arXiv:2303.04033v1 [math.NT] 7 Mar 2023

# 阿波罗尼斯圆与多项式不可约因子的数量

Anca Iuliana Bonciocat、Nicolae Ciprian Bonciocat、Yann Bugeaud、Mihai Cipu 和 Maurice Mignotte

谨献给 Toma Albu 教授和 Constantin N ˘ast ˘asescu 教授，以纪念他们 80 岁寿辰

Abstract. 我们为多项式 $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ 的规范分解中出现的非恒定不可约因子的重数之和提供上界：当 $f$ 的所有根都位于一个阿波罗尼斯圆内时，该圆与实轴上横坐标为整数的两个点相关 $a$，并且这些根到这两个点的距离之比取决于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的可容许因子 $b$。特别地，当 $f(a)$ 和 $f(b)$ 含有较少的素因子，且 $f$ 是 Enestr¨om-Kakeya 多项式、Littlewood 多项式，或具有较大的首项系数时，我们获得了这类上界。对于任意域上的多元多项式，在非阿基米德情形下，也可得到类似结果。

## 1. Introduction

整系数多项式 $f(X)$ 在某些指定整数自变量值处的取值之素因数分解，可为 $f$ 的规范分解提供有用信息。许多经典或较新的不可约性判据都会利用这类信息，并结合关于 $f$ 的根的位置的信息。St¨ackel [28], Weisner [29], Ore [24] 和 Dorwart [14] 的著作中可以找到这类经典结果。有关较新的结果，以及素数与不可约多项式之间的一些优美联系，请参阅 Ram Murty [27], 、Girstmair [18], 、Guersenzvaig [19], ，以及 Bodin、D` ebes 和 Najib [3], 等人的著作。一些特别优美的不可约性判据会先将素数或某些类别的合数写成以 $B$ 为基数的数制表示，例如，然后以不定元替换基数，从而得到不可约多项式。这里我们提及 Cohn 不可约性判别法 [26] ，它使用十进制表示的素数；以及 Brillhart、Filaseta 和 Odlyzko [8] 将其推广到任意基数的结果，还有 Filaseta [15], [16], 以及 Cole、Dunn 和 Filaseta [11] 提出的进一步推广。另一种构造不可约多项式 $f$ 的方法，是将素数或素数幂写成若干个符号任意的整数之和，其中一个整数的绝对值足够大，并将这些整数用作 $f$ [4]、 [6]的系数。

2010年数学主题分类。主要分类 11R09；次要分类 11C08。关键词和短语：
不可约多项式，素数。

在 [5] 中，研究者结合两个整数 $a$ 和 $b$ 处 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的可容许因子信息，以及 $f$ 的根的位置的信息，研究了整系数多项式 $f$ 的不可约性。我们在此回顾可容许因子的定义，本文后续内容也将一直用到这一概念。

定义 1.1. 设 $f$ 是一个非常数整数系数多项式，并设 $a$ 是满足 $f(a) \neq 0$ 的整数。若整数 $d$ 是 $f(a)$ 的可容许因子，则称之为可容许因子，当且仅当 $d \mid f(a)$ 且

$$\gcd\left(d, \frac{f(a)}{d}\right) \mid \gcd(f(a), f'(a)), \tag{1}$$

我们将 $f(a)$ 的所有可容许因子的集合记为 $\mathcal{D}_{ad}(f(a))$。若整数 $d$ 是 $f(a)$ 的酉因子，则称之为酉因子，当且仅当 $d \mid f(a)$ 且 $d$ 与 $f(a)/d$ 互素。我们用 $\mathcal{D}_u(f(a))$ 表示 $f(a)$ 的酉因子集合。

我们注意到，这一定义的动机在于：若多项式 $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ 分解为 $f(X) = g(X)h(X)$，其中 $g$、$h$ 是 $\mathbb{Z}[X]$ 中的非常数多项式，则给定满足 $f(a) \neq 0$ 的整数 $a$，整数 $g(a)$ 和 $h(a)$ 都是 $f(a)$ 的因子，并且还必须满足等式 $f'(a) = g'(a)h(a) + g(a)h'(a)$。这意味着，$g(a)$ 与 $f(a)/g(a)$ 的最大公因数必须同时整除 $f(a)$ 和 $f'(a)$。我们还注意到，若 $f(a)$ 与 $f'(a)$ 互素，则 $\mathcal{D}_{ad}(f(a))$ 化简为集合 $\mathcal{D}_u(f(a))$。

如 [5], 所示，可以将对 $f$ 的不可约性的研究与 $f$ 的根在一个阿波罗尼斯圆内的位置联系起来。这个圆与实轴上横坐标为整数 $a$ 和 $b$ 的点相关，其到这两点的距离之比仅用 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的某些可容许因子表示。这里回顾阿波罗尼斯给出的著名圆的定义：平面上到两个定点 $A$ 和 $B$ 的距离之比为给定值 $r$ 的点 $P$ 的集合（见图 1）。这个圆可能退化为一个点（当 $r \to 0$ 或 $r \to \infty$ 时），也可能退化为一条直线（当 $r \to 1$ 时）。

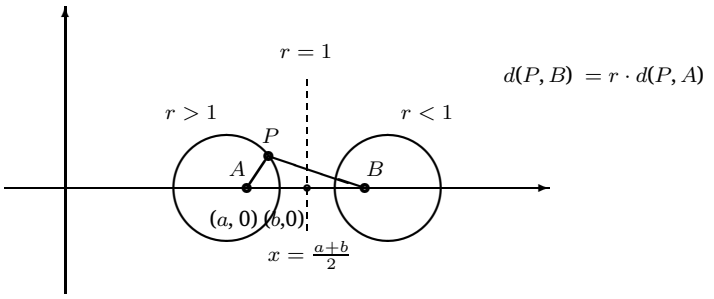


图 1. 平面上一对点所对应的阿波罗尼斯圆

更确切地说，给定两个点 $A = (a,0)$ 和 $B = (b, 0)$ 以及 $r > 0$, $r \neq 1$，满足 $d(P, B) = r \cdot d(P, A)$ 的点 $P = (x, y)$ 的集合是阿波罗尼斯圆 $\mathsf{Ap}(a, b, r)$，其方程为

$$\left(x - \frac{ar^2 - b}{r^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(r\frac{b - a}{r^2 - 1}\right)^2, \tag{2}$$

当 $r \to 0$ 时退化为点 $(b, 0)$，当 $r \to \infty$ 时退化为点 $(a,0)$，当 $r \to 1$ 时退化为竖直直线 $x = \frac{a+b}{2}$。

考虑多项式 $f \in \mathbb{Z}[X]$ 的规范分解 $f(X) = const \cdot \prod f_i(X)^{m_i}$，其中 $f_i$ 均为不可约且两两互素。本文旨在通过求得 $m_1 + \cdots + m_r$ 的上界，将 [5] 中的结果加以推广。为此，我们将调整 [5] 中的方法，并考察一列可能更大的阿波罗尼斯圆，这些圆可能包含 $f$ 的根；在这里，$f(a)$ 和 $f(b)$ 的可容许因子也将发挥关键作用。关于其他给出这些重数之和上界的结果，请参阅 Guersenzvaig [19], 以及 [7], ；后者采用了 Cavachi、M. Vˆajˆaitu 和 Zaharescu[9], [10] 的一些方法来研究互素多项式的线性组合。

在本文中，我们不再说 $f$ 的规范分解中出现的非恒定不可约因子的重数之和至多为 $k$，而简而言之，称 $f$ 是 $\mathbb{Q}$ 上至多由 $k$ 个不可约因子相乘得到的。

我们得到的第一个建立阿波罗尼斯圆与这些重数之和之间联系的结果如下。

定理 1.2. 设 $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$，并假设对于两个整数 $a$、$b$，有 $0 < |f(a)| < |f(b)|$。设 $k$ 为正整数，并令

$$q_k = \max \left\{ \frac{d_2}{d_1} \leq \sqrt[k+1]{\frac{|f(b)|}{|f(a)|}} : d_1 \in \mathcal{D}_{ad}(f(a)),\ d_2 \in \mathcal{D}_{ad}(f(b)) \right\}. \tag{3}$$

那么，在以下三种情形中的任意一种下，$f$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上至多由 $k$ 个不可约因子相乘得到的：

i) $q_k > 1$ 以及 $f$ 的所有根都位于阿波罗尼斯圆 $\mathrm{Ap}(a, b, q_k)$ 内；

ii) $q_k > 1$、$f$ 的所有根都位于阿波罗尼斯圆 $\mathrm{Ap}(a, b, \sqrt{q_k})$ 内，并且 $f$ 没有有理根；

iii) $q_k = 1$ 且满足以下任一条件：$b > a$ 且 $f$ 的所有根都位于半平面 $x < \frac{a+b}{2}$ 内，或 $a > b$且 $f$ 的所有根都位于半平面 $x > \frac{a+b}{2}$ 内。

我们指出，在定理 1.2 中取 $k = 1$，即可得到文献 [5]中的定理 1。结合式 (2) 给出的阿波罗尼斯圆方程，定理 1.2 可表述为更明确的形式如下。

