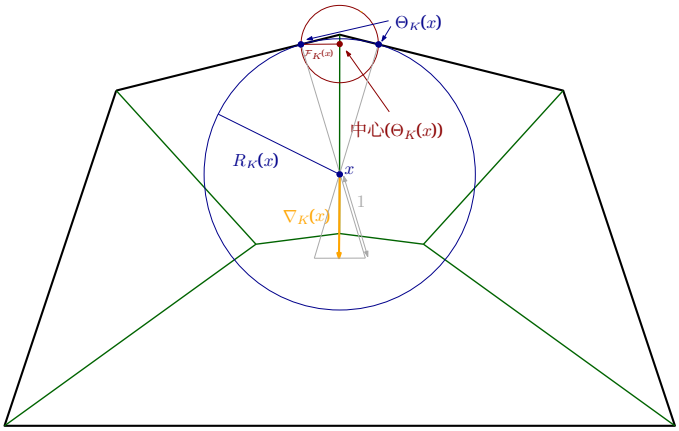


图 5：定义和记号的示意图。集合 K 以黑色表示，中轴以绿色表示。

对于任意 $x \in K^c$，包括 $x \in \mathrm{ax}(K)$ 的情形，$\nabla_K(x)$ 也可以等价地定义为 0 在 Clarke梯度上的投影，参见 [22], of $x \mapsto R_K(x)$。然而，定义（10）在我们的语境下更为方便，并且无需正式引入 Clarke梯度，因为后者较为技术化。因此，我们将 $\nabla_K(x)$ 称为 $x \mapsto R_K(x)$ 的 广义梯度 。借助 $\nabla_K(x)$ 的定义以及毕达哥拉斯定理，可见对于 $x \notin K$ 有：

$$\forall x \in K^c, \quad \|\nabla_K(x)\|^2 = 1 - \left(\frac{\mathcal{F}_K(x)}{R_K(x)}\right)^2. \tag{12}$$

在 [42] 中，我们已经看到存在一个局部利普希茨且因此连续的流 $\Phi_K\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times K^c \to K^c$，使得：

$$\forall x \in K^c, \qquad \Phi_K(0,x) = x$$

$$\forall x \in K^c, \forall t \geq 0, \qquad \frac{d}{dt^+}\Phi_K(t,x) = \nabla_K\left(\Phi_K(t,x)\right) \tag{13}$$

$$\forall x \in K^c, \forall t_1, t_2 \geq 0, \quad \Phi_K\left(t_1, \Phi_K(t_2,x)\right) = \Phi_K(t_1+t_2, x). \tag{14}$$

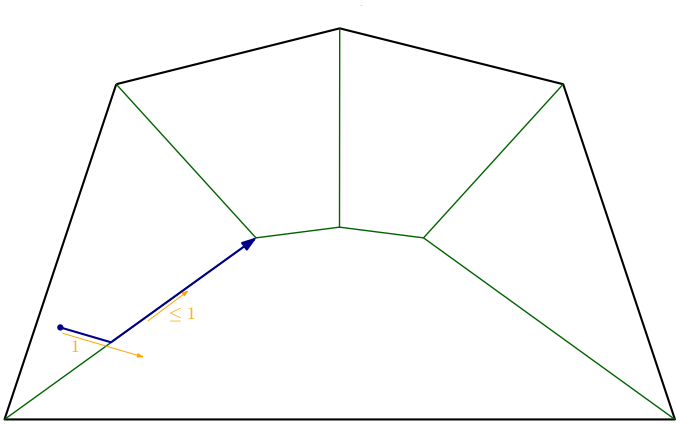


图 6：蓝色路径沿着流前进。橙色向量表示其流沿着$\nabla_K(x)$ Φ_K 前进的向量。为便于观察，这些向量稍作平移，并标出了长度。

在 [42] 中已证明，$\mathrm{ax}(K)$ 与 K^c具有相同的同伦类型。该结果基于这样一个事实：对于一个有限 t，流 Φ_K实现了同伦等价 $K^c \to \mathrm{ax}(K)$（参见定义 8.1）。在 K 是有限集这一特殊情况下，流 Φ_K 等价于诱导出 K的流复形 [29] 的流。

我们进一步回顾以下内容：

Lemma 8.2 (Lemma 4.16 of [42]).

$$\forall t \geq 0, \forall x \in K^c, \quad \frac{d}{dt^+}R_K(\Phi_K(t,x)) = \|\nabla_K\left(\Phi_K(t,x)\right)\|^2. \tag{15}$$

引理 8.3（ [42]的推论 4.7）。映射$\mathcal{F}_K$ 是上半连续的。

引理 8.4（ [42]的引理 4.17）。映射 $t \mapsto \mathcal{F}_K(\Phi_K(t,x))$ 是非递减的（即递增但不一定严格递增），因此根据引理 *8.3*，它是右连续的。

[42] 的引理 4.13 立即推出：

推论 8.5。

$$R_K(x_1), R_K(x_2) \geq \alpha \Rightarrow \|\Phi_K(t,x_2) - \Phi_K(t,x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| e^{\frac{t}{\alpha}}. \tag{16}$$

8.3 临界函数、μ-可达半径与弱特征尺寸

正如我们在第 2 节所见，临界函数 $\chi_K\colon (0,\infty) \to [0,1]$, 定义为

$$\chi_K(t) \underset{\text{def.}}{=} \inf_{R_K(x)=t} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathcal{F}_K(x)}{R_K(x)}\right)^2}. \tag{1}$$

在此情形下，我们约定空集上的下确界为 1。现在我们来探讨这一函数背后的直观含义。在某种意义上，临界函数为向量场 $\nabla_K(x)$ 的范数提供了一个下界，我们沿着该向量场的流 (Φ_K) 前进。图 7 展示了当 K 是 $\mathbb{R}^3$中的一个（空心）正方形时的临界函数。正方形的中轴是一个无限棱柱，它是正方形对角线与垂直于正方形支撑平面的直线的乘积。(1)中的下确界首先在正方形对角线上取得，此处 $\chi_K(t) = 1/\sqrt{2}$，因为在该处 $\mathrm{F}_K(x) = R_K(x)\sqrt{2}$。随后，当偏移集到达正方形中心时，我们得到 $\overline{\mathrm{F}_K(x)} = R_K(x)$，因此 $\chi_K(t) = 0$。此后，偏移集的拓扑发生变化；超过这个临界值后，下确界便在线穿过正方形中心且垂直于正方形支撑平面时取得。

临界函数具有一些关于豪斯多夫距离扰动的稳定性性质 [19, 定理 4.2], 如图 7 所示。若两个集合 K和 K' 在豪斯多夫距离下足够接近，则当 t足够大时，它们的临界函数 $t \mapsto \chi_K(t)$ 和 $t \mapsto \chi_{K'}(t)$ 也彼此接近。

临界函数已在第 2 节中引入，并如图 7 所示。在 [19] 中，紧集 K的临界函数 $\chi_K\colon (0,\infty) \to [0,1]$ 已作定义。我们将其推广至补集有界的闭集 K。

在具有有界补集的闭集 K 上，函数 R_K取得最大值：

$$R_{\max}(K) \underset{\text{def.}}{=} \sup_{x \in K^c} R_K(x) = \max_{x \in K^c} R_K(x). \tag{17}$$

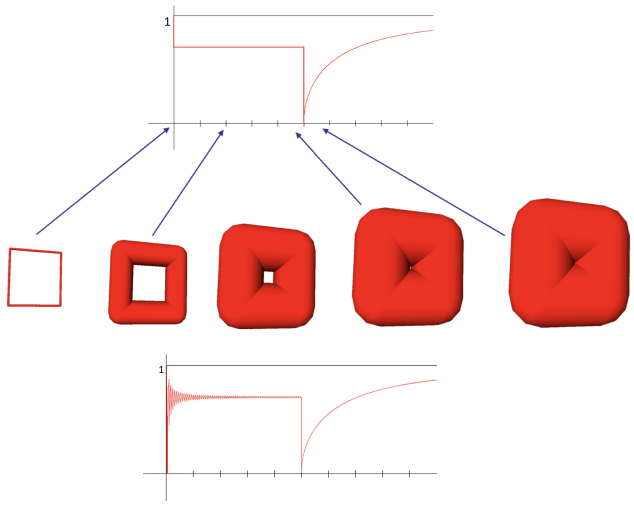


图 7：（改编自 [12]）。上方展示了平面中正方形 K 的临界函数 χ_K，以及到 K的距离所对应的水平集 $R_K^{-1}(t)$；在这些水平集上，对公式 (1) 取下确界。偏移集的拓扑仅在 $\chi_K(t) = 0$ 时发生变化，即当 $t = t_{crit.}$ 时，其中该值为正方形边长的一半。对于 $t \in (0, t_{crit.})$，$\chi_K(t) = 1/\sqrt{2}$，因为对于 $0 < t < t_{crit.}$，(1) 中的下确界为。对于 $t \in (0, t_{crit.})$，有$\chi_K(t) = 1/\sqrt{2}$。这可如下看出：对于 $0 < t < t_{crit.}$，(1) 中的下确界在 $R_K^{-1}(t)$、正方形的支撑平面与中轴的交集上取得。该交集等于正方形的对角线。由毕达哥拉斯定理立即可得 $\mathrm{F}_K(x) = R_K(x)\sqrt{2}$。该值确实严格小于 1，因为正方形的可达半径为 0。

底部给出了集合 K'（此处为有限集）的临界函数，它在豪斯多夫距离意义下接近 K。对于足够大的离集 t，$\chi_{K'}$接近 χ_K。特别地，如果 $d_H(K', K)$相对于 $t_{crit.}$足够小，定理 [19, 定理 4.2] 便为 K'的临界函数提供一个下界，从而保证该函数在$(0, t_{crit.})$的某个子区间上不为零。

K 的临界函数是函数 $\chi_K\colon (0,\ R_{\max}(K)] \to [0,1]$，定义为：

$$\chi_K(t) \underset{\text{def.}}{=} \inf_{R_K(x)=t} \|\nabla_K(x)\|.$$

由式 (15) 可知，$\chi_K(R_{\max}) = 0$。对于 $\mu \in (0,1]$, K 的 μ-可达半径，记作 $r_\mu(K)$，定义为：

$$\begin{aligned} r_\mu(K) &\underset{\text{def.}}{=} \inf\{t \mid \chi_K(t) < \mu\} \\ &= \sup\{r \mid R_K(x) < r \Rightarrow \|\nabla_K(x)\| \geq \mu\}. \end{aligned}$$

对于 $\mu = 1$，$r_1(K)$ 也称为 K 的可达半径。K 的弱特征尺寸，记作 $\mathrm{wfs}(K)$，定义为距离函数的第一个临界值，也就是 χ_K 消失时的第一个值

$$\mathrm{wfs}(K) \underset{\text{def.}}{=} \inf\{t \mid \chi_K(t) = 0\}. \tag{18}$$

由于 $x \mapsto \mathrm{F}_K(x)$ 是上半连续的，参见 [42] 的推论 4.7，χ_K 是下半连续的。χ_K 的下半连续性带来了一些后果：

- 若 $0 < \mathrm{wfs}(K)$，则有 $\chi_K(\mathrm{wfs}(K)) = 0$，因此。这可由下半连续性与弱特征尺寸 (18) 的定义相结合得出。
$$\mathrm{wfs}(K) > 0 \Rightarrow \mathrm{wfs}(K) = \min\{t \mid \chi_K(t) = 0\}.$$
- 根据 $r_\mu(K)$ 的定义（以及 χ_K 的下半连续性），对于任意 $\mu > 0$，都有 $r_\mu(K) < \mathrm{wfs}(K)$。
- 若 $0 < r_\mu(K) \mid \mu > 0 < \infty$ χ_K $r_\mu(K) \mid \mu > 0 = 0$ $K > 0 \Rightarrow$ $r_\mu(K) \mid \mu > 0 > 0$ $\sup\{\ \}$，则 $(\sup\{\ \})$。由于 $\mathrm{wfs}(\ ) \sup\{\ \}$，因此可得：
$$\mathrm{wfs}(K) > 0 \Rightarrow \mathrm{wfs}(K) = \sup\{r_\mu(K) \mid \mu > 0\}. \tag{19}$$

8.4 格罗莫夫-豪斯多夫距离

对于 $\alpha \geq 0$，K 的 α 偏移集记为 $K^{\oplus\alpha}$，是指与 K 的距离至多为 α 的点集：

$$K^{\oplus\alpha} \underset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,K) \geq \alpha\}, \tag{20}$$

其中 $d(x,\ K)$ =定义为 $\inf_{y\in K} d(x,\ y)$ $= \min_{y\in K} d(x,\ y)$。或者，$K^{\oplus\alpha}$ 可以定义为 K 与以 0 为中心、半径为 α 的球的闵可夫斯基和，这也说明了采用 $\oplus$ 这一记号的原因。

欧几里得空间中两个紧子集 A，B 之间的豪斯多夫距离定义为（[15, 第5节30]）：

定义 *8.6*（豪斯多夫距离）。闭集 A 与 B 之间的豪斯多夫距离定义为

$$d_H(A,B) = \inf\left\{\varepsilon,\ A \subset B^{\oplus\varepsilon} \text{ and } B \subset A^{\oplus\varepsilon}\right\}. \tag{21}$$

显然，

$$A \subset B \quad \text{and} \quad B \subset A^{\oplus\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad d_H(A,B) \leq \varepsilon. \tag{22}$$

现在，我们定义两个度量空间 X_1 和 X_2之间的格罗莫夫-豪斯多夫距离。我们遵循 [15, 第5节33],，并对表述作了少许修改以保持兼容。

定义 *8.7*（格罗莫夫-豪斯多夫距离）。两个度量空间 X_1 和 X_2 之间的 ε-关系是一个子集 $\mathrm{R} \subset X_1 \times X_2$，满足：

(1) 对于 $i = 1,\ 2$，R 到 X_i的投影是满射。(2) 若 $(x_1,\ x_2)$，$(x'_1,\ x'_2) \in \mathrm{R}$，则，

$$\left|d_{X_1}(x_1, x'_1) - d_{X_2}(x_2, x'_2)\right| < \varepsilon.$$

若存在一个 ε-关系，使其关联 X_1 和 X_2，则记作$X_1 \simeq_\varepsilon X_2$。我们将 X_1和 X_2 之间的格罗莫夫-豪斯多夫距离定义为

$$d_{\mathrm{GH}}(X_1, X_2) = \inf\{\varepsilon,\ X_1 \simeq_\varepsilon X_2\}. \tag{23}$$

8.5 λ-中轴的拓扑

在 [20] 中，λ-中轴针对 $\lambda > 0$ 的定义如下：

$$\mathrm{ax}_\lambda(K) \underset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{F}_K(x) \geq \lambda\}.$$

根据定义，λ-中轴具有以下性质：

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \mathrm{ax}_{\lambda_1}(K) \subset \mathrm{ax}_{\lambda_2}(K),$$

and

$$\bigcup_{\lambda>0} \mathrm{ax}_\lambda(K) = \mathrm{ax}(K).$$

由引理 8 3 可得： .

