arXiv:2303.04088v1 [physics.soc-ph] 7 Mar 2023

基于多情景实验室实验的日常路径选择研究。第一部分：路径依赖吸引力及其建模

Hang Qi[a,c,*], Ning Jia[b,c,*], Xiaobo Qu[d], 何正兵[e,**]

[a]湖北经济学院金融与经济高级研究院，湖北经济学院，中国 [b]系统工程研究所，天津大学管理与经济学院，中国[c]复杂管理系统计算与分析实验室（天津大学），中国 [d]汽车安全与节能国家重点实验室，清华大学，中国[e]北京市交通工程重点实验室，北京工业大学，中国

摘要

在城市交通网络领域，越来越多的日常（DTD）交通动态理论被提出，用以描述网络流演化，同时也开展了越来越多的实验室实验，以观察出行者的行为规律。然而，理论研究者与实验研究者之间的“交流”尚不充分。本文旨在：1）通过开展一系列实验室实验，发现未曾预料到的行为规律；2）将观察到的行为规律融入路径选择模型，从而改进现有的 DTD 动态理论。首先，312 名受试者参与了八种决策情景中的一种，并在可拥堵平行路径网络中重复进行路径选择。其次，研究观察到三种经典路径选择模型无法充分解释的路径转换行为模式。第三，为增强离散路径选择模型的解释力，本文引入路径依赖吸引力这一行为假设，即路径依赖惯性和偏好。据此提出了一种解析型 DTD 动态模型，并证明该模型能够稳定收敛至唯一的均衡状态。最后，所提出的 DTD 模型能够令人满意地再现不同数据集中的观测结果。本研究结果有助于交通科学理论研究者充分利用实验室实验，并构建既有真实行为基础、又具有简洁数学性质的网络均衡或 DTD 动态模型。

关键词： 日常动态、实验经济学、路径选择行为、惯性、风险厌恶

*共同第一作者

**通讯作者电子邮箱：he.zb@hotmail.com（何正兵）

1. 引言

交通均衡因其在长期交通规划中发挥的重要作用而受到广泛研究。然而，道路网络中的现实交通流常因各种原因处于非均衡状态。日常交通动态受到广泛关注，因为它关注驾驶员路径选择的动态变化以及交通流的演变过程，而非仅局限于静态均衡（Yang 和 Zhang，2009年；He 等，2010年）。

日常交通动态模型最具吸引力的特征是灵活性，即能够将广泛的行为规则整合到统一框架中（Watling and Hazelton, 2003），例如预测与感知（Watling,1999;HeandLiu,2012;CantarellaandWatling, 2016; Xiao et al., 2016）、基于满意度的有界理性（Guo and Liu, 2011; Ye and Yang, 2017）、基于前景理论的决策（Xu et al., 2011; Wang et al., 2013）、边际效用的影响（Kumar and Peeta, 2015; He and Peeta, 2016）以及社会互动（Wei et al., 2016）。尽管这些日常交通动态模型极大地丰富了我们对交通演化及相应均衡状态的认识，但其中很少有模型能够提供实证或实验性证据，以证明这些行为假设的必要性和有效性。

现实世界中的实证研究面临挑战，主要原因在于难以收集高质量的全网络出行和路径选择数据（Guo and Liu, 2011; Zhu et al., 2011; He and Liu, 2012; Han et al., 2021），以及在基于现实世界数据的研究中无法控制关键变量和情景。为克服这一困难，一种常用方法是采用陈述偏好选择方法，让参与者在设计好的情景中做出选择。然而，陈述偏好选择方法的缺点在于，参与者不必承担其选择的后果，这可能导致响应偏差（Hensher, 2010; Fifer et al., 2014）。

实验室选择实验能够操控条件和情境，并产生实际后果，是对陈述偏好选择方法的改进。它们使研究者能够在受控情境中考察范围广泛的变量和理论，并收集更详尽的数据以验证理论和模型，尽管无法完全再现参与者在现实世界中的行为。因此，实验室实验已被广泛视为经济学研究的一项重要工具（Dixit et al., 2017；

Rapoport et al., 2019）。

与理论研究相比，关于DTD动态的实验研究数量有限。Iida等（1992）可能是最早的实验研究，该研究采用平行路线网络来检验出行者的路径选择。研究发现，路径选择的均值接近均衡，但各轮次之间存在相当大的波动。同样，Selten等人（2007）报告称，根据在双路径网络中开展的实验，纯均衡大致得以实现，尽管始终存在波动。研究分析了受试者在均衡点附近的选择行为，从而解释了为什么实验数据持续波动，无法达到“平滑”的均衡。Meneguzzer和Olivieri（2013）将研究扩展到三路径网络，发现其波动性很高，且转换频率与受试者特征之间不存在显著关系。

近期一些研究尝试将实验结果与传统网络均衡理论联系起来。Dixit 和 Denant-Boemont（2014）尝试寻找最适合描述内生拥堵条件下汇总路径选择的均衡理论。结果表明，在预测平均选择及选择方差方面，随机用户均衡（SUE）优于确定性用户均衡（DUE）。Zhao 和 Huang（2016）利用一项双路径实验收集的数据，提出了基于满意度的有限理性用户均衡模型。鉴于利用实验室选择实验评估经典DTD模型的重要性，Ye 等（2018）基于一项虚拟DTD路径选择实验考察了若干确定性DTD模型，并检验了多项理论假设，包括路径流量的非线性效应、路径依赖、敏感度变化以及学习行为。近期，Meneguzzer（2019）通过实验室实验探究了完全信息和部分信息条件下的不同路径转换策略。研究采用 Cantarella 和 Cascetta（1995）的建模框架来解释实验观察结果。此外，实验室选择实验还被用于验证特定条件下的路径选择模型，例如基于累积前景理论且包含朋友间信息共享的路径选择模型（Zhang 等，2018），以及在受扰网络中基于强化学习、结合

实时信息的路径选择模型（Yu 和 Gao，2019）。

总之，现有研究通常只采用一个或两个情景，且总轮次仅有几十轮（Iida等，1992；Selten等，2007；Zhao 和 Huang，2016；Zhang等，2018；Meneguzzer，2019）；大多数所提出的模型属于静态均衡模型（Dixit 和 Denant-Boemont，2014；Zhao 和 Huang，2016），或者无法进行分析（Selten等，2007；Ye等，2018；Yu 和 Gao，2019）。

为了更明确地研究DTD路线选择行为，我们与Wang等（2021）的研究类似，属于率先开展一系列不同路线选择情景下实验室实验的研究之一。丰富的情景和较大的样本量使我们能够识别稳定的行为规律，并以更高的可靠性检验所提出模型的普适性。具体而言，我们设计了八个情景，涉及不同数量的路线和不同的成本函数；每个情景均由三至五组受试者参与，他们连续75至110次迭代做出相同的路径选择决策，模拟“日复一日”的选择。本文的主要发现和贡献如下。

- 从个体层面的实验数据中观察到了一些未曾预料的行为规律，即路径依赖惯性和路径依赖偏好。这些规律不仅与路线选择行为模型的经典假设（如完全理性或随机效用最大化假设）不一致，也不同于近期多数研究中的基于流量的路径依赖偏好（Cantarella 和 Watling, 2016; Ye et al., 2018）。因此，这些观察结果补充了现有的路线选择理论。

- 将观察到的行为规律纳入基于随机效用最大化（RUM）的选择模型，并提出了一种基于离散选择的DTD动态模型。该模型不仅具有良好的理论性质，还能再现实验观测结果，包括切换率（即出行者从一条路径切换到另一条路径的比例）和均衡流量。此外，该模型能够较好地拟合另一项现有研究报告的实验数据，进一步证实了所提出模型的外部验证能力。

本文其余部分安排如下。第2节首先介绍我们开展的实验室选择实验。第3节分析实验

数据并介绍新发现的行为模式。为解释这些模式，第4节提出了基于离散选择的分析模型。随后在第5节对该模型进行校准和检验。第 6 节给出数值示例。最后，第7节和第8节分别进行讨论并给出结论。

2. 日常路径选择实验

我们首先阐明以下三个术语：

- **情景**：每种情景对应一种独特的实验设计，例如网络结构和成本函数；

- **会话**：在一次会话中，一组受试者共同参加实验。每种情景都将在三次以上不同的会话中进行考察（即由不同的受试者参与），以提高结果的可信度；

- **轮次**：要求一组受试者重复做出路径选择决策，以模拟日常选择过程。每次重复称为一个“轮次”，对应于现实世界中的“一天”。

2.1. 受试者

参与者为中国天津大学年龄在18至23岁之间的本科生，他们自愿参加决策任务，并根据绩效水平获得相应收益。研究共招募了312名受试者（男性151名，女性161名），其中136人持有驾驶执照。受试者被随机分配到17个群体中，每个群体的男女比例大致相等。一个群体可以参加多个情景，但同一情景只能参加一次。受试者在每次会话结束时获得报酬，报酬由两部分组成：固定出场费和根据其在实验中绩效确定的奖金。研究开展了8种不同情景，每种情景均进行了多次重复，以尽量减少随机因素的影响。情景1-7中每个群体包含16名参与者，情景8中每个群体包含24名参与者。需要注意的是，路径选择实验的群体规模适中，这种规模已被策略互动决策实验广泛采用（Selten 等，2007；Rapoport 等，2009；Lindsey 等，2014；Mak 等，2015）。

2.2. 情景

研究采用了一个具有单一起讫点（OD）对的网络（图1），这也是现有研究广泛采用的网络形式（Iida等，1992；Selten 等，2007）。在这些情景中，固定数量的通勤者被设定为居住在同一社区（起点），他们每天早晨必须从若干条可能的路线中选择一条，以到达共同的工作地点（终点）。每条路线均被设计为容易发生拥堵。研究人员指示参与者“尽快到达工作地点”。假定给定路线的出行时间是路径流量的增函数。

八个情景（图1和表1）的设计如下。

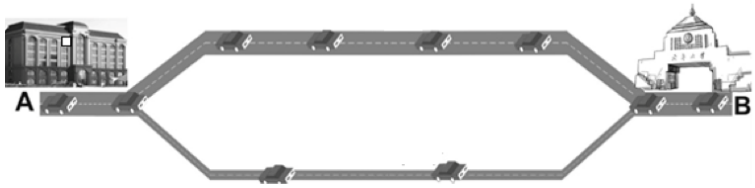
- **场景1**：场景1是基准情景，采用对称双路径网络。
- **情景2–5**：情景2–5将场景1扩展为采用不同成本函数的非对称双路径网络，以考察受试者在不同成本反馈下的路径选择行为。成本函数的设计参考了 Selten 等人（2007）的开创性研究；
- **情景6–7**：鉴于二元选择行为相对简单，我们在情景6–7中采用非对称三路线网络，向受试者提供三条备选路线，并期望观察到更多行为模式。
- **场景8**：场景8进一步将配置扩展到非线性成本函数和不同的组规模，以展示所提出理论模型的稳健性。