定理 1.3. 设 $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$，并假设对于两个整数 $a$、$b$，有 $0 < |f(a)| < |f(b)|$。设 $k$ 为正整数，且 $q_k$ 由式 (3) 给出。则在以下三种情形中的每一种情形下，$f$ 都是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的至多 $k$ 个不可约因子的乘积：

i) $q_k > 1$ 且 $f$ 的每个根 $\theta$ 都满足 $|\theta - \frac{aq_k^2 - b}{q_k^2 - 1}| < q_k \frac{|b-a|}{q_k^2 - 1}$；

ii) $q_k > 1$，$f$ 的每个根 $\theta$ 都满足 $|\theta - \frac{aq_k - b}{q_k - 1}| < \sqrt{q_k} \frac{|b-a|}{q_k - 1}$，且 $f$ 没有有理根；

iii) $q_k = 1$ 并且满足以下任一条件：$b > a$ 且 $f$ 的所有根都位于半平面 $x < \frac{a+b}{2}$ 内；或者 $a > b$且 $f$ 的所有根都位于半平面 $x > \frac{a+b}{2}$ 内。

注意，如果 $b > a$ ，并且我们可以通过施加条件 $f(X + \frac{a+b}{2})$ 是一个赫尔维茨稳定多项式，证明对于某个 $k \geq 1$，有 $q_k = 1$ ，从而 $f$ 的所有根都位于半平面 $x < \frac{a+b}{2}$ 内，那么根据定理 1.2 iii)，我们可以得出结论： $f$ 在整数环 $\mathbb{Q}$ 上至多是 $k$ 个不可约因子的乘积。请回想，多项式为赫尔维茨稳定多项式的充要条件是它通过劳斯–赫尔维茨判据。

在某些情况下，与其检验定理 1.2 或定理 1.3 中的条件，不如使用 $f$ 的根的绝对值的最大值：

定理 1.4. 设 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$，令 $M$ 为其根的绝对值的最大值，并假设对于两个整数 $a, b$，有 $0 < |f(a)| < |f(b)|$。设 $k$ 为一个正整数，且令 $q_k$ 由 (3) 给出。则在以下三种情形中的每一种情形下， $f$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上至多 $k$个不可约因子的乘积：

i) $|b| > q_k|a| + (1 + q_k)M$； ii) $|b| > \sqrt{q_k}|a| + (1 + \sqrt{q_k})M$，
且 $f$ 没有有理根； iii) $q_k = 1$, $a^2 < b^2$ 和 $M < \frac{|a+b|}{2}$。

正如我们稍后在注记 2.1 中将看到的，在某些情况下，即使我们不显式计算 $f(X + \frac{aq_k^2-b}{q_k^2-1})$ 和 $f(X + \frac{aq_k-b}{q_k-1})$ 的系数，以推导其根的绝对值最大值的估计，定理 1.3 中的条件 i) 和 ii) 也可能比定理 1.4 中对应的条件更严格。不过，计算这些系数并避免不必要地使用三角不等式，或许还能得到关于 $a$ 和 $b$ 的更严格条件。

如果无法获得关于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 的素因数分解的信息，因而无法使用 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的可容许因子，我们可以接受略弱一些的结果：在 $q_k$ 的定义中，允许 $d_1$ 和 $d_2$ 分别为 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的任意因子。这可能会增大 $q_k$，从而对 $a$ 和 $b$施加更严格的限制。计算 $q_k$ 需要分析素数幂乘积之间的不等式，因此只有在 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的素因子数量较少的少数情况下，才能得到 $q_k$ 的显式有效公式。另一方面，可以通过求得 $f$ 的根的绝对值最大值 $M$ 的精确估计，放宽对 $a$ 和 $b$ 的限制。读者或许可以参考这一主题的丰富文献，其研究可追溯到柯西和拉格朗日的著作。这里我们仅提请读者参阅将柯西界推广至多项式 [23]，最大根的结果、拉格朗日界的近期改进 [2]，、依赖藤原 [17], Ballieu [1], [22], Cowling 和 Thron [12], [13], 小岛[21], 所得参数族的一些经典结果，以及利用复矩阵特征根估计的方法 [25]。

迄今陈述的结果将在第2节中证明。第3节将介绍定理 1.4的一些推论，适用于某些情形：此时 $f(a)$和 $f(b)$的素因数分解使我们能够得出 $q_k = 1$。关于$f(a)$和 $f(b)$的酉因子的信息所支持的结果将在第4节中给出。第5节将给出一些类似的结果

针对任意域上的多元多项式。本文最后一节将给出一些示例。

## 2. Proofs for the case of admissible divisors

定理 1.2 的证明 首先注意，若按照定理陈述固定整数 $a$ 和 $b$，则 $q_k$ 是 $k$上的递减函数。此外，由于 1 显然是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的可容许因子，因此 $q_k$的一个可能候选值是 1，故对每个 $k$，都有 $q_k \geq 1$。现在反设 $f$是由 $s$个因子 $f_1$、.....、$f_s \in \mathbb{Z}[X]$的乘积，其中 $s \geq k+1$ 且 $f_1$、.....、$f_s$ 在 $\mathbb{Q}$上不可约。接下来，选取一个指标 $i \in \{1, \ldots, s\}$，并记

$$g_i(X) := \prod_{j \neq i} f_j(X).$$

因此，对每个 $i = 1$、.....、$s$，我们可以写成 $f = f_i \cdot g_i$。现在，由于 $f(a) = f_i(a)g_i(a) \neq 0$ 且$f'(a) = f_i'(a)g_i(a) + f_i(a)g_i'(a)$，并且类似地，$f(b) = f_i(b)g_i(b) \neq 0$且 $f'(b) = f_i'(b)g_i(b) + f_i(b)g_i'(b)$，可知 $f_i(a)$ 是 $f(a)$ 的一个因子 $d_i$，而 $f_i(b)$ 是 $f(b)$ 的一个因子 $d_i'$，并且还必须满足以下整除条件

$$\gcd\left(d_i, \frac{f(a)}{d_i}\right) \mid \gcd(f(a), f'(a)) \quad \text{and} \quad \gcd\left(d_i', \frac{f(b)}{d_i'}\right) \mid \gcd(f(b), f'(b)).$$

因此，$d_i$ 和 $d_i'$ 分别是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的可容许因子，并且对每个 $i = 1, \ldots, s$ 都成立。接下来，由于

$$\frac{d_1'}{d_1} \cdots \frac{d_s'}{d_s} = \frac{f(b)}{f(a)},$$

商 $\frac{|d_1'|}{|d_1|}, \ldots, \frac{|d_s'|}{|d_s|}$ 中必有一个小于或等于 $\sqrt[s]{\frac{|f\ b\ |}{(\quad)()}}$，不妨设这个商是 $\frac{|d_1'|}{|d_1|}$。特别地，这表明我们必有

$$\frac{|f_1(b)|}{|f_1(a)|} \leq q_{s-1}. \tag{4}$$

现在假设 $f$可分解为 $f(X) = a_n(X - \theta_1) \cdots (X - \theta_n)$，其中 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ 是某些复数。不失一般性，我们还可以进一步假设 $\deg f_1 = m \geq 1$，不妨设，并且

$$f_1(X) = b_m(X - \theta_1) \cdots (X - \theta_m)$$

其中 $b_m$ 是 $a_n$ 的某个因子。接下来，我们注意到可以写成

$$\frac{f_1(b)}{f_1(a)} = \frac{b - \theta_1}{a - \theta_1} \cdots \frac{b - \theta_m}{a - \theta_m},$$

因此，鉴于 (4)，至少有一个指标 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 必须满足

$$\frac{|b - \theta_j|}{|a - \theta_j|} \leq q_{s-1}^{\frac{1}{m}}. \tag{5}$$

现在，我们首先假设 $q_k > 1$ 和 $f$ 的所有根都位于阿波罗尼斯圆 $\mathrm{Ap}(a, b, q_k)$ 内。特别是，由于 $\theta_j$位于阿波罗尼斯圆 $\mathrm{Ap}(a, b, q_k)$ 内，它必须满足

[1]不等式 $|b-\theta_j|>q_k|a-\theta_j|$。由于 $q_k>1$和 $m\geq 1$，我们有 $q_k\geq q_k^{\frac{1}{m}}$，因此可以推得实际上有

$$\frac{|b-\theta_j|}{|a-\theta_j|}>q_k^{\frac{1}{m}}\geq q_{s-1}^{\frac{1}{m}},$$

由于 $q_k\geq q_{s-1}$，这与 (5) 矛盾。因此， $f$ 是有理数域上至多 $k$ 个不可约因子的乘积。

接下来，假设 $q_k>1$，且 $f$ 的所有根都位于阿波罗尼斯圆 Ap$(a,b,\sqrt{q_k})$ 内。特别地，我们有 $|b-\theta_j|>\sqrt{q_k}|a-\theta_j|$。由于 $f$ 没有有理根，我们[1]必有 $m\geq 2$，因此 $\sqrt{q_k}\geq q_k^{\frac{1}{m}}$，这同样导出了我们所需的矛盾

$$\frac{|b-\theta_j|}{|a-\theta_j|}>q_k^{\frac{1}{m}}\geq q_{s-1}^{\frac{1}{m}},$$