引理8.8。 ax_λ（K） </style}是闭集，因此由于 K^c 有界，所以它是紧集。

作为引理 8.4 的推论，利用定义8.1，可以使用流Φ_K 证明：

定理8.9（ [20]的定理2）。如果 $\lambda < \mathrm{wfs}$（K），那么 ax_λ（K）具有 K^c的同伦类型。

8.6 Lipschitz函数的微积分基本定理

与 [20, 42] 中一样，我们将微积分基本定理应用于 Lipschitz函数，尽管该定理通常是在可微函数的背景下表述的。

我们回顾一下，根据定义可以直接得出，Lipschitz函数尤其是绝对连续的，并且：

定理8.10（改编自 [32] 中的定理6.4.2）。若 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$，则以下两个陈述等价。

(a) f 是绝对连续的。
(b) f 在 $[a,b]$, $f\prime \in L^1[a,b]$ 上几乎处处可微，并且

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

8.7 沃尔泰拉积分不等式

除了广义微积分基本定理外，我们还需要关于 Volterra积分的估计。这些估计与 Čaplygin型微分方程的解有关。我们先回顾该结果最简单的版本，参见例如 [46, 第 XI 章第 2 节定理 2],

定理 8.11（Čaplygin）。设 $F(x,t)$ 是一个利普希茨函数，$x = x(t)$ 是一个可微函数，且 $x(0) = x_0$，并且

$$\frac{d}{dt}x(t) \le F(t, x(t)),$$

则 $x(t) \le y(t)$，其中 $y(t)$ 是初值问题 $y(0) = x_0$ 的解，且 $\frac{d}{dt}y(t) = F(t, y(t))$。 —

我们注意到，尽管这一结果归于 Čaplygin，但 Peano 早已知晓该结果；更多信息请参见 [46, 第 316] 页及其中提到的参考文献。

然而，由于我们处理的是不可微函数，因此需要将这一陈述改写为积分形式。为此，我们将调整关于 Volterra积分不等式的一些定义和结果，参见 [55, 第一章], , 另见 [2, 47]。我们先给出以下定义：形如以下形式的积分方程

$$x(t) = g(t) + \int_0^t k(x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

称为Volterra积分方程， $k(x)$是其核。一般而言，这些核可以依赖于 t，但在我们的情形中无需考虑这一点。核k的可容许函数类 $Z_c(k)$由满足 $k(\phi(\tau))$存在且可积的函数 $\phi(\tau)$组成。

如果对其定义域中的所有 $x \le \bar{x}$，核都满足 $k(x) \le k(\bar{x})$，则称核单调递增；如果将两个界限都改为严格不等式时这一性质仍成立，则称核严格单调。我们有：

定理 8.12. 假设 $k(x)$是一个单调递增核，$x(t)$ $y(t) \in Z_c(K)$，且 C_1是一个常数。进一步假设

$$y(t) = C_1 + \int_0^t k(y(\tau))\mathrm{d}\tau$$
$$x(t) \ge C_1 + \int_0^t k(x(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

对定义域中的所有 t，第二个等式仅在 $t = 0$ 时取等号。此外，假设存在一个 $\delta\prime > 0$，使得对所有 $t\prime \in (0, \delta\prime)$，都有 $y(t\prime) < x(t\prime)$。那么对定义域中的所有 t，

$$y(t) \le x(t),$$

其中仅当 $t = 0$时取等号 .

证明。对任意 $t\prime \in (0, \delta\prime)$，结论由假设得出。若断言不成立，则存在一个 $t_0 > 0$，使得 $x(t_0) = y(t_0)$。然而，由于假设 k是单调的，

$$y(t_0) = C_1 + \int_0^{t_0} k(y(\tau))\mathrm{d}\tau \le C_1 + \int_0^{t_0} k(x(\tau))\mathrm{d}\tau < x(t_0).$$

现在即可得出结论 . □

9 (λ, α)-中轴

在本节中，我们定义（λ， α）-中轴，并证明它关于 λ和 α的稳定性。

9.1 定义

容易验证，$\mathrm{ax}(K)$ 中到 K的距离大于 α的子集，与 K的 α-偏移集的中轴 $\mathrm{ax}(K^{\oplus\alpha})$ 重合，

$$\mathrm{ax}(K^{\oplus\alpha}) = \{x \in \mathrm{ax}(K) \mid R_K(x) > \alpha\}.$$

此外，我们注意到

$$R_K(x) > \alpha \Rightarrow R_{K^{\oplus\alpha}}(x) = d\left(x, K^{\oplus\alpha}\right) = d(x,K) - \alpha = R_K(x) - \alpha. \tag{24}$$

根据 Θ_K的定义，当 $y \in \Theta_K(x)$ 时，有 $\|y - x\| = R_K(x)$，见式（8）。利用这两个观察结果以及 Θ_K的定义，我们看到 $\Theta_K(x)$ 与 $\Theta_{K^{\oplus\alpha}}$之间存在如下关系，

$$y \in \Theta_K(x) \iff x + R_{K^{\oplus\alpha}}(x)\frac{y-x}{R_K(x)} \in \Theta_{K^{\oplus\alpha}}(x),$$

ass假设 $R_K(x) > \alpha$. 因此，在相同条件下 ，

$$(\Theta_{K^{\oplus\alpha}}(x) - x) = \frac{R_{K^{\oplus\alpha}}(x)}{R_K(x)}(\Theta_K(x) - x), \tag{25}$$

由此得到

$$\mathcal{F}_{K^{\oplus\alpha}}(x) = \mathrm{radius}\left(\Theta_{K^{\oplus\alpha}}(x)\right) = \frac{R_{K^{\oplus\alpha}}(x)}{R_K(x)}\mathrm{radius}\left(\Theta_K(x)\right), \tag{26}$$

从而

$$\mathrm{center}\left(\Theta_{K^{\oplus\alpha}}(x)\right) - x = \frac{R_{K^{\oplus\alpha}}(x)}{R_K(x)}\left(\mathrm{center}\left(\Theta_K\right) - x\right).$$

根据定义 (9) 和 (10)，我们发现

$$R_K(x) > \alpha \Rightarrow \nabla_{K^{\oplus\alpha}}(x) = \nabla_K(x),$$

这进而意味着流 Φ_K和 $\Phi_{K^{\oplus\alpha}}$在$\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$中重合。

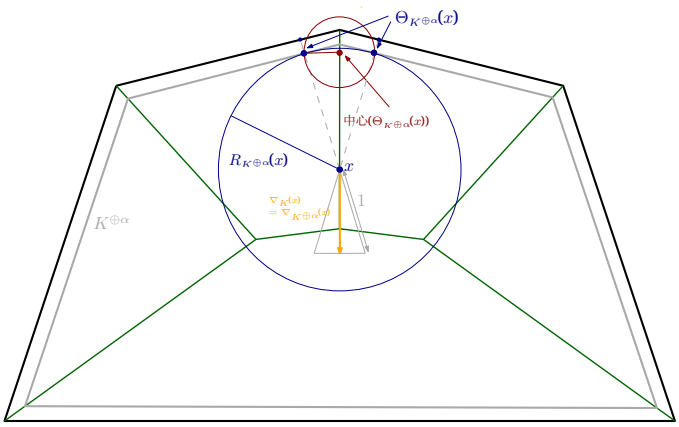


图8：定义和记号的示意总览。集合 $K^{\oplus\alpha}$ 以灰色标示。

We introduce the map $\mathcal{F}_K^\alpha : \left(K^{\oplus\alpha}\right)^c \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ as

$$\mathcal{F}_K^\alpha \underset{\text{def.}}{=} \mathcal{F}_{K^{\oplus\alpha}}. \tag{27}$$

因此，由 (9)、(24)、(25) 和 (26) 可得，对于 $x \in \left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$，即 $R_K(x) > \alpha$，有：

$$\mathcal{F}_K^\alpha(x) = \frac{R_K(x)-\alpha}{R_K(x)}\mathcal{F}_K(x). \tag{28}$$

K 的 (λ,α)-中轴记为 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$，它是 K 的 α-偏移集的 λ-中轴

$$\begin{aligned}\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K) &\underset{\text{def.}}{=} \mathrm{ax}_\lambda(K^{\oplus\alpha})\\ &= \{x\in\mathbb{R}^n \mid \mathcal{F}_K^\alpha(x)\geq\lambda\}. \qquad \text{(by (27))}\end{aligned} \tag{29}$$

注意，引理8.8可以推广到 K 的 (λ,α)-中轴，因此它也是紧的。

由于对于 $r \geq \alpha$，映射 $r \mapsto \frac{r-\alpha}{r}$是递增的，由 (15)、引理 8.4 和 (28) 可得

$$t \mapsto \mathcal{F}_K^\alpha(\Phi_K(t,x)) \text{ is not decreasing.} \tag{30}$$

事实上，只要 $\|\nabla_K(\Phi_K(t,x))\|>0$，$\alpha>0, t\mapsto R_K(\Phi_K(t,x))$ 就严格递增；此外，映射 $t\mapsto \mathrm{F}_K^\alpha(\Phi_K(t,x))$ 也严格递增，这一点将在下文的 (44) 中量化。

(30) 中的单调性，加上 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 的定义，意味着在流的作用下，$\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 映射到其自身：

$$\forall t\geq 0,\ \Phi_K(t,\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K))\subset \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K). \tag{31}$$

注意，对于 $\lambda>\alpha$，有

$$x\in\mathrm{ax}_\lambda(K)\Rightarrow R_K(x)\geq\mathcal{F}_K(x)\geq\lambda. \tag{32}$$

因此，如果 $x\in\mathrm{ax}_\lambda(K)$，由 (28) 可得

$$\mathcal{F}_K^\alpha(x)=\frac{R_K(x)-\alpha}{R_K(x)}\mathcal{F}_K(x)\geq\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}\mathcal{F}_K(x).$$

因此，

$$\begin{aligned}x\in\mathrm{ax}_\lambda(K)&\Rightarrow\mathcal{F}_K(x)\geq\lambda\Rightarrow\mathcal{F}_K^\alpha(x)\geq\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}\lambda=\lambda-\alpha\\ &\Rightarrow x\in\mathrm{ax}_{\lambda-\alpha}^\alpha(K).\end{aligned}$$

这又意味着，若 $\lambda>\alpha$，则有，

$$\mathrm{ax}_\lambda(K)\subset\mathrm{ax}_{\lambda-\alpha}^\alpha(K)\subset\mathrm{ax}_{\lambda-\alpha}(K) \tag{33}$$

$$\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)\subset\mathrm{ax}_\lambda(K)\subset\mathrm{ax}_{\lambda-\alpha}^\alpha(K), \tag{34}$$

并且对于任意满足 $0<c<1$ 的 c，有：

$$\bigcup_{\lambda>0}\bigcup_{0<\alpha<\lambda}\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)=\bigcup_{\lambda>0}\mathrm{ax}_\lambda^{c\lambda}(K)=\mathrm{ax}(K). \tag{35}$$

由 (28) 和 (29) 可知，$(\lambda,\ \alpha)\ \mapsto \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 关于包含序递减：

$$\lambda_1\leq\lambda_2,\alpha_1\leq\alpha_2\Rightarrow\mathrm{ax}_{\lambda_2}^{\alpha_2}(K)\subset\mathrm{ax}_{\lambda_1}^{\alpha_1}(K). \tag{36}$$

9.2 在 λ 扰动下，(λ,α)-中轴是豪斯多夫稳定的

本节旨在说明，(λ,α)-中轴不会受到太大的不稳定性影响。本小节讨论关于λ的稳定性（引理 9.4），下一小节则专门讨论关于 α的稳定性（引理 9.5）。

我们先引入(α,μ)-可达半径。

定义*9.1*。对于 $\mu\in$（$0,1]$ 和 $\alpha\geq 0$），K的(α,μ)-可达半径记为$r_\mu^\alpha(K)$，定义如下：

$$r_\mu^\alpha(K)\underset{\text{def.}}{=}\inf\{t>\alpha,\ \chi_K(t)<\mu\}=\alpha+r_\mu(K^{\oplus\alpha}).$$

我们需要一个简单的引理，为 $x\in\left(K^{\oplus\alpha'}\right)^c\setminus\mathrm{ax}_\lambda^\alpha$且 $0<\alpha'$，$\leq\alpha$时 $\|\nabla_K(x)\|$的范数给出下界。为了陈述这个结果，我们定义：

$$\tilde{\mu}_{\mu,\lambda}^{\alpha,\alpha'}(K)\underset{\text{def.}}{=}\min\left(\mu,\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{r_\mu^{\alpha'}(K)-\alpha}\right)^2}\right). \tag{37}$$

引理 9.2. 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c的补集，且 α、$\lambda>0$、 $\mu\in(0,1]$和 α'满足 $0<\alpha'\leq\alpha$且 $r^{\alpha'}(K)>\alpha+\lambda$。
μ
For any $x\in\left(K^{\oplus\alpha'}\right)^c\setminus\mathrm{ax}_\lambda^\alpha$, *one has*

$$\|\nabla_K(x)\|\geq\tilde{\mu},$$

其中

$$\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_{\mu,\lambda}^{\alpha,\alpha'}(K)>0.$$

证明。由于下界 $\tilde{\mu}$被定义为两个值中的最小值，我们区分两种情况：

- If $R_K(x)<r_\mu^{\alpha'}(K)$ then by definition of $r_\mu^{\alpha'}$ one has $\|\nabla_K(x)\|\geq\mu$.

• 如果 $R_K(x) \geq r^{\alpha,\mu}(K)$，那么 $R_{K^{\oplus\alpha}}(x) \geq r^{\alpha,\mu}(K) - \alpha$。由于 $x \notin \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}$，可得 $\mathrm{F}_{K^{\oplus\alpha}}(x) = \mathrm{F}^{\alpha}_{\lambda}(x) < \lambda$。结合 (12)，我们得到，

$$\begin{aligned}\|\nabla_K(x)\| &= \|\nabla_{K^{\oplus\alpha}}(x)\| \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{F}_{K^{\oplus\alpha}}(x)}{R_{K^{\oplus\alpha}}(x)}\right)^2} \\ &> \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{r^{\alpha'}_{\mu}(K)-\alpha}\right)^2} > 0.\end{aligned}$$

因此，两种情况下我们都得到：

$$\|\nabla_K(x)\| \geq \tilde{\mu}^{\alpha,\alpha'}_{\mu,\lambda}(K) > 0. \tag{38}$$

□

正如在 [20], the λ-中轴中所观察到的，视为函数 $\lambda \mapsto \mathrm{ax}_{\lambda}(K)$ 时，它并不连续：即使 λ 相对于 $\mathrm{wfs}(K)$ 很小，$\mathrm{ax}_{\lambda}(K)$ 也可能在 λ 的某些“奇异”值处突然“增大”。图 9 和图 10 展示了这一现象。这与以下事实有关：对于 $x \in \mathrm{ax}_{\lambda}(K)$，映射 $t \mapsto \mathrm{F}_K(\Phi_K(t, x))$ 可能在某些区间上保持不变。

