arXiv:2303.04064v2 [math.AG] 2 Aug 2023

切丛、余切丛、法丛和余法丛几乎从来不是瞬子丛

GIANFRANCO CASNATI

Abstract. 在这篇极短的短文中，我们给出一个与特征无关的初等证明，证明标题中所述的结果（更精确的表述见定理 1.2），并将其推广至近期在 [7] 中针对复数域上的 Ulrich 丛证明的一项结果。此外，我们还给出一个关于余切丛扭转的类似结果，并对能否针对切丛的扭转得到类似结果作出一些评论。

1. Introduction and Notation

本文中，射影簇 X 是代数闭域 $\mathbf{k}$ 上某个射影空间中的闭不可约子概形，其特征为 p。

在 [1] 中引入了以下定义。

定义 1.1. 设 X 为维数 $n \geq 1$ 的射影簇，并赋有一个丰沛且整体生成的线丛 $\mathcal{O}_X(h)$。

称 X 上的非零凝聚层 $\mathcal{E}$ 为量子数为 $k \in \mathbb{Z}$ 的（普通） h–瞬子层，当且仅当它满足以下性质：

- $h^0\big(\mathcal{E}(-h)\big) = h^n\big(\mathcal{E}(-nh)\big) = 0$;
- $h^i\big(\mathcal{E}(-(i+1)h)\big) = h^{n-i}\big(\mathcal{E}(-(n-i)h)\big) = 0$ if $1 \leq i \leq n-2$;
- $h^1\big(\mathcal{E}(-h)\big) = h^{n-1}\big(\mathcal{E}(-nh)\big) = k$.

若 $k = 0$，则称 $\mathcal{E}$ 为 h–Ulrich 层。

在 X 上存在量子数固定为 k 的瞬子层并非显而易见。例如， $k = 0$的情形，即 Ulrich 层的情形，在过去二十年中受到深入研究，而其存在性问题至今仍未解决：关于这一情形的更多细节，参见 [6] 及其中的参考文献。

研究瞬子层和 Ulrich 层的动机还在于，它们在固定簇 X 上的存在性往往与有趣的几何性质相关。例如， [2] 证明，当 $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ 是一个超曲面且$\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)$时，局部 Cohen–Macaulay h–瞬子层的存在，等价于存在一个由定义X 的多项式某个幂表示为适当态射的行列式的形式；该态射是在 $\mathbb{P}^{n+1}$ 上的、秩相同的向量丛之间的态射，并具有指定的上同调表，这类向量丛称为 Steiner 丛。

因此，或许可以合理地探讨：与光滑簇 X 自然相关的丛中，是否有某个丛是瞬子丛；若答案肯定，那么其中哪一个同时还是 Ulrich 丛。

例如，我们可以研究余切丛，即微分层 Ω_X，以及切丛，即其对偶 $\mathcal{T}_X$：Ω_X 和 $\mathcal{T}_X$ 的秩为 $n := \dim(X)$。此外，如果 $X \subseteq \mathbb{P}^N$，且 $\mathcal{I}_X \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ 是其理想层，我们还可以考虑另外两个层，即余法丛 $\mathcal{C}_X := \mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2$，以及法丛，即其对偶 $\mathcal{N}_X$：$\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{N}_X$ 的秩为 $N - n$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14J60。次要分类：14D21、14F06。
Key words and phrases. Ulrich 丛、瞬子丛。作者是 INdAM 的 GNSAGA 小组成员。

作为一个初步示例，我们考虑丛 $\mathcal{N}_X$。存在正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}^N} \longrightarrow \mathcal{N}_X \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)^{\oplus N+1} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^N} \longrightarrow 0. \tag{1.2}$$

将 (1.2) 限制到 X 并结合 (1.1)，可得 $\mathcal{N}_X(-h)$ 肯定是整体生成的。特别是 $h^0(\mathcal{N}_X(-h)) \neq 0$：由此可推得，$\mathcal{N}_X$ 绝不是h–瞬子丛，因此也绝不是 h–Ulrich。

在这篇短文中，我们用一个非常简单直接的无特征限制的证明，证明以下结果。

定理 1.2. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 是一个维数为 $n \geq 1$ 且$\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ 的光滑射影簇。

那么，以下断言成立。
(1) $\mathcal{T}_X$ 是一个 h–瞬子丛，当且仅当 $X \cong \mathbb{P}^1$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$，或 $X \cong \mathbb{P}^2$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$：在这些情况下，$\mathcal{T}_X$ 是 h–Ulrich。(2) $\Omega_X, \mathcal{N}_X$ 和 $\mathcal{C}_X$ 绝不是 h–瞬子丛。

作为一个直接的推论，我们得到光滑射影簇 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 使得 $\mathcal{T}_X$ 是 Ulrich 丛的刻画。当 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ 属于 $[7,\ \text{主定理}]$ 时，这种刻画首次通过一个深入、有趣且冗长的证明得以确立（另见 $[19,\ \text{定理 4.9}]$）。

推论 1.3. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 是一个维数为 $n \geq 1$ 的光滑射影簇，且 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$。