因此在这种情况下，也可以将 $f$ 写成有理数域上至多 $k$ 个不可约因子的乘积。

最后，假设 $q_k=1$。由于 $1\leq q_{s-1}\leq q_k$，这意味着 $q_{s-1}$ 也等于 1，因此在这种情况下，不等式 (5) 写成

$$\frac{|b-\theta_j|}{|a-\theta_j|}\leq 1,$$

这等价于

$$(b-Re(\theta_j))^2\leq (a-Re(\theta_j))^2. \tag{6}$$

因此，为了与 (6) 矛盾，只需要求 $f$ 的所有根在半平面 $x<\frac{a+b}{2}$ 内（若 $a<b$），或在半平面 $x>\frac{a+b}{2}$ 内（若 $a>b$），证明至此完成。□

定理 1.3 的证明 i) 根据 (2)，阿波罗尼斯圆 Ap$(a,b,q_k)$ 的圆心横坐标为 $C_k=\frac{aq_k^2-b}{q_k^2-1}$，半径为 $R_k=q_k\frac{|b-a|}{q_k^2-1}$。 $f$ 的所有根都位于阿波罗尼斯圆 Ap$(a,b,q_k)$ 内这一条件，等价于要求多项式 $f(X+C_k)$ 的所有根都位于以原点为圆心、半径为 $R_k$ 的圆内；也就是说， $f(X+C_k)$ 的所有根的绝对值都小于 $R_k$。因此，若 $f$ 的根为 $\theta_1$、.....、$\theta_n$，则 $f(X+C_k)$ 的根为 $\theta_1-C_k$、.....、$\theta_n-C_k$，而关于 $\theta_1$、.....、$\theta_n$ 的条件可写为

$$\max_{1\leq i\leq n}|\theta_i-C_k|<R_k. \tag{7}$$

ii) 此处，阿波罗尼斯圆 Ap$(a,b,\sqrt{q_k})$ 的圆心横坐标为 $C_k'=\frac{aq_k-b}{q_k-1}$，半径为 $R_k'=\sqrt{q_k}\frac{|b-a|}{q_k-1}$。论证方法与前一种情况相同，只需将 $C_k$ 替换为 $C_k'$，并将 $R_k$替换为 $R_k'$。□

注记 2.1. 我们指出，使用定理 1.3 证明中的记号，我们有

$$f(X+C_k)=\sum_{i=0}^{n}b_iX^i\quad\text{with}\quad b_i=\sum_{j=i}^{n}a_j\tbinom{j}{i}C_k^{j-i}, \tag{8}$$

因此，在可行的情况下，要检验 (7)，应计算 (8) 中的系数 $b_i$，然后应用关于 $f(X+C_k)$ 的根与 $b_i$ 之间关系的一些已知估计。当计算 $b_i$ 时相当困难，可以采用比 (7) 更强的条件，即

$$\max_{1\le i\le n}|\theta_i| < R_k - |C_k|,$$

给定 $R_k > |C_k|$，或者等价地，给定 $q_k|b-a| > |aq_k^2 - b|$。这样便可以直接对 $M$ 使用某些适当的估计：$=\max_{1\le i\le n}|\theta_i|$，其以 $f$ 的系数表示，从而避免计算 $b_i$，在某些情况下，所得结果可能会给出比定理 1.4 i) 中关于 $a$ 和 $b$ 更精确的条件。为说明这一点，我们假设 $q_k > 1$，并根据 $a$ 和 $b$ 的符号及其大小，列出 $R_k > |C_k|$ 的情形：

1) 如果 $a > 0 > b$、$|b| > a$ 和 $q_k < \frac{|b|}{a}$，那么 $R_k - |C_k| = -\frac{aq_k+b}{q_k+1} > 0$，而我们的条件 $M < R_k - |C_k|$ 导致 $|b| > q_k|a| + (1+q_k)M$；

2）若 $b > a > 0$ 且 $q_k < \sqrt{\frac{b}{a}}$，则 $R_k - |C_k| = \frac{aq_k+b}{q_k+1} > 0$，条件 $M < R_k - |C_k|$导出 $|b| > -q_k|a| + (1+q_k)M$；

3）若 $b > a > 0$ 且 $\sqrt{\frac{b}{a}} \le q_k < \frac{b}{a}$，则 $R_k - |C_k| = \frac{-aq_k+b}{q_k-1} > 0$，条件 $M < R_k - |C_k|$导出 $|b| > q_k|a| + (q_k-1)M$；

4）若 $a = 0$ 且 $b \ne 0$，则 $R_k - |C_k| = \frac{|b|}{q_k+1} > 0$，条件 $M < R_k - |C_k|$ 导出$|b| > (1+q_k)M$；

5) 若 $a < 0 < b$、$b > |a|$ 和 $q_k < \frac{b}{|a|}$，则 $R_k - |C_k| = \frac{aq_k+b}{q_k+1} > 0$，且条件 $M < R_k - |C_k|$ 导出 $|b| > q_k|a| + (1+q_k)M$；

6) 若 $b < a < 0$ 和 $q_k < \sqrt{\frac{b}{a}}$，则 $R_k - |C_k| = -\frac{aq_k+b}{q_k+1} > 0$，且条件 $M < R_k - |C_k|$导出 $|b| > -q_k|a| + (1+q_k)M$；

7) 若 $b < a < 0$ 和 $\sqrt{\frac{b}{a}} \le q_k < \frac{b}{a}$，则 $R_k - |C_k| = \frac{aq_k-b}{q_k-1} > 0$，且条件 $M < R_k - |C_k|$ 导出 $|b| > q_k|a| + (q_k-1)M$。

因此，在情形 2)、3) 和 6)、7) 中，我们得出的结论与定理 1.4 i) 相同，但所需条件比 $|b| > q_k|a| + (1+q_k)M$ 更宽松。

对定理 1.4 的情形 ii)，类似的考虑同样适用。

定理 1.4 的证明：证明思路与定理 1.2 的情形相同，我们再次推得，对于至少一个指标 $j \in \{1,\dots,m\}$，必有

$$\frac{|b-\theta_j|}{|a-\theta_j|} \le q_{s-1}^{\frac{1}{m}}. \tag{9}$$

另一方面，若 $|b| > q_k|a| + (1+q_k)M$，则我们注意到

$$\frac{|b-\theta_j|}{|a-\theta_j|} \ge \frac{|b|-|\theta_j|}{|a|+|\theta_j|} \ge \frac{|b|-M}{|a|+M} > q_k \ge q_k^{\frac{1}{m}} \ge q_{s-1}^{\frac{1}{m}},$$

因为 $q_k \ge 1$ 和 $q_k \ge q_{s-1}$。这与（9）矛盾，因此 $f$ 是 $\mathbb{Q}$上至多 $k$ 个不可约因子的乘积。

在第二种情况下，如果我们假设 $|b| > \sqrt{q_k}|a| + (1+\sqrt{q_k})M$ 且 $f$ 没有有理根，那么 $m \geq 2$，从而

$$\frac{|b-\theta_j|}{|a-\theta_j|} \geq \frac{|b|-M}{|a|+M} > \sqrt{q_k} \geq q_k^{\frac{1}{m}} \geq q_{s-1}^{\frac{1}{m}},$$

再次得到矛盾。

在第三种情形下，假设 $q_k = 1$、$a^2 < b^2$ 和 $M < \frac{|a+b|}{2}$。若 $b > a$，则 $a+b > 0$，根据定理 1.2 iii) 可得结论，因为圆盘 $\{z\colon |z| \leq M\}$ 包含 $f$ 的所有根，且位于左半平面 $x < \frac{a+b}{2}$ 内。另一方面，若 $a > b$，则 $a+b < 0$，而圆盘 $\{z\colon |z| \leq M\}$ 位于右半平面 $x > \frac{a+b}{2}$ 内，因为 $-M > \frac{a+b}{2}$。□

## 3. 应用

定理 1.4 的第一个应用是以下结果。

推论 3.1。设 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$，且 $a$、$b$ 为两个整数，使得 $a^2 < b^2$ 且 $|a_n| > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \left(\frac{|a+b|}{2}\right)^{i-n}$。假设 $|f(a)| = p^{k_1}r$、$|f(b)| = p^{k_2}$，其中 $p$ 是一个素数，且 $k_1$、$k_2$、$r$ 为整数，满足 $k_2 > k_1 \geq 0$ 且 $0 < r < p$。则 $f$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是至多 $1 + \lfloor (k_2 - k_1 - 1) \log_{\frac{p}{r}} p \rfloor$ 个不可约因子的乘积。

证明。Rouch´e 定理的一个直接推论是，条件 $|a_n| > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \left(\frac{|a+b|}{2}\right)^{i-n}$ 迫使 $f$ 的所有根的绝对值都小于 $\frac{|a+b|}{2}$。因此$M < \frac{|a+b|}{2}$。注意，对每个正整数 $k$，我们都有 $q_k \leq \tilde{q}_k$，其中

$$\tilde{q}_k = \max \left\{ \frac{d_2}{d_1} \leq \sqrt[k+1]{\frac{|f(b)|}{|f(a)|}} : d_1 \mid f(a),\ d_2 \mid f(b) \right\}. \tag{10}$$

我们寻找尽可能小的正整数 $k$，使得 $\tilde{q}_k = 1$，这也将推出 $q_k = 1$。由 (10) 可得

$$\tilde{q}_k = \max \left\{ \frac{d_2}{d_1} \leq \sqrt[k+1]{\frac{p^{k_2-k_1}}{r}} : d_1 \mid p^{k_1}r,\ d_2 \mid p^{k_2} \right\}.$$

