arXiv:2303.04079v1 [math.CO] 7 Mar 2023

符号拓扑的扩张定理

HelenaBergold ！
柏林自由大学理论计算机科学系，德国
StefanFelsner ！
柏林工业大学数学研究所，德国
Manfred Scheucher
柏林工业大学数学研究所，德国

摘要

1926 年，Levi 证明，对于任意伪直线排列 $\mathcal{A}$ 以及平面上的两个点，都可以通过一条经过这两个指定点的伪直线扩张 $\mathcal{A}$ 。后来，人们开始研究高维空间中伪超平面排列的可扩展性。虽然在 $\mathbb{R}^d$ 中，添加一条经过 d 个指定点的超平面来扩张真超平面排列是显而易见的，但 Richter-Gebert 找到了一个 $\mathbb{R}^3$ 中的伪平面排列，无法通过添加一条经过两个特定指定点的伪平面来扩张。

本文研究符号拓扑的可扩展性。符号拓扑是一种组合结构，可用于编码一类丰富的伪超平面排列子类。我们的主要结果是，奇秩符号拓扑具有可扩展性：对于两个指定交点，我们可以添加一个包含它们的元素。此外，我们猜想，对于所有偶秩 $r \geq 4$ ，都存在无法针对两个指定点扩展的符号拓扑。通过基于 SAT 的方法，我们找到了秩为 4、6、8、10 和 12 的例子，为这一猜想提供了支持。

2012 年 ACM 学科分类 计算数学 → 离散数学；计算数学 → 求解器；计算数学 → 枚举；硬件 → 定理证明与 SAT 求解；计算理论 → 自动推理；计算理论 →计算几何

关键词与短语 伪直线排列、可扩展性、Levi 延拓引理、伪超平面排列、符号拓扑、定向拟阵、偏序、布尔可满足性（SAT）

补充材料 补充数据和源代码可在此处获取 [4]。

资助 *Helena Bergold*：DFG研究生培训组“复杂性的方面”（DFG-GRK 2434）*Stefan Felsner*：DFG 资助 FE 340/13-1*Manfred Scheucher*：DFG资助 SCHE 2214/1-1

致谢 感谢匿名审稿人提出宝贵意见。

1 引言

给定实数集 $\mathbb{R}^d$中的一个超平面族$\mathcal{H}$ ，以及 $\mathbb{R}^d$中任意 d 个点，若这些点并非全都位于$\mathcal{H}$的某个公共超平面上，则它们确定一个与$\mathcal{H}$中的超平面不同的超平面。对于维数 $d = 2$, Levi [14] 在其关于伪直线排列的开创性论文中证明，直线排列的基本可扩展性同样适用于更一般的伪直线排列情形。伪直线是欧几里得平面中的一条若尔当曲线，将其从平面中移除后，平面分为两个无界连通分支；而伪直线排列是一个伪直线族，其中每对伪直线恰好交于一点，且两条曲线在该点处正常相交。

▶ **定理 1.1**（Levi 伪直线排列延拓引理 [14]）。 给定一个伪直线排列 A，以及 $\mathbb{R}^2$ 中两个不在 A 的同一条伪直线上的点，则可以通过添加一条经过这两个指定点的伪直线来扩张 A。

目前已有 Levi 延拓引理的若干种证明（除 [14], 另见 [1, 9, 19] 外），并且人们已在定向拟阵的背景下研究了向高维的推广。根据 Folkman和Lawrence表示定理 [10]，定向拟阵具有射影伪超平面排列表示。有关定向拟阵的更多信息，见 [7]。

Goodman 和 Pollack [12] 展示了一个由 8 个伪平面构成的排列，它们位于 $\mathbb{R}^3$ 中；他们还选取了三个点，使得无法扩张该排列并加入一个包含这三个点的伪平面。随后，Richter-Gebert [18] 研究了一个较弱的版本：在三维中只指定两个点，并要求扩张后的伪超平面包含这两个点。他找到了一个含有 8 个元素的秩4有向拟阵的例子，其中不存在包含这两个指定余回路的单元素扩张。根据表示定理，这意味着即使是指定两个点的较弱可扩展性也不成立。在高维或高秩情形下，扩展定理是否存在，或是否有反例，仍未解决。

我们在纯组合框架下证明了 Levi 延拓引理，并说明该证明可以调整后应用于高维情形。我们用r-符号拓扑表示几何，并证明偶数维中的可扩展性 d，也就是说，秩 $r = d + 1$为奇数；参见定理 1.2。令人惊讶的是，在秩 4、6、8、10 和 12 中都存在不可扩张的例子。我们猜想，对于任意偶秩 $r \geq 4$，都不存在扩展定理；参见猜想1.4。

符号拓扑与高阶Bruhat序密切相关，后者由 Manin 和 Schechtman [15]引入，并在 [21]中得到进一步研究。在秩 3 时，符号拓扑对应于平面中的伪直线排列 [9]。在更高秩时，它们是伪超平面排列的一个子类。

在阐述针对 r-符号拓扑的扩展定理之前，我们先介绍一些记号，并讨论伪直线排列与 3-符号拓扑之间的关系（见第 1.1 节）。由此可将 Levi 延拓引理重新表述，并将在第 1.2 节的奇秩符号拓扑背景下加以研究。

1.1 符号拓扑

符号拓扑是一种组合结构，可推广排列和简单 伪直线排列（即不存在三条伪直线交于同一点）。对于 $r \geq 1$，一个定义在 n 个元素上的秩 r （简称： r- 符号拓扑）符号拓扑 是一个映射 σ，其定义域为 r元子集（r-子集） $[n]$，值域为 $+$或 $-$，即 $\sigma : \binom{[n]}{r} \to \{+, -\}$，并满足：对于 $[n]$ 的每个 $(r+1)$ 元子集 $X = \{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$（$r$-数据包），若 $x_1 < x_2 < \ldots < x_{r+1}$，则相应序列中至多发生一次符号变化

$$\sigma(X \backslash \{x_1\}), \sigma(X \backslash \{x_2\}), \ldots, \sigma(X \backslash \{x_{r+1}\}).$$

注意，该序列按逆字典序列出了 X 中所有诱导的 r-子集的符号。对于 3-符号拓扑，以下 8 种 4-子集上的符号模式是允许的：

$$++++,\ +++-,\ ++--,\ +---,\ ----,\ ---+,\ --++,\ -+++.$$

为便于阅读，我们用 $X = (x_1, \ldots, x_t)$ 表示 $[n]$ 的一个 t-子集，其排序元素为 $x_1 < x_2 < \ldots < x_t$。对于这样的 X，我们用 $X_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_t)$ 表示去掉 x_j 后的集合。按照约定 $- < +$，r-符号拓扑中的符号变化条件可以写成关于 r-数据包 $X = (x_1, \ldots, x_{r+1})$ 的单调性条件：

$$\sigma(X_1) \leq \sigma(X_2) \leq \ldots \leq \sigma(X_{r+1}) \quad \text{or} \quad \sigma(X_1) \geq \sigma(X_2) \geq \ldots \geq \sigma(X_{r+1}).$$

众所周知，每个伪直线排列都同构于一个由 x-单调伪直线组成的排列 [11]。在这种表示中，我们从左侧自上而下将伪直线标记为 $1, \ldots, n$。由于两条伪直线恰好相交一次，它们在右侧的顺序正好相反。现在，相应的 3-符号拓扑 σ 按如下方式得到：对于 $a < b < c$， $\sigma(a, b, c)$ 的符号表示由伪直线 a, b, c 形成的三角形的定向（见图 1）。如果 a 与 c 的交点位于 b 下方，则 $\sigma(a, b, c) = +$；如果 a 与 c 的交点位于 b 上方，则 $\sigma(a, b, c) = -$。下文中，我们将交点与相交的元素等同起来，也就是说，对于 3-符号拓扑，交点是大小为 2 的子集。3-符号拓扑 σ 给出了交点从左到右的偏序信息。如果 $\sigma(a, b, c) = +$，则有 $ab \prec ac \prec bc$；如果 $\sigma(a, b, c) = -$，则为 $bc \prec ac \prec ab$。



图 1 伪直线排列与 3-符号拓扑之间的联系。

Felsner 和 Weil [9]证明了，秩 3 符号拓扑与 $\mathbb{R}^2$ 中具有固定顶胞腔的简单伪直线排列之间存在双射。对于 $r \geq 4$， r-符号拓扑对应于 $\mathbb{R}^{r-1}$中的特殊伪超平面排列，即它们是秩为 r的定向拟阵的一个子类。 r-符号拓扑在平面中的几何表示见 [16] （秩 3 的情形另见 [3] ）。

1.2 符号拓扑的扩张定理

在针对伪直线排列的 Levi 延拓引理中，两个指定点中的每一个都可以位于排列的某个胞腔内、位于一条伪直线上，或是两条伪直线的交叉点。为了用 3-符号拓扑来表述延拓引理，我们将讨论限制在简单伪直线排列以及作为指定点的交叉点上。由于延拓伪直线经过两个指定交叉点，延拓会产生一个非简单排列。然而，通过在非简单交叉点处对延拓伪直线进行扰动，我们可以得到一个简单排列，见图 2。

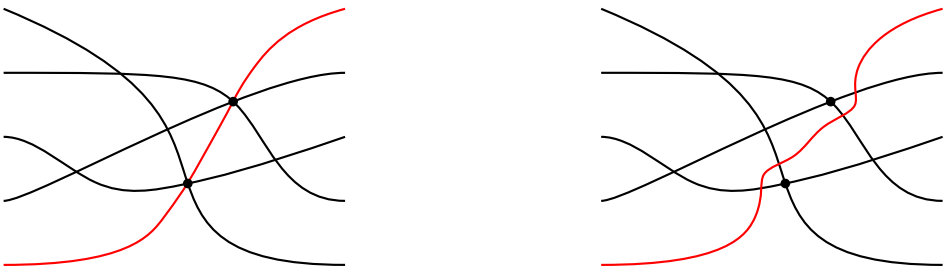


图 2 在两个非简单交叉点处扰动一条延拓伪直线。

在预先指定的交叉处进行扰动，并插入新的伪直线，会形成一个与该交叉处相邻的三角形胞腔。该胞腔由构成交叉的两条伪直线和延拓伪直线围成。三角形胞腔在伪直线排列研究中发挥着重要作用，因为可以通过将其中一条伪直线移过另外两条伪直线的交叉处，改变一个三角形的定向。这种局部扰动称为三角形翻转，它不会改变其他任何三角形的定向