那么，$\mathcal{T}_X$ 是一个 h–Ulrich 丛，当且仅当 $X \cong \mathbb{P}^1$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$，或者 $X \cong \mathbb{P}^2$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$。

接下来要探讨的是，前述丛的某个扭曲是否为瞬子。

例如，若 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$，则当 X 是标准线性行列式簇时，$\mathcal{N}_X(-h)$ 是一个 h–Ulrich 丛，即量子数为 $k = 0$ 的 h–瞬子（参见$[17,\ \text{定理 3.6}]$）。

满足 $\mathcal{N}_X(ah)$ 对某个$a \in \mathbb{Z}$ 而言是 h–Ulrich 的簇的完整分类见 $[18,\ \text{定理 1}]$。在不对 p 和 k作限制的情况下，沿这一方向只证明了一些非常有限的结果：参见 $[3]$。

当 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ 且 $k = 0$时，文献 $[19, 4]$ 对层 $\Omega_X, \mathcal{T}_X, \mathcal{C}_X$ 的扭转行为进行了细致研究。

我们在第4节讨论 $p \geq 0$ 且 $k \geq 0$ 的情形，并证明了关于 Ω_X 的扭转的以下结果。

定理 1.4. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 是一个维数为 $n \geq 1$ 且$\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ 的光滑射影簇。

那么，$\Omega_X(ah)$ 是一个 h–瞬子丛，当且仅当 $a = 2$，$X \cong \mathbb{P}^1$ 且$\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$。

根据定义，每个 $n = 1$ h–瞬子层都是 h–Ulrich，因此以下推论是上述定理的直接结果。当 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ 时，它是 $[18,$命题4.1 (i)$]$。

推论1.5. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 是一个维数为 $n \geq 1$的光滑射影簇，且 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$。

那么，$\Omega_X(ah)$ 是一个 h–Ulrich 丛，当且仅当 $a = 2$、$X \cong \mathbb{P}^1$ 以及 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$。

在第5节中，我们列出了一些结果和例子，表明确定 $\mathcal{T}_X(ah)$ 是否为瞬子– h 可能更为困难，即使在 $p = 0$ 时也是如此：参见近期论文 $[19]$。具体而言，我们无法证明一个与上文定理1.4类似的一般性结果。

1.1. 致谢。作者谨向审稿人表示感谢，感谢她/他所作的更正、评论和建议。

2. Notation and some helpful results

全文中，我们始终在特征任意的代数闭域 k 上工作：若对基域有所限制，我们会明确说明。k 上维数为 N 的射影空间记为 $\mathbb{P}^N$： $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ 是超平面线丛。概形 X 的结构层记为 $\mathcal{O}_X$。

设 X 是一个光滑射影簇：令 $\omega_X := \det(\Omega_X)$，并用 K_X 表示任意满足 $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$ 的除子。回顾一下，Ω_X 和 $\mathcal{T}_X$ 的秩为 $n := \dim(X)$，而当 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 时，$\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{N}_X$ 的秩为 $N-n$。

对于文中未明确提及的其他记号和所有必要结果，除非另有说明，我们默认参考 [11]。

为了证明定理 1.4 和 1.2，我们将用到一些适用于任意特征、涉及伴随线性系上的藤田猜想的结果（见 [10]）。为此，我们回顾一些定义和结果。

设 X 是光滑簇。X 中的曲线是纯维数为 1 的闭子概形。若对每条不可约曲线 $\Gamma \subseteq X$ 都有 $D\Gamma \geq 0$，则 X 上的线丛 $\mathcal{O}_X(D)$ 数值有效。注意，$\mathcal{O}_X(D)$ 的数值有效性仅取决于它在 N´eron–Severi 群 $\mathrm{NS}(X)$ 中的类。

若一个维数为 $n \geq 2$ 的光滑射影簇 X 配备了满射态射 $\pi\colon X \to B$，其纤维同构于 $\mathbb{P}^{n-1}$，且丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(\xi)$ 在这些纤维上的限制为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$，则称它是以光滑曲线 B 为底的卷曲。

在此情形下，存在一个秩为 n 的向量丛 $\mathcal{G}$，使得 X 是 $\mathcal{G}$ 的对称 $\mathcal{O}_B$–代数的 Proj。我们有 $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(\xi) \oplus \pi^*\mathrm{Pic}(B)$，其中 $\pi_*\mathcal{O}_X(\xi) \cong \mathcal{G}$。$\pi$ 的所有纤维都代数等价，我们用 $f \in \mathrm{NS}(X)$ 表示它们的类。根据陈方程 $\xi^n = \deg(\mathfrak{g})$，其中 $\mathcal{O}_B(\mathfrak{g}) = \det(\mathcal{G})$：按照 [11] 中的记号，我们也将其记作

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-n\xi + (\mathfrak{g} + K_B)f), \tag{2.1}$$

其中，对每个定义在 B 上的除子 $\mathfrak{a}$，我们令 $\mathcal{O}_X(\mathfrak{a}f) := \pi^*\mathcal{O}_B(\mathfrak{a})$。由于 $\mathcal{O}_X(\xi)$ 是丰沛的，因此

$$\deg(\mathfrak{g}) = \xi^n \geq 1. \tag{2.2}$$

定理 2.1. 设 X 是一个维数为 $n \geq 1$、带有丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 的光滑射影簇。