表1列出了各个情景的详细信息，每个情景都有其独特的动态用户均衡流量分配。情景1–7采用线性成本函数，原因如下。首先，尽管线性成本函数形式简单，但能够捕捉出行时间与交通流量之间关系中最重要的方面。因此，许多现有的基于实验的研究都采用线性成本函数，例如 Selten 等人（2007）、Zhao and Huang（2016）、Knorr等（2014）和 Wang等（2021）。其次，参与者并不知道确切的出行时间函数，也不了解出行时间与需求之间的线性关系。

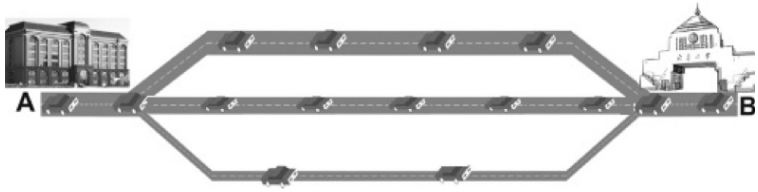
第三，线性成本函数还有助于尽量减少可能影响决策的因素，这对于确定路径选择行为背后最重要的驱动因素至关重要。线性成本函数能够捕捉路径上交通流量与出行时间之间关系中最重要的方面，而且不会引入额外的非线性效应，避免增加参与者决策时的心智负担。我们还通过采用经典的非线性美国公共道路局（BPR）成本函数以及不同的群体规模（即24名参与者），在场景8中进一步检验所提出理论模型的稳健性。



(a) 对称双路线网络（场景1）



(b) 非对称双路线网络（情景2–5）



(c) 非对称三路线网络（情景6–8）

图1：八个情景中使用的三种网络。

2.3. 实验流程

实验在一间设有多个终端的计算机化实验室中进行，终端分别位于不同的隔间内。每位受试者进入实验室后，会抽取一枚扑克筹码来决定自己的座位。每场会话开始时，实验说明会发给受试者，受试者在自己的座位上阅读。说明详细介绍了实验内容，包括网络和重复

表1：所有情景的参数设置及对应的动态用户均衡解。

情景	路线数量	成本函数*	动态用户均衡**	会话	轮数
1	2	$c_1 = 6 + 2f_1$ $c_2 = 6 + 2f_2$	8 , 8	1 2 3	93 83 94
2	2	$c_1 = 10 + 4f_1$ $c_2 = 24 + 6f_2$	11 , 5	1 2 3	90 90 98
3	2	$c_1 = 5 + 2f_1$ $c_2 = 12 + 3f_2$	11 , 5	1 2 3	87 93 83
4	2	$c_1 = 12 + 4f_1$ $c_2 = 24 + 6f_2$	10.8 , 5.2	1 2 3 4	87 50 99 78
5	2	$c_1 = 6 + 2f_1$ $c_2 = 12 + 3f_2$	10.8 , 5.2	1 2 3 4	89 84 95 90
6	3	$c_1 = 22 + 4f_1$ $c_2 = 24 + 6f_2$ $c_3 = 30 + 8f_3$	8 , 5 , 3	1 2 3 4 5	85 83 104 97 85
7	3	$c_1 = 11 + 2f_1$ $c_2 = 12 + 3f_2$ $c_3 = 15 + 4f_3$	8 , 5 , 3	1 2 3 4 5	87 84 105 91 91
8	3	$c_1 = 43.75(1 + 0.15(f_1/6)^2)$ $c_2 = 43.75(1 + 0.15(f_2/4)^2)$ $c_3 = 43.75(1 + 0.15(f_3/2)^2)$	12 , 8 , 4	1 2 3 4 5	83 80 83 88 86

* c_i 和f_i 分别表示路径i的成本和流量。** 动态用户均衡
流量分配；单位为“出行者”。

决策情景、实验会话的实验流程、根据参与者在博弈中的绩效计算其现金奖励的方式，以及实验的基本规则（例如禁止交谈规则）。研究人员告知参与者，他们正在进行一项拥堵博弈，在该博弈中，参与者的收益取决于其他人的选择。然而，他们并未被告知成本函数的确切形式。该设置完全遵循 Selten 等人（2007）、Rapoport 等人（2009，2014）等开展拥堵博弈实验时的惯例。场景1至7分别于2015年1月和2016年4月进行，场景8于2019年10月进行。

DTD 路径选择程序通过客户端/服务器计算机程序进行模拟，即采用人在回路系统。受试者需要在每轮从两条或三条备选路线中选择一条。所有选择完成后，服务器计算所有路线的出行时间。随后，系统向受试者呈现选定的反馈信息，包括上一轮受试者所选路线和未选路线的出行时间、上一轮的收益、以人民币计的累计收益[1]，以及所有路线的历史出行时间。之后，下一轮开始，所有受试者需要再次作出选择。需要注意的是，披露出行时间信息是为了与研究中进行比较的经典 DTD 模型设置保持一致。此外，随着先进旅行者信息系统或导航应用程序的部署，如今在现实世界中可以轻松获取大多数备选路线的出行时间。

会话的结束时间由服务器在进行 75 至 110 轮次后随机确定，因为轮次过多可能会使受试者疲惫，从而降低实验质量。这一设置与现有的基于实验的研究类似；例如，Selten 等人（2007）进行了 200 轮次，Chumura（2012）进行了 100 轮次，而 Rapoport 等人（2009）进行了 40 轮次。网络层级数据（即流量和出行时间）以及个体层级数据（即每位受试者的每一次决策）均由系统自动记录。

每次会话结束时，参与者都会获得报酬。报酬由两部分组成：固定的15人民币出场费，以及根据他们在实验中的绩效发放的奖金

[1]人民币是中国货币的计量单位，7 元人民币约合 1 美元。

。每轮的收益点数等于固定奖励减去该轮的出行时间。所有轮次的收益点数总和按“50点 = 1 人民币”的比例兑换为现金奖励。参与者平均获得98人民币，最高为130人民币，最低为85人民币。

2.4 实验结果的描述性统计

首先，对于每个情景，比较所有会话中同一路径的观测平均流量，通过 Wilcoxon符号秩检验未发现显著差异（所有$p > 0.05$）。因此，将同一情景不同会话收集的数据合并分析，这与以往研究（如 Selten 等人（2007）和 Rapoport（2014））的做法一致。

其次，实验数据的描述性统计结果列于表2和表3。总体而言，流量和出行时间的均值都接近动态用户均衡的均衡点。关于方差，在双路径场景（情景1–5）中，表3显示两条路径的流量方差非常接近；结果表明，对流量成本敏感度较高的路径，其旅行时间方差也较大。在三路线情景（情景6–8）中，路径1的流量方差最大，但旅行时间方差最小；路径3的流量方差最小，但旅行时间方差最大，这主要是由于成本敏感度不同。

表2：各情景下不同路径的出行时间描述性统计。

情景	路径1			路径2			路径3		
	DUE	Mean	S.D.	DUE	Mean	S.D.	DUE	Mean	S.D.
1	22	22.08	3.55	22	21.92	3.55	—	—	—
2	54	53.59	6.09	54	54.61	9.14	—	—	—
3	27	26.83	3.42	27	27.25	5.13	—	—	—
4	55.2	54.35	7.52	55.2	56.48	11.28	—	—	—
5	27.6	27.21	3.90	27.6	28.18	5.84	—	—	—
6	54	53.86	5.99	54	54.45	8.61	54	53.68	10.32
7	27	26.96	3.34	27	26.47	4.64	27	27.80	5.90
8	70	71.11	10.11	70	70.58	14.23	70	78.32	22.93

虽然流量和出行时间的平均趋势接近动态用户均衡（DUE）均衡点，但每一轮的具体数值仍在均衡点附近波动（示意见图2），这与先前的报告一致（Selten 等，2007；Meneguzzer

表3：各情景下所有路线的路径流量描述性统计。

情景	路径1			路径2			路径3		
	DUE	Mean	S.D.	DUE	Mean	S.D.	DUE	Mean	S.D.
1	8	8.04	1.77	8	7.96	1.77	—	—	—
2	11	10.90	1.52	5	5.10	1.52	—	—	—
3	11	10.92	1.71	5	5.08	1.71	—	—	—
4	10.8	10.59	1.88	5.2	5.41	1.88	—	—	—
5	10.8	10.61	1.95	5.2	5.39	1.95	—	—	—
6	8	7.96	1.50	5	5.08	1.43	3	2.96	1.29
7	8	7.98	1.67	5	4.82	1.55	3	3.20	1.48
8	12	12.1	2.26	8	7.87	2.19	4	4.13	1.75

和 Olivieri，2013；Dixit 和 Denant-Boemont，2014）。本研究侧重于分析和建模平均趋势网络流动态，而非同时研究趋势和随机波动，因为这会使单篇论文涉及的内容过多。未来将进一步探讨能够重现此类随机波动模式的模型。

3. 实验结果的行为分析

3.1. 切换率

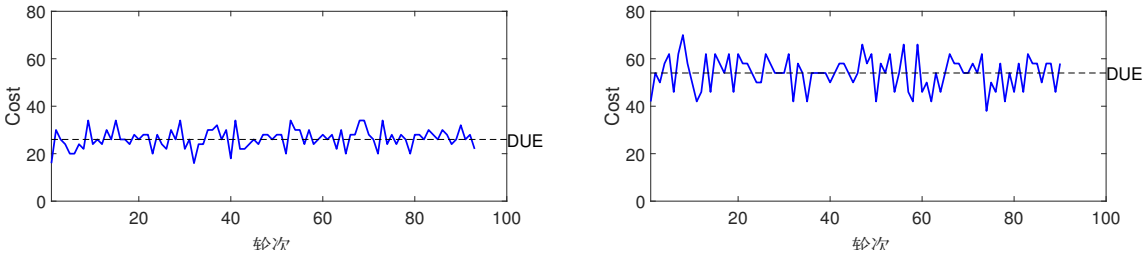
为衡量各轮次中的切换行为，我们首先定义如下指标。

定义：切换率。 假设存在连接一个起讫点对的 N 条可行路径。对于可行路径集合中的任意两条路径 i 和 j，切换率 p_{ij}^t 定义为在时间 t 与下一时刻 $t+1(t \geq 1)$期间从路径 i 切换至路径 j 的出行者比例。显然，p_{ii}^t 是保持在其最后选择的路径i上的出行者比例，并且$p_{ii}^t = 1 - p_{ij}^t$ 当仅有两条路径时。