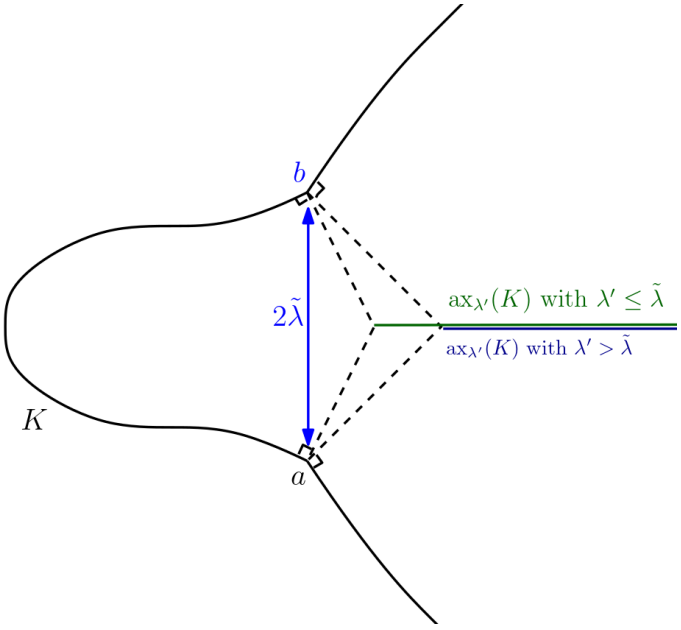


图9： $\lambda \mapsto \mathrm{ax}_{\lambda}(K)$ **不连续，因为** K **在点** a **和** b **处不光滑。**

相比之下，对于 $\alpha > 0$，只要 $\alpha + \lambda < \mathrm{wfs}(K)$，或者更一般地，只要对某个 $\mu > 0$ 有 $\alpha + \lambda < r^{\alpha}_{\mu}(K)$，映射 $\lambda \mapsto \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$ 就关于豪斯多夫距离连续。连续性源于这样一个事实：只要 $\mathrm{F}^{\alpha}_{K}(x) > 0$，映射 $t \mapsto \mathrm{F}^{\alpha}_{K}(\Phi_K(t, x))$ 的增长率就有下界。更准确地说，我们有：

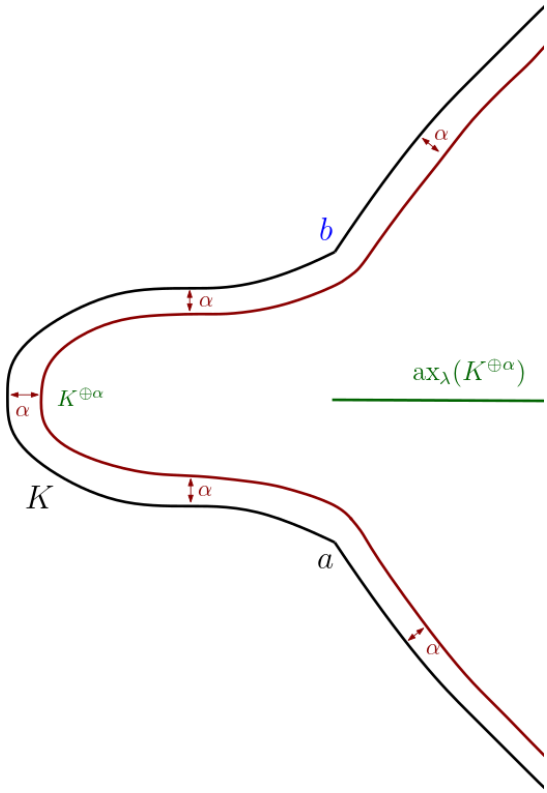


图 10： $\lambda \mapsto \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$ **连续。**

引理 9.3。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集 K^c 的补集，且 $\alpha, \delta, \lambda > 0, \mu \in (0, 1]$ 满足 $r^{\alpha}_{\mu}(K) > \alpha + \lambda + \delta$。则有：

$$\Phi_K\left(T, \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)\right) \subset \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda+\delta}(K), \tag{39}$$

with

$$T = \frac{R^2_{\max}}{\alpha\lambda\tilde{\mu}^2}\delta,$$

其中 $R_{\max} = R_{\max}(K) < \infty$ 已在(17)中定义。对于任意$x \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$，路径

$$[0, T] \ni t \to \Phi_K(t, x) \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K),$$

的长度上界为 S

$$S \leq \frac{R^2_{\max}}{\alpha\lambda\tilde{\mu}^2}\delta,$$

其中 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{\alpha}_{\mu, \lambda+\delta(K)} > 0$，并且

$$\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K) \subset \left(\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda+\delta}(K)\right)^{\oplus S}. \tag{40}$$

证明。由于 $r \geq \alpha$ 映射 $t \mapsto \frac{r-\alpha}{r}$ 是递增的，结合 (15)、引理 8.4 和 (28)，可得

$$\mathcal{F}^{\alpha}_{K}(\Phi_K(t,x)) \geq \frac{R_K(\Phi_K(t,x)) - \alpha}{R_K(\Phi_K(t,x))}\mathcal{F}_K(x). \tag{41}$$

注意，再次利用 (15)，

$$\frac{d}{dt^+}\frac{R_K\left(\Phi_K(t,x)\right)-\alpha}{R_K\left(\Phi_K(t,x)\right)}=\frac{\alpha}{R_K\left(\Phi_K(t,x)\right)^2}\nabla_K\left(\Phi_K(t,x)\right)^2. \quad (42)$$

现在考虑T使得 $\Phi_K(T,x)\notin \mathrm{ax}_{\lambda+\delta}^{\alpha}(K)$，然后 $\mathrm{F}_K^{\alpha}(\Phi_K(T,x))$ $\lambda+\delta$。由（30）可得：

$$\forall t\in[0,T],\ \mathcal{F}_K^{\alpha}\left(\Phi_K(t,x)\right)<\lambda+\delta.$$

引理 9.2 给出了 $\|\nabla_K(\Phi_K(t,x))\|$的下界，即

$$\|\nabla_K(\Phi_K(t,x))\|\geq\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_{\mu,\lambda+\delta}^{\alpha,\alpha}(K)>0$$

然后由（42）可得，

$$t\in[0,T]\Rightarrow\frac{d}{dt^+}\frac{R_K\left(\Phi_K(t,x)\right)-\alpha}{R_K\left(\Phi_K(t,x)\right)}>\frac{\alpha\tilde{\mu}^2}{R_{\max}^2}. \quad (43)$$

借助定理8.10，我们得到以下界：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_K^{\alpha}\left(\Phi_K(T,x)\right)-\mathcal{F}_K^{\alpha}(x)\\
&\geq\mathcal{F}_K(x)\left(\frac{R_K\left(\Phi_K(T,x)\right)-\alpha}{R_K\left(\Phi_K(T,x)\right)}-\frac{R_K(x)-\alpha}{R_K(x)}\right) \quad \text{(by (41))}\\
&=\mathcal{F}_K(x)\int_0^T\left(\frac{d}{dt^+}\frac{R_K\left(\Phi_K(t,x)\right)-\alpha}{R_K\left(\Phi_K(t,x)\right)}\right)dt\\
&>\mathcal{F}_K(x)T\frac{\alpha\tilde{\mu}^2}{R_{\max}^2}. \quad \text{(by (43))}
\end{aligned} \quad (44)$$

由于 $x\in\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$，$\mathrm{F}_K^{\alpha}(x)\geq\lambda$，且由 (34) 可得 $x\in\mathrm{ax}_{\lambda}(K)$。而 $x\in\mathrm{ax}_{\lambda}(K)$ 这一事实又意味着 $\mathrm{F}_K(x)\geq\lambda$。由此得到，

$$\mathcal{F}_K^{\alpha}\left(\Phi_K(T,x)\right)>\lambda+\frac{\lambda\alpha\tilde{\mu}^2}{R_{\max}^2}T.$$

我们已经证明：

$$\begin{aligned}
&x\in\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)\quad\text{and}\quad\Phi_K(T,x)\notin\mathrm{ax}_{\lambda+\delta}^{\alpha}(K)\\
&\Rightarrow\quad\lambda+\frac{\lambda\alpha\tilde{\mu}^2}{R_{\max}^2}T<\lambda+\delta\Rightarrow T<\frac{\delta R_{\max}^2}{\lambda\alpha\tilde{\mu}^2}.
\end{aligned}$$

由逆否命题可得：

$$x\in\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)\text{ and }T\geq\frac{\delta R_{\max}^2}{\lambda\alpha\tilde{\mu}^2}\Rightarrow\Phi_K(T,x)\in\mathrm{ax}_{\lambda+\delta}^{\alpha}(K).$$

由于 $\forall y,\ \|\nabla_K(y)\|\leq 1$，有

$$S=\mathrm{length}\left(\Phi_K([0,T],x)=\int_0^T\|\nabla_K\left(\Phi_K(t,x)\right)\|dt\leq T\leq\frac{\delta R_{\max}^2}{\lambda\alpha\tilde{\mu}^2}.$$

由于 $x\in\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$ 与 $\Phi_K(T,\ x)\in\mathrm{ax}_{\lambda+\delta}^{\alpha}(K)$ 之间的欧几里得距离不可能大于连接它们的路径长度，因此得到 (40)。

□

由于对于 $\delta\geq 0$ 有 $\mathrm{ax}_{\lambda+\delta}^{\alpha}(K)\subset\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$，(40) 和上界 (22) 立即给出：

引理 9.4. 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c 的补集，且 $\alpha,\lambda_{\max}>0,\mu\in(0,1]$ 满足 $r_{\mu}^{\alpha}(K)>\alpha+\lambda_{\max}$。映射

$$\lambda\mapsto\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$$

在区间 $[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ 内关于豪斯多夫距离是 $\left(\frac{R_{\max}^2}{\alpha\lambda_{\min}\tilde{\mu}^2}\right)$-利普希茨的，其中 $R_{\max}=R_{\max}(K)<\infty$ 且 $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}^{\alpha}{}_{,\mu}{}^{\alpha}{}_{,\lambda_{\max}}>0$。

9.3 在 α 扰动下，(λ,α)-中轴是豪斯多夫稳定的

在本小节中，我们完成关于 λ 和 α 扰动下 (λ,α)-中轴稳定性的证明。不难看出，对于 $\delta\geq 0$，$\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha+\delta}(K)\subset\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$。我们通过证明 $\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$ 流入（足够快地）$\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha+\delta}(K)$，从而确立 $\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$ 与 $\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha+\delta}(K)$ 相距不远。这是通过确定 K 上最近点的包围球半径增长得足够快来完成的。

引理 9.5. 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c 的补集，且 $\alpha,\lambda>0$，$\mu\in(0,1]$ 若 $r_{\mu}^{\alpha_{\min}}(K)>\alpha_{\max}+\lambda$。映射

$$\alpha\mapsto\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$$

关于豪斯多夫距离，该映射在区间 $[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ 上是 $\left(\frac{R_{\max}}{\alpha_{\min}\tilde{\mu}^2}\right)$-利普希茨的，其中 $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}^{\alpha_{\max}}{}_{,\mu}{}^{\alpha_{\min}}{}_{,\lambda}>0$。

证明。由 (28) 可得，

$$\delta\geq 0\Rightarrow\forall x\in\left(K^{\oplus\alpha+\delta}\right)^c,\ \mathcal{F}_K^{\alpha}(x)\geq\mathcal{F}_K^{\alpha+\delta}(x).$$

由此可得

$$\delta\geq 0\Rightarrow\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha+\delta}(K)\subset\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K). \quad (45)$$

假设对于某个 $\mu>0$，有 $r_{\mu}^{\alpha}(K)>\alpha+\delta+\lambda$，并取 $x\in\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}(K)$。利用引理 9.2，可得

$$\Phi_K(t,x)\notin\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha+\delta}(K)\Rightarrow\|\nabla_K\left(\Phi_K(t,x)\right)\|>\tilde{\mu}>0, \quad (46)$$

其中 $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}^{\alpha+\delta,\ \mu\lambda}{}^{\alpha},(K)>0$。

于是由 (15) 可得，

$$\begin{aligned}
R_K\left(\Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta,x\right)\right)&=\int_0^{\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta}\frac{d}{dt'^+}R_K(\Phi_K(t',x))\mathrm{d}t'+R_K(x)\\
&=\int_0^{\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta}\left\|\nabla_K\left(\Phi_K(t',x)\right)\right\|^2\mathrm{d}t'+R_K(x)\\
&>R_K(x)+\frac{R_{\max}}{\alpha}\delta \quad \text{(by (46))}\\
&\geq R_K(x)\frac{\alpha+\delta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

利用 (28)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_K^{\alpha+\delta}\left(\Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta,x\right)\right)\\
&=\frac{R_K\left(\Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta,x\right)\right)-(\alpha+\delta)}{R_K\left(\Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta,x\right)\right)}\mathcal{F}_K\left(\Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta,x\right)\right)\\
&>\frac{R_K(x)\frac{\alpha+\delta}{\alpha}-(\alpha+\delta)}{R_K(x)\frac{\alpha+\delta}{\alpha}}\mathcal{F}_K(x)\\
&=\frac{R_K(x)-\alpha}{R_K(x)}\mathcal{F}_K(x)\\
&=\mathcal{F}_K^{\alpha}(x) \quad \text{(by definition)}\\
&\geq\lambda, \quad \text{(because } x\in\mathrm{ax}_{\lambda}^{\alpha}\text{)}
\end{aligned}$$

其中在第二行中，我们利用了对于 $r \geq \alpha+\delta$，映射$r \mapsto {}^{r-}(\alpha+\delta)\, r$ 是递增的这一性质，以及前面的界和引理 8.4。

由此我们证明了

$$r_\mu^\alpha(K) > \alpha+\delta+\lambda \Rightarrow \Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta, \mathrm{ax}_\lambda^\alpha\right) \subset \mathrm{ax}_\lambda^{\alpha+\delta}(K). \quad (47)$$

至于引理9.4，这一点连同（31）和（45）完成了该引理的证明。□

9.4 （λ， α）-中轴具有正确的同伦类型和有限测地直径

在本节中，我们证明（λ， α）-中轴保持同伦类型，这与通常的中轴 [42]相同。随后我们证明，（λ， α）-中轴中的任意两点之间都存在一条有限长度的路径，也就是说，它具有有限测地直径。这两个结果同样都基于对流 Φ_K的处理。

下一个引理给出了流 Φ_K 将 K^c 映射到 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 内部所需时间的上界。它对于刻画 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 的同伦类型（定理 9.7）以及证明其具有有限测地直径（定理 9.12）至关重要。

引理 9.6。 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c 的补集，并且 $\alpha \geq 0, \lambda > 0, \mu \in (0,1]$和 $\alpha\prime$满足 $0 < \alpha\prime \leq \alpha$且 $r_\mu^{\alpha\prime}(K) > \alpha+\lambda$。那么， $\Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\tilde{\mu}^2}, \left(K^{\oplus\alpha\prime}\right)^c\right) \subset \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$，其中 $R_{\max} = R_{\max}(K) < \infty$且 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{\alpha,\ \mu}{}^{\alpha\prime},\ \lambda > 0$。

证明。考虑 $x \in \left(K^{\oplus\alpha\prime}\right)^c$。再次利用 (31) 和引理 9.2，可得，

$$\Phi_K(T,x) \notin \mathrm{ax}_\lambda^\alpha \Rightarrow \forall t \in [0,T], \|\nabla_K(\Phi_K(t,x))\| > \tilde{\mu}.$$

像之前一样应用 (15)，得到，

$$\Phi_K(T,\ x) \notin \text{轴}_\lambda^\alpha(K)$$

$$\Rightarrow R_K(\Phi_K(T,x)) = \int_0^T \frac{d}{dt^+} R_K(\Phi_K(t,x))\mathrm{d}t + R_K(\Phi_K(0,x)) > T\tilde{\mu}^2.$$

由于 $R_K(\Phi_K(T,\ x)) \leq R_{\max}$，可得，

$$\Phi_K(T,x) \notin \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K) \Rightarrow T\tilde{\mu}^2 < R_{\max} \Rightarrow T < \frac{R_{\max}}{\tilde{\mu}^2}.$$