那么，要么 $\omega_X((n-1)h)$ 是数值有效的，要么以下断言之一成立。(1) $X \cong \mathbb{P}^2$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$。(2) $X \cong \mathbb{P}^n$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$。(3) $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ 是光滑二次超曲面，且 $\mathcal{O}_X(h) = \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)$。(4) $n \geq 2$ 且 X 是相对于 $\mathcal{O}_X(h)$、定义在光滑曲线 B 上的卷曲。

证明。对于 $n \geq 3$ 的情形，请参见 [15, 定理 1]；当 $n \leq 2$ 时，另请参见其中关于 [13, 10] 在任意特征下证明有效性的评论。□

以下推论是上述定理的直接推论。

推论 2.2. 设 X 是一个维数为 $n \geq 1$、配备丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 的光滑射影簇。

Then either $\omega_X(nh)$ is nef or $X \cong \mathbb{P}^n$ and $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

证明。满足 X $\omega_X(nh)$ 不数值有效的簇集合，包含于满足 $\omega_X((n-1)h)$ 不数值有效的簇集合之中。因此，只需验证 $\mathbb{P}^n$

带有 $\mathcal{O}_X(h)$ 的 $= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$，是定理 2.1 中列出的唯一一个满足 $\omega_X(nh)$ 不数值有效的簇 X。

当 $Q \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ 是光滑二次超曲面时，$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-nh)$，因此$\omega_X(nh) \cong \mathcal{O}_X$ 显然是数值有效的。

当 X 是曲线上的卷曲时，我们使用上文引入的记号。由(2.1)可得 $\omega_X(nh) \cong \mathcal{O}_X((\mathfrak{g}+K_B)f)$，属于NS($X$)。因此，只需证明

$$(nh+K_X)\Gamma = (\deg(\mathfrak{g})+2p_a(B)-2)f\Gamma \geq 0$$

对每条不可约曲线 $\Gamma \subseteq X$都成立。

如果 Γ 包含在 π的一个纤维中，那么 $f\Gamma = 0$，因为一般纤维与 Γ不相交。如果 Γ 不包含在 π的任何纤维中，那么$\pi_{|\Gamma}$ 是一个次数为$f\Gamma \geq 1$的有限映射。如果 $p_a(B) \geq 1$，那么

$$\deg(\mathfrak{g})+2p_a(B)-2 \geq 0 \tag{2.3}$$

由(2.2)得。如果 $p_a(B) = 0$，那么 $B \cong \mathbb{P}^1$，因此$\mathcal{G} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(g_i)$。$\mathcal{G}$ 的丰性意味着 $g_i \geq 1$，因此(2.3)在此情形下也成立。由此可知，无论 $p_a(B)$如何，$\omega_X(nh)$都是数值有效的。□

推论 2.3. 设 X 是一个维数为 $n \geq 1$ 的光滑射影簇，配备丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(h)$。

则 $\omega_X((n+1)h)$ 是数值有效的。

证明。我们采用推论 2.2 证明中的相同论证。 □

现在假设 $\mathcal{E}$ 是光滑射影簇 X 上的一个 h–瞬子层，该簇维数为 n，并配备丰沛且全局生成的线丛 $\mathcal{O}_X(h)$；另假设 $\mathcal{O}_X(h)$ 非常丰，或 $p = 0$。因此，以下严格限制成立

$$c_1(\mathcal{E})h^{n-1} = \frac{\mathrm{rk}(\mathcal{E})}{2}((n+1)h+K_X)h^{n-1}, \tag{2.4}$$

参见 [1, 定理 1.6]: 这里 h^n 和 K_Xh^{n-1} 表示当 $n=1$ 时线丛$\mathcal{O}_X(h)$ 和 ω_X 的次数。

关于更多记号以及论文中使用的所有其他结果，除非另有说明，我们均默认参照 [11], 。

3. Proof of Theorem 1.2

正如引言中所指出的，法丛从来不是瞬子丛。

我们先列举一些简单的例子，说明某些光滑簇的切丛是或不是瞬子丛：在 [7] 中，相同的计算仅用于处理 $k = 0$的情形。

例 3.1. 设 $n = 1$。若 $X \cong \mathbb{P}^1$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$，其中 $d \leq 3$，则

$$h^0\big(\mathcal{T}_X(-h)\big) = h^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2-d)\big) = 3-d.$$

在所有其他情形下

$$h^1\big(\mathcal{T}_X(-h)\big) = h^0\big(\omega_X^2(h)\big) \geq 3p_a(X)-3+\deg(X) \geq 1.$$

因此，$\mathcal{T}_X$ 是一个 h–瞬子层，当且仅当 $X = \mathbb{P}^1$ 且 $\mathcal{O}_X(h) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$。