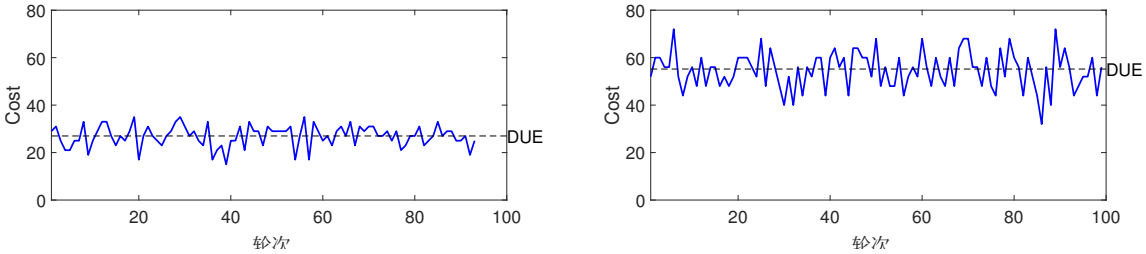
3.2. 基准模型

选取三种经典模型作为描述实验结果的基准模型，即完全理性选择（PRC）模型、多项Logit（MNL）模型和理性行为调整过程（RBAP）模型。

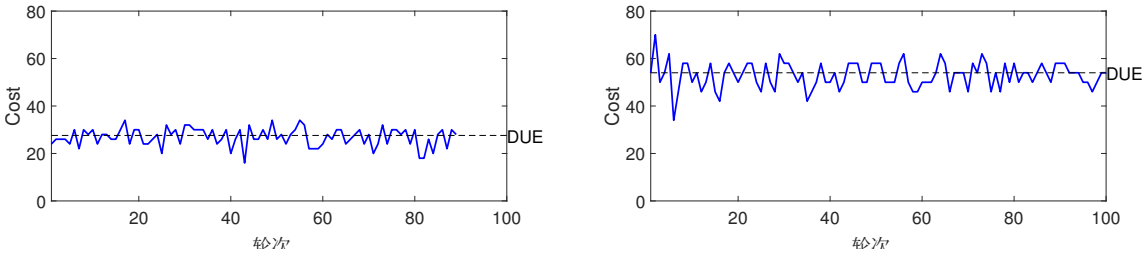
PRC 模型是一种直观、理性的个体层面路径选择规则。该模型要求：“出行者只有在存在成本更低的路径时才改变其路径，并且至少有一些出行者，如果



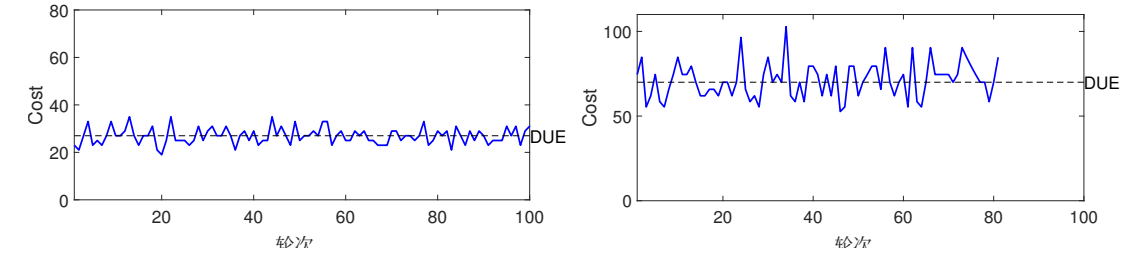
(a) 场景1 (b) 场景2



(c) 场景3 (d) 场景4



(e) 场景5 (f) 场景6



(g) 场景7 (h) 场景8

图2：实验中所有情景的出行时间变化。此处以路径1上的路径成本（即出行时间）为例。

并非所有出行者都会这样做，除非前一天所有出行者都选择了成本最低的路线”（Zhang 等人，2001年）。

基于随机效用理论的 MNL 模型能够捕捉出行者在进行路径选择时的感知误差（Sheffi，1985年）。假设出行者以感知效用最大化（而非实际效用最大化）的方式选择路线（Daganzo，1977年）。对于包含两条平行路径的简单网络，MNL 模型可以简化为二元形式。图3展示了使用 MNL 模型估算的切换率。可以看出，在路径 i 的成本等于路径 j 的成本时，即处于 DUE点，切换率为 0.5。将 MNL 模型用作路径选择准则时，会使网络交通流在总体层面达到随机用户均衡（Sheffi，1985年；Cantarella 等人，2019年）。

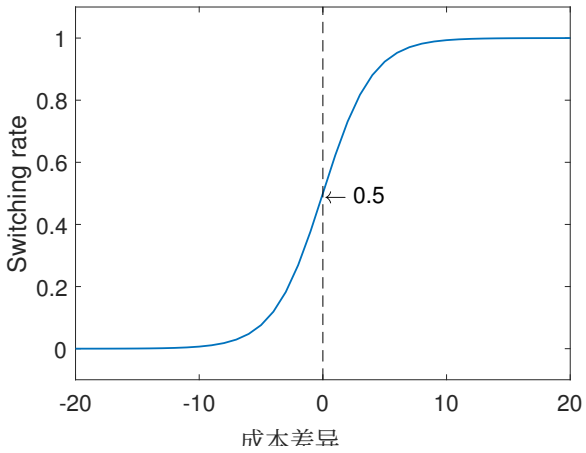


图3：经典 MNL 模型预测的切换率。

与上述两种模型不同，RBAP 模型定义的是路径流量的变化模式，而非个体的路径选择，因此它是一种聚合模型。RBAP 模型假设：“当路径流量逐日变化时，网络的总出行成本会根据前一日的路径出行成本而降低；若达到用户均衡，路径流量便会逐渐趋于稳定”（Yang 和 Zhang，2009年）。与 PRC 模型要求所有出行者都完全理性的强假设相比，这是一个较为宽松的假设（Zhang 等人，2001年）。Yang 和 Zhang（2009年）表明，五种常见的日间交通调整机制均属于 RBAP，因此 RBAP 模型是 DTD动态的代表性模型。

显然，PRC 和 MNL 模型是基于不同的个体

行为假设提出的。因此，值得探究这些行为假设能否充分解释实验观测结果；我们将在第3.3 节回答这个问题。相比之下，RBAP 模型描述的是聚合层面的流量调整过程，而非出行者选择。虽然检验实验数据是否符合 RBAP 模型的预测也很有意义，但我们将此留待未来研究，因为本文的重点是路径选择行为。

3.3. 观测切换率

本小节对观测到的切换率进行说明性分析，旨在找出现有理论与我们的实验观测结果之间的差距。我们采用以下两种方法来研究平均切换率与成本组合之间的关系。请注意，此处我们仅分析双路线情景；由于三路线情景的结果较为复杂，难以通过图示直观呈现，因此将其分析留至第5.2.2节。

- **方法1**。我们采用平均切换率 $\bar{p}_{ij}$ 作为直观指标，其计算方式如下。

$$\bar{p}_{ij}(\vec{c}) = \frac{\sum_{t \in T(\vec{c})} p_{ij}^{t}}{|T(\vec{c})|} \tag{1}$$

  其中，$\vec{c}$ 表示特定的成本组合，$T(\vec{c})$ 表示所有路径的成本均等于 $\vec{c}$的轮次集合。平均切换率可视为消除个体异质性和随机因素后群体平均行为的体现。结果见图4。

- **方法 2**。我们采用逻辑回归来描述双路径场景中的二元选择过程。切换率模型如下所示，并使用最大似然估计和所有实验数据进行拟合。

$$p_{ij} = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_0 + \theta_1 (t_i - t_j))}} \tag{2}$$

  这里直接采用逻辑回归的标准形式，因为我们打算先通过拟合统计模型来解释数据，然后再从选择行为的角度正式提出模型。与简单平均策略相比，不同成本组合对应的数据贡献可以

通过最大似然估计进行适当加权，而不受频率影响。拟合曲线见图4，参数列于表4，结果表明所有变量均显著。我们进一步使用分箱残差图（Gelman 和 Hill, 2006）评估模型的拟合效果，如图5所示。可以看出，残差不存在系统性模式，且大多数数据点落在95%置信限之间，这表明逻辑回归模型能够有效描述实验数据的趋势。

表4：所有双路径场景（场景 1–5）切换率的回归结果。

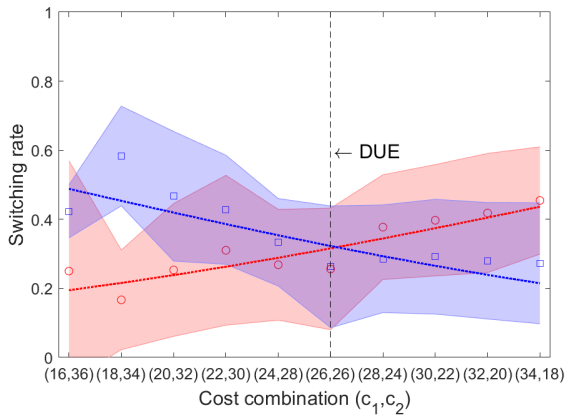
情景		p_{12}		p_{21}	
		系数	p值	系数	p值
1	θ_1	0.0324	0.000***	0.0347	0.000***
	θ_0	-0.773	0.000***	-0.741	0.000***
2	θ_1	0.0175	0.000***	0.0290	0.000***
	θ_0	-1.564	0.000***	-0.692	0.000***
3	θ_1	0.0334	0.000***	0.0318	0.000***
	θ_0	-1.435	0.000***	-0.399	0.000***
4	θ_1	0.0127	0.000***	0.00779	0.005**
	θ_0	-1.166	0.000***	-0.149	0.008**
5	θ_1	0.0216	0.000***	0.0190	0.000***
	θ_0	-1.214	0.000***	-0.262	0.000***