排列中的三角形胞腔。由 3-符号拓扑 σ表示的排列的三角形单元，与满足以下条件的 3-子集一一对应：如果在 σ 中改变该 3-子集的符号，就会得到一个新的符号拓扑 σ'。我们将这样的 3-子集称为翻转集。翻转组的概念可以推广到更高秩。在 r-符号拓扑 σ 上，对于 $[n]$中的一个 r-子集 $X \subseteq [n]$，如果将赋值 $+$ 和 $-$ 赋予 $\sigma(X)$后得到的结果都是符号拓扑，则称该子集为翻转集。值得注意的是，符号拓扑中的翻转组对应于定向拟阵中的突变。尽管每个符号拓扑至少包含两个翻转组 [9],，但在组合几何中，判断每个均匀定向拟阵是否包含一个突变 [7,仍是一个核心未解决问题。第 7 章。3]

设$\mathcal{A}$是一个伪直线排列，这些伪直线在左侧从上到下标记为 $1, \ldots, n$。应用 Levi 延拓引理扩张$\mathcal{A}$ 时，扩张直线 ℓ 的左端点将位于$\mathcal{A}$的两个相邻伪直线端点之间。为了重新确立标号的性质，我们必须相应地设置 ℓ 的标号，并将所有从 ℓ下方开始的伪直线的标号加一。为了用符号拓扑的术语处理这一重新标号问题，我们引入以下概念。对于 $k \in [n]$ 和 $[n]$的一个子集 X，我们定义

$$X{\downarrow_k} = \{x \mid x \in X, x < k\} \cup \{x-1 \mid x \in X, x > k\}.$$

注意，当且仅当 $k \notin X$时， X 和 $X{\downarrow_k}$ 的基数相同。对于 $[n]$上的一个 r-符号拓扑σ，我们将元素 $k \in [n]$ 的删除 定义为 $\sigma{\downarrow_k}$，其定义如下

$$\sigma{\downarrow_k}(X{\downarrow_k}) := \sigma(X)$$

对于所有满足 $k \notin X$的 r-集 $X \subseteq [n]$。这是 $[n-1]$ 上的一个 r-符号拓扑，因为每个 r-数据包对于 σ而言都是一个 r-数据包。

▶ **定义。** $[n]$ 上的 r-符号拓扑 σ 若满足以下条件，则称为 t-可扩张的：对于所有两两不相交的$(r-1)$-子集 $I_1, \ldots, I_t \in \binom{[n]}{r-1}$，存在 $k \in [n+1]$ 以及一个定义在 $[n+1]$ 上、翻转组为 $I_1^*, \ldots, I_t^*$ 的 r-符号拓扑 σ^*，使得 $\sigma^*{\downarrow_k} = \sigma$，且对于所有 $j = 1, \ldots, t$，均有 $I_j^*{\downarrow_k} = I_j$。因此，元素 k扩张 σ 为 σ^*。

注意，定义在 $n \geq$ 上、具有 $r-1$ 个元素的 r-符号拓扑 t 若是可扩张的，则显然是 $(t-1)$-可扩张的。虽然 1-可扩张性是一个简单的练习[1],，但第一个有趣的问题是 2-可扩张性，这也是本文探讨的内容。

▶ **定理 1.2**（奇秩符号拓扑的扩张定理）。 对于每个奇秩 $r \geq 3$，每个 r-符号拓扑都是 *2*-可扩张的。

令人惊讶的是，我们对定理 1.2 的证明（见第 3 节）可以推广到更一般的情形，即扩张中的翻转集（$r-1$）-子集 I 和 J 彼此相交。

▶ **推论 1.3。** 设 σ 是定义在 $[n]$上的一个 r-符号拓扑，I 和 J 是 $[n]$ 的两个（$r-1$）-子集，且 $|I \cap J| + r$ 为奇数。则 σ 可扩张为定义在 $[n+1]$ 上的 r-符号拓扑 σ^*，其翻转集为 I^*、J^*，并包含一个扩张的 元素 $k \in [n+1]$，使得 $\sigma^*{\downarrow_k} = \sigma$，且 $I^*{\downarrow_k} = I$，以及 $J^*{\downarrow_k} = J$。

尽管这里将范围限制在简单排列，并将交叉点作为指定点，但只需从定理 1.2 稍作延伸，便可完整推出 Levi 延拓引理（定理 1.1）。详情见第 5 节。

定理 1.2 的陈述仅适用于奇秩的符号拓扑。这并非只是我们的证明存在缺陷，因为偶秩符号拓扑的表现确实有所不同。对于秩

[1] 为求完整起见，我们给出推论 3.2 中 1-可扩张性的证明，该证明采用了更为成熟的技巧。

$r = 4$、6、8、10、12，我们发现了一些定义在 $n = 2r$ 个元素上的符号拓扑，它们并非 2-可扩张。验证这些例子正确性的示例和源代码作为补充数据提供 [4]；详情请参见第4节。基于这些例子，我们大胆猜想：

▶ **猜想1.4** (偶秩符号拓扑的无扩张定理)。 对于每个偶秩$r \geq 4$，都存在一个 r-符号拓扑，它不是2可扩张的。

1.3 符号拓扑：定向拟阵的一个丰富子类

众所周知，秩为 r 、具有 n 个元素的定向拟阵数量为 $2^{\Theta(n^{r-1})}$[7, 推论 7.4。3]。正如 Balko [2, 定理 3]所示， r-符号拓扑是秩为 r的定向拟阵的一个丰富子类；以下命题的较短证明见附录A。

▶ **命题 1.5** (Balko [2])。 对于 $r \geq 3$，定义在 $[n]$ 上的 r-符号拓扑数量为 $2^{\Theta(n^{r-1})}$。

在秩 1 和秩 2 的情况下，分别有 2^n 和 $n!$ 个定义在 $[n]$上的符号拓扑。秩 1 符号拓扑是从 $[n]$ 到$\{+, -\}$ 的映射，不具备任何附加性质，而 2-符号拓扑则是排列。对于秩 $r \geq 3$，定义在 $[n]$ 上的 r-符号拓扑的精确数量已针对 r 和 n的较小取值计算出来；参见在线整数数列百科中的 A6245（秩 3）以及 A60595 至 A60601（秩 4 至秩 10） [17]。

2 预备知识

现在我们为定理 1.2 的证明做准备。正如第 1.1 节所述，秩 3 的符号拓扑可以用具有 x-单调伪直线的排列来表示。交点从左到右的顺序给出了 2-子集上的一个偏序。一般而言， r-符号拓扑可以用 $\mathbb{R}^{r-1}$中的可扫掠伪超平面排列来表示，这类似地允许我们定义一个偏序，该偏序定义在与 $r-1$个元素的交点相对应的$(r-1)$-子集上。这个偏序的组合定义如下。对于一个 r-符号拓扑 σ 以及每个 r-子集 $X = (x_1, \ldots, x_r)$，定义：

$$X_1 \succ X_2 \succ \cdots \succ X_r \quad \text{if} \quad \sigma(x_1, \ldots, x_r) = +, \qquad \text{and}$$
$$X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_r \quad \text{if} \quad \sigma(x_1, \ldots, x_r) = -.$$

回顾一下，我们采用约定 $x_1 \leq \ldots \leq x_r$ 且 $X_i = X \backslash \{x_i\}$。通过对从 r-子集得到的所有关系取传递闭包，我们得到一个偏序，它定义在与 σ [9,引理 10]相对应的$(r-1)$-子集上。

如果我们旋转一个伪直线排列，也就是说，选择另一个无界胞腔作为顶胞腔，就会得到一个胞腔结构相同的伪直线排列。然而，符号拓扑并不会保持不变。如果只旋转一条伪直线，那么当且仅当这条旋转的伪直线不参与其中时，由3条伪直线围成的三角形的定向才保持不变（例如，图3左侧排列中由$\{2,3,4\}$ 围成的三角形，以及右侧排列中由$\{1,2,3\}$ 围成的三角形）。顺时针旋转时， σ 中的第一个元素会变成旋转后符号拓扑 σ_{rot}中的最后一个元素。就3-符号拓扑 σ而言，旋转后符号拓扑 σ_{rot} 的符号为： $\sigma_{\text{rot}}(a,b,c) = \sigma(a+1, b+1, c+1)$，若 $c \neq n$；且 $\sigma_{\text{rot}}(a,b,n) = -\sigma(1, a+1, b+1)$。

一般而言，我们将给定的 r-符号拓扑 σ 的顺时针旋转 符号拓扑 σ_{rot} 定义为：

$$\sigma_{\text{rot}}(x_1, \ldots, x_r) = \begin{cases} -\sigma(1, x_1+1, \ldots, x_{r-1}+1) & \text{if } x_1 < x_2 < \cdots < x_r = n, \\ \sigma(x_1+1, \ldots, x_r+1) & \text{if } x_1 < x_2 < \cdots < x_r < n. \end{cases}$$