逆否命题给出，

$$\Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\tilde{\mu}^2}, x\right) \in \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K).$$

□

现在定义映射

$$H : [0,1] \times \left(K^{\oplus\alpha\prime}\right)^c \to \left(K^{\oplus\alpha\prime}\right)^c$$

$$(t,x) \mapsto \Phi_K\left(\frac{R_{\max}}{\tilde{\mu}^2}t, x\right) = H(t,x).$$

引理 9.6、(31) 和自然包含 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K) \subset \left(K^{\oplus\alpha\prime}\right)^c$共同表明， H 在$\left(K^{\oplus\alpha\prime}\right)^c$与 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$之间给出了一个同伦等价，因为它满足定义 8.1。由 (19) 可知，

$$r < \mathrm{wfs}(K) \Rightarrow \exists \mu > 0, \text{ such that } r_\mu^\alpha(K) \geq r,$$

可以看出：

定理 9.7. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c的补集， $\alpha \geq 0$、$\lambda > 0$和 $\alpha\prime$满足 $0 < \alpha\prime \leq \alpha$且 $r_\mu^{\alpha\prime}(K) > \alpha+\lambda$，则 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$与 $\left(K^{\oplus\alpha\prime}\right)^c$ 具有相同的同伦类型。

沿流 Φ推动路径 γ，同时保持其端点不变，这将在后续的若干证明中发挥重要作用。因此，我们为这类推动路径引入一个特定的记号。

定义 *9.8*（推动路径）。 设 $K \subset \mathbb{R}^n$为闭集， $\gamma\colon [0,1] \to K^c$为可求长路径且 $T \geq 0$。沿流 Φ_K经过时间 T推动路径 γ，并保持端点不变，记作 $\gamma^{[T]_K}$，它是路径 $\gamma^{[T]_K}\colon [0,1] \to K^c$，从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(1)$ 定义如下：

$$\gamma^{[T]_K}(t) = \begin{cases} \Phi_K(3tT, \gamma(0)) & \text{if} \quad t \in [0,1/3] \\ \Phi_K(T, \gamma(3t-1)) & \text{if} \quad t \in [1/3,2/3] \\ \Phi_K((3(1-t)T, \gamma(1)) & \text{if} \quad t \in [2/3,1]. \end{cases}$$

接下来的一个简单引理指出， $\gamma^{[T]_K}(t)$是可求长的，并允许在后续的若干证明中为路径长度给出上界（定理 9.12 和 11.1，引理 9.14 和 9.15）。

引理 9.9。 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，且 $\alpha > 0$。令 $\gamma\colon [0,1] \to \left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$ 为一条长度为 $L(\gamma)$ 的可求长路径，并且 $T \geq 0$。 $\gamma^{[T]_K}$是可求长的，其长度 $L\left(\gamma^{[T]_K}\right)$的上界为：

$$L\left(\gamma^{[T]_K}\right) \leq 2\,T + L(\gamma)e^{\frac{T}{\alpha}}.$$

证明。由于 $\nabla_K(x)$的范数上界为 1， $\gamma^{[T]_K}$在第一和第三区间 $[0,1/3]$ 以及 $[2/3,1]$ 上是 3-利普希茨的，因此这两段各自的长度上界为 T。

由于 $\mathrm{im}(\gamma)$ 包含于 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$， $\gamma^{[T]_K}([1/3,\ 2/3])$ 的长度有如下界

$$L(\gamma)e^{\frac{T}{\alpha}}.$$

这是因为 (16) 可应用于对 γ 的任意细小细分，所以根据可求长曲线长度的定义，膨胀因子的界也适用于曲线长度。□

下一个定理表明，(λ， α)-中轴的连通分支具有有限测地直径。特别是，(λ， α)-中轴的连通分支内部的测地距离有限，且可由最短路径实现。

在给出精确陈述之前，我们需要先引入一些记号。对于博雷尔集 $X \subset \mathbb{R}^n$，我们用 $\mathrm{Vol}(X)$ 表示其 n 维勒贝格测度，也称体积。我们将 $V_n = \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n(0,\ 1))$ 记为单位 n-球的体积，即 $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$，其中 Γ 是欧拉伽马函数，参见例如第 622] 页。

注 *9.10*。 得益于定理 9.7，$\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 的连通分支与 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$ 的连通分支一一对应。因此，接下来关于测地直径和格罗莫夫 - 豪斯多夫距离的陈述，在不失一般性的前提下，均假设 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$ 连通。

虽然 $\mathbb{R}^n$ 的任意连通开子集都是道路连通的 [49, 命题 12。25], 但某些连通有界开子集可能

没有有限测地直径。我们将在下面的例子中说明这一点。设

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 < x < 1,\ -\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{x} < y < \frac{1}{2} + \sin\frac{1}{x}\right\}$$

注意，S确实是$\mathbb{R}^2$的一个连通、有界开子集，且具有无限测地直径。此外，对于某个$\alpha > 1$，取

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, (x,y) \notin S \ \text{ and } \ d\big((x,y,z),\, S\times\{0\}\big) \geq \alpha\right\},$$

我们得到，有界开集$(K^{\oplus\alpha})^c$沿着长度很小的轨迹$h < 1$，通过到$S\times\{0\}$上的垂直投影变形收缩。
借助这一垂直变形收缩，我们有$d_{GH}((K^{\oplus\alpha})^c,\ S) \leq 2h$。更准确地说，论证如下：我们有

$$(K^{\oplus\alpha})^c = \left\{(x,y,z) \middle| (x,y) \in S \text{ and } |z| < \bar{h}(x,y)\right\},$$

其中$\bar{h}(x,\ y) \leq h \leq 1$。将测地线$S$与垂直线段拼接起来即可得到

$$d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \leq d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + 2h.$$

这里，我们用(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)表示$(K^{\oplus\alpha})^c$的元素，并用(x_1,y_1)、(x_2,y_2)表示S中前两个坐标相同的元素。反过来，$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \leq d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))$，因为对于任意可求长曲线$\gamma\ t \quad L\ \pi_{\mathbb{R}^2}\ \gamma\ t \quad \leq ( )$ $L \subset \mathbb{R}^3$，t，都有$(((\,)))(\gamma(\,))$，其中$\pi_{\mathbb{R}^2}$表示到$\mathbb{R}^2$的投影。由界$d_{GH}((K^{\oplus\alpha})^c, S) \leq 2h$可知，$(K^{\oplus\alpha})^c$也具有无限测地直径。因此，作为某个偏移集的补集也不意味着具有有限测地直径。

然而，我们有如下结论：

引理 9.11. 设$K \subset \mathbb{R}^n$为有界开集K^c的补集。假设存在$\mu > 0$和$\alpha > \alpha\prime > 0$，使得$r_\mu^{\alpha'}(K) > \alpha$。

那么，若$(K^{\oplus\alpha})^c$连通，则其测地直径有限。特别地，若对于某个$z \in \mathbb{R}^n$和$R_{\text{bound}} > 0$，有$K^c \subset \mathbb{B}(z, R_{\text{bound}})$，则：

$$\begin{aligned}\text{GeoDiameter}\left((K^{\oplus\alpha})^c\right) \leq\ & 2\frac{\alpha-\alpha'}{\mu} \\ & + 2\left(\left(\frac{4R_{\text{bound}}}{\alpha-\alpha'}\right)^n + 1\right)(\alpha-\alpha')e^{\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha\mu}}.\end{aligned}$$

通过在集合$\left(K^{\oplus\alpha'}\right)^c$内构造一个非常稠密的图，并对图中任意两点间的距离进行界定，即可得到该直径的上界。然后，将这条路径推入$(K^{\oplus\alpha})^c$内，便可得出结论。

由引理 9.11。由于$(K^{\oplus\alpha})^c$是紧集，我们可以用有限个开球$\left(\mathbb{B}\circ(y_i,\ \frac{\alpha-\alpha'}{2})\right)_{i\in I_0}$覆盖它，其中$I_0$是有限集且$y_i \in (K^{\oplus\alpha})^c$。可以从$\{y_i,\ i \in I\}$中提取一个$\varepsilon$-网$\{y_i,\ i \in I\}$，即$I \subset I_0$，并且

$$(K^{\oplus\alpha})^c \subset \bigcup_{i\in I} \mathbb{B}^\circ\left(y_i, \alpha-\alpha'\right) \subset \left(K^{\oplus\alpha'}\right)^c, \tag{48}$$

with

$$i,j \in I \text{ and } i \neq j \Rightarrow \mathbb{B}\left(y_i, \frac{\alpha-\alpha'}{4}\right) \cap \mathbb{B}\left(y_i, \frac{\alpha-\alpha'}{4}\right) = \emptyset. \tag{49}$$

记I的基数为N。由于根据（49），球$\mathbb{B}\left(y_i, \frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)$两两不相交，且$\cup_{i\in I}\mathbb{B}\left(y_i, \frac{\alpha-\alpha'}{4}\right) \subset K^c \subset \mathbb{B}(z, R_{\text{bound}})$，因此有

$$N \leq \frac{\text{Vol}(\mathbb{B}(z, R_{\text{bound}}))}{\text{Vol}\left(\mathbb{B}\left(0, \frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)\right)} \leq \left(\frac{4R_{\text{bound}}}{\alpha-\alpha'}\right)^n. \tag{50}$$

令G为一个图，其中每个$y_i \in \{1,\ldots,N\}$对应一个顶点，并且每一对$(\quad i\ j \quad \mathbb{B}\ y_i\ \alpha-\alpha\ \cap\mathbb{B}\ y_j\ \alpha-\alpha\ \neq,)$对应一条边，条件是$\circ(,\prime)\circ(,\prime)$。该图是连通的，否则，由$(\,)$可知，$(K^{\oplus\alpha})^c$将是不相交的两个非空开集的并，这与其连通性矛盾。$\leq$ 考虑$\alpha \quad x \in \mathbb{B} \quad \alpha-\alpha$，$\prime \in (K^{\oplus\alpha})^c$，并令$k$，$k\prime$使得$x \in \mathbb{B}\circ(,\ \prime)$且$\prime\circ(y_{k'},\ \prime)$。我们如下定义一条从$x$到$x\prime$的分段线性路径P。首先令$y_k = y_{i_0}\ldots y_{i_M} = y_{k'}$为图$G$中$y_k$和$y_{k'}$之间的一条最短路径。我们将$\left(K^{\oplus\alpha'}\right)^c$中的分段线性路径P定义为以下线段的拼接

$$[xy_{i_0}], [y_{i_0}y_{i_1}], \ldots, [y_{i_{M-1}}y_{i_M}], [y_{i_M}, x'].$$

P的长度于是有如下下界：$L(\text{P}) \leq 2(N+1)(\alpha-\alpha\prime)$。根据$r_\mu^{\alpha'}(K)$的定义，由于$r_\mu^{\alpha'}(K) > \alpha$，对于$x \in \left(K^{\oplus\alpha'}\right)^c \setminus (K^{\oplus\alpha})^c$有$\|\nabla_K(x)\| \geq \mu$，因此$P^{\left\lceil\frac{\alpha-\alpha}{\mu}\right\rceil}{}_K \subset (K^{\oplus\alpha})^c$。应用引理 9.9，我们得到：

$$L\left(P^{\left\lceil\frac{\alpha-\alpha'}{\mu}\right\rceil}{}_K\right) \leq 2\frac{\alpha-\alpha'}{\mu} + L(P)e^{\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha\mu}}.$$

□

定理 9.12。令$K \subset \mathbb{R}^n$为有界开集K^c的补集，并设α，$\lambda > 0$满足$r_\mu^\alpha(K) > \alpha + \lambda$，且假设$(K^{\oplus\alpha})^c$是连通的，具有有限测地直径：

$$\text{GeoDiameter}\left((K^{\oplus\alpha})^c\right) < \infty.$$

那么$\text{ax}_\lambda^\alpha(K)$是一个测地空间，其有限测地直径由下文的(51)给出。更准确地说，若$x, x\prime \in \text{ax}_\lambda^\alpha(K)$，则存在一条最小长度路径$\gamma$：$[0,1] \to \text{ax}_\lambda^\alpha(K)$，使得$\gamma(0) = x$且$\gamma(1) = x\prime$。这条路径满足，

$$\begin{aligned}\text{length}(\gamma) &\leq \text{GeoDiameter}(\text{ax}_\lambda^\alpha(K)) \\ &\leq 2\frac{R_{\max}}{\tilde{\mu}^2} + \text{GeoDiameter}\left((K^{\oplus\alpha})^c\right)e^{\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}}, \end{aligned}\tag{51}$$

其中$R_{\max} = R_{\max}(K)$、$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{\alpha}{}_{,\mu}{}^{\alpha}_{\lambda,}{}^{2}$。长度$\text{length}(\gamma)$是$\text{ax}_\lambda^\alpha(K)$中$x$与$x\prime$之间的测地距离。

通过将路径推入中轴，并运用引理 9.9，即可得到证明。

证明。考虑$x, x\prime \in \text{ax}_\lambda^\alpha(K) \subset (K^{\oplus\alpha})^c$以及$\Gamma$一条从$(K^{\oplus\alpha})^c$ x到$x\prime$的路径，其长度以上界$\text{GeoDiameter}((K^{\oplus\alpha})^c)$为界。

如引理 9.3 中所述，我们令$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{\alpha,\ \mu}{}^{\alpha}_{\lambda,}$。利用定义 9.8，我们现在考虑路径$\Gamma^{\left\lceil\frac{R}{\max}\right\rceil}{}_K$，其端点为$x$和$x\prime$。由于$\Gamma$

包含于 $(K^{\oplus\alpha})^c$ 中，引理 9.9 给出：

$$L\left(\Gamma^{\left\lceil \frac{R_{\max}}{\tilde{\mu}^2}\right\rceil_K}\right) \leq 2\frac{R_{\max}}{\tilde{\mu}^2} + L(\Gamma)e^{\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}} \tag{52}$$

由于（31），$\Gamma^{\left\lceil \frac{R}{\text{最大值}\ \tilde{\mu}^2}\right\rceil_K}([0,1/3])$ 和 $\Gamma^{\left\lceil \frac{R}{\text{最大值}\ \tilde{\mu}^2}\right\rceil_K}([2/3,1])$ 位于 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 内部。根据引理 9.6，$\Gamma^{\left\lceil \frac{R}{\text{最大值}\ \tilde{\mu}^2}\right\rceil_K}([1/3, 2/3])$ 也位于 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 中。

这个关于长度的上界（52）与 x，$x\prime\in\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 无关，因此它给出了 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 的测地直径上界。

众所周知，如果欧几里得空间的一个紧子集中的两个点之间存在有限长度路径，那么就存在一条最小长度路径，参见第一部分第1节第三段：度量空间中测地弧的存在性，见 [45]。□

由引理 9.11 和定理 9.12 我们得到：

推论 9.13。令 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c 的补集，$\alpha>\alpha\prime>0$ 和 $\lambda>0$ 满足 $r_\mu^{\alpha'}(K)>\alpha+\lambda$，并假设 $(K^{\oplus\alpha})^c$ 是连通的。

那么 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 是一个具有有限测地直径的测地空间。

9.5 在 λ扰动下，(λ,α)-中轴是 Gromov–Hausdorff稳定的

由定理 9.12 可知，$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 是一个在各连通分支内长度有限的测地空间。赋予其这种测地距离后，$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 成为一个度量空间，并且在以下意义下对 λ 扰动稳定：