容易验证，$\mathcal{T}_X$ 是 X上唯一的秩为一的 h–Ulrich 层。

例 3.2. 若 $X \cong \mathbb{P}^2$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$，则由 Bott 公式可得

$$h^i\big(\mathcal{T}_X(-h)\big) = h^i\big(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)\big) = 0, \qquad h^j\big(\mathcal{T}_X(-2h)\big) = h^j\big(\Omega_{\mathbb{P}^2}(-1)\big) = 0,$$

对 $i \leq 1 \leq j$ 而言。因此 $\mathcal{T}_X$ 是一个 h–瞬子层。

请注意， $\mathcal{T}_X$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上唯一的秩为二的 h–Ulrich 层：参见 [8，定理 5.2]。

我们现在可以证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。正如引言中指出的，如果 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ and $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$，那么 $\mathcal{N}_X$ 绝不是 h–瞬子丛，因此它不是 h–Ulrich。现在考虑 $\mathcal{C}_X$：在这种情况下，(2.4) 变为

$$(((N-n)(n+1)+2(N+1))h+(N-n+2)K_X)h^{n-1}=0. \tag{3.1}$$

一方面， $N>n$ 给出

$$(N-n)(n+1)+2(N+1)=(N-n+2)(n+1)+\lambda$$

其中 $\lambda = 2(N-n) > 0$。因此，(3.1) 变为

$$(N-n+2)((n+1)h+K_X)h^{n-1}=-\lambda h^n<0,$$

这要归功于 $\mathcal{O}_X(h)$ 的丰性。另一方面 $((n+1)h+K_X)h^{n-1} \geq 0$，因为根据推论 2.3， $\omega_X((n+1)h)$ 是数值有效的。由此矛盾可知， $\mathcal{C}_X$ 不是 h–瞬子丛。

关于 Ω_X 的断言是定理1.4的一个特例。无论如何，我们也可以用前一种情形中的相同论证来证明该断言。事实上，在这种情形下可得

$$(n-2)((n+1)h+K_X)h^{n-1}=-2(n+1)h^n<0,$$

这再次与前一种情形中 $n \geq 2$ 时的推论2.3矛盾。若 $n=1$ 条件 $h^1(\Omega_X(-h)) = 0$ 成立，则由对偶性可得 $h^0(\mathcal{O}_X(h)) = 0$，再次导出矛盾。由此我们得出，$\Omega_X$ 不是一个 h–瞬子层。

接下来我们将重点讨论 $\mathcal{T}_X$。 $n=1$ 的情形已在例 3.1 中完整描述，因此从现在起我们假设 $n \geq 2$。对于 $\mathcal{T}_X$，等式 (2.4) 变为

$$(n(n+1)h+(n+2)K_X)h^{n-1}=0. \tag{3.2}$$

若 $\lambda := n(n+1)-(n+2)(n-1) > 0$，则有显然的等式

$$(n(n+1)h+(n+2)K_X)h^{n-1}=(n+2)((n-1)h+K_X)h^{n-1}+\lambda h^n$$

如果 $\omega_X((n-1)h)$ 是数值有效的，那么我们可以像处理 $\mathcal{C}_X$ 那样进行论证，因为 $\mathcal{O}_X(h)$ 是丰沛的。

我们来考察定理 2.1 中列出的、 $\omega_X((n-1)h)$ 不数值有效的情形。在定理 2.1 的情形 (1) 中，根据例 3.2，层 $\mathcal{T}_X$ 是一个 h–瞬子丛。在定理 2.1 的情形 (2) 中，我们推得 (3.2) 变为 $-2=0$；而在情形 (3) 中，我们得到 $-n=0$：因此 $\mathcal{T}_X$ 不是一个 h–瞬子层。

考虑定理 2.1 的情形 (4)。于是 $n \geq 2$ 和 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 关于 $\mathcal{O}_X(h)$ 是光滑曲线 B 上的一个卷曲。根据 (2.1) 和 (2.2)，(3.2) 变为

$$\deg(\mathfrak{g}) = -(2+n)(p_a(B)-1).$$

由此必然得到 $p_a(B) = 0$，因为当 $p_a(B) \geq 1$ 时，左边为正，右边则非正。

因此 $B \cong \mathbb{P}^1$ 且 $\deg(\mathfrak{g}) = n+2$，故有 $K_X = -nh+nf$。若 $\mathcal{T}_{X|\mathbb{P}^1}$ 是态射 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ 的相对切丛，则有正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{X|\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(2f) \longrightarrow 0$$

因为 π 是光滑的。其上同调与 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-nh)$ 张量后，再由 Serre 对偶得到

$$h^n(\mathcal{T}_X(-nh)) \geq h^n(\mathcal{O}_X(-nh+2f)) = h^0(\mathcal{O}_X((n-2)f)) = n-1 \geq 1.$$

因此， $\mathcal{T}_X$ 不是一个 h–瞬子层。 □

注 3.3. 为了证明定理 1.2，我们只用到了我们所关注的丛 $\mathcal{E}$ 实际上满足以下性质：

- $h^0\big(\mathcal{E}(-h)\big) = 0$ （用于 $\mathcal{N}_X$）；
- $h^n\big(\mathcal{E}(-nh)\big) = 0$ （用于曲线，偶尔也用于 $\mathcal{T}_X$）；
- $\mathcal{E}$ 满足 (2.4)（用于 $\mathcal{C}_X$、Ω_X 和 $\mathcal{T}_X$）