*p <0.05，**p <0.01，***p <0.001

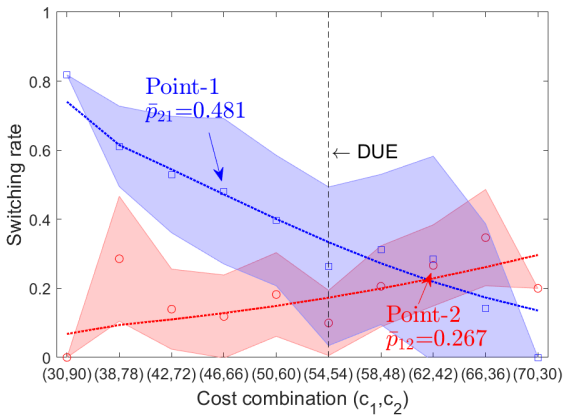
根据图4所呈现的结果，我们对实验中的切换率有以下观察和备注。

- **备注1**：切换率随着最后选择的路线与其备选路线之间成本差异的增大而呈上升趋势；即使最后选择的路线优于备选路线，切换率仍为正。

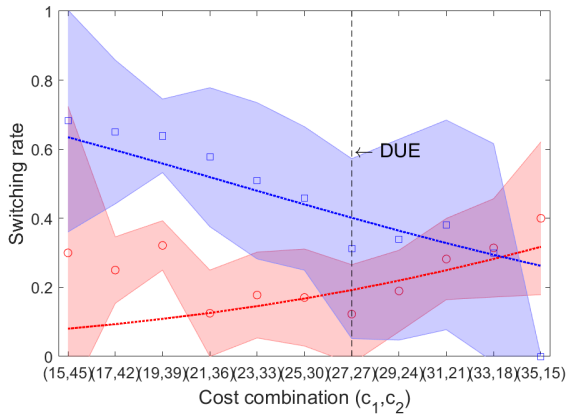
相应观察。从图4可以看出，平均切换率 $\bar{p}_{21}$（蓝色方块）随着$c_2 - c_1$的值增加（即成本组合轴从左向右的方向）而降低，这表明切换率随着最后选择的路线与其备选路线之间成本差异的增大而增加。当$c_1 < c_2$时（即DUE线的左侧部分），平均切换率仍大于零，这表明即使最后选择的路线优于备选路线，切换率仍为正。



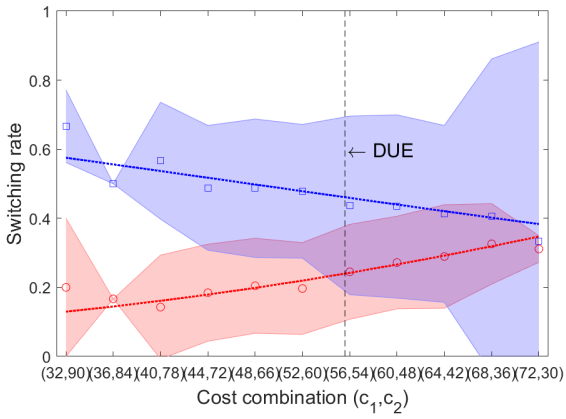
(a) 场景1



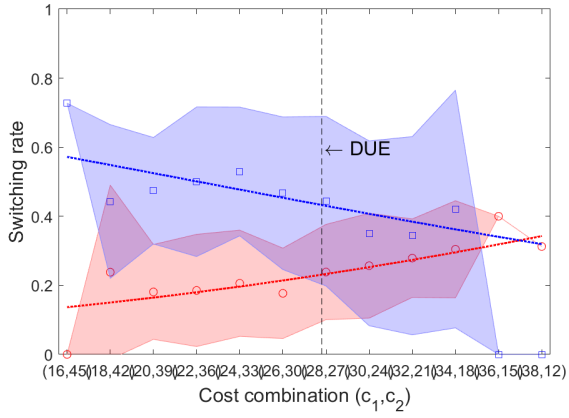
(b) 场景2



(c) 场景3



(d) 场景4



(e) 场景5

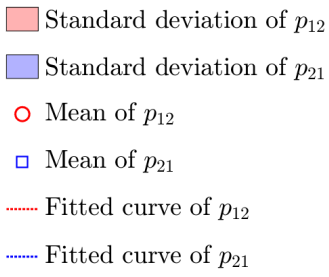
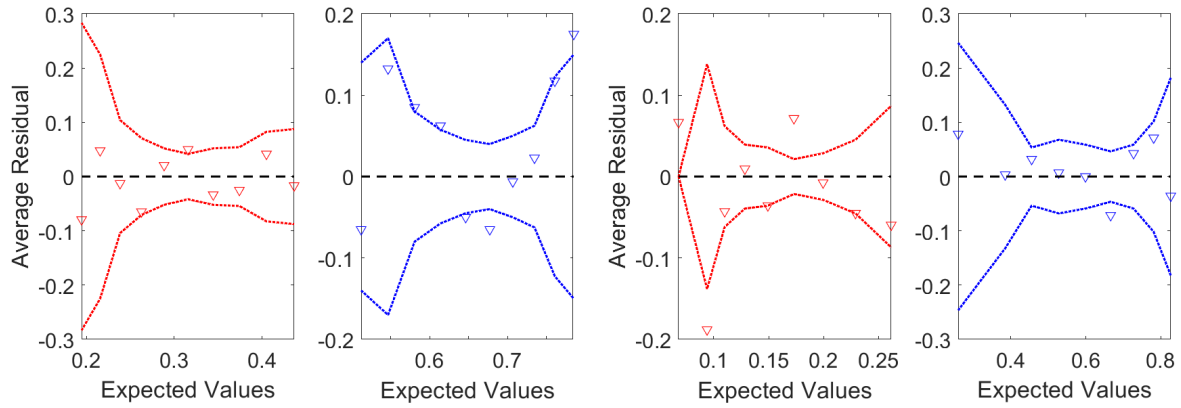
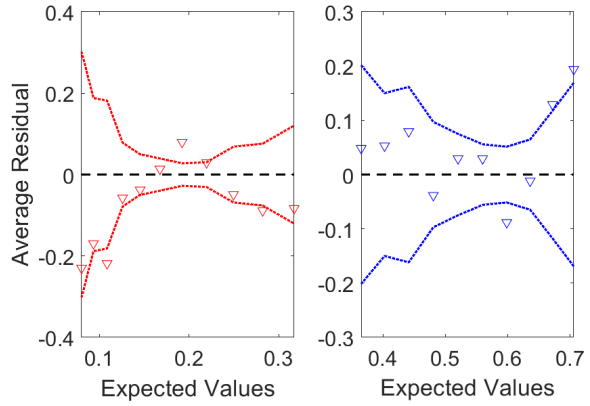


图4：所有双路径场景（场景 1–5）的观测切换率。

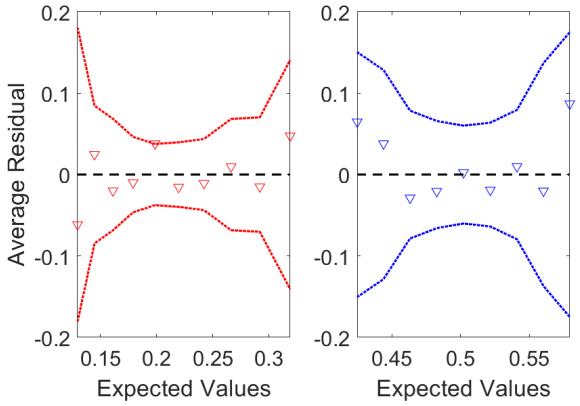


(a) 场景1

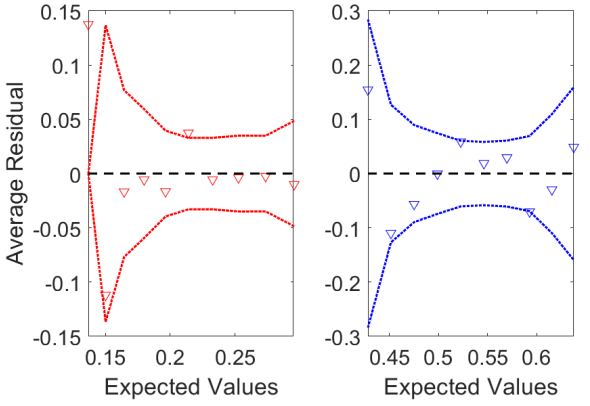
(b) 场景2



(c) 场景3



(d) 场景4



(e) 场景5

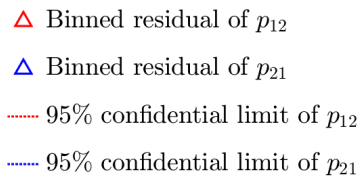


图5：所有双路径场景（场景 1–5）的分箱残差图。

PRC 模型无法描述这一现象，因为它假设出行者绝不会切换到成本更高的任何路线（Zhang 等人，2001年）。相比之下，MNL 模型允许出行者切换路线，即使他们上一次选择的路线实际上更优，因此它与观察结果更加一致。

• **注2**：当网络为非对称时，*DUE*点处两条路径的平均切换率均介于*0*和*0.5*之间，且二者有显著差异。

相应的观察结果。在图4(b)-(e)中，即非对称情景下，DUE点处路径2（蓝色方块）的平均切换率均高于路径1（红色圆圈）。相比之下，在图4(a)中，即对称情景下，DUE点处蓝色方块与红色圆圈重合。在表4中还可以发现，在非对称情景下，所有 θ_0 的p_{21} 均大于p_{12}，这意味着在DUE点处（$t_1 - t_2 = 0$），从路径2切换到路径1的概率大于从路径1切换到路径2的概率。

采用t检验评估上述观察结果是否具有统计显著性。表5的结果表明，在显著性水平为0.05时，观察结果支持备注2。相比之下，PRC 模型和 MNL 模型预测的理论切换率分别为0和0.5，这表明 MNL 模型和 PRC 模型都无法解释这些观察结果。

表5：所有双路径场景（场景 1–5）中备注2的假设检验 .