引理 9.14。令 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c 的补集，并令 $\alpha,\delta,\lambda>0,\mu\in(0,1]$ 满足：对某个 $\alpha\prime<\alpha$，有 $r_\mu^{\alpha'}(K)>\alpha+\lambda+\delta$，且 $(K^{\oplus\alpha})^c$ 是连通的。

那么，映射 $\lambda\mapsto\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 关于内在度量而言，在格罗莫夫-豪斯多夫距离下是局部利普希茨的。

更准确地说，有

$$d_{GH}(\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K),\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)) \leq 2T + D\left(e^{\frac{T}{\alpha}}-1\right) = O(\delta),$$

with

$$T=\frac{R^2_{\max}}{\alpha\lambda\tilde{\mu}^2}\delta.$$

并且 $D<\infty$ 是$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$的测地直径。

证明的核心是将 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda$ 中的测地线推入 $\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}$，这同样通过流来实现。为了建立格罗莫夫-豪斯多夫距离的上界而需要验证的其他性质则相对直接。

证明。测地直径 D 的值由定理 9.12 给出。为了求格罗莫夫-豪斯多夫距离在 $\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$ 与 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 之间的上界，我们使用定义 8.7。

考虑由下式定义的关系 $\mathrm{R}\subset\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)\times\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$：

$$\mathrm{R}=\left\{(x_1,x_2)\in\text{轴}^\alpha_\lambda(K)\times\text{轴}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)\ \middle|\ \exists t\in[0,T],\ x_2=\Phi_K(t,x_1)\right\},$$

其中 $T=\frac{R^2_{\max}}{\alpha\lambda\tilde{\mu}^2}\delta$。

我们需要检验定义 8.7 的两个条件。回顾一下，根据引理 9.3，有

$$\Phi_K\left(T,\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)\right)\subset\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)\subset\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K).$$

条件 *(1)*：R 是满射。这一条件成立，因为如果 $x_1\in\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$，那么 $\Phi_K(T,x_1)\in\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$，这得益于引理 9.3。这又等价于 $(x_1,\Phi_K(T,x_1))\in\mathrm{R}$。反过来，如果 $x_2\in\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$，那么 $x_2\in\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$，且 $(x_2,x_2)\in\mathrm{R}$，因为 $\Phi_K(0,x_2)=x_2$。

条件 (2)：距离畸变界。考虑 (x_1,x_2)、$(x'1,x'2)\in\mathrm{R}$，其中 $x_2=\Phi_K(t,x_1)$，且 $x'_2=\Phi_K(t'x'1)$，其中 $t,t'\in[0,T]$。分别用 d_1 和 d_2 表示 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 和 $\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$ 中的内在距离。根据定理 9.7，由于 $(K^{\oplus\alpha})^c$是连通的（对于开集而言，这等价于道路连通），$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 是道路连通的，并且 x_1 和 $x'1$ 属于 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 的同一个连通分支。根据定理 9.12，$d_1(x_1,x'1)<\infty$，且存在一条路径 $\gamma_1\colon[0,1]\to\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$，使得 $d_1(x_1,x'1)=L(\gamma_1)$。根据引理 9.9，路径 $\gamma_1{}^{[T]_K}$的长度上界为 $2T+L(\gamma_1)e^{\frac{T}{\alpha}}$。

根据定义 9 8, $\gamma_1{}^{[T]_K}\left(\frac{t}{3T}\right)=x_2$ $\gamma_1{}^{[T]_K}\left(1-\frac{t'}{3T}\right)=$. x 30 39 可得 and$\prime_2$。此外，( ) 和 ( ) 推出

$$\gamma_1{}^{[T]_K}\left(\left[\frac{t}{3T},1-\frac{t'}{3T}\right]\right)\subset\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K),$$

因此$\gamma_1{}^{[T]_K}\left(\left[\frac{t}{3T},1-\frac{t'}{3T}\right]\right)$是 $\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$ 内一条从 x_2到 $x\prime_2$的路径，其长度因此以下界 $d_2(x_2,x\prime_2)$ 限定。由此可得

$$\begin{aligned} d_2(x_2,x'_2) &\leq L\left(\gamma_1{}^{[T]_K}\left(\left[\frac{t}{3T},1-\frac{t'}{3T}\right]\right)\right)\\ &\leq L\left(\gamma_1{}^{[T]_K}\right)\leq 2T+d_1(x_1,x'_1)e^{\frac{T}{\alpha}}, \end{aligned}$$

因此

$$d_2(x_2,x'_2)-d_1(x_1,x'_1)\leq 2T+d_1(x_1,x'_1)\left(e^{\frac{T}{\alpha}}-1\right)\leq 2T+D\left(e^{\frac{T}{\alpha}}-1\right). \tag{53}$$

由于 $\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$ 是连通的，存在一条路径$\gamma_2\colon[0,1]\to\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)$，使得 $d_2(x_2,x\prime_2)=L(\gamma_2)$。

现在考虑如下路径 $\Gamma\colon\ [0,1]\to\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$：

$$\Gamma(u)=\begin{cases}\Phi_K(3ut,x_1) & \text{if}\quad u\in[0,1/3]\\ \gamma_2(3u-1)) & \text{if}\quad u\in[1/3,2/3]\\ \Phi_K((3(1-u)t',x'_1) & \text{if}\quad u\in[2/3,1].\end{cases}$$

这里用到了：当 $u\in[1/3,\ 2/3]$时，$\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda+\delta}(K)\subset\mathrm{ax}^\alpha_\lambda$。根据（30），$\Gamma$ 是 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 内从 x_1 到 $x\prime_1$ 的一条路径，因此

$$d_1(x_1,x'_1)\leq L(\Gamma)\leq 2T+L(\gamma_2)=2T+d_2(x_2,x'_2)$$

结合（53），即可得到所需结果

$$\left|d_2(x_2,x'_2)-d_1(x_1,x'_1)\right|\leq 2T+D\left(e^{\frac{T}{\alpha}}-1\right).$$

注意，根据推论 9.13（使用假设 $r_\mu^{\alpha'}(K)>\alpha+\lambda+\delta$），$\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 的测地直径 D 有限。□

9.6 (λ,α)-中轴在 α扰动下是Gromov–Hausdorff稳定的

使用与上一节几乎完全相同的论证，我们还可以得到关于偏移集 α 的 Gromov-Hausdorff 稳定性。

引理 9.15. 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c的补集，且 $\alpha,\delta,\lambda>0,\mu\in(0,1]$满足：存在某个 $\alpha'<\alpha$，使得 $r_\mu^{\alpha'}(K)>\alpha+\lambda+\delta$，并且 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$是连通的。那么，映射

$$\alpha\mapsto \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$$

关于内蕴度量，在格罗莫夫-豪斯多夫距离下是局部利普希茨的。

更确切地说，有

$$d_{GH}(\mathrm{ax}_\lambda^{\alpha+\delta}(K),\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K))\le 2T+D\left(e^{\frac{T}{\alpha}}-1\right)=O(\delta),$$

with

$$T=\frac{R_{\max}}{\alpha\tilde{\mu}^2}\delta,$$

且 $D<\infty$ 是$\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$的测地直径。

证明。此处与第 9.5 节类似，使用 (47) 代替 (39)。 □

10 豪斯多夫扰动下 K的(λ,α)-中轴的豪斯多夫稳定性

在本节中，我们证明本文的一项主要稳定性定理，即在对 K 进行 Hausdorff 扰动时，(λ,α)-中轴在豪斯多夫意义下的稳定性。这需要一些关于流的进一步结果，这些结果将在前几个小节中证明，而主要结果将在最后一个小节中证明。与上一节一样，我们利用流来建立主要结果，即豪斯多夫稳定性。直观上，这似乎很直接，因为在中轴附近，我们沿着的流指向中轴。然而，要证明该流足够快，需要若干技术估计。首先，我们需要在沿流前进时，到最近点的距离 (R_K) 增长得足够快。此结论将在第 10.1 节中证明。基于这一结果，我们可以证明

- 靠近 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 的点会在短时间后沿流进入其中（第 10.2 节）。
- 如果将 K 扰动为 K'（在豪斯多夫距离意义下接近），那么 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$ 会在短时间后沿流进入 $\mathrm{ax}_{\lambda-\delta}^\alpha(K)$（第10.3节）。

最后，基于这一点和引理 9.3，得出了豪斯多夫距离的界。

10.1 沿流轨迹的下界

本节引理所依据的技术性结果是沃尔泰拉积分不等式，相关讨论见第8.7节。

引理 10.1。 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c的补集， $\alpha\ge 0$和 $\lambda>0$。考虑 $y\in\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c\setminus\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$，并用 $s\mapsto y(s)$ 表示 $t\mapsto\Phi_K(t,y)$的轨迹，该轨迹以弧长为参数。我们强调， $y(0)=y$。假设 $R_K(y)-\alpha>\lambda$，且存在某个 $S>0$ 使得

$$y(S)\notin\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K),$$

then

$$(R_K(y(S))-\alpha)^2\ge(S_0+S)^2+\lambda^2,$$

其中 $S_0>0$ 定义为

$$S_0^2=(R_K(y)-\alpha)^2-\lambda^2.$$

证明。我们将映射 R_0 定义为： $[0,S]\to\mathbb{R}$

$$R_0(s)=\sqrt{(S_0+s)^2+\lambda^2}+\alpha.$$

我们需要证明 $R_K(y(s))\ge R_0(s)$，这将通过定理 8.12 完成。根据 S_0 的定义，有 $R_0(0)=R_K(y)$。对于$s\in[0,S]$，我们得到

$$\frac{d}{ds}(R_0(s)-\alpha)^2=2(S_0+s).$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}R_0(s)&=\frac{(S_0+s)}{R_0(s)-\alpha}\\&=\frac{\sqrt{(R_0(s)-\alpha)^2-\lambda^2}}{R_0(s)-\alpha}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{R_0(s)-\alpha}\right)^2}\end{aligned}$$

因此我们得到沃尔泰拉积分不等式：

$$R_0(s)=R_0(0)+\int_0^s k(R_0(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

其中核 k 为

$$k(x)=\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{x-\alpha}\right)^2}.$$

结合 (13) 和 (15) 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds^+}R_K(y(s))&=\|\nabla_K(y(s))\|\\&=\sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{F}^\alpha(y(s))}{R_K(y(s))-\alpha}\right)^2},\end{aligned}$$

另见 [20, 方程（5）]。由于 $R_K(y(s))$ 是利普希茨的，定理 8.10 得出

$$\begin{aligned}R_K(y(s))&=R_K(y)+\int_0^s\sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{F}^\alpha(y(\tau))}{R_K(y(\tau))-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}\tau\\&=R_0(0)+\int_0^s\sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{F}^\alpha(y(\tau))}{R_K(y(\tau))-\alpha}\right)^2}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

根据假设 $y\ S\notin\ {}_\lambda^\alpha\ 30\ s\le S\Rightarrow\ {}^\alpha\ y\ s\ <()$ ax，因此 $0<\delta\le S$ 意味着 F (( )) 。此外，对于充分小的 λ，我们可以假设

$\mathrm{F}^{\alpha}(y(s)) \leq \lambda' < \lambda$，对于 $s \in [0, \delta]$，由引理 8.4 得出。这意味着$R_K(y(s))$ 满足以下沃尔泰拉型积分不等式，

$$\begin{aligned} R_K(y(s)) &\geq R_0(0) + \int_0^s \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{R_K(y(\tau)) - \alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau \\ &= R_0(0) + \int_0^s k(R_K(y(\tau)))\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

其中等号仅在 $s = 0$时成立。注意，由于$R_K(y) - \alpha > \lambda > 0$且 $R_K(y)$ 是单调的，

$$\frac{d}{dx}k(x) = \frac{\lambda^2}{(x-\alpha)^3\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{(x-\alpha)^2}}} \geq 0$$

在定义域上，因此核是单调的。由于 $R_K(y(s))$ 关于 s是 1-利普希茨的，并且我们可以假设存在某个 $\delta' \leq \delta$，使得对于所有 $s \in (0, \delta')$，都有 $R_K(y(s)) > R_0(s)$。事实上，δ'由以下条件确定

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda'}{R_0(0) - \delta' - \alpha}\right)^2} &\geq \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{R_0(0) + \delta' - \alpha}\right)^2} \\ \frac{\lambda'}{R_0(0) - \delta' - \alpha} &\leq \frac{\lambda}{R_0(0) + \delta' - \alpha}. \end{aligned}$$

现在，该结果直接由定理 8.12 的应用得出。□

10.2 靠近 $\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$ 的点经过短时间后在其中流动

引理 10.2。设 $K \subset \mathbb{R}^n$是有界开集 K^c的补集，且 $\alpha > 0$, $\mu > 0$和 $\lambda > 0$满足$r^{\alpha}_{\mu}(K) > \alpha + \lambda$。那么，若 $\delta < \lambda$且 $\epsilon <$最小值 $\left(2\alpha, \frac{(2\lambda - \delta)\,\delta}{8R_{\max}}\right)$，则有——

$$\Phi_K\left(\frac{8R^2_{\max}}{(2\lambda - \delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon,\ \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)^{\oplus\epsilon}\right) \subset \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}(K),$$

其中 $R_{\max} = R_{\max}(K) < \infty$ 且 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{\alpha}_{,\,\mu}$ $^{\alpha}_{\lambda} > 0$。此外，对于$y \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)^{\oplus\epsilon}$，轨迹 $\Phi_K\left(\left[0,\ \frac{8R^2_{\max}()\delta\tilde{\mu}}{2\lambda-\delta}\,\epsilon\right]\right.$的长度 y)有上界

$$\frac{8R^2_{\max}}{(2\lambda - \delta)\,\delta}\,\epsilon.$$

证明。考虑 $y \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)^{\oplus\epsilon}$和 $a \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$，使得 $\|y - a\| \leq \epsilon$。记 $s \mapsto y(s)$ 为 $t \mapsto \Phi_K(t,\ y)$ 的轨迹，并以弧长为参数，使得 $y(0) = y$。现在假设对于某个 $s > 0$，有

$$y(s) \notin \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}(K).$$

由于 $a \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K)$ (34) 可得 $a \in \mathrm{ax}_{\lambda}(K)$。界 (32) 表明 $R_K(a) \geq F_K(a)$。结合 (29) 和 (28)，可得

$$R_K(a) - \alpha \geq \lambda. \tag{54}$$

根据定理的条件，我们有 $\epsilon < \delta$and $\|y - a\| \leq \epsilon$，因此 (54) 推出

$$R_K(y) - \alpha > \lambda - \delta, \tag{55}$$

根据三角不等式。这意味着满足引理 10.1 的条件。

然后，我们可以将 λ 替换为 $\lambda - \delta$，并应用引理 10.1，得到

$$(R_K(y(s)) - \alpha)^2 \geq (S_0 + s)^2 + (\lambda - \delta)^2, \tag{56}$$

其中

$$S_0^2 = (R_K(y) - \alpha)^2 - (\lambda - \delta)^2. \tag{57}$$

由于 $R_K(a) - \alpha \geq \lambda$，存在 $S_a \geq 0$ 使得

$$S_a^2 + \lambda^2 = (R_K(a) - \alpha)^2. \tag{58}$$

我们回顾 [42] 中的引理 4.15。记号之间的对应关系如下：

取 O 等于 $(K^{\oplus\alpha})^c$，x 取为 a，y 取为 $y(s)$，则 R(x) 为 $R_K(a) - \alpha$，R(y) 为 $R_K(y(s)) - \alpha$，而 F(x) 为 $\mathrm{F}^{\alpha}_K(a)$。因此，[42] 中引理 4.15 的不等式可写为（使用我们的记号）：

$$\begin{aligned} &(R_K(y(s)) - \alpha)^2 \\ &\leq (R_K(a) - \alpha)^2 + 2\|y(s) - a\|\sqrt{(R_K(a) - \alpha)^2 - \mathcal{F}^{\alpha}_K(a)^2} + \|y(s) - a\|^2. \end{aligned}$$