注意，满足 $d_1 \mid p^{k_1}r$ 和 $d_2 \mid p^{k_2}$ 且大于 1 的最小商 $\frac{d_2}{d_1}$ 是 $\frac{p}{r}$，因此要证明 $\tilde{q}_k = 1$，只需证明 $\frac{p}{r} > \sqrt[k+1]{\frac{p^{k_2-k_1}}{r}}$，或等价地证明 $k > (k_2-k_1-1) \log_{\frac{p}{r}} p$。注意，对于 $k_2 - k_1 > 1$ 和 $r > 1$，项 $(k_2 - k_1 - 1) \log_{\frac{p}{r}} p$ 不可能是整数，因为 $_rp$ 是素数。显然，$k$ 的一个合适候选是 $1 + \lfloor (k_2 - k_1 - 1) \log_{\frac{p}{r}} p \rfloor$，结论由定理 1.4 得出。□

这里提到，对于一个只依赖于 $p$ 和 $k_2$的上界，例如可以使用$1 + \lfloor (k_2 - 1) \log_{\frac{p}{p-1}} p \rfloor$。

推论 3.1 的一个特殊情形是以下结果。

推论 3.2. 设 $f(X) = a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$是一个具有整数系数的多项式，其中 $|a_n| > 2|a_{n-1}|+2^2|a_{n-2}|+\cdots+2^n|a_0|$和 $a_0 \neq 0$。如果 $f(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$或 $-f(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$包含一个素数幂 $p^k$，且 $p > |a_0|$ 和 $k \geq 1$，那么 $f$ 是至多

$$1 + \lfloor (k-1)\log_{\frac{p}{|a_0|}} p \rfloor$$

在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约因子。

证明。我们将对 $a = 0$ 和 $b$ 应用推论 3.1，其中 $b$ 是满足 $f(b) = p^k$ 的整数，因此此处 $k_2 = k$。由于 $p > |a_0| = |f(0)|$，我们有 $k_1 = 0$ 和 $r = |a_0| < p$。又因为 $b \neq 0$，我们有 $|b| \geq 1$，所以关于 $a_n$ 大小的假设意味着

$$\begin{aligned} |a_n| &> 2|a_{n-1}| + 2^2|a_{n-2}| + \cdots + 2^n|a_0| \\ &\geq 2|a_{n-1}| + \frac{2^2}{|b|^2}|a_{n-2}| + \cdots + \frac{2^n}{|b|^n}|a_0| = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \left(\frac{|a+b|}{2}\right)^{i-n}. \end{aligned}$$

因此，推论 3.1 中的条件 $|a_n| > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\left(\frac{|a+b|}{2}\right)^{i-n}$ 得到满足，所以我们可以得出，$f$ 是至多 $1 + \lfloor (k-1)\log_{\frac{p}{|a_0|}} p \rfloor$ 个在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约因子的乘积。□

定理 1.4 的另一项应用是以下结果。

推论 3.3。设 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$，且 $a, b$ 是满足 $a^2 < b^2$ 和 $|a_n| > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\left(\frac{|a+b|}{2}\right)^{i-n}$ 的两个整数。假设 $|f(a)| = p^{k_1}$, $|f(b)| = p^{k_2}r$，其中 $p, r$ 是满足 $p > r$ 的素数，且 $k_1, k_2$ 是满足 $k_2 \geq k_1 > 0$ 的整数。那么 $f$ 是 $\mathbb{Q}$ 上至多含有 $1 + \lfloor (k_2 - k_1)\log_r p \rfloor$ 个不可约因子的乘积。

下面我们将证明推论 3.3 的一个更一般的版本，其中允许 $r$ 为合数：

推论 3.4。设 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$，且 $a, b$ 是满足 $a^2 < b^2$ 和 $|a_n| > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\left(\frac{|a+b|}{2}\right)^{i-n}$ 的两个整数。假设 $|f(a)| = p^{k_1}$, $|f(b)| = p^{k_2}r$，其中 $p$ 是一个素数，$r$ 是满足 $0 < r < p$ 的整数，且 $k_1, k_2$ 是满足 $k_2 \geq k_1 > 0$ 的整数。再设 $q$ 是 $r$ 的最小素因子。那么 $f$ 是 $\mathbb{Q}$ 上至多含有 $1 + \lfloor (k_2 - k_1)\log_q p + \log_q \frac{r}{q} \rfloor$ 个不可约因子的乘积。

证明。同样，$f$ 的所有根的绝对值都小于 $\frac{|a+b|}{2}$，因此 $M < \frac{|a+b|}{2}$。由 (10) 可知，在这种情况下我们可以推出

$$\tilde{q}_k = \max\left\{ \frac{d_2}{d_1} \leq \sqrt[k+1]{p^{k_2-k_1}r} : d_1 \mid p^{k_1},\ d_2 \mid p^{k_2}r \right\}.$$

注意到，此处大于 1 且满足 $d_1 \mid p^{k_1}$ 和 $d_2 \mid p^{k_2}r$ 的最小商是 $q$，因此要证明 $\tilde{q}_k = 1$，只需证明 $q > \sqrt[k+1]{p^{k_2-k_1}r}$，或者等价地证明

$$k > (k_2 - k_1)\log_q p + \log_q \frac{r}{q}.$$

因此，我们可以选择 $k = 1 + \lfloor (k_2 - k_1) \log_q p + \log_q \frac{r}{q} \rfloor$，结论再次由定理 1.4 得出。□

利用著名的 Enestr¨om–Kakeya 定理 [20]，（该定理指出，满足条件 $0 \le a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n$ 的实系数多项式 $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ 的所有根的绝对值都不超过 1），还可以证明以下结果，其中我们只考虑正整数 $a$、$b$ 的情形。

推论 3.5. 设 $f \in \mathbb{Z}[X]$ 是一个 Enestr¨om–Kakeya 多项式，且 $f(0) \neq 0$；再设 $a$、$b$ 是两个正整数，使得 $f(a) = p^{k_1} r$、$f(b) = p^{k_2}$，其中 $p$ 是一个素数，$k_1$、$k_2$、$r$ 是整数，且满足 $k_2 > k_1 \ge 0$ 和 $0 < r < p$。那么 $f$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可分解为至多 $1 + \lfloor (k_2 - k_1 - 1) \log_{\frac{p}{r}} p \rfloor$ 个不可约因子的乘积。

证明。根据 Enestr¨om–Kakeya 定理，$f$ 的所有根的模都不超过 1，因此 $M \le 1$。由于 $f(a) < f(b)$，且 $f$的系数为正，我们必有 $a < b$；这也表明 $a + b > 2$，因此定理 1.4 iii) 中的条件 $M < \frac{|a+b|}{2}$ 显然成立。要证明 $q_k = 1$ 满足 $k = 1 + \lfloor (k_2 - k_1 - 1) \log_{\frac{p}{r}} p \rfloor$，可以参照推论 3.1 的证明进行论证，结论由定理 1.4 iii) 得出。□

关于 Enestr¨om–Kakeya 多项式，还有如下结果。

推论 3.6。设 $f \in \mathbb{Z}[X]$ 是一个 Enestr¨om–Kakeya 多项式，且 $f(0) \neq 0$；设 $a$,$b$是两个正整数，满足 $f(a) = p^{k_1}$, $f(b) = p^{k_2} r$，其中 $p, r$是满足 $p > r$的素数，$k_1, k_2$是满足 $k_2 \ge k_1 > 0$的整数。那么，$f$在 $\mathbb{Q}$上是至多 $1 + \lfloor (k_2 - k_1) \log_r p \rfloor$个不可约因子的乘积。

证明。我们沿用之前的方法，这次利用 $q_k = 1$ with $k = 1 + \lfloor (k_2 - k_1) \log_r p \rfloor$ 这一事实，如推论 3.3 所示。□

也可以证明以下关于 Littlewood 多项式的类似结果，也就是说，这类多项式的所有系数均为 $\pm 1$。

推论 3.7。设 $f$ 是一个 Littlewood 多项式，$a$、$b$ 是两个非负整数，满足 $a + b \ge 4$，并且 $f(a) = p^{k_1} r$、$f(b) = p^{k_2}$，其中 $p$ 是一个素数，$k_1$、$k_2$、$r$ 是整数，满足 $k_2 > k_1 \ge 0$ 和 $0 < r < p$。那么 $f$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可分解为至多 $1 + \lfloor (k_2 - k_1 - 1) \log_p p \rfloor$ 个不可约因子的乘积。

证明。这里我们利用 Littlewood 多项式的所有根的绝对值都小于 2 这一事实，因此 $M < 2$。事实上，反设 $f$ 有一个根 $\theta$满足 $|\theta| \ge 2$。那么我们将得到

$$\begin{aligned} 0 &= |\sum_{i=0}^{n} a_i \theta^{i-n}| \ge |a_n| - \left( \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \cdot |\theta|^{i-n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{|\theta|} - \frac{1}{|\theta|^2} - \cdots - \frac{1}{|\theta|^n} \ge 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n} > 0, \end{aligned}$$

矛盾。由于 $a+b \geq 4$ 和 $M < 2$，定理 1.4 iii) 中的条件 $M < \frac{|a+b|}{2}$ 显然满足。同样，仿照推论 3.1 可证明我们有 $q_k = 1$ 且$k = 1 + \lfloor (k_2 - k_1 - 1) \log_{\frac{p}{r}} p \rfloor$，由定理 1.4 iii) 即得结论。□