备择假设 假设	p值				
	场景1	场景2	场景3	场景4	场景5
$\bar{p}_{12} < 0.5$ 处于动态用户均衡	0.000***	0.000***	0.000***	0.000***	0.000***
$\bar{p}_{21} < 0.5$ 在动态用户均衡时	0.000***	0.000***	0.000***	0.034*	0.036*
$\bar{p}_{12} \neq \bar{p}_{21}$ 在动态用户均衡时	0.832	0.000***	0.000***	0.000***	0.000***

*p <0.05，**p <0.01，***p <0.001

• **备注3**：平均切换率不仅取决于路径之间的成本差异，还取决于最后选择的路线的特征。

相应观察结果。以场景2中的两种成本组合为例，参见图4(b)中标注的点1和点2。可以发现

– 点*1*：当最后选择的路径（即路径2）的成本比其备选路线（即路径1）高20时，平均切换率为 $\bar{p}_{21} = 0.481$，即 $(c_1, c_2) = (46, 66)$ 且 $c_2 - c_1 = 20$。

– 点*2*：当最后选择的路径（即路径1）的成本比其备选路线（即路径2）高20时，平均切换率为 $\bar{p}_{12} = 0.267$，即 $(c_1, c_2) = (62, 42)$ 且 $c_1 - c_2 = 20$。

表6列出了场景1-3中各路径成本差异相同时的所有切换率及统计检验结果。我们采用双比例z检验来检验观测结果是否具有统计显著性。对于场景1，在显著性水平为0.05时，检验结果表明，在所有路径成本差异相同的情况下，$\bar{p}_{12}$ 与 $\bar{p}_{21}$ 之间均不存在显著差异。相比之下，在非对称网络的场景2和场景3中，大多数情况下均接受备择假设“$p_{21} \neq p_{12}$”，这意味着即使这两个场景中的路径成本差异相同，切换率仍存在差异。例外情况有两种，两种情况下均有一条路径上的出行者人数较少（例如，在场景2中，$c_2 = 36$ 显示，由成本函数$c_2 = 6f_2 + 24$得出的路径2上只有两名出行者；见表1）。这会导致切换率出现较大偏差，使结果难以预测。

总之，上述分析表明，仅考虑成本差异的 RBAP 和 MNL 模型都无法完全描述观测到的实验结果。具体而言，备注1和备注2表明，出行者以类似 Logit 的方式进行路径选择，并表现出“惯性”，即出行者倾向于坚持选择最后选择的路线。此外，备注3指出，出行者的选择行为不仅受先前路径成本的影响，也受最后选择的路线的其他特征影响，这意味着出行者会区别对待具有不同固有特征的路线。为充分反映实验观测结果，我们将在第4节提出一种解析型 DTD 模型。

4. 解析型 DTD 动态模型

4.1. 路线依赖吸引力的行为假设

如备注1所示，MNL 模型的表现优于 PRC 模型。因此，我们选择基于随机效用理论的模型（具体而言，即 Logit 选择模型）作为提出新模型的基

表6：统计　　当路径成本差异相同时，不同切换率的统计检验　　.

情景	路径 1 → 路径2				路径 2 → 路径1				p值 (H1: $\bar{p}_{21} \neq \bar{p}_{12}$)
	c_1	c_2	$c_1 - c_2$	$\bar{p}_{12}$	c_2	c_1	$c_2 - c_1$	$\bar{p}_{21}$	
1	20	32	-12	0.253	20	32	-12	0.353	0.901
	22	30	-8	0.310	22	30	-8	0.292	0.773
	24	28	-4	0.267	24	28	-4	0.286	0.693
	28	24	4	0.377	28	24	4	0.305	0.222
	30	22	8	0.397	30	22	8	0.428	0.483
	32	20	12	0.363	32	20	12	0.503	0.504
2	42	72	-30	0.154	36	66	-30	0.142	0.709
	46	66	-20	0.119	42	62	-20	0.286	0.000***
	50	60	-10	0.182	48	58	-10	0.313	0.000***
	58	48	10	0.206	60	50	10	0.396	0.000***
	62	42	20	0.266	66	46	20	0.481	0.000***
	66	36	30	0.346	72	42	30	0.574	0.008**
3	21	36	-15	0.125	18	33	-15	0.333	0.045*
	23	33	-10	0.178	21	31	-10	0.458	0.001**
	25	30	-5	0.171	24	29	-5	0.338	0.000***
	29	24	5	0.190	30	25	5	0.457	0.000***
	31	21	10	0.298	33	23	10	0.508	0.000***
	33	18	15	0.367	36	21	15	0.576	0.000***

*p <0.05，**p <0.01，***p <0.001

提出新模型的依据。

接下来，我们定义路径依赖吸引力，以解释备注 2 和 3 中所示的观察结果，即受试者对不同路径的看法不同。为此，我们将路径选择决策过程分为两个步骤，分别由以下两种路径依赖吸引力主导。

- 路径依赖惯性。惯性意味着，无论上一轮路径的成本如何，出行者都有一种持续选择最后选择的路线的倾向。更重要的是，这里的惯性具有路径依赖性，意味着出行者选择不同路线的倾向各不相同。

- 路径依赖偏好。打算克服惯性的出行者会重新考虑其路径选择。转换决策不仅受到最后选择的路线与备选路线之间的成本差异影响，也受到出行者路径属性相关偏好的影响。

上述假设背后可能存在各种心理机制或理论基础

。

• 我们使用“惯性”一词，主要是指维持现状的倾向（即坚持先前的选择）。多种可能的心理机制都可以解释这种维持现状的行为倾向（Qi 等（2019）），包括“无差异区间”（Hu 和 Mahmassani，1997年）、“努力—准确性权衡”（Chorus 和 Dellaert，2012）、“后悔规避”（Chorus 等，2008），或单纯的人类惰性等。这种倾向也可能源于“策略性思维”：人们决定维持现状，是因为他们认为其他选择同一路径的人会转而选择其他路径，从而使自己所选路径不那么拥挤。

• Qi 等（2019）观察到维持现状类别（在本文中相当于具有路径依赖“惯性”的参与者）和高度风险厌恶类别（大致相当于具有路径依赖“偏好”的参与者）。根据以往研究结果，我们认为，路径依赖偏好的成因之一是风险厌恶。根据著名的均值-方差决策规则（Meyer，1989；Noland 和 Polak，2002；Avineri 和 Prashker，2005），人们做决策时不仅会考虑候选选项的期望效用均值，也会将该选项的方差纳入考量，因为大多数人都厌恶较大的方差。

此前已有多项研究讨论过类似术语，但本文中的定义在以下方面不同于现有定义。

• 选择惯性已被用于路径选择建模（Zhang 和 Yang（2015）；Cantarella 和 Watling（2016））。在 Zhang 和 Yang（2015）中，惯性被定义为出行者从所有备选路径的一个子集中选择路径，这与本文中的定义不同。本文中的定义与 Cantarella 和 Watling（2016）中的定义相似，但我们发现惯性依赖于路径，并提供了实验性证据。

• Ye 等（2018）提出并利用虚拟实验数据检验了路径依赖偏好的假设。该假设认为，路线之间的流量交换取决于起点、目标路径以及成本差异，

但未提供实证数据来支持这一假设。不同的是，本文假设路径依赖偏好会影响出行者的路径切换概率，从而为路径依赖偏好提供更好的行为解释。此外，该假设得到了实验观测的支持。

- 更重要的是，我们将惯性和路径依赖偏好同时纳入基于离散选择的分析模型中，该模型能够令人满意地再现实验观测结果。这是本文的主要贡献之一。

4.2. 路径切换模型

与一些现有研究一样，我们仅考虑一个由多条路径连接的单一起讫点对网络。该简单网络有助于我们将重点放在选择过程上，而不是本文不关注的其他因素上。多个起讫点对的扩展将留待未来研究。

根据路径依赖吸引力的假设，我们提出，路径i 具有一个特定于该路径且恒定的吸引力系数，记为 η_i。假设同一情景中的出行者具有同质性，因此路径i 对所有出行者具有相同的吸引力。在时间t，从当前使用的路径i 切换到任意其他路径j 的切换率p_{ij}^t 可计算如下。

$$p_{ij}^t = \begin{cases} P_i \hat{p}_{ij}^t, & \text{if } i \neq j \\ (1 - P_i) + P_i \hat{p}_{ij}^t, & \text{if } i = j \end{cases} \tag{3}$$

其中，P_i （$P_i \in [0,1]$）表示在路径i上重新考虑路径选择的出行者比例。P_i 可能与许多因素有关，例如其他路径的特征。然而，为了使模型具有可分析性，我们简单地假设P_i 是一个仅与路径i属性相关的常数，例如路径长度和限速，并且我们将展示该模型在实验数据上具有令人满意的绩效。$\hat{p}_{ij}^t$ （$\hat{p}_{ij}^t \in [0,1]$）是最终选择率，即在P_i所代表的出行者中切换至路径j 的出行者比例。更具体地说，我们对公式 3 解释如下。

术语$(1 - P_i)$ 表示路径依赖惯性行为，即只有一定比例的 n

出行者（P_i）会重新考虑自己的选择，其余比例的出行者（$1-P_i$）则会坚持选择最后选择的路线。设P_i为η_i的递减函数（写作$P_i = P(\eta_i)$），这是考虑到吸引力较高的路径上，重新考虑离开的出行者较少这一事实。

选择路径i 在时间t 的效用u_i^t 定义为确定性分量的加性函数与随机误差项 ζ之和。

$$u_i^t = -C_i^t + \zeta \tag{4}$$

其中，$C_i^t = C(c_i^t, \eta_i)$和c_i^t分别表示路径i在时间t的成本；$C(c_i^t, \eta_i)$是通用成本函数，考虑如下因素：选择成本较低的路径会带来更高的效用。对于成本相同的路径，选择吸引力系数更高的路径会带来更高的效用。由此可知，$\partial C/\partial c_i^t > 0$ 和 $\partial C/\partial \eta_i < 0$。因此，路径依赖偏好由$C_i^t$体现。

现有研究提出，出行者会根据历史出行成本更新其感知或路径（Cantarella 和 Cascetta，1995年；Cantarella 和 Watling，2016；Cantarella 等人，2019年）。不同的是，本研究假设出行者仅根据上一轮的成本做出决策。这一设定有助于聚焦于主要假设（路径依赖吸引力），并且与许多现有模型一致。成本更新的作用是一个值得在未来进一步探讨的重要问题。

此外，假设随机误差项 ζ 服从独立同分布（IID）的 Gumbel 分布，则

$$\hat{p}_{ij}^t = \frac{e^{-\theta C_j^t}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k^t}} \tag{5}$$

其中，θ 为离散参数。

最后，将时刻 t 从路径 i 切换到路径 j 的切换率 p_{ij}^t 表示如下：

将公式 5 代入公式 3。

$$\text{Switching Rate:} \quad p_{ij}^t = \begin{cases} P_i \dfrac{e^{-\theta C_j^t}}{\sum_{k=1}^N e^{-\theta C_k^t}}, & \text{if } i \neq j \\ (1-P_i) + P_i \dfrac{e^{-\theta C_j^t}}{\sum_{k=1}^N e^{-\theta C_k^t}}, & \text{if } i = j \end{cases} \tag{6}$$

结合路径依赖惯性 $P_i = P(\eta_i)$ 和路径依赖偏好 $C_i^t = C(c_i^t, \eta_i)$。

上述选择过程适用于处理同一起讫点对之间存在多条路径的情况，因为每一轮中，路径i 上的出行者都会针对同一起讫点对之间的每一条其他路径j产生一个切换率。从本质上说，p_{ij}^t 是一个条件路径选择率，同时取决于参照路径和目标路径（Ben-Akiva 和 Morikawa，1990；Cantarella 等人，2019）。