注 3.4. 若 k 的特征为零，则只有在 $\mathcal{O}_X(h)$ 丰沛且整体生成的假设下，(2.4) 才成立，因此定理 1.2 中关于 Ω_X 和 $\mathcal{T}_X$ 的断言也同样成立。

注 3.5. 若 $X \subseteq \mathbb{P}^N$，则在定理 1.2 的证明中使用的同一论证可轻易推出，$\mathcal{O}_X \otimes \Omega_{\mathbb{P}^N}$ 和 $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}^N}$ 关于 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ 绝不会是瞬子丛。

4. Proof of Theorem 1.4.

我们已经在定理 1.2 中通过一个非常简短的证明验证了，Ω_X 绝不是一个 h–瞬子丛。本节讨论余切丛的扭转，并给出引言中陈述的定理1.4的证明。

我们先从下面分析情形 $n = 1$ 的例子开始：在 [18] 中，基本上相同的计算仅用于处理情形 $k = 0$。

例4.1。假设 $n = 1$。一方面，若 $\Omega_X(ah)$ 是一个 h–瞬子，则

$$h^0(\Omega_X((a-1)h)) = h^1(\Omega_X((a-1)h)) = 0 :$$

特别地

$$h^0(\mathcal{O}_X((1-a)h)) = h^1(\Omega_X((a-1)h)) = 0,$$

因此 $a \geq 2$，因为 $\mathcal{O}_X(h)$ 是整体生成的。另一方面，X 上的黎曼–罗赫定理推出

$$h^0(\Omega_X((a-1)h)) - h^1(\Omega_X((a-1)h)) = p_a(X) - 1 + (a-1)\deg(X).$$

由于 $a \geq 2$，可知 $p_a(X) = 0$ 必然成立，因此 $a = 2$ 且 $\deg(X) = 1$，即 $X \cong \mathbb{P}^1$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$。

反过来，很容易验证，$\Omega_{\mathbb{P}^1}(2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上相对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ 的唯一秩为一的瞬子（且为 Ulrich）层。

现在我们证明引言中陈述的定理1.4。

定理1.4的证明。若 $\Omega_X(ah)$ 是一个 h–瞬子丛，则由 (2.4) 可得

$$(n^2 + (1-2a)n)h^n + (n-2)K_X h^{n-1} = 0. \tag{4.1}$$

若 $n = 1$，则由例4.1可得 $a = 2$, $X \cong \mathbb{P}^1$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$。若 $n = 2$，则 (4.1) 没有整数解，因此 $\Omega_X(ah)$ 不是一个 h–瞬子。由此，当 $n = 2$ 时，证明也完成了。

假设 $n \geq 3$。我们有

$$n^2 + (1-2a)n = n(n-2) + n(3-2a).$$

令 $a \leq 1$。一方面，$\lambda = n(3-2a) > 0$，因此 (4.1) 变为

$$(n-2)(nh^n + K_X h^{n-1}) = -\lambda h^n < 0, \tag{4.2}$$

由于 $\mathcal{O}_X(h)$ 的丰性。另一方面，除非 $X \cong \mathbb{P}^n$ 且 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$，上述等式左端根据推论 2.2 是非负的。

若情况如此，则 (4.1) 得到 $n(1-a) = -1$ 这不可能，因为$n \geq 3$。因此，(4.2) 的左端非负，而右端为负，矛盾。由此可得 $a \geq 2$。

注意，将 (1.2) 的对偶与 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(a)$ 作张量积后，其外积为

$$0 \longrightarrow (\wedge^2\Omega_{\mathbb{P}^N})(a) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(a-2)^{\oplus\binom{N+1}{2}} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^N}(a) \longrightarrow 0.$$

将其限制到 X，再结合由（1.1）的对偶诱导的满射态射 $\mathcal{O}_X \otimes \Omega_{\mathbb{P}^N}(a) \twoheadrightarrow \Omega_X(ah)$，可知 $\Omega_X(ah)$ 对于 $a \geq 2$ 是整体生成的。由于根据定义必有 $h^0(\Omega_X((a-1)h)) = 0$，因此必然有 $a \leq 2$。于是，如果 $n \geq 3$ 且 $\Omega_X(ah)$ 是一个 h–瞬子丛，则必然有 $a = 2$。

根据定义，当 $n \geq 3$ if 时，$\Omega_X(2h)$ 不是一个 h-瞬子丛

$$h^1(\Omega_X) \geq 1. \tag{4.3}$$

如果 $\Omega_X(2h)$ 是一个 h–瞬子丛，那么根据定义有 $h^0(\Omega_X(h)) = 0$。因此，将（1.2）张量化 Ω_X 后，我们得到一个单射映射

$$\varrho\colon \mathrm{Hom}_X(\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}^N}) \cong H^0(\Omega_X \otimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}^N}) \longrightarrow H^1(\Omega_X).$$