推论 3.8. 设 $f$ 是一个 Littlewood 多项式，$a$、$b$ 是满足$a+b \geq 4$的两个正整数，使得 $f(a) = p^{k_1}$，$f(b) = p^{k_2} r$，其中 $p$、$r$ 是满足 $p > r$的素数，$k_1$、$k_2$是满足 $k_2 \geq k_1 > 0$的整数。那么，$f$ 是至多 $1 + \lfloor (k_2 - k_1) \log_r p \rfloor$ 个在 $\mathbb{Q}$上的不可约因子的乘积。

证明。这里我们利用这样一个事实：$q_k = 1$ 满足 $k = 1 + \lfloor (k_2 - k_1) \log_r p \rfloor$；我们还利用事实 $M < 2$。由定理 1.4 iii) 可再次得出结论。□

## 4. 酉因子的情形

本节旨在通过研究 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的酉因子，为不可约因子的重数之和求出上界。这里我们将使用一个可能更小的有理数 $q_k^u$，而不是由式 (3) 给出的 $q_k$，其定义如下：

$$q_k^u = \max \left\{ \frac{d_2}{d_1} \leq \sqrt[k+1]{\frac{|f(b)|}{|f(a)|}} : d_1 \in \mathcal{D}_u(f(a)),\ d_2 \in \mathcal{D}_u(f(b)) \right\}. \tag{11}$$

采用这一记号，我们得到以下结果，它们与可容许因子情形下的定理类似。

定理 4.1. 设 $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$，并假设对于两个整数 $a, b$，有 $0 < |f(a)| < |f(b)|$，且最大公约数$(f(a)\ f'(a)) =$最大公约数$(f(b)\ f'(b)) = 1$。设 $k$为正整数，且 $q_k^u$ 由 (11) 给出。那么，在以下三种情形中的每一种情形下，$f$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上的至多 $k$ 个不可约因子的乘积：

i) $q_k^u > 1$，且 $f$的所有根都位于阿波罗尼斯圆 $\mathrm{Ap}(a, b, q_k^u)$ 内；

ii) $q_k^u > 1$，$f$的所有根都位于阿波罗尼斯圆 $\mathrm{Ap}(a, b, \sqrt{q_k^u})$ 内，并且 $f$没有有理根；

iii) $q_k^u = 1$ 且满足以下二者之一：$b > a$ 且 $f$ 的所有根都位于半平面 $x < \frac{a+b}{2}$，或 $a > b$且 $f$ 的所有根都位于半平面$x > \frac{a+b}{2}$。

证明。沿用定理 1.2 证明中的记号，我们注意到，根据假设，最大公约数$(f(a)\ f'(a))$ $=$最大公约数$(f(b)\ f'(b)) = 1$，再结合整除条件

$$\gcd\left(d_i, \frac{f(a)}{d_i}\right) \mid \gcd(f(a), f'(a)) \quad \text{and} \quad \gcd\left(d_i', \frac{f(b)}{d_i'}\right) \mid \gcd(f(b), f'(b))$$

这意味着 $d_i$ 和 $d_i'$ 必分别是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的酉因子，这对每个 $i = 1, \ldots, s$ 都成立。证明过程与定理 1.2 的情形相同，只不过这里要分别用 $q_{s-1}^u$ 和 $q_k^u$代替 $q_{s-1}$ 和 $q_k$；它们仍然大于或等于 1，因为 1 同时属于 $\mathcal{D}_u(f(a))$ 和 $\mathcal{D}_u(f(b))$。□

定理 4.1 也可以改述为更明确的形式，如下：

定理 4.2。设 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$，并假设对于两个整数 $a, b$，有 $0 < |f(a)| < |f(b)|$，且最大公约数$(f(a)\ f'(a))$ =最大公约数$(f(b)\ f'(b)) = 1$。设 $k$ 为正整数，且 $q_k^u$ 由 (11) 给出。则在以下三种情形中的任一种下， $f$ 是 $\mathbb{Q}$ 上至多 $k$ 个不可约因子的乘积：

i) $q_k^u > 1$，且 $f$ 的每个根 $\theta$ 都满足 $|\theta - \frac{a}{(q_k^u)^2 - b(q_k^u)^2 - 1}| < q_k^u \frac{|b-a|}{(q_k^u)^2 - 1}$；

ii) $q_k^u > 1$， $f$的每个根 $\theta$都满足 $|\theta - \frac{aq_k^u - b}{q_k^u - 1}| < \sqrt{q_k^u}\frac{|b-a|}{q_k^u - 1}$，且 $f$没有有理根；

iii) $q_k^u = 1$，并且或者 $b > a$ 以及 $f$ 的所有根都位于半平面 $x < \frac{a+b}{2}$。或者，$a > b$ 且 $f$ 的所有根都位于半平面 $x < \frac{a+b}{2}$。

证明。证明与定理 1.3 的证明类似，只需用 $q_k^u$ 代替 $q_k$ . □

这里提到，类似注记 2.1 中的考虑在此情形下也适用，只需用 $q_k^u$代替 $q_k$。

定理 4.3. 设 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$是一个具有整数系数的多项式，$M$ 是其根的绝对值的最大值，并假设对于两个整数 $a$、$b$，有 $0 < |f(a)| < |f(b)|$，且 gcd$(f(a)\ f'(a))$ =gcd$(f(b)\ f'(b)) = 1$。再设 $q_k^u$由关系式（11）给出。那么，在以下三种情形中的每一种情形下， $f$ 都是至多 $k$ 个在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约因子的乘积：

i) $|b| > q_k^u|a| + (1 + q_k^u)M$；ii) $|b| > \sqrt{q_k^u}|a| + (1 + \sqrt{q_k^u})M$ 且 $f$没有有理根；iii) $q_k^u = 1$、 $a^2 < b^2$ 和 $M < \frac{|a+b|}{2}$。

证明。论证与定理 1.4 的证明类似，只需用 $q_k^u$ 替代 $q_k$。 □

特别地，我们得到以下结果。

推论 4.4。设 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$，且 $a$、 $b$为两个整数，使得 $a^2 < b^2$且$|a_n| > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|(\frac{|a+b|}{2})^{i-n}$。假设 $|f(a)| = p^{k_1}$、 $|f(b)| = p^{k_2}r^j$，其中$p$、$r$为互不相同的素数，且 $k_1$、$k_2$为正整数，使得 $r^j > p^{k_1-k_2}$。另假设$p \nmid f'(a)f'(b)$ 且 $r \nmid f'(b)$。那么，在以下每种情形下， $f$在 $\mathbb{Q}$上都是至多 $k$ 个不可约因子的乘积：

i) $k_1 < k_2$、 $r^j < p^{k_1}$、 $r^j < p^{k_2-k_1}$ 和 $k = 1 + \lfloor \frac{k_2-k_1}{j}\log_r p \rfloor$；
ii) $k_1 < k_2$、 $r^j > p^{k_1}$、 $r^j < p^{k_2-k_1}$ 和 $k = 1 + \lfloor \frac{k_2}{j-k_1}\log_r p \rfloor$；iii) $k_1 = k_2$、 $r^j > p^{2k_1}$ 和 $k = \lfloor \frac{j}{k_1}\log_p r \rfloor$；
iv) $k_1 = k_2$、 $p^{2k_1} > r^j > p^{k_1}$ 和 $k = 1 + \lfloor \frac{k_1}{j-k_1}\log_r p \rfloor$；v) $k_1 = k_2$、 $r^j < p^{k_1}$ 和 $k = 1$ （$f$ 是不可约的）；vi) $k_1 > k_2$、 $r^j < p^{k_1}$ 和 $k = 1$ （$f$ 是不可约的）；vii) $k_1 > k_2$、 $r^j > p^{k_1+k_2}$ 和 $k = 1 + \lfloor \frac{j}{k_2}\log_p r^{-k_1} \rfloor$；viii) $k_1 > k_2$、 $p^{k_1} < r^j < p^{k_1+k_2}$ 和 $k = 1 + \lfloor \frac{k_2}{j-k_1}\log_r p \rfloor$。

证明。与推论 3.1 的证明一样，我们有 $M < \frac{|a+b|}{2}$。注意到 $\mathcal{D}_u(f(a)) = \{1, p^{k_1}\}$ 和 $\mathcal{D}_u(f(b)) = \{1, p^{k_2}, r^j, p^{k_2}r^j\}$，因此任何满足 $d_1 \in \mathcal{D}_u(f(a))$ 和 $d_2 \in \mathcal{D}_u(f(b))$ 的商 $\frac{d_2}{d_1}$ 都属于集合

$$S = \left\{1, \frac{1}{p^{k_1}}, p^{k_2}, p^{k_2-k_1}, r^j, \frac{r^j}{p^{k_1}}, p^{k_2}r^j, p^{k_2-k_1}r^j\right\}.$$

在陈述中的每种情形下，$i$ 表示 $S$ 中大于 1 的最小元素 $s_i$。可以验证，$s_1 = r^j$、$s_2 = \frac{r^j}{p^{k_1}}$、$s_3 = p^{k_1}$、$s_4 = \frac{r^j}{p^{k_1}}$、$s_5 = r^j$、$s_6 = p^{k_2-k_1}r^j$、$s_7 = p^{k_2}$和 $s_8 = \frac{r^j}{p^{k_1}}$。然后通过施加条件 $s_i > \sqrt[k+1]{|f_{(\frac{b}{|f\ a|})}()}$，即 $s_i^{k+1} > p^{k_2-k_1}r^j$，即可得到陈述中的 $k$ 的取值，从而迫使这八种情形下的 $q_k^u$ 都等于 1。结论由定理 4.3 得出。□