4.3. 网络流演化模型

假设在时间t 时，路径i 上有f_i^t 名出行者（即路径流量）。从路径i 转换到路径j的流量转换期望值记为 Δf_{tij}，其表达式如下。

$$\Delta f_{ij}^t = p_{ij}^t f_i^t \tag{7}$$

那么，时间$t+1$ 时路径i 上的流量为

$$f_i^{t+1} = \sum_{k=1}^N \Delta f_{ki}^t \tag{8}$$

其中，N 是连接同一起讫点对的路径可行集大小。

时刻t 路径i 上的流量可通过将公式 6 代入公式 8 得到，如下所示。

$$f_i^{t+1} = (1-P_i) f_i^t + e^{-\theta C_i^t} \frac{\sum_{k=1}^N P_k f_k^t}{\sum_{k=1}^N e^{-\theta C_k^t}} \quad \Rightarrow \quad f_i^{t+1} - f_i^t = -P_i f_i^t + e^{-\theta C_i^t} \frac{\sum_{k=1}^N P_k f_k^t}{\sum_{k=1}^N e^{-\theta C_k^t}}. \tag{9}$$

公式 9 的连续时间形式可写为如下形式。

$$\dot{f}_i = -P_i f_i + \sum_{k=1}^{N} P_k f_k \frac{e^{-\theta C_i}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}}. \tag{10}$$

公式 10 中的模型属于 Cantarella 和 Cascetta（1995）所提出框架的一部分，也可以视为 Cantarella 和 Watling（2016）中指数平滑滤波器的扩展。然而，所提出的模型与现有模型之间存在显著差异。首先，路径依赖吸引力（尤其是路径依赖惯性和偏好）的引入得到了多情景实验数据观测结果的启发，使该模型能够更好地解释人类旅行者的路径选择行为。其次，路径依赖惯性使所提出模型的形式不同于 Cantarella 和 Watling（2016）中的模型，因此需要采用不同的技术来分析该模型的特征。

令 $\dot{f}_i = 0$，流量演化模型的固定点，即网络流的均衡点，写为如下形式。

$$f_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{P_i} \frac{e^{-\theta C_i}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}}. \tag{11}$$

由公式 11 可知，该模型的均衡是随机用户均衡的泛化；当 $P_i = 1$ 和 $C_i = c_i$ 时，它将与随机用户均衡完全相同。我们将在第 6 节通过数值示例说明该模型的均衡状态。

4.4. 均衡的存在性与唯一性

对于具有 N 条路线的起讫点对，我们将最小化问题表述如下。

$$\begin{aligned} &\min z(\vec{f}) \\ &\text{s.t.} \quad F = \sum_{i}^{N} f_i \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$z(\vec{f}) = \sum_{i=1}^{N} \theta \int_0^{f_i} C(c_i(x), \eta_i) \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N} f_i \ln(P_i f_i) \tag{13}$$

其中 $c_i(\cdot)$ 是路径i 的流量成本函数，F 是 OD 交通需求。这是一个凸规划问题，利用Karush-Kuhn-Tucker条件可得到唯一的最小值，如下所示。令

$$H = z(\vec{f}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} f_i - F \right) \tag{14}$$

然后

$$\frac{\partial H}{\partial f_i} = \theta C_i + [\ln(P_i f_i) + 1] - \lambda = 0. \tag{15}$$

假设成本函数关于路径流量是凸可分的，对于 $\forall i,j\ (i \neq j)$，我们有

$$\theta C_i + [\ln(P_i f_i) + 1] = \theta C_j + \left[\ln(P_j f_j) + 1\right] \tag{16}$$

and

$$\begin{aligned} & \ln(P_i f_i) - \ln(P_j f_j) = \theta C_j - \theta C_i \\ \Rightarrow \quad & \frac{P_i f_i}{P_j f_j} = e^{\theta C_j - \theta C_i} = \frac{e^{-\theta C_i}}{e^{-\theta C_j}} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{P_i f_i} = \frac{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}}{e^{-\theta C_i}} \\ \Rightarrow \quad & f_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{P_i} \frac{e^{-\theta C_i}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}}. \end{aligned} \tag{17}$$

可以注意到，公式 17 等于模型的均衡点（公式 11），因此证明了均衡存在且唯一。

4.5. 稳定性分析

现在，我们使用以下**李雅普诺夫定理**（Shafer, 1995年；Smith, 1984；Jin, 2007）证明f 是渐近稳定的。对于动力系统 $\dot{x} = g(x)$，如果存在一个在定义域 Ψ 上处处定义的连续可微标量函数$V(x)$，使得该系统在驻点 $\bar{x}$处渐近稳定，则

- $V(x) \geqslant 0, \forall x \in \Psi$;

- $V(x) = 0$，当且仅当x 是驻点 $\bar{x}$；
- $V'(x) < 0$，若x 不处于驻点 $\bar{x}$。

首先，我们构造一个标量函数

$$V(\vec{f}) = z(\vec{f}) - \min z(\vec{f}) \tag{18}$$

然后，可以验证

- $V(\vec{f}) \geqslant 0$ 在整个定义域内；
- $V(\vec{f}) = 0$ 在均衡点处，因为我们已证明$z(\vec{f})$ 的最小值可在均衡点处取得；

- $V'(\vec{f}) < 0$ 证明如下。

$$V'(\vec{f}) = \mathrm{grad}V(\vec{f})\dot{\vec{f}} = \sum_{i=1}^{N}[\theta C_i + \ln(P_i f_i) + 1]\left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i}\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}}\right] \tag{19}$$

其中 $\mathrm{grad}V(\vec{f})$ 是f_i 的梯度。显然，

$$\sum_{i=1}^{N}\left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i}\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}}\right] = 0. \tag{20}$$

因此，公式 19 可简化为以下方程。

$$V'(\vec{f}) = \sum_{i=1}^{N}[\theta C_i + \ln(P_i f_i)]\left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i}\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}}\right]. \tag{21}$$

对于任意路径 i，如果

$$-P_i f_i + e^{-\theta C_i}\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} < 0, \tag{22}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&[\theta C_i + \ln(P_i f_i)] \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right] \\
&\qquad < \left[\theta C_i + \ln \left(e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right) \right] \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right] \\
\Rightarrow \quad &[\theta C_i + \ln(P_i f_i)] \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right] \\
&\qquad < \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right) \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right].
\end{aligned} \tag{23}$$

If

$$-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} > 0, \tag{24}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
&[\theta C_i + \ln(P_i f_i)] \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right] \\
&\qquad < \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right) \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right].
\end{aligned} \tag{25}$$

结合公式19、23和25，最终证明$V'(f_i) < 0$ 如下。

$$\begin{aligned}
V'(\vec{f}) &= \sum_{i=1}^{N} [\theta C_i + \ln(P_i f_i) + 1] \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right] \\
&< \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right) \sum_{i=1}^{N} \left[-P_i f_i + e^{-\theta C_i} \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k f_k}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k}} \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

5. 模型校准与验证

5.1. 测试模型

使用实验数据对以下三个模型进行检验。

• 模型 A：完整模型。一般性不失，设P_i 和C_i 的形式分别为$P_i = 1 - \eta_i$ 和$C_i = (1 - \eta_i)c_i$。

• 模型 B：不考虑路径依赖吸引力的模型。η_i 为常数，η 且C_i 与η_i无关。为简化起见，我们假设路径i 上的广义成本等于实际出行时间，即$C_i = c_i$。这是 Cantarella 和 Watling（2016）提出的指数平滑滤波器，其选择过程采用 Logit 模型，记忆加权参数为 $\beta = 1$。这里，我们将其用作基准模型。

• 模型 C：一个不完整模型，仅考虑路径依赖惯性，即$\eta_i \neq \eta_j$（$i \neq j$），而C_i 与η_i无关。我们设定$P_i = 1 - \eta_i$ 且$C_i = c_i$。该模型可用于检验路径依赖惯性和偏好是否都不可或缺。

上述三个模型均为基于随机效用理论的模型。此处不检验 RBAP 和 PRC 模型，因为 RBAP 模型是聚合模型，未明确考虑个体出行者的选择行为；而 PRC 模型与实验观测结果存在较大偏差，如第 3.3 节所示。

由于受试者在不同选择条件下的选择行为有所不同，因此我们针对每种情景分别使用最大似然估计来估计模型。在校准过程中，最大似然估计会找出一组能够使L的对数值达到最大的参数，其中L是模型似然函数的自然对数。对于我们的模型，公式如下。

$$\log L = \sum_{a} \sum_{t=1}^{N} \log \Pr(R_{a,t+1} = j_{a,t+1} \mid \theta, \eta_i, c_{a,\vec{t+1}}), \tag{27}$$

其中，$j_{a,t+1}$ 是受试者a 在第$t+1$ 轮观察到的路径选择，而 $\sum_a$ 表示对相关情景中的所有受试者求和；$\vec{c}_{a,t+1}$ 是受试者a 在第$t+1$轮经历的成本组合。

下面引入三项性能指标，用于评估模型的绩效。

• 贝叶斯信息准则（BIC）。BIC 是在一组

有限模型中进行模型选择的准则（Schwarz 等人，1978年；Claeskens 等人，2008），其表达式为

$$\mathrm{BIC} = k\ln(n) - 2\ln(\hat{L}), \tag{28}$$

其中，$\hat{L}$ 是模型似然函数的最大值；n 是观测数据点的数量；k 是模型估计的参数数量。可以看出，贝叶斯信息准则反映了拟合优度（似然）与模型简洁性（参数数量）之间的权衡。贝叶斯信息准则值最低的模型为优选模型。

- 切换率的平均绝对百分比误差（MAPE）：

$$\mathrm{MAPE}_p = \frac{1}{|\mathbf{C}|N^2} \sum_{\vec{c}\in\mathbf{C}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\tilde{p}_{ij}(\vec{c}) - \bar{p}_{ij}(\vec{c})|}{\bar{p}_{ij}(\vec{c})}, \tag{29}$$

其中，$|\mathbf{C}|$ 是某一情景中成本组合集合的大小。为避免随机噪声，仅考虑出现次数超过某一阈值 θ （此处取 $\theta = 8$）的成本组合。

- 均衡流量的平均绝对百分比误差（MAPE）：

$$\mathrm{MAPE}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{|\tilde{f}_i - \bar{f}_i|}{\bar{f}_i}, \tag{30}$$