因此，（1.1）推出 $\varrho \neq 0$，从而得到（4.3）。因此，当 $n \geq 3$ 时，$\Omega_X(2h)$ 不是一个 h-瞬子丛。□

注 4.2. 若 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$，则 (4.3) 显然成立，因为 Lefschetz (1, 1) 定理蕴含存在单射态射 $\mathrm{NS}(X) \to H^1(\Omega_X)$，因此在这种情况下无需进一步计算。

当 $p \neq 0$ 时，上述态射仍然存在，但它可能不是单射，因此我们不能以同样的方式论证 (4.3)。

5. On the tangent bundle of some canonical varieties

本节汇集一些部分结果和例子，说明判定 $\mathcal{T}_X(ah)$ 是否为 h–瞬子丛的问题可能相当不简单（因此或许也颇为引人入胜）。

以下结果是定理 1.2 的直接推论。

命题 5.1. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 是一个维数为 $n \geq 1$ 的光滑射影簇，且 $\mathcal{O}_X(h) := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$。假设对某个 $\alpha \in \mathbb{Z}$，有 $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(\alpha h)$。

那么， $\mathcal{T}_X(ah)$ 是一个 h–瞬子丛，当且仅当 $a = \alpha + n - 1$, $X \cong \mathbb{P}^1$ 和 $\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$;

证明。由于 $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(\alpha h)$，由 Serre 对偶可知， $\mathcal{T}_X(ah)$ 是一个h–瞬子丛，当且仅当 $\Omega_X((\alpha - a + n + 1)h)$ 也满足同样的条件（见 [1,第 6] 节）。因此，该结论可由定理1.4轻易推出。□

鉴于上述命题，讨论多重正则丛簇和反多重正则丛簇 X 或许是顺理成章的，也就是说，存在某个$\beta \in \mathbb{Z}$使得 $\omega_X^{\beta} \cong \mathcal{O}_X(h)$。显然， $\beta \neq 0$ ，而情形 $\beta = \pm 1$ 已由命题 5.1 涵盖，因此我们在下述命题中假设 $\beta \notin \{ 0, \pm 1 \}$。

命题 5.2. 设 X 是一个维数为 $n \geq 1$ 、配备丰沛且全局生成线丛 $\mathcal{O}_X(h)$ 的光滑射影簇。假设对于某个 $\beta \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0, \pm 1 \}$，有 $\omega_X^{\beta} \cong \mathcal{O}_X(h)$。

若 $\mathcal{T}_X(ah)$ 是一个 h–瞬子丛，则 $n = 2$、 $1 \leq a \leq 2$ 和 $1 \leq K_X^2 \leq 5\chi(\mathcal{O}_X)$。在这种情况下， $\mathcal{T}_X(ah)$ 的量子数为 $10\chi(\mathcal{O}_X) - 2K_X^2$。

证明。假设 $\mathcal{T}_X(ah)$ 是一个 h–瞬子丛。关于 ω_X 的假设和 (2.4) 得出 $n(2a-n-1)\beta = n+2$，因为 $0 \neq h^n = \beta^n K_X^n$。特别地， $2a \neq n+1$，因为 $n \geq 1$。若 $n = 1$，上述等式没有整数解，因此从现在起我们假设 $n \geq 2$： 于是 $1 < (n+2)/n \leq 2$。由于

$$\beta = \frac{n+2}{n(2a-n-1)} \in \mathbb{Z},$$

由此必有 $(n+2)/n=2$，且 $2a-n-1\in\{\pm1,\pm2\}$。我们推得 $n=2$，因此 $\beta=\pm2$（回想一下，$\beta\neq\pm1$）：于是 $2a=3\pm1$，从而$1\leq a\leq 2$。

如果 $\mathcal{T}_X(ah)$ 是一个 h–瞬子，那么根据定义，$h^0(\mathcal{T}_X((a-1)h))=h^2(\mathcal{T}_X((a-2)h))=0$；随后由 Serre 对偶可知，$h^2(\mathcal{T}_X((a-1)h))=0$ 也成立。我们有

$$c_1(\mathcal{T}_X((a-1)h))=2(a-1)h-K_X,$$
$$c_2(\mathcal{T}_X((a-1)h))=12\chi(\mathcal{O}_X)-K_X^2-(a-1)hK_X+(a-1)^2h^2,$$

因此，黎曼–罗赫定理给出

$$k=h^1(\mathcal{T}_X((a-1)h))=-\chi(\mathcal{T}_X((a-1)h))=10\chi(\mathcal{O}_X)-K_X^2-((a-1)h-K_X)^2.$$

因此，对于 $1\leq a\leq 2$，我们得到 $k=10\chi(\mathcal{O}_X)-2K_X^2\geq 0$，从而 $K_X^2\leq 5\chi(\mathcal{O}_X)$。另一方面，$\beta^2K_X^2=h^2\geq 1$，从而 $K_X^2\geq 1$。□