利用 (58)，我们得到：

$$\begin{aligned} &(R_K(y(s)) - \alpha)^2 \\ &\leq \lambda^2 + S_a^2 + 2\|y(s) - a\|\sqrt{(R_K(a) - \alpha)^2 - \mathcal{F}^{\alpha}_K(a)^2} + \|y(s) - a\|^2. \end{aligned}$$

并且由于 $\mathrm{F}^{\alpha}_K(a) \geq \lambda$，再次利用 (58)，有

$$\sqrt{(R_K(a) - \alpha)^2 - \mathcal{F}^{\alpha}_K(a)^2} \leq S_a$$

and

$$(R_K(y(s)) - \alpha)^2 \leq (S_a + \|y(s) - a\|)^2 + \lambda^2.$$

由于 $\|y(s) - a\| \leq \|y - a\| + \|y(s) - y\| \leq \epsilon + s$，我们得到

$$(R_K(y(s)) - \alpha)^2 \leq (S_a + s + \epsilon)^2 + \lambda^2. \tag{59}$$

将此结果与 (56) 结合，得到：

$$(S_a + s + \epsilon)^2 + \lambda^2 \geq (S_0 + s)^2 + (\lambda - \delta)^2,$$

这可以改写为

$$2(S_0 - S_a - \epsilon)s \leq (2\lambda - \delta)\delta - \left(S_0^2 - S_a^2\right) + (2S_a + \epsilon)\,\epsilon. \tag{60}$$

为了从 (60) 得到 s 的上界，我们需要 $(S_0 - S_a - \epsilon)$ 的下界，以及前一个不等式右侧的上界，也就是 (

$2\lambda - \delta\ \delta -$) ( ) 的上界。

$(S_0^2 - S_a^2) + \ 2S_a + \epsilon\ \ \epsilon$

由 (57) 和 (58) 得

$$\begin{aligned} S_0^2 - S_a^2 &= (R_K(y) - \alpha)^2 - (\lambda - \delta)^2 - (R_K(a) - \alpha)^2 + \lambda^2 \\ &= (R_K(y) - \alpha)^2 - (R_K(a) - \alpha)^2 + (2\lambda - \delta)\delta, \end{aligned}$$

从而，

$$S_0^2 - S_a^2 - (2\lambda - \delta)\delta = (R_K(y) - \alpha)^2 - (R_K(a) - \alpha)^2. \tag{61}$$

由于 $|R_K(y) - R_K(a)| < \epsilon$，因此得到，

$|(R_K(y) - \alpha)^2 - (R_K(a) - \alpha)^2| < |R_K(y) + R_K(a) - 2\alpha|\,\epsilon \leq 2R_{\max}\,\epsilon$，这里用到了，根据 $R_{\max}$ 和 $\alpha \leq R_{\max}$ 的定义，$R_K(y)\ R_K(a) \leq R_{\max}$。现在，由 (61) 可得，

$$|(2\lambda - \delta)\delta - (S_0^2 - S_a^2)| < 2R_{\max}\,\epsilon \tag{62}$$

或者，等价地

$$(2\lambda - \delta)\delta - 2R_{\max}\epsilon < S_0^2 - S_a^2 < (2\lambda - \delta)\delta + 2R_{\max}\,\epsilon. \tag{63}$$

在假设 $\epsilon < \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{8R_{\max}}$ 下，由此可得 $2R_{\max}\epsilon < \frac{1}{4}(2\lambda-\delta)\delta$。由 (63) 推出：

$$0 < \frac{3}{4}(2\lambda-\delta)\delta < S_0^2 - S_a^2 < \frac{5}{4}(2\lambda-\delta)\delta. \tag{64}$$

这进而意味着

$$S_0 - S_a = \frac{S_0^2 - S_a^2}{S_0 + S_a} > \frac{3}{4}\frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{S_0+S_a}.$$

结合 (58) 和 (57)，可得 $S_0 + S_a < 2R_{\max}$，再次使用 $\epsilon < \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{8R_{\max}}$，得到

$$S_0 - S_a - \epsilon > \frac{3}{8}\frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{R_{\max}} - \epsilon > \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{4R_{\max}}. \tag{65}$$

由 $\epsilon < 2\alpha$ 和 (58) 可知 $2S_a + \epsilon < 2(S_a+\alpha) \le 2R_{\max}$。因此，结合 (62)，由 (60) 可得

$$\begin{aligned} 2(S_0 - S_a - \epsilon)s &< 2R_{\max}\epsilon + (2S_a + \epsilon)\,\epsilon \\ &\le 4R_{\max}\epsilon. \end{aligned} \tag{66}$$

注记*10.3*。请注意，假设 $\epsilon < 2\alpha$ 并非必需，因为在此我们只需将 ϵ 的上界取为 $R_{\max}$，从而得到 $2S_a + \epsilon < 3R_{\max}$；这样，在 (66) 中，我们会得到 $5R_{\max}\epsilon$，而不是 $4R_{\max}\epsilon$，作为上界。

方程（65）和（66）给出

$$s < \frac{8R_{\max}^2}{(2\lambda-\delta)\,\delta}\,\epsilon$$

我们通过假设 $y(s) \notin \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}$ 得到了这个不等式。由逆否命题可得

$$y\left(\frac{8R_{\max}^2}{(2\lambda-\delta)\,\delta}\,\epsilon\right) \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}.$$

这证明了引理中关于轨迹长度上界的最后一个陈述。由于根据引理 9.2，只要 $y(s) \notin \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}$，$t \mapsto \Phi_K(t,\ y)$ 的右导数的模（即 $\frac{ds}{dt} = \|\nabla_K(\Phi_K(t,\ y))\|$）就有下界 $\tilde{\mu}$，我们仍利用定理 8.10，得到引理的第一个陈述。□

注记*10.4*。虽然后续证明中不需要这一点，但由注记 10.3可知，我们可以省略引理 10.2 中的条件 $\epsilon < 2\alpha$，因此该引理在没有此条件的情况下同样成立，进而也适用于 $\alpha = 0$，即适用于 λ-中轴，只需付出增大常数这一较小代价，将流时间 $\frac{8R_{\max}^2}{(2\lambda-\delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon$ 替换为$\frac{10R_{\max}^2}{(2\lambda-\delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon$。

10.3 集合 K扰动后流向中轴。

我们用 $d_H(C_1,\ C_2)$ 表示两个紧集 $C_1,\ C_2 \subset \mathbb{R}^n$ 之间的豪斯多夫距离。

引理 10.5。设 $K, K' \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集 K^c 和 K'^c 的补集，且 $\alpha \ge 0, \mu > 0, \lambda > 0$，满足 $r_\mu^\alpha(K) > \alpha + \lambda$。

若 $d_H(K, K') < \epsilon$，则当 $\delta < \lambda$ 且 $\epsilon < \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{8R_{\max}}$ 时，有：

$$\Phi_K\left(\frac{8R_{\max}^2}{(2\lambda-\delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon,\ \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K')\right) \subset \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}(K),$$

其中 $R_{\max} = \max\{R_{\max}(K),\ R_{\max}(K')\} < \infty$ 且 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{\alpha,\mu}_{\ \alpha,\lambda} > 0$。

此外，对于 $y \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K')$，轨迹的长度 $\Phi_K\left(\left[0,\ \frac{8R_{\max}^2}{(2\lambda-\delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon\right], y\right)$ 的上界为

$$\frac{8R_{\max}^2}{(2\lambda-\delta)\,\delta}\,\epsilon.$$

证明。证明与引理 10.2 的证明类似，只是现在我们从 $\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K')$ 中的一点出发，并流向 $\mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}(K)$。我们考虑 $y \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K')$。记 $s \mapsto y(s)$ 为 $t \mapsto \Phi_K(t,\ y)$ 的轨迹，以弧长参数化，使得 $y(0) = y$。假设对某个 $s > 0$ 有：

$$y(s) \notin \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda-\delta}(K)$$

回顾可知，$d_H(K,\ K') < \epsilon$意味着

$$|R_{K'}(x) - R_K(x)| < \epsilon, \tag{67}$$

对所有 x均成立。类似于（54），再次有 $y \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K') \Rightarrow R_{K'}(y) \ge \alpha > \lambda \Rightarrow R_K(y) - \alpha > \lambda - \epsilon$。此外，由于引理的假设，有 $\epsilon < \delta$，因此可得，

$$R_K(y) - \alpha > \lambda - \delta. \tag{55}$$

如引理 10.2 的证明所示，我们可以将 $\lambda - \delta$ 代替 λ，应用引理 10.1，从而得到，

$$(R_K(y(s)) - \alpha)^2 \ge (S_0 + s)^2 + (\lambda - \delta)^2, \tag{68}$$

其中：

$$S_0^2 = (R_K(y) - \alpha)^2 - (\lambda - \delta)^2. \tag{69}$$

由于 $y \in \mathrm{ax}^{\alpha}_{\lambda}(K')$，$R_{K'}(y) - \alpha \ge \lambda$，并且存在 $S_y \ge 0$ 使得

$$S_y^2 = (R_{K'}(y) - \alpha)^2 - \lambda^2. \tag{70}$$

再次按照引理 10.2 证明中的相同步骤，我们使用 [42] 的引理 4.15 来得到，

$$(R_{K'}(y(s)) - \alpha)^2 \le (S_y + \|y(s) - y\|)^2 + \lambda^2. \tag{71}$$

由于 $y(s)$按弧长参数化，我们有 $\|y(s) - y\| \le s$，结合式 (67) 可得，

$$(R_K(y(s)) - \epsilon - \alpha)^2 \le (S_y + s)^2 + \lambda^2. \tag{72}$$

将式 (68) 从式 (72) 中相减，可得，

$$\begin{aligned} 0 \le &(S_y + s)^2 - (S_0 + s)^2 + \lambda^2 - (\lambda - \delta)^2 + (R_K(y(s)) - \alpha)^2 \\ &- (R_K(y(s)) - \epsilon - \alpha)^2, \end{aligned}$$

经过两步可将其改写为，

$$\begin{aligned} 0 \le (S_y + s)^2 - (S_0 + s)^2 + (2\lambda - \delta)\,\delta + (2R_K(y(s)) - 2\alpha - \epsilon)\,\epsilon \\ 2\left(S_0 - S_y\right)s \le (2\lambda - \delta)\,\delta - \left(S_0^2 - S_y^2\right) + 2R_{\max}\epsilon. \end{aligned} \tag{73}$$

再次按照引理 10.2 的证明，将式 (69) 和式 (70) 合并可得

$$\begin{aligned} \left|(2\lambda-\delta)\,\delta - \left(S_0^2 - S_y^2\right)\right| &= \left|(R_{K'}(y) - \alpha)^2 - (R_K(y) - \alpha)^2\right| \\ &= \left(R_K(y) + R_{K'}(y) - 2\alpha\right)\left|R_K(y) - R_{K'}(y)\right| \\ &\le \left(R_K(y) + R_{K'}(y) - 2\alpha\right)\,\epsilon \qquad \text{(by (67))} \\ &\le 2R_{\max}\,\epsilon, \end{aligned} \tag{74}$$

而（73）给出

$$\left(S_0 - S_y\right)s \le 2R_{\max}\,\epsilon. \tag{75}$$

由于 $\epsilon < \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{8R_{\max}}$，(74) 得出，

$$\frac{3}{4}(2\lambda-\delta)\,\delta < S_0^2 - S_y^2 < \frac{5}{4}(2\lambda-\delta)\,\delta$$

and

$$S_0 - S_y = \frac{S_0^2 - S_y^2}{S_0 + S_y} > \frac{3}{4}\frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{S_0+S_y} > \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{4R_{\max}},$$

这里用到了 (69) 蕴含 $S_0 \le R_{\max}$，而 (70) 蕴含 $S_y \le R_{\max}$。结合 (75)，得到：

$$s < \frac{8R_{\max}}{(2\lambda-\delta)\,\delta}\,\epsilon$$

然后，完全仿照引理 10.2 的证明即可得出结论 □

注记 *10.6.* 前一个引理可以解释为关于单侧豪斯多夫距离的稳定性结果。此外，当 $\alpha = 0$ 时，该引理仍然适用；此时，其结论可与 [20] 的定理 3 相比较。[20] 的定理 3 表明，λ-中轴是12-赫尔德稳定的，具体而言：若 $d_H(K,K') < \epsilon$，则对于 $x \in \mathrm{ax}_\lambda(K')$，存在 $y \in ax_{\lambda-\delta}(K)$，使得 $\|y-x\| = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$。换言之，$\mathrm{ax}_\lambda(K')$ 与 $\mathrm{ax}_\lambda(K)$ 之间的单侧豪斯多夫距离为 $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$。引理 10.5 证明了更强的线性界 $\|y-\bar{x}\| = O(\epsilon)$。对 K 进行平移的影响表明，我们不能期望得到优于线性的界。

[20] 中定理 3 和引理 10.5 的证明基于相同的思路。不过，在这里，利用引理 10.1 给出的 $R_K(y(S))$ 下界，可以得到更好的界；该下界比 [20] 中使用的下界更紧。

10.4 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K')$ 与 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$ 之间的豪斯多夫距离

结合引理 10.1 给出一个更对称的表述。

引理 10.7. 设 $K, K' \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集 K^c 的补集，且 K'^c 和 $\alpha > 0, \mu > 0, \lambda > 0$ 满足 $r^\alpha_\mu(K) > \alpha + \lambda$。若

$$d_H(K,K') < \epsilon,$$

并且，若 $\delta = 2\sqrt{\alpha\tilde{\mu}\epsilon} < \lambda$，且 $\epsilon < \text{最小值}\left(\frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{8R_{\max}}, \frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}}\right)$ 则，

$$\Phi_K\left(C\epsilon^{\frac{1}{2}}, \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K')\right) \subset \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K),$$

其中 $R_{\max} = \text{最大值}\{R_{\max}(K)\ R_{\max}(K')\} < \infty$，$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^\alpha_{,\mu,\lambda}(K) > 0$，并且 C 定义为

$$C = \frac{22}{3}\frac{R^2_{\max}}{\alpha^{\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^{\frac{3}{2}}\lambda}. \tag{76}$$

此外，若还对称地有 $r^\alpha_\mu(K)\ r^\alpha_\mu(K') > \alpha+\lambda$ 且 $R_{\max} = \text{最大值}(R_{\max}(K)\ R_{\max}(K'))$，并且 $\tilde{\mu} = \text{最小值}\left(\tilde{\mu}^{\alpha,\alpha}_{\mu,\lambda}(K)\ \tilde{\mu}^\alpha_{,\mu,\lambda}(K')\right)$，我们有

$$d_H\left(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K), \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K')\right) < C\epsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{77}$$