其中，$\bar{f}_i$ 和 $\tilde{f}_i$ 分别是路径i的实验平均流量和模型估计的均衡流量。由于实验中的路径流量持续波动，因此我们采用平均流量（见表2）作为均衡流量的近似值。

上述三个指标从两个不同角度评估模型的绩效。贝叶斯信息准则（BIC）用于衡量不同模型的相对绩效，而平均绝对百分比误差（MAPE）则可反映模型预测数据的能力。

表 7 展示了模型 A、B 和 C 的校准结果及绩效。可以看出：(i) 模型 A 在八个情景中均取得了最低的 MAPE^p 和 MAPE^f，其贝叶斯信息准则也最优，这表明额外的参数（相较于

模型 B）不可或缺。(ii) 模型 C 仅在双路径场景中表现良好；(iii) 与其他模型相比，除对称的场景1外，模型 B 在所有情景中的表现都不准确。以下两个小节将对各模型的绩效进行详细分析。

表 7：八个情景下模型 A、B 和 C 的校准结果。

情景	模型	θ	η_1	η_2	η_3	MAPE_p	平均绝对百分比误差 $_f$	BIC
1	A	0.0683	0.359	0.351	—	0.0896	0.0001	5647.002
	B	0.0439	0.355	0.355	—	0.0883	0.00563	5581.657
	C	0.0441	0.363	0.346	—	0.0899	0.00755	5647.048
2	A	0.0525	0.555	0.403	—	0.135	0.004	4845.526
	B	0.0349	0.532	0.532	—	0.230	0.145	4955.487
	C	0.0305	0.648	0.294	—	0.143	0.0082	4853.818
3	A	0.0665	0.518	0.307	—	0.112	0.0058	4854.039
	B	0.0493	0.471	0.471	—	0.277	0.211	4996.124
	C	0.0393	0.603	0.192	—	0.118	0.0034	4855.359
4	A	0.0204	0.443	0.197	—	0.0389	0.059	5980.376
	B	0.0208	0.377	0.377	—	0.245	0.181	6139.933
	C	0.0133	0.517	0.094	—	0.0508	0.0072	5983.256
5	A	0.0421	0.468	0.235	—	0.0571	0.007	6975.715
	B	0.00415	0.405	0.405	—	0.223	0.223	7145.333
	C	0.0271	0.537	0.140	—	0.0583	0.0110	6977.567
6	A	0.0168	0.480	0.315	0.125	0.197	0.0419	13936.454
	B	0.00302	0.362	0.362	0.362	0.337	0.337	14204.863
	C	0.0158	0.511	0.291	0.0867	0.250	0.134	14026.736
7	A	0.0266	0.439	0.218	0.0976	0.185	0.0504	14577.203
	B	0.00966	0.303	0.303	0.303	0.323	0.321	14842.366
	C	0.00633	0.467	0.186	0.0775	0.237	0.125	14652.433
8	A	0.00875	0.516	0.319	0.116	0.288	0.0784	18192.628
	B	0.00237	0.383	0.383	0.383	0.419	0.3354	18615.532
	C	0.00117	0.538	0.296	0.0863	0.338	0.0824	18497.270

5.2. 基于模型的估计结果

本小节分别展示并分析模型 A、B 和 C 在双路线和三路线情景下的估计结果。

5.2.1. 双路径场景

从表 7 可以看出，模型 A 和模型 C 在三项性能指标上的表现相近。相比之下，忽略路径依赖吸引力的模型 B 在所有情景中的表现都最差。

结果表明，仅使用路径依赖惯性即可衡量受试者在双路径场景中的选择行为。这是因为在双路径场景中面临二元选择（即是否切换）时，路径依赖惯性和偏好（在模型 A 中）的共同作用，可以由更大的路径依赖惯性（在模型 C 中）取代。

此外，值得注意的是，模型 B 在场景1中也表现良好。这可能是因为场景1中的对称路线对受试者具有相同的吸引力，这表明路径依赖吸引力十分重要。

为了解更多细节，图 6通过展示每种成本组合下两条路线的切换率，对比了基于模型估算的切换率与实验结果。可以发现，模型 A 和模型 C 能够很好地重现实验结果。然而，对于模型 B，两条路线的估算切换率（即p_{12} 和p_{21}）在动态用户均衡点处相互重合，因此与实验结果产生了较大偏差。这一现象是由于模型 B 缺少路径依赖吸引力所致。

5.2.2. 三路线情景

表 7显示，在三路线情景（情景6–8）中，模型 B 是三个模型中表现最差的，这与双路径场景中的结果一致。然而，与双路径场景不同的是，模型 A 在三路线情景中的表现优于模型 C。

图7和图8展示了三路线情景下的详细切换率，进一步证实模型 A 在预测切换率方面表现最佳。有趣的是，在预测 p_{ii} （即p_{11}, p_{22} 和p_{33}）时，模型 A 和模型 C 的表现相近。然而，在描述其他切换率时，模型 A 的误差要低得多。

上述观察表明，路径依赖惯性和偏好都会对 DTD 路径选择产生显著影响。我们推测，在三路线情景下，模型 A（即完整模型）优于模型 C（即仅考虑路径依赖惯性的模型），原因如下。当面对简单的二元

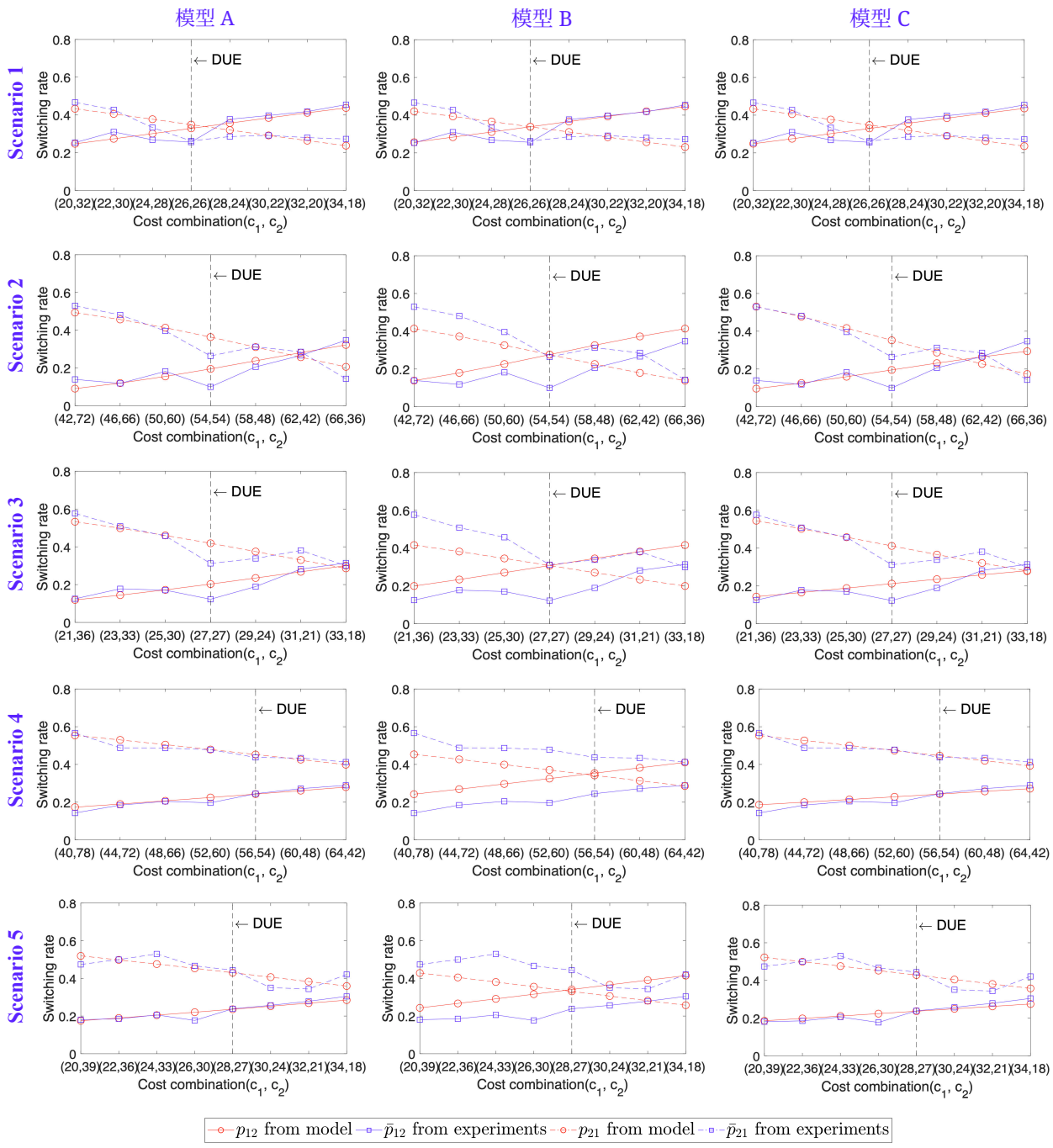
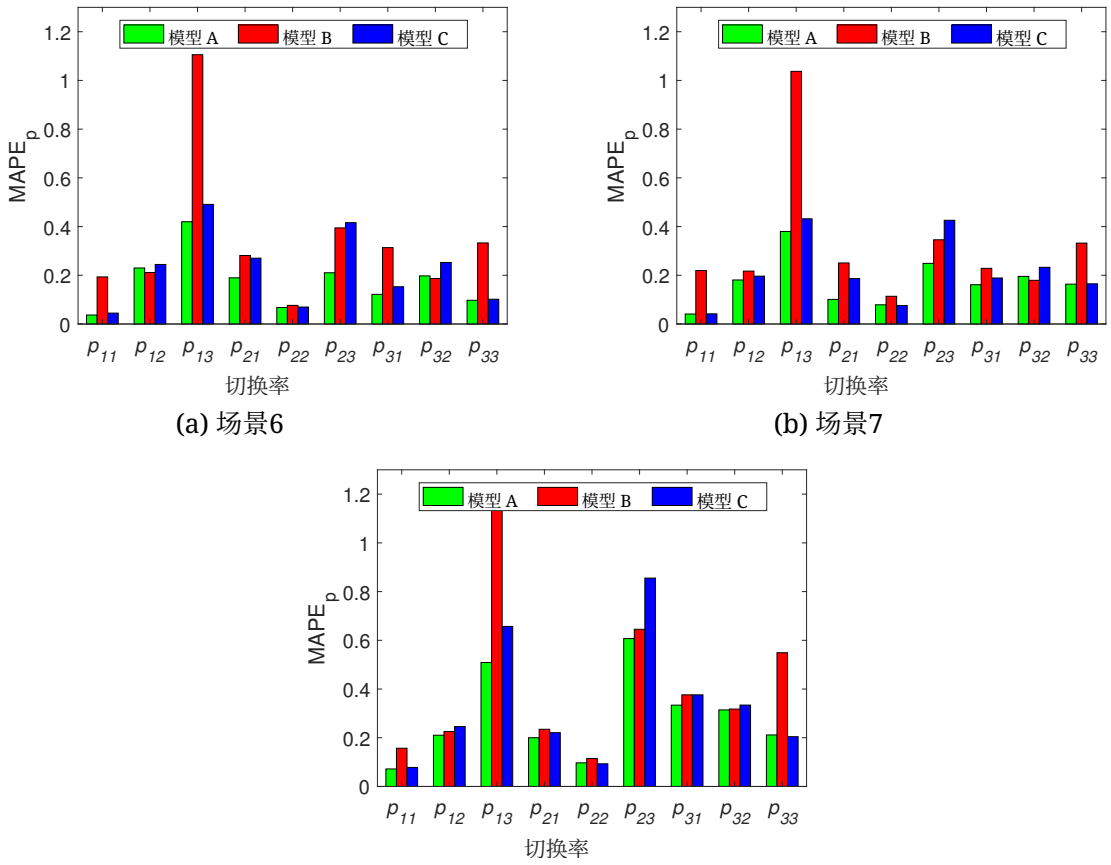