## 5. The case of multivariate polynomials

本节将证明关于任意域 $K$上的二元多项式 $f(X,Y)$的一些类似结果。对于 $r \geq 3$ 个变量的多项式 $f(X_1, \ldots, X_r)$，可由二元情形的结果推广得到：令 $Y$ 表示 $X_r$，$X$ 表示 $X_{r-1}$，并将 $K$ 替换为 $K(X_1, \ldots, X_{r-2})$。我们将回顾 [5] 中用于二元情形下容许因子的定义。

定义 5.1. 设 $K$ 为一个域，$f(X,Y) \in K[X,Y]$ 且 $a(X) \in K[X]$，使得 $f(X, a(X)) \neq 0$。我们称多项式 $D(X) \in K[X]$ 是 $f(X, a(X))$ 的可容许因子，如果 $D(X) \mid f(X, a(X))$ 并且

$$\gcd\left(D(X), \frac{f(X,a(X))}{D(X)}\right) \mid \gcd\left(f(X,a(X)), \frac{\partial f}{\partial Y}(X,a(X))\right). \tag{12}$$

$f(X, a(X))$ 的可容许因子集合记为 $D_{ad}(f(X, a(X))$，对于上述的 $f(X,Y)$ 和 $a(X)$，我们将记作

$$D_u(f(X,a(X))) = \left\{d \in K[X] : d(X) | f(X,a(X)),\ \gcd\left(d(X), \frac{f(X,a(X))}{d(X)}\right) = 1\right\},$$

并称其为 $f(X, a(X))$ 的酉因子集合。注意，在最大公约数 $\gcd(f(X, a(X)), \frac{\partial f}{\partial Y}(X, a(X))) = 1$ 的特殊情形下，$D_{ad}(f(X, a(X))$ 化简为 $\mathcal{D}_u(f(X, a(X)))$。

根据这个定义，我们得到以下结果。

定理 5.2. 设 $K$ 为一个域，$f(X,Y) = a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_n(X)Y^n \in K[X,Y]$，其中 $a_0$、……、$a_n \in K[X]$、$a_0 a_n \neq 0$，且 $k$ 为一个正整数。假设对于两个多项式 $a(X)$ $b(X) \in K[X]$，有 $f(X, a(X))f(X, b(X)) \neq 0$ 以及 $\Delta_k := \frac{1}{k+1} \cdot (\deg f(X, b(X)) - \deg f(X, a(X))) \geq 0$，并令

$$q_k = \max\{\deg d_2 - \deg d_1 \leq \Delta_k : d_1 \in D_{ad}(f(X, a(X))), d_2 \in D_{ad}(f(X, b(X)))\}.$$

如果 $\deg b(X) > \max\{\deg a(X), \max_{0 \leq i \leq n-1} \deg a_i - \deg a_{n-i}\} + q_k$，那么 $f(X,Y)$ 是 $K(X)$ 上至多$k$ 个不可约因子的乘积。

证明。注意，一旦我们固定定理陈述中的多项式 $a(X)$ 和 $b(X)$，$q_k$ 就是 $k$ 上的递减函数。此外，由于 $\Delta_k \geq 0$ 和 1 显然都是 $f(X, a(X))$ 与 $f(X, b(X))$ 的可容许因子，因此 $q_k$ 的一个可能候选是$0 = \deg\ 1 - \deg 1$，所以对每个 $k$ 都有 $q_k \geq 0$。反设可以将$f$ 写成 $s \geq k+1$ 个在 $K(X)$ 上不可约的因子 $f_1$、.....、$f_s \in K[X, Y]$ 的乘积。特别地，我们有

$$q_k \geq q_{s-1}. \tag{13}$$

固定一个指标 $i \in \{1, \ldots, s\}$，并记

$$g_i(X, Y) := \prod_{j \neq i} f_j(X, Y).$$

因此，对于每个 $i = 1$，.....，$s$，我们可以写成 $f = f_i \cdot g_i$。接下来，由于

$$\begin{aligned} f(X, a(X)) &= f_i(X, a(X)) g_i(X, a(X)) \neq 0 \\ f(X, b(X)) &= f_i(X, b(X)) g_i(X, b(X)) \neq 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Y}(X, a(X)) &= \frac{\partial f_i}{\partial Y}(X, a(X)) g_i(X, a(X)) + f_i(X, a(X)) \frac{\partial g_i}{\partial Y}(X, a(X)), \\ \frac{\partial f}{\partial Y}(X, b(X)) &= \frac{\partial f_i}{\partial Y}(X, b(X)) g_i(X, b(X)) + f_i(X, b(X)) \frac{\partial g_i}{\partial Y}(X, b(X)), \end{aligned}$$

我们看到，$f_i(X, a(X))$ 是 $f(X, a(X))$ 的一个因子 $d_i(X)$，而 $f_i(X, b(X))$ 是 $f(X, b(X))$ 的一个因子 $d_i'(X)$，并且还必须满足整除条件

$$\begin{aligned} &\gcd\left(d_i(X), \frac{f(X, a(X))}{d_i(X)}\right) \mid \gcd\left(f(X, a(X)), \frac{\partial f}{\partial Y}(X, a(X))\right) \text{ and} \\ &\gcd\left(d_i'(X), \frac{f(X, b(X))}{d_i'(X)}\right) \mid \gcd\left(f(X, b(X)), \frac{\partial f}{\partial Y}(X, b(X))\right). \end{aligned}$$

因此，$d_i(X)$ 和 $d_i'(X)$ 分别是 $f(X, a(X))$ 和 $f(X, b(X))$ 的可容许因子；对每个 $i = 1$，...，$s$，这一结论均成立。现在注意到

$$\frac{d_1'(X)}{d_1(X)} \cdots \frac{d_s'(X)}{d_s(X)} = \frac{f(X, b(X))}{f(X, a(X))}. \tag{14}$$

此时，我们将如 [5] 中所述，在 $K(X)$ 上引入一个非阿基米德绝对值 $|\cdot|$，如下所示。我们任取一个实数 $\rho > 1$，并对任意多项式 $A(X) \in K[X]$，定义 $|A(X)|$ 为

$$|A(X)| = \rho^{\deg A(X)}.$$

然后，我们利用乘法性将绝对值 $|\cdot|$ 扩展到 $K(X)$，也就是说，对于任意满足 $B(X) \neq 0$ 的多项式$A(X)$ $B(X) \in K[X]$，令 $\left|\frac{A}{B}(X)(X)\right| = \frac{|A(X)|}{|B(X)|}$。这里注意，对于 $K[X]$ 中的任意非零元素 $A(X)$，都有 $|A| \geq 1$。最后，令 $K(X)$ 为 $K(X)$ 的一个固定代数闭包，并固定将绝对值 $|\cdot|$ 扩展到 $K(X)$，仍记为 $|\cdot|$。

现在将绝对值应用于关系式 (14)，可推得其中一个商$\frac{|d_1' X|}{|d_1 X|}$( ) ( )，.....，$\frac{|d_s'}{|d_s}$( $\frac{X|}{X|}$) ( )，设为 $\frac{|d_1' X|}{|d_1 X|}$( ) ( )，必定小于或等于 $\sqrt[s]{|f}$( $\frac{X\, b\, X}{|f\ X\ a\ X|}$, ( )) ( , ( ))。特别地，必有 deg $f_1(X, b(X))$ − deg $f_1(X, a(X)) \le \frac{1}{s}$(deg $f(X, b(X))$ − deg $f(X, a(X))$)，因此 deg $f_1(X, b(X))$ − deg $f_1(X, a($ $X))$ $\le q_{s-1}$，或者等价地，

$$\frac{|f_1(X, b(X))|}{|f_1(X, a(X))|} \le \rho^{q_{s-1}}. \tag{15}$$

设 $f$ 作为一个以 $Y$ 为变量、系数属于 $K[X]$的多项式，可因式分解为

$$f(X, Y) = a_n(X)(Y - \xi_1) \cdots (Y - \xi_n)$$

其中 $\xi_1, \ldots, \xi_n \in K(\overline{X})$。接下来，我们将证明

$$\max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\} \le \rho^{\max\limits_{0 \le i \le n-1} \frac{\deg a_i - \deg a_n}{n-i}}. \tag{16}$$

为此，令 $\delta := \max_{0 \le i \le n-1} \frac{\deg a_i - \deg a_n}{n-i}$，并反设 $f$有一个根$\xi$，且满足 $|\xi| > \rho^{\delta}$。由于 $\xi \ne 0$ 且我们的绝对值也满足三角不等式，我们依次推出

$$\begin{aligned} 0 = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i \xi^{i-n}\right| &\ge |a_n| - \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i \xi^{i-n}\right| \ge |a_n| - \max_{0 \le i \le n-1} |a_i| \cdot |\xi|^{i-n} \\ &> |a_n| - \max_{0 \le i \le n-1} |a_i| \cdot \rho^{(i-n)\delta}, \end{aligned}$$