证明。我们首先将 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K')$ 流至 $\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda-\delta}(K)$，然后从 $\mathrm{ax}^\alpha_{\lambda-\delta}(K)$ 流至 $\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)$。事实上，由引理 10.5 和 9.3 可知，若 $K, K' \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集 K^c 的补集，并且 K'^c 和 $\alpha > 0, \mu > 0, \lambda > 0$ 满足 $r^\alpha_\mu(K) > \alpha + \lambda$ 且 $d_H(K,K') < \epsilon$，那么对于 $0 < \delta < \lambda$ 和 $\epsilon < \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{8R_{\max}}$，有：

$$\Phi_K\left(\frac{R^2_{\max}}{\alpha(\lambda-\delta)\tilde{\mu}^2}\delta + \frac{8R^2_{\max}}{(2\lambda-\delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon,\ \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K')\right) \subset \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K), \tag{78}$$

其中我们使用 (14) 以及 $R_{\max} = R_{\max}(K) < \infty$ 和 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^\alpha_{,\mu,\lambda} > 0$。

这里我们仍需选择一个 δ 的取值，使其最小化（78）中 Φ_K 的第一个自变量，即

$$\delta \mapsto \frac{R^2_{\max}}{\alpha(\lambda-\delta)\tilde{\mu}^2}\delta + \frac{8R^2_{\max}}{(2\lambda-\delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon. \tag{79}$$

为此，我们首先注意到，当 ϵ 较小时，使（79）最小化的 δ 取值也较小。当 δ 较小时，（79）可很好地近似为

$$\delta \mapsto \frac{R^2_{\max}}{\alpha\lambda\tilde{\mu}^2}\delta + \frac{4R^2_{\max}}{\lambda\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon. \tag{80}$$

使（80）最小化的 δ 取值为

$$\delta = 2\sqrt{\alpha\tilde{\mu}\epsilon}. \tag{81}$$

现在将（81）代入（79）。此外，注意到若 $\epsilon < \frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}}$，则（81）给出 $\delta < \lambda/2$，因此 $2\lambda - \delta > 3/2\lambda$ 且 $\lambda - \delta > 1/2\lambda$，由此得到以下上界

$$\frac{R^2_{\max}}{\alpha(\lambda-\delta)\tilde{\mu}^2}\delta + \frac{8R^2_{\max}}{(2\lambda-\delta)\,\delta\tilde{\mu}}\,\epsilon < \frac{22}{3}\frac{R^2_{\max}}{\alpha^{\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^{\frac{3}{2}}\lambda}\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

□

注记 *10.8.* 对称条件 $r^\alpha_\mu(K)\ r^\alpha_\mu(K') > \alpha + \lambda$ 可以替换为仅关于 K 的条件。更确切地说，在某个 δ 趋于零的极限下，若 $d_H(K,K') \to 0$，则 $r^{\alpha-\delta}_\mu(K) > \alpha + \lambda + \delta$ 蕴含 $r^\alpha_\mu(K)\ r^\alpha_\mu(K') > \alpha + \lambda$；参见 [19,定理 3。4] 其中也明确给出了 δ 以及 $d_H(K,K')$ 的依赖关系。

引理 10.9. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集 K^c 的补集，且 $\alpha > 0$、$\mu > 0$ 和 $\lambda > 0$ 满足 $r^\alpha_\mu(K) > \alpha + \lambda$。那么，若 $\delta = 2\sqrt{\alpha\tilde{\mu}\epsilon} < \lambda$ 且 $\epsilon < \min\left(2\alpha, \frac{(2\lambda-\delta)\,\delta}{8R_{\max}}, \frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}}\right)$ 则有

$$\Phi_K\left(C\epsilon^{\frac{1}{2}}, \left(\mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K)\right)^{\oplus\epsilon}_\alpha\right) \subset \mathrm{ax}^\alpha_\lambda(K),$$

其中 $R_{\max} = R_{\max}(K) < \infty, \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^\alpha_{,\mu,\lambda}(K) > 0$，而 C 由 (76) 定义。

证明. 证明与引理 10.7 的证明相同，不过这一次我们结合引理 10.2 和 9.3，以得到更对称的陈述。注意，我们从 (81) 中为 δ 选取相同的最优值。□

11 在对 K 进行豪斯多夫扰动下（λ，α）-中轴的格罗莫夫-豪斯多夫稳定性

本节将界定集合 K 的 (λ,α)-中轴与该集合经过扰动后的中轴之间的格罗莫夫-豪斯多夫距离，其中扰动在豪斯多夫意义下很小。这里的格罗莫夫-豪斯多夫距离是相对于中轴上的内在距离而言的，也就是说，它是空间上的度量

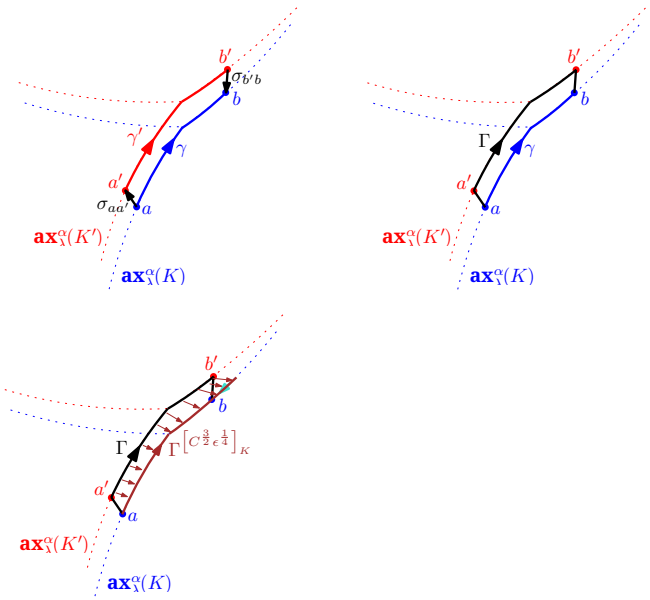


图11：定理11.1证明示意图。路径 Γ（由 $\sigma_{aa'}$、γ' 和 $\sigma_{b'b}$ 拼接而成）沿流 Φ_K 推进，得到路径 $\Gamma^{\left[C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}\right]_K}$，它实现了 $\mathbf{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 中 a 与 b 之间的一条路径。

$\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 是由该集合上的测地距离诱导的度量。正如我们在第9.4节中看到的，这个度量定义良好。

我们假设处于对称情形，即满足引理 10.7 的条件。此外，我们假设 K^c 和 $(K')^c$ 连通。

图11展示了定理11.1证明的思路。考虑这些点对

$$(a,a'),(b,b')\in\mathcal{R}=\left\{(x,x')\in \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)\times \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K'),\|x-x'\|<C\epsilon^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

为了比较从 a 到 b 的测地线 γ 的长度与从 a' 到 b' 的测地线 γ' 的长度（左图），我们首先构造一条路径 Γ（中图），它由 γ 与两条直线段 $\sigma_{aa'}$ 和 $\sigma_{b'b}$ 拼接而成。然后，沿流 Φ_K “推进” Γ（右图）；经过“时间” $t=\mathrm{O}\left(\epsilon^{\frac{1}{4}}\right)$ 后，它属于 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$。随后可以证明，推进后的路径不会比路径 γ' 长多少。

定理11.1. 设 K、$K'\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集 K^c、$(K')^c$、$\alpha>0$、$\mu>0$ 和 $\lambda>0$ 的补集，使得对于某个 $\alpha'<\alpha$，有 $r_\mu^{\alpha'}(K)>\alpha+\lambda$ 和 $r_\mu^{\alpha'}(K')>\alpha+\lambda$，且 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$ 和 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$ 连通。记 $R_{\max}=\max_\alpha\left(R_{\max}(K),R_{\max}(K')\right)$，并记 $\tilde{\mu}=\min\left(\tilde{\mu}_{\mu,\lambda}^{\alpha,\alpha}(K),\tilde{\mu}^\alpha,\mu_\lambda(K')\right)$。

假设 $d_H(K,K')<\epsilon$。如果

$$\epsilon<\min\left(\frac{\lambda^2\alpha\tilde{\mu}}{16R_{\max}^2},\frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}},\frac{9\lambda^4\alpha\tilde{\mu}^3}{400R_{\max}^4},\left(\frac{2\alpha}{C}\right)^2,\left(\frac{\lambda^2\alpha\tilde{\mu}}{16R_{\max}^2C}\right)^2,\left(\frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}C}\right)^2\right),$$

那么，关于内在度量，$\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 与 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$之间的格罗莫夫-豪斯多夫距离的上界为

$$2C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}+2C\epsilon^{\frac{1}{2}}e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}}+D\left(e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}}-1\right)=O\left(\epsilon^{\frac{1}{4}}\right),$$

其中

$$C=\frac{22}{3}\frac{R_{\max}^2}{\alpha^{\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^{\frac{3}{2}}\lambda}$$

and

$$D=\max\left(\mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)),\mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K'))\right)<\infty.$$

证明。在引理 10.7 的假设下，为了给出 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 与 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$ 之间格罗莫夫-豪斯多夫距离的下界，我们使用定义 8.7。

考虑如下关系 $\mathrm{R}\subset\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)\times\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$:

$$\mathcal{R}=\left\{(x,x')\in\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)\times\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K'),\|x-x'\|<C\epsilon^{\frac{1}{2}}\right\},\qquad(82)$$

其中 C 由（76）定义。

由引理 10.7 可知，该关系是满射，这意味着对于任意 $x\in\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$，都存在 $x'\in\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$，使得 $(x,x')\in\mathrm{R}$；反过来，若 $x'\in\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$，则存在 $x\in\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$，使得 $(x,x')\in\mathrm{R}$。

考虑 $(a,a'),(b,b')\in\mathrm{R}$。由于 K^c 和 $(K')^c$ 连通，定理 9.12 表明存在路径 $\gamma\colon[0,L]\to\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 和$\gamma'\colon[0,L']\to\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$，它们以弧长为参数，且满足:

$$\gamma(0)=a,\ \gamma(L)=b,\ \gamma'(0)=a',\ \gamma'(L')=b'$$

且其中 L和 L' 分别表示 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 与 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')$ 中 a,b 和 a',b'之间的测地距离，也就是说，

$$L=d_{\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)}(a,b)\quad\text{and}\quad L'=d_{\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')}(a',b').$$

分别用 $\sigma_{aa'}$ 和 $\sigma_{b'b}$ 表示从 a 到 a' 以及从 b' 到 b的直线路径。根据关系 R 的定义，它们的长度上界为 $C\epsilon^{\frac{1}{2}}$；又由于 $R_K(a)$ $R_K(b)\geq\lambda+\alpha$，我们有包含关系 $\mathrm{im}(\sigma_{aa'}),\mathrm{im}(\sigma_{b'b})$ $\subset\left(K^{\oplus\lambda+\alpha-C\epsilon^{\frac{1}{2}}}\right)^c$。

从现在起，我们假设:

$$\epsilon<\frac{\lambda^2}{C^2}=\frac{9\lambda^4\alpha\tilde{\mu}^3}{400R_{\max}^4}\qquad(83)$$

那么 $C\epsilon^{\frac{1}{2}}<\lambda$，由此可得 $\mathrm{im}(\sigma_{aa'}),\mathrm{im}(\sigma_{b'b})\subset(K^{\oplus\alpha})^c$。此外，$\mathrm{im}(\gamma')\subset\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')\subset\left(K'^{\oplus\lambda+\alpha}\right)^c$。由于 $\alpha,\lambda<R_{\max}$和 $\tilde{\mu}\leq1$ 83 $\epsilon<\lambda$ d_H K K $<\epsilon$ $\left(K^{\oplus\lambda+\alpha}\right)^c\subset$，() 蕴含，而 $(K^{\oplus\alpha})^c$ $\gamma\subset(K^{\oplus\alpha})^c$ (,) 给出 ′，因此我们得到 im() 。

由（77）同样可得 $\mathrm{im}(\gamma')\subset\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')\subset\left(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)\right)^{\oplus C\epsilon^{\frac{1}{2}}}$ 并且 a，$b\in\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$，其中 (a,a')，$(b,b')\in$R 同样给出 $\mathrm{im}(\sigma_{aa'})$，$\mathrm{im}(\sigma_{b'b})\subset\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)^{\oplus C\epsilon^{\frac{1}{2}}}$. N–

ow cons ider the pat h Γ f 从 a 到 b，我们将其定义为 co $\sigma_{aa'}$、γ' 和 $\sigma_{b'b}$的拼接。由此可得，

$$\mathrm{length}\left(\mathrm{im}(\Gamma)\right)<L'+2C\epsilon^{\frac{1}{2}}.\qquad(84)$$

Γ 包含于 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$ 和 $\left(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)\right)^{\oplus C\epsilon^{\frac{1}{2}}}$，也就是说，

$$\mathrm{im}(\Gamma) \subset \left(K^{\oplus\alpha}\right)^c \cap \left(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)\right)^{\oplus C\epsilon^{\frac{1}{2}}}. \tag{85}$$

对于 $T \geq 0$，现在我们考虑路径 $\Gamma^{[T]_K}$，它根据定义 9.8 连接 a 和 b。

直观地说，路径 $\Gamma^{[T]_K}$ 可以想象为在流 Φ_K 作用下经过时间 T 被“推动”的路径 Γ，同时“固定”端点 a 和 b，如图11所示。

Using (85), if $\delta' = 2\sqrt{\alpha\tilde{\mu}C\epsilon^{\frac{1}{2}}} < \lambda$ and

$$C\epsilon^{\frac{1}{2}} < \min\left(2\alpha, \frac{(2\lambda-\delta')\,\delta'}{8R_{\max}}, \frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}}\right)$$

我们可以应用引理 10.9，将 ϵ 替换为 $C\epsilon^{\frac{1}{2}}$。

注意，条件：$\delta' = 2\sqrt{\alpha\tilde{\mu}C\epsilon^{\frac{1}{2}}} < \lambda$ 和 $C\epsilon^{\frac{1}{2}} <$ 最小值 $\left(2\alpha, \frac{(2\lambda-\delta')\,\delta'}{8R_{\max}}, \frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}}\right)$ 可由以下条件推出：

$$\epsilon < \min\left(\left(\frac{2\alpha}{C}\right)^2, \left(\frac{\lambda^2\alpha\tilde{\mu}}{16R_{\max}^2 C}\right)^2, \left(\frac{\lambda^2}{16\alpha\tilde{\mu}C}\right)^2\right), \tag{86}$$

因此，引理 10.9 给出：

$$\Phi_K\left(C\left(C\epsilon^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \mathrm{im}(\Gamma)\right) \subset \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K),$$

也就是说，结合 (31)，

$$\mathrm{im}\left(\Gamma^{\left\lceil C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}\right\rceil_K}\right) \subset \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K).$$

由于 $\Gamma^{\left\lceil C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}\right\rceil_K}$ 是从 $a \in \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 到 $b \in \mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$、且位于 $\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)$ 内的一条路径，因此有

$$\mathrm{length}\left(\Gamma^{\left\lceil C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}\right\rceil_K}\right) \geq L = d_{\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)}(a,b).$$

由于根据 (85)，Γ 属于 $\left(K^{\oplus\alpha}\right)^c$，可以应用引理 9.9，结合 (84) 得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{length}\left(\Gamma^{\left\lceil C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}\right\rceil_K}\right) &\leq 2C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}} + \left(L' + 2C\epsilon^{\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}} \\ &= L' + 2C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}} + 2C\epsilon^{\frac{1}{2}}e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}} + L'\left(e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}} - 1\right).\end{aligned}$$