在以下例子中，我们将更详细地考察命题 5.2 中的曲面，并且还将证明 $q(X)=0$ 必然成立。为简单起见，我们假设 $p=0$。

注意，在这类曲面上存在秩为二的 h–瞬子丛 $\mathcal{E}$，满足 $c_1(\mathcal{E})=3h+K_X=(3\beta+1)K_X$ 且量子数任意；这由[1, 例 6.11], 可知，因为根据 Kodaira 消灭定理，$h^1(\omega_X^\beta)=0$，这是因为 $\beta\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$。

例 5.3。设 $a=1$，因此 $\beta=-2$。

在这种情况下 $\mathcal{O}_X(h)\cong\omega_X^{-2}$：特别是 ω_X^{-1} 丰沛，因此 X 是 Del Pezzo 曲面。每个 Del Pezzo 曲面要么是将 $\mathbb{P}^2$ 在 $0\leq r\leq 8$ 个一般点处爆破得到的曲面，要么同构于 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。在前一种情况下，$K_X^2=9-r$称为 X 的次数；若 $r\leq 7$，则 ω_X^{-1} 整体生成；若 $r\leq 6$，则 ω_X^{-1} 非常丰沛。在后一种情况下，ω_X^{-1} 非常丰沛，且 $K_X^2=8$。

丛 $\mathcal{T}_X(h)$ 是一个 h–瞬子，当且仅当 $h^0(\mathcal{T}_X)=0$，因为它是可定向的，即 $c_1(\mathcal{T}_X(h))=3h+K_X=-5K_X$（见 [1, 推论 6.9]）：此外，在这种情况下，它的量子数为 $h^1(\mathcal{T}_X)=h^1(\mathcal{T}_X(-h))$。我们回顾一下，$h^0(\mathcal{T}_X)$ 是 Aut(X) 在恒等元处的切空间维数，因为 $p=0$（见 [16, 习题 I.2.16.4]）：由此可得，$\mathcal{T}_X(h)$ 是一个 h–瞬子，当且仅当 Aut(X) 是有限群。若 $2\leq K_X^2\leq 5$，则 Aut(X) 是有限群（见 [9, 推论 8.2.33]）。若 $K_X^2\geq 6$，则要么 X 是在 $0\leq r\leq 3$ 个一般点处爆破得到的，因此 Aut(X) 维数为正，因为它包含固定这些爆破点的 $\mathbb{P}^2$ 的射影变换群作为子群；要么 $X\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，因此它包含 $\mathrm{PGL}_2\times\mathrm{PGL}_2$作为子群。

我们得出，$\mathcal{T}_X(h)$ 是 h–瞬子当且仅当 $2\leq K_X^2\leq 5$，并且它是 h–Ulrich 当且仅当 $K_X^2=5$。

这一结果是 [19] 中证明的更一般结果的一个非常特殊的情形。

例 5.4。设 $a=2$，于是 $\beta=2$。

在此情形下，$\mathcal{O}_X(h)\cong\omega_X^2$：特别地，$X$ 是一般型曲面，并且由于 ω_X 是丰沛的，它是极小的。此外，$\mathcal{T}_X(2h)$ 是 h–瞬子当且仅当 $h^0(\mathcal{T}_X(h))=h^0(\mathcal{T}_X(2K_X))=0$。若 $p_g(X)\geq 1$，则我们得到

$$0=h^0(\mathcal{T}_X(2K_X))=h^0(\Omega_X^1(K_X))\geq h^0(\Omega_X^1)=h^1(\mathcal{O}_X)=q(X),$$

因为 $\mathcal{T}_X(K_X)\cong\Omega_X^1$。若 $p_g(X)=0$，则 $q(X)=0$，因为 $\chi(\mathcal{O}_X)\geq 1$（见 [5,定理 VII.1.1 (ii)]）。

因此，X 通过 $\mathcal{O}_X(h)$嵌入为次数为 d 的曲面：$=h^2=4K_X^2$ 位于 $\mathbb{P}^N$中，其中 $N=h^0(\omega_X^2)-1=K_X^2+p_g(X)$（参见 [5, 推论 VII.5.4]）。

若 $N=K_X^2+p_g(X)=3$，则根据 $\mathbb{P}^3$ 中的伴随公式，$\omega_X\cong\mathcal{O}_X((d-4)h)$。若 $N=K_X^2+p_g(X)=4$，则双点公式（参见 [11,

例 A.4.1.3]) 蕴含

$$d^2 - 13d + 12\chi(\mathcal{O}_X) = 0.$$

因为 $d = 4K_X^2$。由于 $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + p_g(X) \geq 1$，可知当 K_X^2 为满足 $d = 4K_X^2$ 是上述方程的解的正整数时，唯一可能的情形是 $p_g(X) = 0$ 且 $K_X^2 = 3$，或者 $p_g(X) = 2$ 且 $K_X^2 = 1$。两种情形下都有 $K_X^2 + p_g(X) = 3$，这与假设 $N = 4$ 矛盾，因此 $N = K_X^2 + p_g(X) \geq 5$。特别地，$K_X^2 \geq 6 - \chi(\mathcal{O}_X)$。