因此 $|a_n| < \max\limits_{0 \le i \le n-1} |a_i| \cdot \rho^{(i-n)\delta}$，或者等价地

$$\deg a_n < \max_{0 \le i \le n-1} \{\deg a_i + (i-n)\delta\}. \tag{17}$$

现在选择一个指标 $k \in \{0, \ldots, n-1\}$，使得式 (17) 中的最大值在该指标处取得。特别地，我们有 deg $a_n < \deg a_k + (k-n)\delta$，从而得到

$$\frac{\deg a_k - \deg a_n}{n-k} > \delta = \max_{0 \le i \le n-1} \frac{\deg a_i - \deg a_n}{n-i},$$

矛盾。因此不等式 (16) 必须成立，所以 $|\xi_i| \le \rho^{\delta}$ for $i = 1, \ldots, n$。

现在不妨假设，对于某个 $m \ge 1$ 以及某个 $a_n$ 的因子 $b_m$，有 $f_1(X, Y) = b_m(Y - \xi_1) \cdots (Y - \xi_m)$。注意，我们可以写成

$$\frac{f_1(X, b(X))}{f_1(X, a(X))} = \frac{b(X) - \xi_1}{a(X) - \xi_1} \cdots \frac{b(X) - \xi_m}{a(X) - \xi_m},$$

因此，由 (15) 可知，对于至少一个指标 $j \in \{1, \ldots, m\}$，必定有

$$\frac{|b(X) - \xi_j|}{|a(X) - \xi_j|} \le \rho^{\frac{q_{s-1}}{m}}. \tag{18}$$

另一方面，我们的绝对值也满足三角不等式，因此

$$\frac{|b(X) - \xi_j|}{|a(X) - \xi_j|} \ge \frac{|b(X)| - |\xi_j|}{|a(X)| + |\xi_j|} \ge \frac{|b(X)| - \rho^{\delta}}{|a(X)| + \rho^{\delta}} = \frac{\rho^{\deg b(X)} - \rho^{\delta}}{\rho^{\deg a(X)} + \rho^{\delta}}.$$

现在只需证明，对于充分大的 $\rho$，我们有

$$\frac{\rho^{\deg b(X)}-\rho^{\delta}}{\rho^{\deg a(X)}+\rho^{\delta}} > \rho^{q_{s-1}} \geq \rho^{\frac{q_{s-1}}{m}},$$

这将与 (18) 矛盾。这里最右边的不等式 $\rho^{q_{s-1}} \geq \rho^{\frac{q_{s-1}}{m}}$ 显然对任意 $\rho > 1$ 都成立，因为 $q_{s-1} \geq 0$ 且 $m = \deg_Y f_1 \geq 1$。第一个不等式等价于

$$\rho^{\deg b(X)} > \rho^{q_{s-1}+\deg a(X)} + \rho^{q_{s-1}+\delta} + \rho^{\delta},$$

由于我们对 $\deg\ b(X)$ 的大小所作的假设，根据 (13)，有 $\deg\ b(X) > \max\{q_k + \deg\ a(X)\ q_k + \delta, \delta\}$ 和 $q_k \geq q_{s-1}$，因此当 $\rho$充分大时，这显然成立。因此，可以将 $f$ 写成在 $K(X)$ 上至多含有 $k$ 个不可约因子的乘积，从而完成定理的证明。□

特别地，对于 $a(X) = 0$ 和记作 $g(X)$ 的 $b(X)$，由定理 5.2 可得以下结果：

推论 5.3. 设 $K$是一个域，$f(X,Y) = a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_n(X)Y^n \in K[X,Y]$，其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K[X]$, $a_0 a_n \neq 0$, $a_0 \in K$和

$$\deg a_{n-1} \geq \deg a_n \geq \max\{\deg a_0, \deg a_1, \ldots, \deg a_{n-2}\}.$$

若 $f(X, g(X)) = h(X)^k$对 $g, h \in K[X]$成立，且 $\deg\ g > \deg\ a_{n-1} - \deg\ a_n$，其中 $h$不可约，$k$为正整数，则 $f(X,Y)$ 在 $K(X)$ 上是至多含有 $k$ 个不可约因子的乘积。

证明。我们将定理 5.2 应用于 $a(X) = 0$和 $b(X) = g(X)$。由于 $f(X, a(X)) = a_0 \in K \setminus \{0\}$，我们有 $\deg\ f(X, a(X)) = 0$；又由于 $f(X, b(X)) = h(X)^k$，其中 $h$在$K$上不可约，且 $k \geq 1$，我们有 $\deg\ f(X, b(X)) = k\deg\ h \geq 1$。因此 $\Delta_k = \frac{1}{k+1}(\deg\ f(X, b(X)) - \deg\ f(X, a(X))) = \frac{k}{k+1}\deg\ h > 0$。我们的假设是

$$\deg a_{n-1} \geq \deg a_n \geq \max\{\deg a_0, \deg a_1, \ldots, \deg a_{n-2}\}$$

这表明条件 $\deg\ b(X) > \max\{\deg\ a(X), \max_{0\leq i\leq n-1} \deg\ a_i - \deg\ a_{n-i}\ a_n\} + q_k$在此情形下化为 $\deg\ b(X) > \deg\ a_{n-1} - \deg\ a_n + q_k$。还需证明 $q_k = 0$。为此，我们注意到，$d_2$ of $f(X, b(X)) = h(X)^k$的任一因子都是 $h$的幂，因为 $h$不可约；而$d_1$ of $f(X, a(X))$ 的任一因子都是常数，因为 $a_0 \in K$。因此，使 $d_2 - \deg\ d_1$取正值的最小值，满足 $d_2 \mid f(X, b(X))$ 和 $d_1 \mid f(X, a(X))$，为 $\deg\ h$。又由于 $\Delta_k = \frac{k}{k+1}\deg\ h < \deg\ h$，我们得出 $q_k = 0$，证明至此完成。□

本节最后给出一个结果：只需知道$f(X, a(X))$和 $f(X, b(X))$的酉因子即可，前提是 $f(X, a(X))$与$\frac{\partial f}{\partial Y}(X, a(X))$互素，并且$f(X, b(X))$与 $\frac{\partial f}{\partial Y}(X, b(X))$也互素。

定理 5.4。设 $K$是一个域，$f(X,Y) = a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_n(X)Y^n \in K[X,Y]$，其中 $a_0, \ldots, a_n \in K[X]$, $a_0 a_n \neq 0$，且 $k$是一个正整数。假设对于两个多项式

$a(X)$ $b(X)$ $\in K[X]$满足 $f(X,a(X))f(X,b(X)) \neq 0$且 $\Delta_k := \frac{1}{k+1}\cdot(\deg f(X,b(X)) - \deg f(X,a(X))) \geq 0$，并令

$$q_k^u = \max\{\deg d_2 - \deg d_1 \leq \Delta_k : d_1 \in D_u(f(X,a(X))), d_2 \in D_u(f(X,b(X)))\}.$$

如果 $\gcd(f(X,a(X)) \frac{\partial f}{\partial Y}(X,a(X))) = 1$，$\gcd(f(X,b(X)) \frac{\partial f}{\partial Y}(X,b(X))) = 1$且

$$\deg b(X) > \max\left\{\deg a(X), \max_{0\leq i\leq n-1} \frac{\deg a_i - \deg a_n}{n-i}\right\} + q_k^u,$$

那么 $f(X,Y)$ 在 $K(X)$ 上是至多 $k$ 个不可约因子的乘积。

证明。在这里，采用与定理 5.2 的证明中相同的记号，我们看到 $d_i(X)$ 必须属于 $\mathcal{D}_u(f(X,a(X)))$，而 $d_i'(X)$ 必须属于 $\mathcal{D}_u(f(X,b(X)))$。这里注意到，我们仍有 $q_k^u \geq 0$，因为 1 同时属于 $\mathcal{D}_u(f(X,a(X)))$ 和 $\mathcal{D}_u(f(X,b(X)))$。证明的其余部分与定理 5.2 的证明类似，故略去。□

## 6. 示例

1）为说明在某些情况下我们的结果是最佳的，我们首先考虑以下示例。设 $p \geq 7$ 为素数，并设 $f(X) = p(p-1)X^3+X^2+(p-2)X+1$。我们将应用推论 3.2，注意到 $f(1) = p^2$，$a_0 = 1$，因此 $k = 2$ 且 $1+\lfloor(k-1)\log_{\frac{p}{|a_0|}} p\rfloor = 2$。条件 $|a_n| > 2|a_{n-1}| + 2^2|a_{n-2}| + \cdots + 2^n|a_0|$ 在本例中化为不等式$p(p-1) > 2+4(p-2)+8$，即 $p^2 > 5p+2$，这对素数 $p \geq 7$ 成立。因此我们可以得出结论，$f$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是至多两个不可约因子的乘积。另一方面，我们注意到 $f$ 可以写成 $(pX^2 - X + 1)((p-1)X+1)$，因此它有两个不可约因子。