由于根据定理 9.12，$L' \leq$ 测地直径$(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K'))$ $< \infty$，可知

$$L \leq L' + 2C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}} + 2C\epsilon^{\frac{1}{2}}e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}} + \mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K'))\left(e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}} - 1\right).$$

由于我们对 K 和 K' 作出了对称的相同假设，因此有，

$$\begin{aligned}(a,a'),(b,b') \in \mathcal{R} \Rightarrow &\left|d_{\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)}(a,b) - d_{\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K')}(a',b')\right| \\ &\leq 2C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}} + 2C\epsilon^{\frac{1}{2}}e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}} + D\left(e^{\frac{C^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\alpha}} - 1\right),\end{aligned}$$

其中

$$D = \max\left(\mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K)), \mathrm{GeoDiameter}(\mathrm{ax}_\lambda^\alpha(K'))\right).$$

根据推论 9.13（利用假设 $r_\mu^{\alpha'}(K) > \alpha + \lambda$ 和 $r_\mu^{\alpha'}(K') > \alpha + \lambda$），我们知道 $D < \infty$。□

致谢

我们非常感谢 Erin Chambers 提出了若干问题，这些问题最终促成了本文的撰写。我们也要感谢“中轴算法”研讨会的其他组织者。还要感谢 Tatiana Ezubova 协助查找并翻译俄语文献。第二作者感谢 Edelsbrunner 研究组和 Datashape 研究组的所有成员，感谢他们营造了开展这项研究的良好氛围。

促成本研究成果的研究经费由欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟第七框架计划（FP/2007-2013）资助，项目资助协议编号为 339025，项目名称为 GUDHI（高维几何理解的算法基础）。本研究还获得欧盟地平线 2020 研究与创新计划资助，依据玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议，编号为 754411。奥地利科学基金（FWF）资助项目编号为 M-3073。

参考文献

[1] Samson Abramsky 和 Achim Jung. 1994. 域论. 载于 《计算机科学逻辑手册（第 3 卷）：语义结构》，Samson Abramsky、Dov M. Gabbay 和 T.S.E. Maibaum（编）. Clarendon Press，牛津，1–168. http: //www.cs.bham.ac.uk/~axj/papers.html [2] V.M. Alekseev. 1970年. 关于一个积分不等式的定理及其一些应用. 载于 《微分方程论文十三篇》，Alekseev 等（编）. 美国数学会，61–88. [3] Roberto M Amadio 和 Pierre-Louis Curien. 1998年. 《域与 λ 演算》. 第 46 号. 剑桥大学出版社. [4] Nina Amenta、Marshall Bern 和 David Eppstein. 1998年. 外壳与 β-骨架：组合曲线重建. 图形模型与图像处理 60, 2 1998 125 135 10 1006 1998 0465 ( ), – . [5] 2001 https://doi.org/ . /gmip. . Nina Amenta、Sunghee Choi 和 Ravi Krishna Kolluri. . 幂外壳. 载于 第六届 *ACM* 实体建模与应用研讨会论文集. 249 266 10 1145 376957 376986 – . https://doi.org/ . / . Dominique [6] Attali、Jean-Daniel Boissonnat 和 Herbert Edelsbrunner. 2009年. 中轴的稳定性与计算——前沿综述. 载于 《科学可视化、计算机图形学与大规模数据探索的数学基础》，Torsten Möller、Bernd Hamann 和 Robert D. Russell（编）. Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，109–125. https: //doi.org/ 10 1007 106657_6 . / [7] b Dominique Attali 和 Annick Montanvert. 1996年. 为更好地简化骨架而进行的噪声建模. 载于 第三届 *IEEE* 国际图像处理会议论文集，第 3 13 16 10 1109 1996 560357 卷. IEEE，– [8] . https://doi.org/ . /ICIP. . Dominique Attali 和 Annick Montanvert. 1997 . 计算与简化 D 和 3D 连续骨架. 《计算机视觉与图像理解》67, 3 (2 1997 261 273 10 1006 1997 0536), – . https://doi.org/ . /cviu. . [9] Victor Bangert. . 具有正可达的集合. 《数学档案》38, 1 (1982), 1982 54 57 10 1007 01304757 – . https://doi.org/ . /BF Ingo [10] Battenfeld. . 《拓扑域论》. 博士学位论文. 爱丁堡大学. [11] Thibault Blanc-Beyne、Géraldine Morin、Kathryn Leonard、Stefanie Hahmann 和 Axel Carlier. 2018年. 用于三维形状分解和子部分分类的显著性度量. 《图形模型》99 (2018), 22–30. https://doi.org/10. 1016 2018 07 003 /j.gmod. . . Jean-Daniel Boissonnat、[12] Frédéric Chazal 和 Mariette Yvinec. 2018年. 《几何与拓扑推断》. 剑桥应用数学丛书，第 57 卷. 剑桥大学出版社. [13] Jean-Daniel Boissonnat 和 Mathijs Wintraecken. 2023+. 流形子集的可达半径. 《应用与计算拓扑》（已接收）(2023+). [14] Vasco Brattka、Peter Hertling 和 Klaus Weihrauch. 2008年. 《可计算分析教程》. 施普林格纽约，纽约州纽约，425–491. https: //doi.org/10.1007/978-0-387-68546-5_18

[15] Martin R Bridson 和 André Haefliger. 2013年. 非正曲率度量空间. 《数学科学基础丛书》，第 319 卷. Springer Berlin，海德堡. https://doi.org/ 10 1007 978 3 662 12494 9 . / - - - - Michael A [16] 1977 Buchner. . 维数小于或等于 6 时割迹的稳定性. 《数学研究》43, 3 (1977), 199–231. https://doi.org/10. 1007/BF01390080[17] Michael A. Buchner. 1978年. 维数小于或等于六时割迹的结构. 《数学汇辑》37, 1 (1978), 103–119. http: // www.numdam.org/item/CM_1978__37_1_103_0/ [18] Erin Chambers、Christopher Fillmore、Elizabeth Stephenson 和 Mathijs Wintraecken. 2022年. 视频：警示故事：燃烧中轴并不稳定 . 载于第 38 届国际计算几何研讨会（ SoCG 2022）（莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs），第 224 卷），Xavier Goaoc 和 Michael Kerber（编）. 达格施图尔城堡–莱布尼茨信息学中心，德国达格施图尔，66:1–66:9. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.66 https://youtu.be/CFmFP6CHVEk. [19] F. Chazal、D. Cohen-Steiner 和 A. Lieutier. 2009年. 欧几里得空间中紧集的采样理论. 《离散与计算几何》41, 3 (2009), 461– 479 10 1007 00454 009 9144 8 . https://doi.org/ . / s - - - F. Chazal 和 A. Lieutier. . -中轴. 《图形模型》67, 4 (2005), [20] 2005 λ 304 331 10 1016 2005 01 002 – . https://doi.org/ . /j. gmod. . . Frédéric Chazal 和 André Lieutier. . 弱特征尺寸与持久同调：计算 $\mathbb{R}^n$ 中实体的同调，基于含噪数据样本. 载于第二十一届计算几何年度研讨会论文集. [21] 2005 255 262 10 1145 1064092 1064132 – . https://doi.org/ . / . Frank [22] 1990 H. Clarke. .《优化与非光滑分析》.《应用数学经典》，第 5 卷. SIAM. [23] Tamal K. Dey 和 Jian Sun. 2006年. 利用中轴测地函数定义和计算曲线骨架. 载于第四届欧洲图形学几何处理研讨会论文集（意大利撒丁岛卡利亚里）（SGP '06）. 欧洲图形学协会，德国戈斯拉尔，143–152. [24] Tamal K Dey 和 Wulue Zhao. 2004年. 从具有收敛保证的沃罗诺伊图逼近中轴. 《算法学》38, 1 (2004), 179–200. https://doi.org/10.1007/s00453-003-1049-y [25] J.J. Duistermaat 和 J.A.C. Kolk. 2004年. 《多变量实分析 II：积分》. 剑桥大学出版社. [26] Abbas Edalat 和 Reinhold Heckmann. 1998年. 度量空间的计算模型. 《理论计算机科学》193, 1-2 (1998), 53–73. https://doi.org/10. 1016 0304 3975 96 00243 5 /S - ( ) - H. [27] 1959 Federer. . 曲率测度. 《美国数学会汇刊》93 (1959), 418–491. https://doi.org/ 10 1090 0002 9947 1959 0110078 1 . /S - - - - Mark Foskey、 [28] Ming C Lin 和 Dinesh Manocha. 2003年. 简化中轴的高效计算. 《计算机与信息科学工程学报》3, 4 (2003), 274–284. https: //doi.org/ 10 1145 781606 781623 . / . Joachim Giesen 和 Matthias John. 2008年. [29] 流复形：一种用于几何建模的数据结构. 《计算几何》39, 3 (2008), 178–190. https: //doi.org/ 10 1016 2007 01 002 . /j.comgeo. . . Joachim [30] Giesen、Balint Miklos、Mark Pauly 和 Camille Wormser. 2009年. 尺度轴变换. 载于第二十五届计算几何年度研讨会论文集（丹麦奥胡斯）. 计算机协会，美国纽约州纽约， 106 115 10 1145 1542362 1542388 – [31] 1955 . https://doi.org/ . / . Andrzej Grzegorczyk. . 可计算泛函 .《数学基础》 42, 168-202 (1955年), 3. [32] Christopher Heil. 2019年.《实分析导论》. 第 280 卷. 施普林格. [33] M.W. Hirsch. 1976年.《微分拓扑》. Springer-Verlag：纽约、海德堡、柏林.[34] Jisu Kim、Jaehyeok Shin、Frédéric Chazal、Alessandro Rinaldo 和 Larry Wasserman. 2020年. 通过切赫复形和维托里斯-里普斯复形进行同伦重构. 载于第 36 届国际计算几何研讨会（SoCG 2020）（莱布尼茨国际信息学会议录（ LIPIcs），第 164 卷），Sergio Cabello 和 Danny Z. Chen（编）. 达格施图尔城堡–莱布尼茨信息学中心，德国达格施图尔，54:1–54:19. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SoCG. 2020.54 完整版本：arXiv:1903.06955.[35] Norbert Kleinjohann. 1980年. 黎曼几何中的凸性与唯一垂足性质. 《数学档案》35, 1 (1980), 574–582. https: //doi.org/ 10 1007 01235383 . /BF [36] 1981 Norbert Kleinjohann. . 黎曼几何中的最近点.《数学杂志》176, 3 (1981年), 327–344. https://doi.org/10.1007/ BF01214610[37] Ker-I Ko. 1991年. 实函数复杂性理论. 比克豪泽. viii+ 309 页. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-6802-1 [38] Daniel Lacombe. 1955年。将递归函数概念扩展至一个或多个实变量函数。法国科学院会议周报 240 (1955年), 2478 – 2480。 [39] Daniel Lacombe. 1955年。将递归函数概念扩展至一个或多个实变量函数 II。法国科学院会议周报 241 (1955年), 13 – 14。 [40] Daniel Lacombe. 1955年。将递归函数概念扩展至一个或多个实变量函数 III。法国科学院会议周报 241 (1955年), 151 – 153。 [41] Daniel Lacombe. 1955年。关于递归算子和单个实变量递归函数的说明。法国科学院会议周报 241 (1955年), 1250 – 1252。 [42] André Lieutier. 2004年。 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界开子集均与其中轴具有相同的同伦类型。《计算机辅助设计》 36, 11 (2004年), 1029 – 1046。 https: //doi.org/10.1016/j.cad.2004.01.011 《实体建模理论与应用》。[43] Lu Liu、Erin W. Chambers、David Letscher 和 Tao Ju. 2011年。二维形状中轴上的扩展草火变换。《计算机辅助设计》 43, 11 (2011年), 1496 – 1505。 https://doi.org/10.1016/j.cad.2011.09.002 《实体与物理建模 2011》。[44] John N Mather. 1983年。欧几里得空间中到子流形的距离。载于《纯数学专题讨论会论文集》，第 40 卷。美国数学会，199–216。[45] K. Menger. 1930年。一般度量研究，第四研究：曲线度量。《数学年刊》 103 (1930年), 466–501。 _ https://doi.org/10.1007/ 978-3-7091-6110-4 22[46] Dragoslav S Mitrinovic、Josip Pecaric 和 Arlington M Fink. 1991年。涉及函数及其积分和导数的不等式。第 53 卷。Springer Dordrecht。https://doi.org/ 10 1007 978 94 011 3562 7 . / - - - - A.I. Perov. . 关于积分不等式。 [47] 1957 沃罗涅日国立大学函数分析研讨会论文集 5 (1957年), 87–97。 [48] Doron Shaked 和 Alfred M. Bruckstein. 1998年。中轴修剪。《计算机视觉与图像理解》 69, 2 (1998年), 156 – 169。https://doi.org/10.1006/ cviu.1997.0598[49] Wilson A Sutherland. 2009年。度量与拓扑空间导论。牛津大学出版社。[50] Andrea Tagliasacchi、Thomas Delame、Michela Spagnuolo、Nina Amenta 和 Alexandru Telea. 2016年。三维骨架：前沿综述。载于《计算机图形学论坛》 12865 第 35 卷。Wiley 在线图书馆，573–597。https://doi.org/10.1111/ cgf.[51] 艾伦·图灵. 2004年。关于可计算数及其在判定问题中的应用，1936年。《图灵精要：计算、逻辑、哲学、人工智能和人工生命领域的奠基性著作，以及恩尼格玛密码机的秘密》(2004年), 58。[52] A. M. Turing. 1937年。关于可计算数及其在判定问题中的应用。《伦敦数学会会刊》 s2-42, 1 (1937年), 230–265。 https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1. 230 arXiv:https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/plms/s2-42.1.230[53] Martijn van Manen. 2007年。麦克斯韦分层与焦散。载于《几何与拓扑中的奇点》。World Scientific，787–824。 [54] C. T. C. Wall. 1977年。一般可微流形的几何性质。载于《几何与拓扑》，Jacob Palis 和 Manfredo do Carmo（编）。Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，707–774。 [55] Wolfgang Walter. 1970年。微分和积分不等式。《数学及其边缘领域成果》，第 55 卷。Springer-Verlag。https://doi.org/10. 1007/978-3-642-86405-6[56] Klaus Weihrauch. 2000年。可计算分析：导论。Springer Berlin，海德堡。 https://doi.org/ 10 1007 978 3 642 56999 9 . / - - - - [57] Yajie Yan、Tao Ju、David Letscher 和 Erin Chambers. 2015年。燃烧中轴。载于 ACM SIGGRAPH 2015海报（美国加利福尼亚州洛杉矶）（SIGGRAPH '15）。计算机协会，纽约州纽约，美国，第 62 篇文章，1 页。https://doi.org/ 10 1145 2787626 2792658 . / . Yajie Yan、Kyle Sykes、Erin [58] Chambers、David Letscher 和 Tao Ju. 2016年。三维形状中轴上的侵蚀厚度。《ACM图形学汇刊》 35, 4，第 38 2016 12 10 1145 2897824 2925938 篇文章 [59] （7月），页码。https://doi.org/ . / . Yosef Yomdin. . 关于一般中心集的局部结构。《数学汇辑》 43, 2 (1981年), 225–238。http://www.numdam.org/item/CM _1981_43 2 225 0/_ _ _ _

收稿日期：2022年11月7日；录用日期：2023年2月6日