此外，$\mathbb{P}^N$ 中次数不超过 8 的曲面分类（参见 [12, 14]；另见 [20]）表明，不存在满足 $\kappa(X) = 2$ 且 $K_X^2 \leq 2$的曲面 X。因此$K_X^2 \geq 3$ 必然成立。

我们不知道是否确实存在满足 $h^0(\mathcal{T}_X(h)) = 0$ 的曲面 X，但如果存在，X 是一个满足以下条件的一般型极小曲面

$$\mathcal{O}_X(h) \cong \omega_X^2, \qquad q(X) = 0, \qquad \max\{\, 3, 6 - \chi(\mathcal{O}_X) \,\} \leq K_X^2 \leq 5\chi(\mathcal{O}_X),$$

并且当且仅当 $K_X^2 = 5\chi(\mathcal{O}_X)$ 时，$\mathcal{T}_X(2h)$ 是 h–Ulrich。特别地，当 $p_g(X) = 0$ 时，$\mathcal{T}_X(2h)$ 要么是 h–Ulrich，要么 $h^0(\mathcal{T}_X(h)) = h^0(\mathcal{T}_X(2K_X)) \neq 0$。

注 5.5。我们也可以寻找满足 $\omega_X^{\beta} \cong \mathcal{O}_X(\alpha h)$ 的簇 X，并使得对于适当的 α、β、$a \in \mathbb{Z}$，$\mathcal{T}_X(ah)$ 是一个 h–瞬子丛。

例如，Veronese 曲面满足上述假设，其中 $\alpha = 3$、$\beta = -2$、$a = 0$（见上面的例 3.2 或 [7]）：注意，在这种情况下，$\mathcal{O}_X(h) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$，并且 $\mathcal{T}_X$ 实际上是 h–Ulrich。

感兴趣的读者可参阅 [19]，了解更多结果、例子和详情。

References

[1] V. Antonelli, G. Casnati: *Instanton sheaves on projective schemes*。《纯粹与应用代数杂志》227（2023），107246。[2] V. Antonelli, G. Casnati: *Steiner representations of hypersurfaces* 2210 03408。预印本 [ ] arXiv: . math.AG . [3] V. Antonelli, G. Casnati: *Some remarks on varieties whose twisted normal bundle is an instanton* 。初步版本。

[4] V. Antonelli, G. Casnati, A.F. Lopez, D. Raychaudhury: *On varieties with Ulrich twisted conormal bundles* 2306 。预印本 arXiv: .00113 [math.AG]。[5] W. Barth, K. Hulek, Ch. Peters, A. van de Ven: *Compact complex surfaces*。第二版。Springer（2004）。[6] A. Beauville: *An introduction to Ulrich bundles*。《欧洲数学杂志》4（2018），26–36。[7] V. Benedetti, P. Montero, Y. Prieto Monta ˜ nez, S. Troncoso: *Projective manifolds whose tangent bundle is Ulrich* **630** 2023 248 273 。J. Algebra（），–。[8] E. Coskun, O. Genc: *Ulrich bundles on Veronese surfaces*。《美国数学会会刊》145（2017），4687–4701。[9] I.V. Dolgachev: *Classical Algebraic Geometry: a modern view*。剑桥大学出版社（2012）。[10] T. Fujita: *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*。载于《代数几何，仙台，1985（T. Oda 编）》，纯数学高级研究丛书10，North-Holland，（1987），167–178。[11] R. Hartshorne: *Algebraic geometry*。研究生数学丛书52，Springer–Verlag（1977）。[12] P. Ionescu: *Embedded projective varieties of small invariants*。载于《代数几何，布加勒斯特1982（布加勒斯特，1982）》，数学讲义1056（1984），142–186。[13] P. Ionescu: *Generalized adjunction and applications*。《剑桥哲学会数学会刊》99（1986），457–472。[14] P. Ionescu: *Embedded projective varieties of small invariants III*。载于《代数几何（拉奎拉，1988）》，数学讲义1417（1990），138–154。[15] Y. Kachi, J. Koll´ar: *Characterizations of $\mathbb{P}^N$ in arbitrary characteristic*。《亚洲数学杂志》4（2000），115–21。[16] J. Koll´ar: *Rational curves on algebraic varieties*。Springer–Verlag（1995）。[17] J.O. Kleppe, R.M. Mir´o–Roig: *On the normal sheaf of determinantal varieties*。《纯粹与应用数学杂志》719（2016），173–209。

[18] A.F. Lopez: *On varieties with Ulrich twisted normal bundles* 2205 06602 。预印本 arXiv: [. math.AG] 。即将刊载于《四十年回顾：代数几何——纪念 Alberto Collino》。数学趋势，Birkh¨auser。[19] A.F. Lopez, D. Raychaudhury: *On varieties with Ulrich twisted tangent bundles*。预印本 arXiv:2301.03104 [math.AG]。[20] Ch. Okonek: *Flächen vom Grad* 8 *im* $\mathbb{P}^4$。《数学杂志》191（1986），207–223。 1980 2020

Gianfranco Casnati，数学科学系，都灵理工大学，意大利
都灵 Duca degli Abruzzi 大街 24 号，10129，电子邮箱：
gianfranco.casnati@polito.it