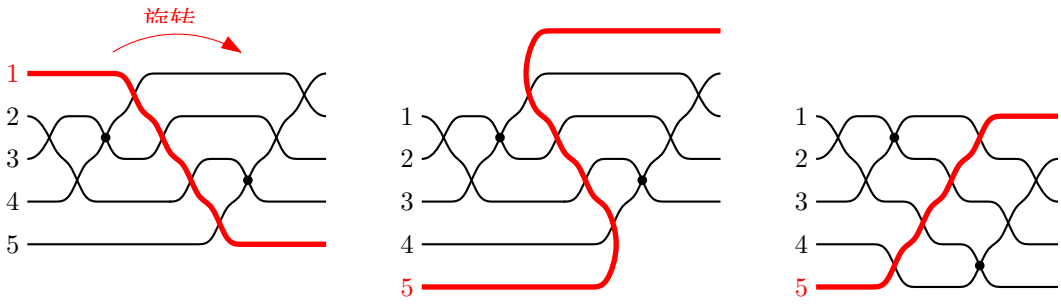


图3 伪直线顺时针旋转的示意图。旋转后的伪直线以红色突出显示。

这里我们采用通常的约定 $-\cdot+=-$ 和 $-\cdot-=+$。为追踪顺时针旋转引起的指标移位，我们定义：若 $x\neq 1$ 且 $1_{\mathrm{rot}}=n$，则 $x_{\mathrm{rot}}=x-1$，并且

$$X_{\mathrm{rot}}=\{x_{\mathrm{rot}}:x\in X\}=\begin{cases}(x_1-1,x_2-1,\ldots,x_k-1) & \text{if } x_1>1;\\ (x_2-1,\ldots,x_k-1,n) & \text{if } x_1=1\end{cases}$$

对于 $[n]$ 的任意子集 $X=(x_1,\ldots,x_k)$，其中 $x_1<\ldots<x_k$。注意，这使我们可以写作 $\sigma_{\mathrm{rot}}(X_{\mathrm{rot}})=\sigma(X)$，如果 $1\notin X$；以及 $\sigma_{\mathrm{rot}}(X_{\mathrm{rot}})=-\sigma(X)$，如果 $1\in X$。

如下列引理所示，这确实是一个 r-符号拓扑，而且其翻转组实质上相同。证明及进一步性质推迟至附录 B。

▶**引理 2.1.** 设 σ 是定义在 $[n]$ 上的 r-符号拓扑。那么 σ_{rot} 是定义在 $[n]$ 上的 r-符号拓扑。

▶**引理 2.2**。设 σ 是一个 r符号拓扑，且 F 是 σ的翻转集。那么，在顺时针旋转的符号拓扑 σ_{rot}中，F_{rot} 是一个翻转集。

3 符号拓扑的扩展定理

在本节中，我们将证明奇秩符号拓扑的扩张定理。证明的核心要点如下：如果 σ 是定义在 $[n]$ 上的 r符号拓扑，并且给定的两个（$r-1$）集 I 和 J 在与 σ 相关的偏序中不可比较（见第 2 节），那么可以通过一个“最后”元素 $n+1$ 扩张 σ，使得 $I\cup\{n+1\}$ 和 $J\cup\{n+1\}$ 在该扩张中是翻转组。图 2 展示了秩 3 情形的示意图。更抽象地说，当（$r-1$）集上的偏序中存在一个下集，其极大元为 I 和 J 时，我们可以扩张该符号拓扑。偏序（P $\prec$）的下集是指满足以下条件的子集 D $\subseteq$ P：对于所有满足 $p\preceq d$ 的 $p\in$P 和 $d\in$D，都有 $p\in$ D。类似地，上集是指满足以下条件的子集 U $\subseteq$ P：对于所有满足 $p\succeq u$ 的 $p\in$ P 和 $u\in$ U，都有 $p\in$ U。

▶ **命题 3.1** (不可比较元素的扩张)。设$(P\ \prec)$ 是与 r-符号拓扑 σ 在 $[n]$上的 $r-1$)集相对应的偏序。对于 $P\subseteq$ 的每个下集 D，都存在一个 r-符号拓扑 σ^* 在 $[n+1]$ 上，使得所有形如 $M\cup\{n+1\}$ 的 r-子集（其中 M 是 D 的极大元）都是 σ^*和 $\sigma^*{\downarrow}_{n+1}=\sigma$的翻转组。

证明。定义扩展后的 r-符号拓扑 σ^*在 $[n+1]$ 如下：

$$\sigma^*(x_1\ldots,x_r)=\begin{cases}\sigma(x_1,\ldots,x_r) & \text{if } x_1,\ldots,x_r\in[n];\\ + & \text{if } x_r=n+1 \text{ and } \{x_1,\ldots,x_{r-1}\}\in\mathcal{D};\\ - & \text{if } x_r=n+1 \text{ and } \{x_1,\ldots,x_{r-1}\}\notin\mathcal{D}.\end{cases}$$

首先，我们证明 σ^* 是 r 上的一个 $[n+1]$ 符号拓扑。考虑一个 r 数据包 $X=(x_1, \dots x_{r+1})$。我们需要证明该序列

$$\sigma^*(X_1), \sigma^*(X_2), \dots, \sigma^*(X_{r+1})$$

至多有一次符号变化。

若 $x_{r+1} \le n$，则所考虑的 r-子集上的所有符号都与 σ 相同。由于 σ 是一个 r-符号拓扑，因此该序列中至多有一次符号变化。

另一种情况下，我们有 $x_{r+1} = n+1$。对于所有 $j \le r$，都有 $n+1 \in X_j$。此外，由于 $n+1 \notin X_{r+1}$，$\sigma^*(X_{r+1}) = \sigma(X_{r+1})$。我们分两种情况讨论。首先，若 $\sigma(X_{r+1}) = +$，根据偏序的定义，

$$X\backslash\{x_{r+1}, x_i\} \succ X\backslash\{x_{r+1}, x_j\} \qquad \text{for } i<j.$$

根据下集的性质，这意味着：只要 $X\backslash\{x_{r+1}, x_i\} \in \mathcal{D}$，就有$X\backslash\{x_{r+1}, x_j\} \in \mathcal{D}$对 $i<j$ 成立。令 i^* 为满足 $X\backslash\{x_{r+1}, x_{i^*}\} \in \mathcal{D}$ 的最小整数。于是根据 σ^* 的定义，对于所有 $j<i^*$，都有 $\sigma^*(X_j) = -$；并且对于所有 $j \ge i^*$，都有 $\sigma^*(X_j) = +$。

若 $\sigma(X_{r+1}) = -$，类似的论证同样适用。于是我们有

$$X\backslash\{x_{r+1}, x_i\} \prec X\backslash\{x_{r+1}, x_j\} \qquad \text{for } i<j.$$

这次令 i^* 为满足 $X\backslash\{x_{r+1}, x_{i^*}\} \notin \mathcal{D}$ 的最小整数。根据 σ^* 的定义，对于所有 $j \le i^*$，我们有 $\sigma^*(X_j) = +$；对于所有 $j > i^*$，我们有 $\sigma^*(X_j) = -$。

令 M 为下集$\mathcal{D}$ 的一个极大元。由上述分析可知，$M \cup \{n+1\}$ 在其所属的每个数据包中都与一次符号变化相邻。因此它是一个翻转集。◀

由此命题可知，对于所有 $r \ge 2$，所有 r-符号拓扑都是 1-可扩展的。此外，1-扩张将扩展元素置于最后一个位置。

▶ **推论 3.2** (1-可扩张性)。对于 $r \ge 2$，令 σ 为定义在 $[n]$ 上的一个 r-符号拓扑，且 I 为一个 $(r-1)$-子集。则存在一个扩展 r-符号拓扑 σ^*，定义在 $[n+1]$ 个元素上，使得 $I \cup \{n+1\}$ 是一个翻转集，且 $\sigma^*{\downarrow_{n+1}} = \sigma$。

下面两个命题表明，对于奇秩，我们总能找到相应符号拓扑的一种旋转，使得两个给定的 $(r-1)$-子集不可比较。然后，我们可以利用命题 3.1 来定义一个扩张。

▶ **命题 3.3.** 设 σ 是定义在 $[n]$上的一个 r-符号拓扑。对于两个$(r-1)$-子集 I, J，若满足 $I \prec J$和 $1 \notin I \cap J$，则 I_{rot} 和 J_{rot} 在 $\prec_{\text{rot}}$ 或 $I_{\text{rot}} \prec_{\text{rot}} J_{\text{rot}}$中不可比较。

命题 3.3 的证明需要偏序的一些额外结构性质，以及偏序与旋转之间相互作用的性质。详情见附录 B。

▶ **命题 3.4.** 设 $r \ge 3$ 为奇整数，σ 是定义在 $[n]$ 上的一个 r-符号拓扑，且 I, J是两个不相交的$(r-1)$-子集。经过至多 $n-1$ 次顺时针旋转后，σ, I和 J 分别变为 σ', I'和 J'，使得 I' 和 J' 在与 σ'对应的偏序 $\prec'$ 中不可比较。

证明。假设 I 和 J 在与以下对象相对应的偏序中可比较：$\prec$ r-符号拓扑 σ 其中 $I \prec J$，否则结论已成立。我们证明，经过 n 次顺时针旋转后，σ 的所有符号都反转。因此，与旋转后的（可能经过多次旋转的）符号拓扑 $\prec'$ 相对应的偏序 σ' 是 $\prec$的逆关系。

当旋转后的元素包含在（z_1，……，z_r）中时，也就是旋转 z_1时，r 子集（z_1，……，z_r）的符号会从 $+$ 变为 $-$，或反之。因此，总共旋转 n 次后，每个 z_i 都旋转过了，于是一个 r子集的符号恰好改变 r 次。由于r 是奇数，旋转 n 次后的符号与原符号相反。所得符号拓扑 σ' 是原符号拓扑 σ 的逆，其对应偏序也随之反转。

此外，如命题 3.3 所示，我们无法在一次旋转中颠倒两个不相交的 $(r-1)$-集合的顺序。因此，必然存在某个时刻，这两个不相交的集合是不可比较的。◀

尽管在伪直线排列的情形下，下面的引理是显然的，但在一般的 r-符号拓扑背景下，我们仍需对其进行证明。我们证明，将旋转符号拓扑的扩张旋转回去后，确实包含原符号拓扑。为此，我们需要研究旋转与元素删除之间的相互作用。

▶ **引理 3.5**。设 σ 是定义在 $[n]$ 和 $x \in [n]$上的一个 r-符号拓扑。那么，对于 $x \neq 1$，它是 $\sigma_{\mathrm{rot}}\downarrow_n = \sigma\downarrow_1$ 且$\sigma_{\mathrm{rot}}\downarrow_{x_{\mathrm{rot}}} = (\sigma\downarrow_x)_{\mathrm{rot}}$。