2）另一个能体现我们的结果给出精确估计的简单例子，这次带有$q_2 > 1$，考虑多项式 $f(X) = 35X^4 + 12X^2 + 1$，并假设我们不知道如何将其因式分解。可以验证，$f$ 没有有理根。在不计算 $f$的根的情况下，我们将用 $a = 1$ 和 $b = 2$检验定理 1.3 ii) 中的条件。我们有 $f(1) = 2^4 \cdot 3$和 $f(2) = 3 \cdot 7 \cdot 29$，由此可以推出$q_2 = \frac{29}{16} = 1.8125$。我们无需要求 $f$ 的所有根 $\theta$都满足条件 $|\theta - \frac{aq_2-b}{q_2-1}| < \sqrt{q_2}\frac{|b-a|}{q_2-1}$，只需检查它们是否满足 $|\theta| < \sqrt{q_2}\frac{|b-a|}{q_2-1} - \frac{|aq_2-b|}{q_2-1} \approx 1.4262$即可。由于 $35 > 12+1$，根据鲁歇定理，$f$ 的所有根的绝对值都小于 1，因此由定理 1.3 ii) 可得，$f$ 是 $\mathbb{Q}$ 上至多两个不可约因子的乘积。

3）任取整数 $a_1$、.....、$a_{n-1}$ 和 $k \geq 0$。那么除有限多个素数 $p$ 外，多项式

$$f(X) = 2p^k + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (p^{k+2} - 2p^k - a_1 - \cdots - a_{n-1})X^n$$

在 $\mathbb{Q}$ 上是至多两个不可约因子的乘积。

为证明这一点，注意到 $f(0) = 2p^k$和 $f(1) = p^{k+2}$，因此我们可以对 $a = 0$、$b = 1$、$k_1 = k$、$k_2 = k+2$、$r = 2$和 $1 + \lfloor(k_2 - k_1 - 1)\log_{\frac{p}{r}} p\rfloor = 2$应用推论 3.1，因为

$1 < \log_p p < 2$ 对于 $p \geq 5$。还需证明 $f$ 的首项系数满足如下不等式

$$|p^{k+2} - 2p^k - a_1 - \cdots - a_{n-1}| > 2^{n+1}p^k + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i}|a_i|,$$

而对于充分大的素数 $p$，这一点显然成立。

例如，对于一个可以轻易得到 $p$ 的显式下界的例子，可以取 $|a_1| = \cdots = |a_{n-1}| = 1$ 和 $k \geq 2$，从而得出：对于所有素数 $p \geq 2^{\frac{n+1}{2}} + 1$，$f$ 在 $\mathbb{Q}$ 上至多是两个不可约因子的乘积。事实上，由于 $|a_n| \geq p^{k+2} - 2p^k - n + 1$ 和 $\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i}|a_i| = 2^n - 2 + 2^{n+1}p^k$，只需要求 $p$ 满足 $p^2 > 2 + 2^{n+1} + \frac{2^n+n-3}{p^k}$，而这显然对 $p \geq 2^{\frac{n+1}{2}} + 1$ 成立。

4) 令 $p$ 为素数，并考虑多项式 $f(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$，其定义如下

$$(pX+1)^2Y^4 + (2p-2)(pX^2+X)Y^3 + [(p-1)^2X^2 + 2pX + 2]Y^2 + (2p-2)XY + 1.$$

注意到，$f$ 可写成关于 $Y$ 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}[X]$，即 $f = \sum_{i=0}^{4} a_i(X)Y^i$，其中 $a_i(X) \in \mathbb{Z}[X]$，且我们有 $\deg a_4 = \deg a_3 = \deg a_2 = 2$、$\deg a_1 = 1$，以及 $\deg a_0 = 0$，因此条件

$$\deg a_{n-1} \geq \deg a_n \geq \max\{\deg a_0, \deg a_1, \ldots, \deg a_{n-2}\}$$

满足推论 5.3 中的条件。另一方面，我们注意到

$$\begin{aligned} f(X,X) &= p^2X^6 + 2p^2X^5 + p^2X^4 + 2pX^3 + 2pX^2 + 1 \\ &= (pX^3 + pX^2 + 1)^2, \end{aligned}$$

它是关于素数 $p$ 的艾森斯坦多项式的平方。因此，我们可以将推论 5.3 应用于 $g(X) = X$，它满足条件 $\deg g > \deg a_{n-1} - \deg a_n$；并应用于 $h(X) = pX^3 + pX^2 + 1$，后者在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。由此可得，$f$ 在 $\mathbb{Q}(X)$ 上至多是两个不可约因子的乘积。事实上，可以验证我们实际有 $f(X,Y) = ((pX+1)Y^2 + (p-1)XY + 1)^2$，因此 $(pX+1)Y^2 + (p-1)XY + 1$ 必定在 $\mathbb{Q}(X)$ 上不可约；这一点也可以直接检验，或者再次利用推论 5.3 得出。

致谢 本工作是在 GDRIECO-Math 框架下完成的。

## References

[1] R. Ballieu，《代数方程根的界限》，比利时皇家科学院科学部通报（第5辑）33（1947），747–750。[2] P. Batra、M. Mignotte 和 D. S̨tef˘anescu，《多项式根的拉格朗日界的改进》，《符号计算期刊》82（2017），19–25。[3] A. Bodin、P. D`ebes 和 S. Najib，《多项式的素值与互素值》。《数学教学》（第2辑）66（2020），169–182。[4] A.I. Bonciocat 和 N.C. Bonciocat，《具有一个较大系数且取素值的多项式的不可约性》，《加拿大数学通报》52（2009），第4期，511–520。

[5] A.I. Bonciocat、N.C. Bonciocat、Y. Bugeaud 和 M. Cipu，《阿波罗尼斯圆与多项式不可约性判据》，Indag. Math 33（2022），421–439。[6] A.I. Bonciocat、N.C. Bonciocat 和 A. Zaharescu，《关于取素数幂值的多项式的不可约性》，Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 54（102）（2011），第1期，41–54。[7] N.C. Bonciocat，《具有有理系数的一类多项式因子数的上界》，Acta Arith. 113（2004），第2期，175–187。[8] J. Brillhart、M. Filaseta 和 A. Odlyzko，《关于 A. Cohn 的一个不可约性定理》，《加拿大数学杂志》33（1981），第5期，1055–1059。[9] M. Cavachi，《希尔伯特不可约性定理的一个特殊情形》，J. Number Theory 82（2000），第1期，96–99。[10] M. Cavachi、M. Vˆajˆaitu 和 A. Zaharescu，《一类不可约多项式》，J. Ramanujan Math. Soc. 17（2002），第3期，161–172。[11] M. Cole、S. Dunn 和 M. Filaseta，《关于具有非负系数的多项式的进一步不可约性判据》，Acta Arith. 175 （2016），第 2 期，137–181。[12] V.F. Cowling 和 W.J. Thron，《多项式的无零区域》，Amer. Math. Monthly 61（1954），682–687。[13] V.F. Cowling 和 W.J. Thron，《多项式的无零区域》，J. Indian Math. Soc. (N.S.) 20（1956），307–310。[14] H.L. Dorwart，《多项式的不可约性》，Amer. Math. Monthly 42（1935），第6期，369–381。[15] M. Filaseta，《A. Cohn 的一个不可约性定理的进一步推广》，《加拿大数学杂志》34（1982），第6期，1390–1395。[16] M. Filaseta，《具有非负系数的多项式的不可约性判据》，《加拿大数学杂志》40（1988），第2期，339–351。.[17] M. Fujiwara，《代数方程根的绝对值上界》，Tˆohoku Math. J. 10（1916），167–171。[18] K. Girstmair，《论 M. Ram Murty 的一个不可约性判据》，Amer. Math. Monthly 112（2005），第3期，269–270。[19] N.H. Guersenzvaig，《具有整数系数的多项式不可约性的简单算术判据》，Integers 13（2013），1–21。[20] S. Kakeya，《关于正系数代数方程根的界限》，Tˆohoku Mathematical Journal（第一辑）2（1912），140–142。[21] T. Kojima，《论 Hadamard 的一个定理及其应用》，Tˆohoku Math. J. 5（1914），54–60。[22] M. Marden，《多项式几何》，数学调查与专著第3号，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1966。[23] M. Mignotte，《关于多项式最大根的不等式》，Elem. Math. 46（1991），第3期，85–86。[24] O. Ore，《关于不可约性的若干注记》，Jahresberichtder Deutschen Mathematiker-Vereinigung 44（1934），147–151。[25] O. Perron，《代数学。第二卷：代数方程论》，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1951。[26] G. P´olya 和 G. Szeg¨o，《分析学中的习题与定理》，Springer-Verlag，柏林，1964。[27] M. Ram Murty，《素数与不可约多项式》，Amer. Math. Monthly 109（2002），第5期，452–458。[28] P. St¨ackel，《整函数的算术性质》，Journal f¨ur Mathematik 148（1918），101–112。[29] L. Weisner，《多项式不可约性的判据》，Bull. Amer. Math. Soc. 40（1934），864–870。

Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Research Unit nr. 3,P.O. Box 1-764, Bucharest 014700, Romania
电子邮箱：Anca.Bonciocat@imar.ro

Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Research Unit nr. 7,P.O. Box 1-764, Bucharest 014700, Romania
电子邮箱：Nicolae.Bonciocat@imar.roUniversité de Strasbourg, Mathématiques, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex,France电子邮箱：yann.bugeaud@math.unistra.fr

Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Research Unit nr. 7,P.O. Box 1-764, Bucharest 014700, Romania
电子邮箱地址：Mihai.Cipu@imar.roUniversité de Strasbourg, Mathématiques, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex,France电子邮箱地址：maurice.mignotte@math.unistra.fr