证明。由于指标移位，删除第一个元素，或者进行旋转 σ 使第一个元素变为最后一个元素，再在这个旋转后的符号拓扑中删除最后一个元素，二者并无区别。因此，第一部分 $\sigma_{\mathrm{rot}}\downarrow_n = \sigma\downarrow_1$ 成立。

现在假设 $x \neq 1$，由此可推出 $x_{\mathrm{rot}} \neq n$。这两个映射都是 $[n-1]$ 上的 r-符号拓扑。我们需要检查它们是否映射到相同的符号。设 X 是 $[n-1]$ 的一个 r-子集，并设 X^* 是 $[n]$ 的一个 r-子集，其中 $x_{\mathrm{rot}} \notin X^*$ 且 $X^*\downarrow_{x_{\mathrm{rot}}} = X$。我们得到

$$\sigma_{\mathrm{rot}}\downarrow_{x_{\mathrm{rot}}}(X) = \sigma_{\mathrm{rot}}\downarrow_{x_{\mathrm{rot}}}(X^*\downarrow_{x_{\mathrm{rot}}}) = \sigma_{\mathrm{rot}}(X^*).$$

现在我们将重写该项以得到所需结论。回想一下，对一个定义在 n 个元素上的 r-符号拓扑旋转恰好 $2n$ 次，会得到原来的符号拓扑。因此，旋转 $2n-1$ 次相当于逆时针旋转，也就是顺时针旋转的逆操作。我们将这种逆时针旋转记为 rot(−1)。由于 $x_{\mathrm{rot}} \notin X^*$，我们有$x \notin (X^*)^{\mathrm{rot}(-1)}$。根据定义，它是

$$\sigma_{\mathrm{rot}}(X^*) = \varepsilon \cdot \sigma((X^*)_{\mathrm{rot}(-1)}) = \varepsilon \cdot \sigma\downarrow_x(((X^*)_{\mathrm{rot}(-1)})\downarrow_x) = \varepsilon \cdot \sigma\downarrow_x(X_{\mathrm{rot}(-1)}) = (\sigma\downarrow_x)_{\mathrm{rot}}(X),$$

其中，当 $n \notin X^*$（分别为 $n \in X^*$）时，符号为 $\varepsilon = +$（分别为 $\varepsilon = -$）。注意，对于 $x \neq 1$，$n \in X^*$ 等价于 $1 \in X_{\mathrm{rot}(-1)}$。引理得证。◀

有了命题 3.1、命题 3.4 和引理 3.5，我们现在可以证明定理 1.2。

3.1 定理 1.2 的证明

设 σ 是 $[n]$ 上的一个 r-符号拓扑，并设 I，J 是一对不相交的（$r-1$）-子集。根据命题 3.4，存在 $k \in \{0, \ldots, n-1\}$，使得 k 重旋转后的（$r-1$）-子集 $I_{\mathrm{rot}(k)}$、$J_{\mathrm{rot}(k)}$ 在 k 重旋转后的符号拓扑 $\sigma_{\mathrm{rot}(k)}$ 中不可比较。

为了扩展符号拓扑 $\sigma_{\mathrm{rot}(k)}$，我们使用下集 $\mathcal{D}$，它由 $I_{\mathrm{rot}(k)}$、$J_{\mathrm{rot}(k)}$ 以及其下方的所有（$r-1$）-子集组成。在这个下集中，$I_{\mathrm{rot}(k)}$ 和 $J_{\mathrm{rot}(k)}$ 是极大元，因为它们不可比较。因此，我们可以应用命题 3.1，在旋转后的符号拓扑 $\sigma_{\mathrm{rot}(k)}$ 中的位置 $n+1$ 添加一个新元素，使得 $I_{\mathrm{rot}(k)} \cup \{n+1\}$ 和 $J_{\mathrm{rot}(k)} \cup \{n+1\}$ 成为翻转组。扩展后的符号拓扑记为 $\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)}$，并满足 $\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)}\downarrow_{n+1} = \sigma_{\mathrm{rot}(k)}$。

最后，我们需要找到 $\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)}$ 的一种旋转，使其包含原始符号拓扑 σ。为此，我们进行 $k+1$ 次逆时针旋转（或等价地，进行 $2n+1-k$ 次顺时针旋转）

并将如此获得的符号拓扑记为 σ^*。注意，我们进行 $k+1$ 次逆时针旋转，是因为需要旋转新添加的元素，并且需要撤销 k 次顺时针旋转。经过 $k+1$ 次逆时针旋转后，添加的元素 $n+1$ 在 $\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)}$ 中变为元素 $k+1$ 在 σ^* 中。还需证明 $\sigma^*{\downarrow_{k+1}} = \sigma$。

第一次逆时针旋转后，添加的元素 $n+1$ 在 $\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)}$ 中变为 $(\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)})^{\mathrm{rot}(-1)}$中的第一个元素 1。根据引理 3.5，有 $((\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)})^{\mathrm{rot}(-1)}){\downarrow_1} = (\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)}){\downarrow_{n+1}} = \sigma_{\mathrm{rot}(k)}$。再进行 k 次逆时针旋转后，添加的元素 $n+1$ 在 $\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)}$中变为 σ^*中的元素 $k+1$。此外，$I \cup \{k+1\}$ 和 $J \cup \{k+1\}$ 根据引理 2.2 是σ^* 的翻转组。由于我们不旋转扩展元素，多次应用引理 3.5 的第二部分可得 $((\sigma^*_{\mathrm{rot}(k)})^{\mathrm{rot}(-1)}){\downarrow_1} = (\sigma^*{\downarrow_{k+1}})^{\mathrm{rot}(k)}$。结合前一个等式可得 $\sigma_{\mathrm{rot}(k)} = (\sigma^*{\downarrow_{k+1}})^{\mathrm{rot}(k)}$，进而推出 $\sigma = \sigma^*{\downarrow_{k+1}}$。因此，从 σ^*中删除 $k+1$ 后，我们得到符号拓扑 σ。定理 1.2 的证明至此完成。

3.2 推论 1.3 的证明

为了证明推论 1.3，我们采用与定理 1.2 证明中类似的方法。由命题 3.1 可知，只需证明经过若干次旋转后，与 I 和 J 对应的 $(r-1)$-子集不可比较。

设 $s = |I \cap J|$。由于定理 1.2 已涵盖 $s = 0$ 的情形，我们可以假设 $s \geq 1$。下面分两种情况讨论。

首先，假设 r 为奇数且 s 为偶数。对于奇秩 r，我们已经看到，经过 n 次旋转后，符号拓扑会反转，因此相应偏序也会反转。对于偶数 s，I 与 J 之间的关系会反转 s 次（每当我们旋转一个元素 $x \in I \cap J$ 时）。这些是我们在单次旋转中反转顺序的仅有的 s 次。由于 s 为偶数且顺序在 n 次旋转后反转，相应的 $(r-1)$-子集在此期间必定不可比较。

其次，假设 r 为偶数且 s 为奇数。对于偶秩 r，n重旋转保持符号拓扑不变，因此偏序也相同。由于 s 为奇数，我们在一次旋转步骤中恰好将 I 和 J 的定向反转 s 次。因此，它们在此期间必定不可比较。

该结论现在可由命题 3.1 和引理 3.5 得出，证明过程与定理 3.1 的证明类似。由此完成推论 1.3 的证明。

4 偶秩中的示例：SAT 攻击与性质

由于扩展定理（定理 1.2）的证明仅适用于奇秩，我们必须以不同方式研究偶秩。对于秩 4，我们借助计算机辅助枚举所有符号拓扑，并对每个符号拓扑测试其 2-可扩张性。对于 6 个和 7 个元素，所有 4-符号拓扑都是 2-可扩张的。对于 8 个元素，我们发现了不可 2-可扩张的 4-符号拓扑。对于枚举和 2-可扩张性测试，我们都建立了 SAT 实例，并使用 Python 接口 `pycosat` [20] 和 `pysat` [13] 运行 SAT 求解器 `picosat`（版本 965, [5] ）和 `cadical`（版本 1.0.3 [6], ）。

通过这种双层 SAT 方法，我们成功找到了首批不可 2-可扩张的 4-符号拓扑示例。为了保留我们秩 4 示例的良好结构及其对称性和相似性，我们将搜索空间限制为秩 r 上具有$2r$ 个元素的示例。对于秩 4，所有定义在 8 个元素上的符号拓扑都可以在几秒钟内完成枚举；然而，在更高秩中进行完整枚举并不实际，因为定义在 $2r$ 个元素上的r-符号拓扑数量以快于双指数的速度增长（参见命题 1.5）。

因此，为了能够处理更高秩的问题，我们进一步分析了不可 2-可扩张的秩 4 示例的结构，并对已经找到的秩 6 示例进行了分析。这使得我们能够找到一种递归构造。更多细节请参见第 4.3 节。

将观察到的性质作为附加约束后，我们进一步缩小了搜索空间，使枚举出的候选项都只有“合理”的那些。在这些限制条件下，我们成功找到了秩 6、8、10 和 12 的例子，它们都不是 2-可扩张的。

4.1 用于枚举的 SAT 模型

为了对 n 个元素上的 r-符号拓扑进行编码，我们按如下方式操作。对于每个 $X \in \binom{[n]}{r}$，我们使用布尔变量 S_X 来表示 $\sigma(X)$ 是否 $= +$。为了确保这些变量构成有效的符号拓扑，我们添加约束，确保对于每个 r-数据包 $Y = \{y_1, \dots, y_{r+1}\}$ {v18>，序列中的符号变化至多为一次

$$\sigma(Y_1), \dots, \sigma(Y_{r+1}).$$

更具体地说，由于该序列恰好有 $2r+2$ 种可能的赋值，我们引入辅助变量 $T_{Y,t}$，其中 $t \in \{1, \dots, 2r+2\}$ 用于指示适用的是哪种赋值。[2]

接下来，我们为每个 r数据包 $Y \in \binom{[n]}{r+1}$ 和每个 r元组$X \in \binom{Y}{r}$ 引入辅助变量$F_{X,\,Y}$，用于指示将 σ 限制到 Y时， X 是否为翻转集。其做法与 S_X 变量类似。利用$F_{X,\,Y}$变量，我们可以断言变量$F_X = \bigvee_{Y \in \binom{[n]}{r+1},\; X \subset Y} F_{X,\,Y}$对每个 $X \in \binom{[n]}{r}$ 指示 X是否构成一个翻转集。最后，我们引入变量$L_{X,\,k}$，用于指示 X 是否为第 k个翻转集。这样，我们便可以只枚举翻转组数量已指定的构型。

4.2 用于测试 2-可扩张性的 SAT 模型

现在，我们可以构造一个 SAT 实例，以判断给定的、定义在$[n]$ 上的符号拓扑 σ 以及给定的互不相交的$(r-1)$元组 I， J，是否能够通过添加一个元素 $n+1$进行扩张，使得 $I \cup \{n+1\}$ 和 $J \cup \{n+1\}$ 是扩张 σ^*中的翻转集。通过这种方式足以测试可扩展性，因为只要存在扩张，就存在一种旋转，使得该符号拓扑可以在最后一个位置添加元素而得到扩张。与第 4.1 节一样，我们创建一个 SAT 实例来寻找一个含$(n+1)$个元素的符号拓扑，但加入约束以固定 σ，并断言 $I \cup \{n+1\}$ 和 $J \cup \{n+1\}$ 是 σ^*中的翻转集。

对于给定的定义在元素 $[n]$ 上的符号拓扑 σ，现在我们可以遍历所有互不相交的 $(r-1)$-元组I，J并检验是否存在 σ和 I， J的某种旋转，使得在通过元素 $n+1$ 对 σ^* 进行的扩张中， r-元组 $I \cup \{n+1\}$ 和 $J \cup \{n+1\}$ 是翻转组。如果对于某个 I， J不存在这样的旋转，我们就已证明 σ 不是 2-可扩张的。

4.3 支持猜想1.4的例子的结构

为了在秩 4 中找到支持猜想1.4的首批示例，我们采用了第4.1节和第4.2节所述的两步 SAT 方法。为了研究更高秩中的情形，我们必须更好地理解在秩 4 中找到的示例。因此，我们筛选出其中具有规律性和对称性的示例，以便提出对所

[2] 或者，也可以断言，对于每个 Y和 $1 \le i < j < k \le r+1$，都有 $\neg S_{Y_i} \vee S_{Y_j} \vee \neg S_{Y_k}$和 $S_{Y_i} \vee \neg S_{Y_j} \vee S_{Y_k}$。尽管这种方法不需要用辅助变量来指示 $(r+1)$-元组的类型，但无论如何，之后我们仍然需要这些辅助变量来为翻转组中的变量赋值。

观察到的性质进行推广，并分析其结构。我们的目标是寻找不同秩中示例之间的关系，例如使用投影和删除论证。为此，我们研究了秩 4 示例的结构，并结合了一些此前已找到的秩 6 示例。

一个最早且关键的观察是，存在这样的符号拓扑：对于任意选取的偶数指标 $I \subset E_r$:={2，4，.....，$2r$} 以及任意选取的奇数指标$J \subset O_r$:={1，3，.....，$2r-1$}，都不存在这样的扩张。事实上，对于这类例子，只需检查 I ={2，4，.....，$2r-2$} 和 J ={1，3，.....，$2r-3$}，即可验证其不具备 2-扩张性。这一观察不仅使我们能够缩小搜索空间，还将扩张性测试的速度提高了 $\Theta(r^2)$ 倍，因为无需测试 $(r-1)$-元组 I，J的所有配对。

随着时间推移，我们陆续提出了更多观察结果。这里总结了我们希望秩为 r 、含有 $n = 2r$个元素的例子所具备的所有性质。下文中，我们用 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$表示一个 r元组，并采用记号$(-)^i = +$ 表示 i 为偶数的情形，$(-)^i = -$ 表示 i 为奇数的情形。

(a) $\sigma = \sigma_{\mathrm{rot}(4)}$，其中$\sigma_{\mathrm{rot}(4)}$ 由 σ经过四重旋转得到。(b) $\sigma(2, 4, \ldots, 2r) = -$ 以及 $\sigma(1, 3, \ldots, 2r-1) = +$。(c) 如果 X中只有一个偶数元素或只有一个奇数元素，那么符号 $\sigma(X)$仅取决于该元素在 X中的位置。更具体地说：如果 $e = x_i$ 是 X中唯一的偶数元素，那么 $\sigma(X) = (-)^i$. 如果 $o = x_i$ 是 X中唯一的奇数元素，那么 $\sigma(X) = (-)^{i+1}$.(d) 如果 x_1, ..., $x_i \in E_r$ 且 x_{i+1}, ..., $x_r \in O_r$，其中 $2 \le i \le r-2$，那么符号为$\sigma(X) = (-)^{i+1}$.(e) 设 x_1，.....，$x_i \in O_r$ 且 x_{i+1}，.....，$x_r \in E_r$，其中 $2 \le i < r-2$。如果 $x_r < 2r$，那么$\sigma(X) = -$. 如果对所有 $j = i+1$，.....，r，均有 $x_j = 2j$，那么 $\sigma(X) = +$.

此外，我们固定以下一组秩 4 的 8 个翻转组。

$$F_4 = \{(1,3,5,7),(2,4,6,8),(2,3,7,8),(1,3,4,8),\\ (1,2,4,7),(3,5,6,8),(4,5,7,8),(3,4,6,7)\}$$

结合四重对称性，只需提及其中一部分：

$$\widehat{F}_4 = \{(1,3,5,7),(2,4,6,8),(4,5,7,8),(3,4,6,7),(1,2,4,7)\}$$

在秩 4 的情形下，只有四个符号不能由上述性质确定：

$$(1,3,4,8), \qquad (4,5,7,8), \qquad (2,3,7,8), \qquad (3,4,6,7)$$

由四重对称性，指定 (1，3，4，8) 也就确定了 (4，5，7，8) 的符号，反之亦然。第三个和第四个元组之间也存在类似的关联。因此，恰好有 4 个秩 4 的符号拓扑满足上述性质。我们固定其中一个构型（选择哪一个并不重要），并在下文中将其称为 σ_4 。

为了在更高秩下寻找示例，我们使用以下性质。

（f）设 σ_{r-2} 是定义在 $2r-4$ 个元素上的秩为 $r-2$ 的一个例子。对于满足 $1, 3 \notin X$ 和 $2, 4 \in X$ 的 r 元组 $X \subseteq [2r]$，我们定义符号

$$\sigma_r(X) = \sigma_{r-2}(X{\downarrow_{1,2,3,4}}),$$

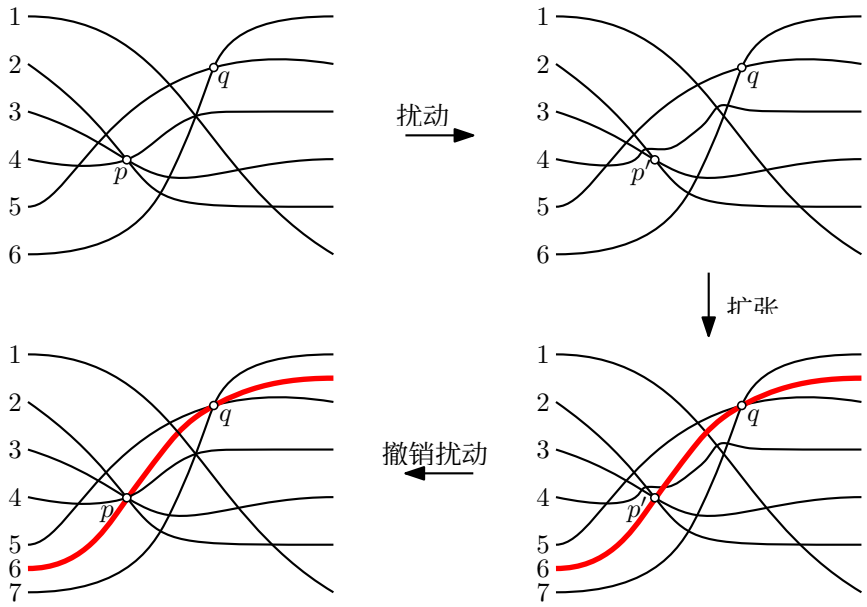


图 4 定理 1.2 如何推出 Levi 延拓引理（定理 1.1）的示意图。扰动左上方的排列时，多重交叉点 p（2、3 和 4 的交点）被拆分为三个简单交叉点，其中包括点 p'（2 和 3 的交点）。扩张后，我们再次将这三个交叉点合并为一个多重交叉点。

其中 $X{\downarrow_{1,2,3,4}} = (((X{\downarrow_4}){\downarrow_3}){\downarrow_2}){\downarrow_1}$ 表示 $[2r-4]$ 上的 $(r-2)$ 元组。注意，$X{\downarrow_{1,2,3,4}}$ 是从 X 中删除元素 2 和 4 后得到的，并且由于删除了不包含在 X 中的[3] 1 和 3，还需进行一次由 -2 引起的指标移位。

总之，如果我们从秩 4 的一个例子开始，递归地构造具有所需性质的更高秩例子，并进一步为秩 r 规定 $(r/2)^2+(r/2)+2$ 翻转组，最终发现，在秩 $r=6$、8、10、12 中，每个秩都只有一个例子。所有例子及用于验证其正确性的源代码均作为补充数据提供 [4]。

未来，我们希望基于上述性质找到一个证明不可 2-扩张性的方法，并构造一个无限族的例子。尽管我们推测存在一个无限族，但需要说明的是，我们在秩 4 和秩 6 中找到了不具备上述性质的例子，因此这些假设也可能过强。

5 定理 1.2 推出 Levi 的扩张引理（定理 1.1）

如第 1.2 节所述，只需证明对于简单伪直线排列，且指定点为交点时，Levi 延拓引理成立。给定一个非简单排列，我们可以对多重交叉点稍作扰动（如图 2 所示），从而得到一个简单排列。这样，多重交叉点就被单纯形胞腔取代。随后可以扩张这个简单排列，并将原排列中的每个多重交叉点对应的单纯形胞腔收缩为一点，从而重新得到这些交叉点。若某个指定点位于伪线段上或胞腔内部，我们可以通过相邻交点来扩张该

[3] 受定向拟阵的术语启发，这种操作或许可以称为收缩。

排列。通过扰动延拓伪直线，我们可以确保这条伪直线经过原先指定的点。

参考文献

1 Alan Arroyo、Dan McQuillan、R. Bruce Richter 和 Gelasio Salazar。Levi 引理、 K_n的伪线性绘图与空三角形。《图论杂志》，87(4):443–459，2018。doi:10.1002/jgt.22167。2 Martin Balko。Ramsey 数与单调着色。《组合理论杂志，A辑》，163:34–58，2019。doi:10.1016/j.jcta.2018.11.013。3 Martin Balko、Radoslav Fulek 和 Jan Kynčl。 K_n单调绘图的交叉数与组合刻画。《离散与计算几何》，53(1):107–143，2015。doi:10.1007/s00454-014-9644-z。4 Helena Bergold、Stefan Felsner 和 Manfred Scheucher。补充源代码与数据。https://page.math.tu-berlin.de/~scheuch/supplemental/signotopes/extend/sigext_suppl_socg.zip。5 Armin Biere。PicoSAT 要点。《可满足性、布尔建模与计算杂志》（JSAT），4:75–97，2008。URL： http://satassociation.org/jsat/index.php/jsat/article/view/45。6 Armin Biere。2019 年 SAT 竞赛中的 CaDiCaL。载于《2019 年 SAT 竞赛——求解器与基准描述》论文集，计算机科学系丛书 B-2019-1 卷，第 8–9 页。赫尔辛基大学，2019。URL: http://researchportal.helsinki.fi/en/publications/proceedings-of-sat-race-2019-solver-and-benchmark-descriptions。7 Anders Björner、Michel Las Vergnas、Bernd Sturmfels、Neil White 和 Günter M. Ziegler。《定向拟阵》，《数学及其应用百科全书》第 46 卷。剑桥大学出版社，第 2 版，1999。doi:10.1017/CBO9780511586507。8 Stefan Felsner 和 Pavel Valtr。伪直线排列的编码与计数。《离散与计算几何》，46(3)，2011。 doi:10.1007/s00454-011-9366-4。9 Stefan Felsner 和 Helmut Weil。扫描、排列与符号拓扑。《离散应用数学》，109(1):67–94，2001。doi:10.1016/S0166-218X(00)00232-8。10 Jon Folkman 和 Jim Lawrence。定向拟阵。《组合理论杂志，B辑》，25(2):199–236，1978。 doi:10.1016/0095-8956(78)90039-4。11 Jacob E. Goodman。Burr、Grünbaum 和 Sloane 猜想的证明。《离散数学》，32(1):27–35，1980。doi:10.1016/0012-365X(80)90096-5。12 Jacob E. Goodman 和 Richard Pollack。三个点不能确定一个（伪）平面。《组合理论杂志，A辑》，31(2):215–218，1981。doi:10.1016/0097-3165(81)90017-0。13 Alexey Ignatiev、Antonio Morgado 和 Joao Marques-Silva。PySAT：用于通过 SAT 预言机进行原型开发的 Python 工具包。载于 SAT，第 428–437 页，2018。 doi:10.1007/978-3-319-94144-8_26。14 Friedrich Levi。通过直线或伪直线划分射影平面。《萨克森莱比锡科学院会议报告，数学-物理类》，78:256–267，1926。15 Yuri I. Manin 和 Vadim V. Schechtman。超平面排列、高阶辫群与高阶Bruhat序。《纯数学高级研究》，第 289–308 页，1989。16 Hiroyuki Miyata。关于点与多项式曲线的组合性质。arXiv:1703.04963，2021。

17 OEIS基金会。在线整数序列百科全书。以电子形式发表于 http://oeis.org。18 Jürgen Richter-Gebert。具有少量突变的定向拟阵。载于 离散与计算几何，第 10 卷，第 251–269 页。施普林格，1993。 doi:10.1007/BF02573980。19 Marcus Schaefer。Levi 延拓引理的证明。arXiv:1910.05388，2019。20 Ilan Schnell 等。pycosat：PicoSAT（一个 SAT 求解器）的绑定。http://pypi.python.org/pypi/pycosat。21 Günter M. Ziegler。高阶Bruhat序与循环超平面排列。 *Topology*，32(2):259–279，1993。 doi:10.1016/0040-9383(93)90019-R。

A 符号拓扑的渐近数量

本节中，我们给出命题 1.5 的一个简短证明。

▶ **命题 1.5** (Balko [2])。对于 $r \geq 3$，$[n]$ 上的 r-符号拓扑数量为 $2^{\Theta(n^{r-1})}$。

A.1 上界的证明

对于上界，我们只需利用这样一个事实：n 个元素上的 r-符号拓扑是秩为 r 的定向拟阵，其数量的上界为 $2^{c(n^{r-1})}$ [7, 第 7 章.4]。不过，为了完整起见，我们给出归纳证明。

对于秩 3，存在一个常数 $c > 0$，使得对每个 n，在 n 个元素上至多有 $2^{cn^2(1+o(1))}$ 个符号拓扑。目前最好的界 $c = 0.657$ 由 [8] 给出。

对于秩 $r \geq 4$，我们采用归纳法。给定一个定义在 $[n]$ 上的 r-符号拓扑 σ，我们计算它的投影。对每个 $i \in [n]$，将 σ 投影到 i，得到一个定义在 $n-1$ 个元素上的 $(r-1)$-符号拓扑 $\sigma/_i$。形式上，对于满足 $i \in J$ 的每个 r-子集 J，$\sigma/_i$ 定义为 $\sigma/_i(J\downarrow_i) := \sigma(J)$。由于两个不同的 r-符号拓扑会产生不同的投影序列 $(\sigma/_i)_{i\in[n]}$，因此我们可以将 r-符号拓扑的数量界定为

$$f_r(n) \leq (f_{r-1}(n-1))^n \leq \left(2^{c(n-1)^{r-2}}\right)^n \leq 2^{cn^{r-1}},$$

其中，$f_{r-1}(n-1)$ 表示定义在 $n-1$ 个元素上的 $(r-1)$-符号拓扑的数量。

A.2 下界的证明

为方便起见，我们假设 $n = rm$ 对于某个 $m \in \mathbb{N}$ 成立。我们将 $[n] = \bigcup_{k=1}^{r} N_k$ 划分为大小为 m 的区间 $N_k = [(k-1)m+1,\ km]$。

在 r-子集上，我们定义权重 $\phi(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{k=1}^{r-1} x_k - x_r$。注意，对于 r-数据包 $X = (x_1, \ldots, x_{r+1})$，其中 $x_1 < \ldots < x_{r+1}$ 与通常一样，有 $\phi(X_1) > \ldots > \phi(X_r)$ 且 $\phi(X_r) < \phi(X_{r+1})$。

对于阈值 T，我们现在定义 $[n]$ 上的一个符号拓扑集合 $\mathcal{S}_T$。若符号拓扑 σ 满足以下符号条件，则它属于 $\mathcal{S}_T$；其中 $\pm$ 表示该符号可以任意选择。

$$\sigma(x_1, \ldots, x_r) = \begin{cases} - & \text{if } x_{r-1} \notin N_r,\ x_r \in N_r, \text{ and } \phi(x_1, \ldots, x_r) > T \\ \pm & \text{if } x_{r-1} \notin N_r,\ x_r \in N_r, \text{ and } \phi(x_1, \ldots, x_r) = T \\ + & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为证明下界，我们展示两个性质：

- 集合 $\mathcal{S}_T$ 的元素确实是符号拓扑。对于固定的 r，并适当选取 T，其中
- 有 $2^{\Omega(n^{r-1})}$ 个元素属于 $\mathcal{S}_T$。

现在来检查所有 r-数据包 $X = (x_1, \ldots, x_{r+1})$ 的单调性，也就是说，序列中至多有一次符号变化

$$\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_{r+1}).$$

如果 $x_{r+1} \notin N_r$，那么对于所有 $k = 1, \ldots, r+1$，$\sigma(X_k) = +$，且该数据包上没有符号变化。否则，存在某个 $k \in [r+1]$，使得 $x_1, \ldots, x_{k-1} \notin N_r$ 且 $x_k, \ldots, x_{r+1} \in N_r$。

如果 $k < r$，那么 $x_{r-1},\ x_r,\ x_{r+1} \in N_r$。因此，每个 X_j 至少包含来自 N_r 的两个元素，由此对于所有 j 都有 $\sigma(X_j) = +$，并且该数据包上不存在符号变化。

16 符号拓扑的扩张定理

如果 $k=r$，那么每个满足 $j<r$ 的 X_j 都包含来自 N_r 的两个元素，因此对于 $j<r$，有 $\sigma(X_j)=+$。我们还知道 $\phi(X_r)<\phi(X_{r+1})$，因此，如果 $\sigma(X_r)=-$，那么 $\sigma(X_{r+1})=-$也成立。因此，该数据包上至多有一次符号变化。

最后，若 $k=r+1$，则 $\sigma(X_{r+1})=+$和 $\phi(X_1)>\phi(X_2)>\ldots>\phi(X_r)$，由此$\sigma(X_1)\ \sigma(X_2)\ldots,\sigma(X_r)$ 是一串 $-$ 符号，后接一串 $+$ 符号，中间可能有一个 $\pm$。同样，该数据包上至多有一次符号变化。

这就完成了 证明 $\mathcal{S}_T$ 的所有元素都是符号拓扑。

剩下要证明的是，对于某个 T，集合 $\mathcal{S}_T$ 包含足够多的元素。

称一个 r-元组 $(x_1,\ldots,x_r)$ 为分裂的，如果 $x_k\in N_k$对 $k=1,\ldots,r$。带有$\phi(x_1,\ldots,x_r)$ 的分裂的 r- 元组 $=T$ 是指这样的元组：$\mathcal{S}_k$ 的元素可以自由且独立地从 $+$ 和 $-$中选择符号。因此，如果这类元组的数量为 a_T，那么 $|\mathcal{S}_T|\geq 2^{a_T}$。

考虑方程

$$\sum_{k=1}^{r-1}(x_k-(k-1)m)=x_r-(r-1)m. \tag{1}$$

并注意到这等价于

$$\sum_{k=1}^{r-1}x_k-x_r=m\frac{(r-4)(r-1)}{2}=T. \tag{2}$$

如果定义 $T=\frac{(r-4)(r-1)}{2}$和 $y_k=x_k-(k-1)m$，那么我们有 $1\leq y_k\leq m$，因为 $x_k\in N_k$，并且由方程 (1) 可得 $\sum_{k=1}^{r-1}y_k=y_r$。显然，这样的 y 向量与带有$\phi(x_1,\ldots,x_r)$ 的分裂的 r-元组 $=T$之间存在双射。现在，满足 $1\leq z_1<\ldots<z_{r-1}\leq m$ 的向量 $(z_1,\ldots,z_{r-1})$ 与 y 向量之间可通过 $z_k=\sum_{j\leq k}y_j$ 建立双射。z 向量的数量恰好等于 $[m]$ 的 $(r-1)$-子集的数量。

因此，对于 $T=\frac{m(r-4)(r-1)}{2}$，具有 $\phi(x_1、\ldots\ldots、x_r)=T$的分裂的 r-元组数量为

$$a_T=\binom{m}{r-1}=\Theta(\frac{1}{r!}\left(\frac{n-r}{r}\right)^{r-1})=\Theta(n^{r-1}).$$

命题 1.5 的证明至此完成。

B 顺时针旋转的性质

本节证明符号拓扑的旋转的一些性质，这些性质在扩展定理（定理 1.2）的证明中发挥着核心作用。

▶**引理 2.1**。设 σ 是 $[n]$上的一个 r-符号拓扑。则 σ_{rot} 是 $[n]$上的一个 r-符号拓扑。

证明。考虑一个 r-数据包 $X'=(x'_1、\ldots\ldots、x'_{r+1})$。由于旋转是 $[n]$ 的数据包上的一个双射，因此存在一个 $X=(x_1、\ldots\ldots、x_{r+1})$ 使得 $X'=X_{\mathrm{rot}}$。

如果旋转后的元素不在 X 中，即 $x'_{r+1}<n$，那么对于所有 $i=1,\ \ldots r+1$，数据包 X' 的 r 元组的符号必须按相同顺序考察：

$$\sigma_{\mathrm{rot}}(X'_1),\sigma_{\mathrm{rot}}(X'_2),\ldots,\sigma_{\mathrm{rot}}(X'_r),\sigma_{\mathrm{rot}}(X'_{r+1})=\sigma(X_1),\sigma(X_2),\ldots,\sigma(X_r),\sigma(X_{r+1})$$

后者至多有一次符号变化，因为 σ 是一个 r-符号拓扑。

如果旋转后的元素属于 X，即 $x'_{r+1}=n$ and $x_1=1$，那么对于所有 $i=1,\ldots,r$，都有 $x_{i+1}=x'_i+1$。注意，对于 $i=1,\ldots,r$，$n\in X'_i$，因此对于 $j=2,\ldots,r+1$，有 $1\in X_j$。

X' 给出的有序符号序列为

$$\begin{array}{llll}
\sigma_{\mathrm{rot}}(X'_1) & \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_2), & \dots, & \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_r), & \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_{r+1}) \\
= \sigma_{\mathrm{rot}}(X'\backslash\{x_2-1\}), & \sigma_{\mathrm{rot}}(X'\backslash\{x_3-1\}), & \dots, & \sigma_{\mathrm{rot}}(X'\backslash\{x_{r+1}-1\}), & \sigma_{\mathrm{rot}}(X'\backslash\{n\}) \\
= -\sigma(X_2), & -\sigma(X_3), & \dots, & -\sigma(X_{r+1}), & \sigma(X\backslash\{1\}) \\
= -\sigma(X_2), & -\sigma(X_3), & \dots, & -\sigma(X_{r+1}), & \sigma(X_1)
\end{array}$$

由于 σ 的符号拓扑性质，$\sigma(X_1)\ \sigma(X_2)\dots,\sigma(X_r)\ \sigma(X_{r+1})$ 至多有一次符号变化。◀

下面的引理表明，在翻转组方面，旋转符号拓扑 σ_{rot} 的性质基本上与 σ 相同。我们只需处理指标移位。

▶**引理 2.2.** 设 σ 是一个 r-符号拓扑，且 F 是 σ 的一个翻转集。那么 F_{rot} 是顺时针旋转的符号拓扑 σ_{rot} 中的一个翻转集。

证明。要证明一个 r-子集 F_{rot} 是翻转集，我们需要检查所有满足 $F_{\mathrm{rot}} \subset X'$ 的 r-数据包 X'，如前面的证明所示。设 X' 是这样一个数据包，并设 X 满足 $X_{\mathrm{rot}} = X'$。由于 F 是 σ 中的翻转集，我们知道，如果改变 $\sigma(F)$ 的符号，序列 $\sigma(X_1)\ \sigma(X_2)\dots,\sigma(X_r)\ \sigma(X_{r+1})$ 中仍至多有一次符号变化。我们将此简记为：F 在 X 中可翻转。

如果 $1 \notin X$，那么对所有 i，$\sigma(X_i) = \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_i)$。此外，若 j 满足 $F = X_j$，则 $F_{\mathrm{rot}} = X'_j$，因此，F_{rot} 在 X' 中是可翻转的。

否则，我们有 $1 \in X$。那么，正如引理 2.1 的证明中所示，它是

$$\sigma_{\mathrm{rot}}(X'_1), \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_2), \dots, \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_r), \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_{r+1}) = -\sigma(X_2), -\sigma(X_3), \dots, -\sigma(X_{r+1}), \sigma(X_1).$$

我们知道 F 在 X 中是可翻转的。若 $F = X_i$ 满足 $3 \le i \le r$，则显然 $F_{\mathrm{rot}} = X'_{i-1}$ 在 X' 中是可翻转的。若 $F = X_1$，序列 $\sigma(X_2)\dots,\sigma(X_{r+1})$ 为常数。这意味着 $\sigma_{\mathrm{rot}}(F_{\mathrm{rot}}) = \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_{r+1})$ 的符号可以翻转。若 $F = X_2$，则 $\sigma(X_1) \neq \sigma(X_3)$，且对 $2 \le i \le r+1$，符号$\sigma_{\mathrm{rot}}(X'_i)$相同。因此，$F_{\mathrm{rot}} = X'_1$ 在 X' 中是可翻转的。若 $F = X_{r+1}$，序列 $\sigma(X_1)\dots,\sigma(X_r)$ 为常数，因此 $\sigma_{\mathrm{rot}}(F_{\mathrm{rot}}) = \sigma_{\mathrm{rot}}(X'_r)$ 的符号与不同符号相邻，故可以翻转。

这表明 F_{rot} 在所有包含它的数据包中都是可翻转的，因此它是一个翻转集。◀

▶**引理 B.1.** 设 σ 是一个带有偏序 $\prec$ 的 r-符号拓扑，而 σ_{rot} 是旋转后的符号拓扑，其相应偏序为 $\prec_{\mathrm{rot}}$。对于两个有交集$|I \cap J| = r-2$ 且满足 $I \prec J$ 的 $(r-1)$-子集 I、J，有

$$\begin{aligned}
&I_{\mathrm{rot}} \prec_{\mathrm{rot}} J_{\mathrm{rot}} \quad \textit{if } 1 \notin I \cap J, \quad \textit{and} \\
&I_{\mathrm{rot}} \succ_{\mathrm{rot}} J_{\mathrm{rot}} \quad \textit{if } 1 \in I \cap J.
\end{aligned}$$

证明。若 $1 \notin I$ 和 $1 \notin J$，则 $1 \notin I \cup J$，且 $I \cup J$ 的符号在 σ 和 σ_{rot}中相同，即 $\sigma(I \cup J) = \sigma_{\mathrm{rot}}(I_{\mathrm{rot}} \cup J_{\mathrm{rot}})$。此外，$(r-1)$- 数据包 $I \cup J$ 中 I 和 J 的顺序，与 $(r-1)$ 数据包 $I_{\mathrm{rot}} \cup J_{\mathrm{rot}}$中 I_{rot} 和 J_{rot} 的顺序相同。因此，若I 字典序大于 J，则 I_{rot} 字典序大于 J_{rot}。因此$I_{\mathrm{rot}} \prec_{\mathrm{rot}} J_{\mathrm{rot}}$。

若 $1 \in I$ 但 $1 \notin J$，在对应于反字典序的 $(r-1)$-数据包 $I \cup J$ 所对应的符号序列中，I 的符号位于 J 的符号之后。根据假设，它是 $J \succ I$，因此 $\sigma(I \cup J) = +$。顺时针旋转后，在 $(r-1)$- 数据包 $I_{\mathrm{rot}} \cup J_{\mathrm{rot}}$ 中，I_{rot} 的符号位于 J_{rot} 的符号之前。因为 $n \in I_{\mathrm{rot}}$ 且 $n \notin J_{\mathrm{rot}}$。

此外， r-子集的符号发生变化，即 $\sigma(I\cup J)=-\sigma_{\mathrm{rot}}(I_{\mathrm{rot}}\cup J_{\mathrm{rot}})=-$。这表明该关系保持不变，即 $I_{\mathrm{rot}}\prec_{\mathrm{rot}}J_{\mathrm{rot}}$。 $1\in J$ 但 $1\notin I$ 的情形同理。

若 $1\in I$ 和 $1\in J$，则在 $(r-1)$-数据包 $I\cup J$中， I 和 J 的出现顺序与 $I_{\mathrm{rot}}\cup J_{\mathrm{rot}}$ 中的 I_{rot} 和 J_{rot} 相同，但 r-元组的符号反转了，即 $\sigma(I\cup J)=-\sigma_{\mathrm{rot}}(I_{\mathrm{rot}}\cup J_{\mathrm{rot}})$。因此， I_{rot} 和 J_{rot} 之间的顺序如所声称的那样反转了。◀

定理 1.2 的证明中，一个核心环节是任意两个 $(r-1)$-子集旋转后的关系。我们证明，两个不相交的元素的顺序不可能通过一次旋转而反转。

为了证明命题 3.3，我们引入以下两个划分。以第一个元素 1 为基准，我们将 $(r-1)$-子集 $\binom{[n]}{r-1}$ 划分为以下三个集合：

$$\mathcal{H}_1^\sigma=\{\,I\subset[n]:|I|=r-1,\ 1\in I\,\}$$
$$\mathcal{U}_1^\sigma=\{\,I\subset[n]:|I|=r-1,\ 1\notin I,\ \sigma(I\cup\{1\})=+\,\}$$
$$\mathcal{D}_1^\sigma=\{\,I\subset[n]:|I|=r-1,\ 1\notin I,\ \sigma(I\cup\{1\})=-\,\}.$$

同样，关于最后一个元素 n，我们将 $\binom{[n]}{r-1}$ 划分为以下三个集合：

$$\mathcal{H}_n^\sigma=\{\,I\subset[n]:|I|=r-1,\ n\in I\,\}$$
$$\mathcal{U}_n^\sigma=\{\,I\subset[n]:|I|=r-1,\ n\notin I,\ \sigma(I\cup\{n\})=-\,\}$$
$$\mathcal{D}_n^\sigma=\{\,I\subset[n]:|I|=r-1,\ n\notin I,\ \sigma(I\cup\{n\})=+\,\}.$$

注意定义中的符号变化，也就是说，每个 $I\in\mathcal{U}_1^\sigma$ 都满足 $\sigma(I\cup\{1\})=+$，而每个 $I\in\mathcal{U}_n^\sigma$ 都满足 $\sigma(I\cup\{n\})=-$。

►**引理 B.2.** *U_1^σ 和 U_n^σ 是偏序 $\prec$ 中的上集，D_1^σ 和 D_n^σ 是偏序 $\prec$ 中的下集；该偏序对应于 r- 符号拓扑 σ。*

证明。下面我们证明 $\mathcal{U}_1^\sigma$ 是一个上集。类似的论证可以证明 $\mathcal{U}_n^\sigma$ 是一个上集，并且 $\mathcal{D}_1^\sigma$ 和 $\mathcal{D}_n^\sigma$ 是下集。设 I 是 $\mathcal{U}_1^\sigma$ 中的一个元素。根据定义，它满足$1\notin I$ 且 $\sigma(I\cup\{1\})=+$。设 J 是一个 $(r-1)$-子集，且满足 $J\succ I$。

如果交集 $I\cap J$包含 $r-2$ 个元素，那么不可能有 $1\in J$；否则， J在字典序上小于 I，也就是说， J 在（$r-1$）数据包 $I\cup J$中出现在 I之后，因此 $-=\sigma(I\cup J)=\sigma(I\cup\{1\})=+$，这就产生了矛盾。因此， $1\notin J$，并且我们在 $I\cup J\cup\{1\}$中有（$r+1$）个元素。如果 I 在字典序上小于 J，那么字典序为 $I\cup J\succ_{\mathrm{lex}}J\cup\{1\}\succ_{\mathrm{lex}}I\cup\{1\}$，这对应于 r 数据包 $I\cup J\cup\{1\}$中的顺序。根据假设，我们有 $\sigma(I\cup\{1\})=+$，并且由于 $J\succ I$，有 $\sigma(I\cup J)=+$，由此可得 $\sigma(J\cup\{1\})=+$。因此 $J\in\mathrm{U}_1^\sigma$。

另一种情况下，若 J 按字典序小于 I，则有字典序$I\cup J\succ_{\mathrm{lex}}I\cup\{1\}\succ_{\mathrm{lex}}J\cup\{1\}$。由于有 $\sigma(I\cup\{1\})=+$ 且 $\sigma(I\cup J)=-$，因此$\sigma(J\cup\{1\})=+$，从而再次得到 $J\in\mathcal{U}_1^\sigma$。

若交集 $I\cap J$包含的元素少于 $r-2$，则我们用归纳法继续。存在一条链 $I=Z_1\prec Z_2\prec\cdots\prec Z_k=J$，使得任意两个相邻的 Z_i 的交集都包含 $r-2$ 个元素。对于 $i=2,\ldots,k$，由于 $Z_{i-1}\in\mathcal{U}_1^\sigma$，我们得出 $Z_i\in\mathcal{U}_1^\sigma$，特别地， $J\in\mathcal{U}_1^\sigma$。这就证明了$\mathcal{U}_1^\sigma$是一个上集。◀

现在我们研究顺时针旋转对偏序的影响。在与旋转符号拓扑 σ_{rot} 对应的偏序$\prec_{\mathrm{rot}}$ 中，集合 $(\mathcal{U}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}}$ 和 $(\mathcal{D}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}}$ 仍分别是上集

和下集。这里 $\mathcal{X}_{\mathrm{rot}} = \{X_{\mathrm{rot}} : X \in \mathcal{X}\}$ 表示集合系统 $\mathcal{X}$ 经顺时针旋转后得到的集合。

▶ **引理 B.3.** 成立：$(H_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} = H_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$、$(U_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} = U_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$，以及$(D_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} = D_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$。

证明。一个 $(r-1)$-子集 I包含首个元素 1，当且仅当其顺时针旋转 I_{rot}包含最后一个元素 n。因此，我们有 $(\mathrm{H}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} = \mathrm{H}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$以及 $(\mathrm{U}_1^\sigma \cup \mathrm{D}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} = \mathrm{U}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}} \cup \mathrm{D}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$。要证明 $(\mathrm{U}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} = \mathrm{U}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$和 $(\mathrm{D}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} = \mathrm{D}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$，只需证明 $(\mathrm{U}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} \subseteq \mathrm{U}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$和 $(\mathrm{D}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} \subseteq \mathrm{D}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$。

要证明 $(\mathcal{U}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} \subseteq \mathcal{U}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$，令 $I \in \mathcal{U}_1^\sigma$，即 $\sigma(I \cup \{1\}) = +$。将元素 1 旋转后，我们得到

$$\sigma_{\mathrm{rot}}((I \cup \{1\})_{\mathrm{rot}}) = -\sigma(I \cup \{1\}) = -.$$

由于 $(I \cup \{1\})_{\mathrm{rot}} = I_{\mathrm{rot}} \cup \{n\}$，我们有 $\sigma_{\mathrm{rot}}(I_{\mathrm{rot}} \cup \{n\}) = -$，因此 $I_{\mathrm{rot}} \in \mathcal{U}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$。类似的论证表明 $(\mathcal{D}_1^\sigma)_{\mathrm{rot}} \subseteq \mathcal{D}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$。引理 B.3 的证明至此完成。◀

有了上述引理，我们现在可以证明命题 3.3。

▶ **命题 3.3.** 设 σ 是 $[n]$上的一个 r-符号拓扑。对于两个 $(r-1)$-子集 I、J，若 $I \prec J$且 $1 \notin I \cap J$，则 I_{rot} 和 J_{rot} 在 $\prec_{\mathrm{rot}}$ 或 $I_{\mathrm{rot}} \prec_{\mathrm{rot}} J_{\mathrm{rot}}$中不可比较。

证明。 反设 I、J 是两个 $(r-1)$-子集，且 $I \prec J$ 并且$I_{\mathrm{rot}} \succ_{\mathrm{rot}} J_{\mathrm{rot}}$。

若 $I \in \mathcal{U}_1^\sigma$，则由引理 B.2，$J \in \mathcal{U}_1^\sigma$。若 $I \in \mathcal{D}_1^\sigma$，则由引理 B.3，$I_{\mathrm{rot}} \in \mathcal{D}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$；又由引理 B.2 及假设 $I_{\mathrm{rot}} \succ_{\mathrm{rot}} J_{\mathrm{rot}}$，可知它是 $J_{\mathrm{rot}} \in \mathcal{D}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$，再由引理 B.3 $J \in \mathcal{D}_1^\sigma$。类似的论证表明，若 $J \in \mathcal{D}_1^\sigma$（分别地，若 $J \in \mathcal{U}_1^\sigma$），则 $I \in \mathcal{D}_1^\sigma$（分别地，$I \in \mathcal{U}_1^\sigma$）。

由于 $1 \notin I \cap J$ 并非 I 和 J 都能属于 $\mathcal{H}_1^\sigma$。因此，I 和 J 要么都属于 $\mathcal{D}_1^\sigma$，要么都属于 $\mathcal{U}_1^\sigma$。由于 $I \prec J$，存在一条链 $I = Z_1 \prec \ldots \prec Z_k = J$。根据引理 B.2，它是$Z_1$，……，$Z_k \in \mathcal{D}_1^\sigma$（分别为 $\mathcal{U}_1^\sigma$）。经过顺时针旋转后，我们有（Z_1）$_{\mathrm{rot}}$，……，（Z_k）$_{\mathrm{rot}} \in \mathcal{D}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$（分别为 $\mathcal{U}_n^{\sigma_{\mathrm{rot}}}$），因此 $I_{\mathrm{rot}} =$（Z_1）$_{\mathrm{rot}} \prec_{\mathrm{rot}} \ldots \prec_{\mathrm{rot}}$（$Z_k$）$_{\mathrm{rot}} = J_{\mathrm{rot}}$，这与 $I_{\mathrm{rot}} \succ_{\mathrm{rot}} J_{\mathrm{rot}}$ 矛盾。证明完毕。◀

值得注意的是，对于 I，$J \in \mathcal{H}_1^\sigma$（即 $1 \in I \cap J$），若 $I \prec J$，引理 B.2 意味着任意链 $I = Z_1 \prec \ldots \prec Z_k = J$都完全包含于 $\mathcal{H}_1^\sigma$（即 Z_1，……，$Z_k \in \mathcal{H}_1^\sigma$）中。由于顺时针旋转会将包含元素 1 的元素之间的可比性转换为，我们有$I_{\mathrm{rot}} =$（Z_1）$_{\mathrm{rot}} \succ_{\mathrm{rot}} \ldots \succ_{\mathrm{rot}}$（$Z_k$）$_{\mathrm{rot}} = J_{\mathrm{rot}}$。