图 6：所有双路径场景（场景 1–5）中平均实验切换率与理论切换率的详细比较。

在双路径场景中的选择问题（即是否留在当前路径）中，受试者的路径选择可能更依赖于（路径依赖的）惯性。相比之下，当受试者在三路径情景中有多个选项时，路径依赖偏好会发挥更重要的作用。



(a) 场景6

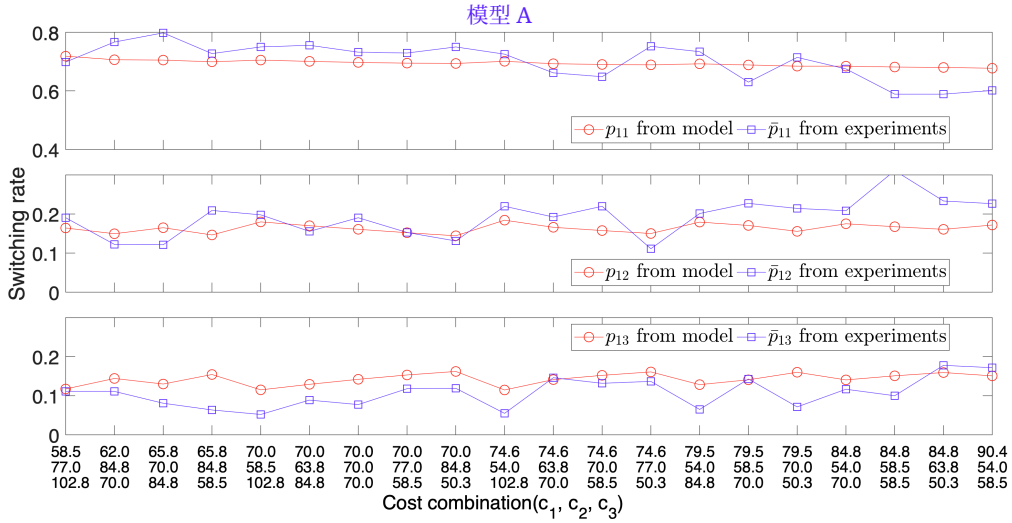
(b) 场景7

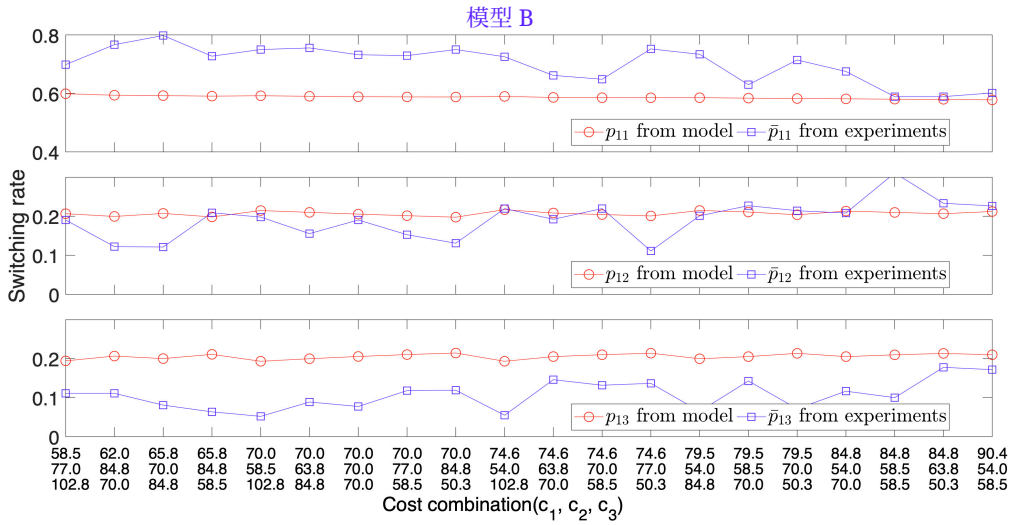
(c) 场景8

图7：模型A、B和C在三路径情景（情景6–8）中估计的各路线切换率的详细比较。



Figure 8a: Detailed comparison between the average experimental switching rates and theoretical switching rates in the three-route scenarios (Scenarios 6-8).


模型 A
Switching rate
p_{11} from model
$\bar{p}_{11}$ from experiments
p_{12} from model
$\bar{p}_{12}$ from experiments
p_{13} from model
$\bar{p}_{13}$ from experiments
58.5 62.0 65.8 65.8 70.0 70.0 70.0 70.0 70.0 74.6 74.6 74.6 74.6 79.5 79.5 79.5 84.8 84.8 84.8 90.4
77.0 84.8 70.0 84.8 58.5 63.8 70.0 77.0 84.8 54.0 63.8 70.0 77.0 54.0 58.5 70.0 54.0 58.5 63.8 54.0
102.8 70.0 84.8 58.5 102.8 84.8 70.0 58.5 50.3 102.8 70.0 58.5 50.3 84.8 70.0 50.3 70.0 58.5 50.3 58.5
Cost combination(c_1, c_2, c_3)


模型 B
Switching rate
p_{11} from model
$\bar{p}_{11}$ from experiments
p_{12} from model
$\bar{p}_{12}$ from experiments
p_{13} from model
$\bar{p}_{13}$ from experiments
58.5 62.0 65.8 65.8 70.0 70.0 70.0 70.0 70.0 74.6 74.6 74.6 74.6 79.5 79.5 79.5 84.8 84.8 84.8 90.4
77.0 84.8 70.0 84.8 58.5 63.8 70.0 77.0 84.8 54.0 63.8 70.0 77.0 54.0 58.5 70.0 54.0 58.5 63.8 54.0
102.8 70.0 84.8 58.5 102.8 84.8 70.0 58.5 50.3 102.8 70.0 58.5 50.3 84.8 70.0 50.3 70.0 58.5 50.3 58.5
Cost combination(c_1, c_2, c_3)

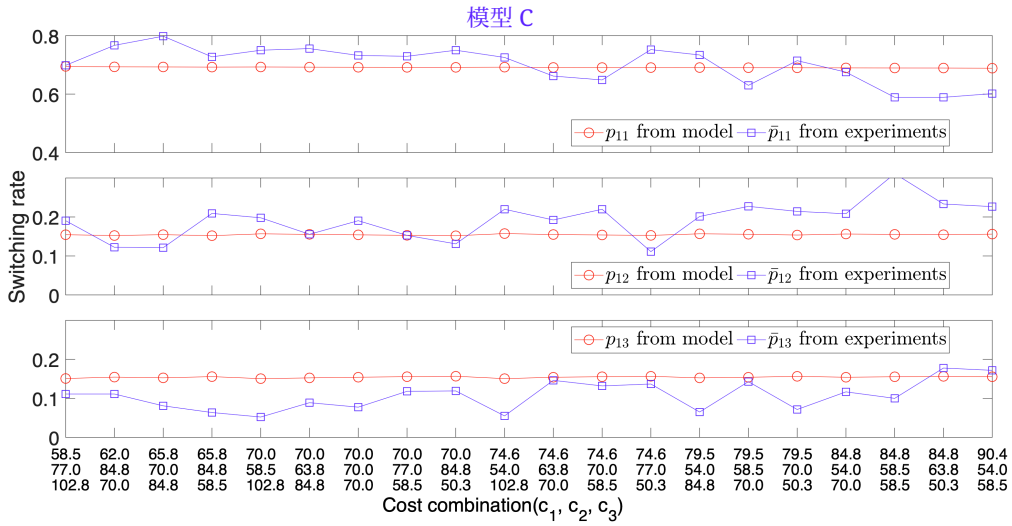

模型 C
Switching rate
p_{11} from model
$\bar{p}_{11}$ from experiments
p_{12} from model
$\bar{p}_{12}$ from experiments
p_{13} from model
$\bar{p}_{13}$ from experiments
58.5 62.0 65.8 65.8 70.0 70.0 70.0 70.0 70.0 74.6 74.6 74.6 74.6 79.5 79.5 79.5 84.8 84.8 84.8 90.4
77.0 84.8 70.0 84.8 58.5 63.8 70.0 77.0 84.8 54.0 63.8 70.0 77.0 54.0 58.5 70.0 54.0 58.5 63.8 54.0
102.8 70.0 84.8 58.5 102.8 84.8 70.0 58.5 50.3 102.8 70.0 58.5 50.3 84.8 70.0 50.3 70.0 58.5 50.3 58.5
Cost combination(c_1, c_2, c_3)

图 8b：续

总之，所提出的模型（即模型 A）能够令人满意地再现实验结果，包括平均切换率和均衡流量。结果充分表明，所提出的路径依赖吸引力假设（包括路径依赖惯性和偏好）对于模型的绩效以及描述 DTD 路径选择动态至关重要。

5.3. 模型验证

从两个不同方面进一步验证所提出的模型。一方面，进行不同于校准过程的样本外测试；另一方面，使用现有研究报告的实验数据验证模型。

5.3.1. 样本外测试

样本外测试是检验模型预测能力的一种广泛使用的方法。具体而言，将数据集随机分为两部分，比例分别为 75% 和 25%。第一部分用于估计参数，第二部分用于验证模型，即计算样本外平均绝对百分比误差和对数似然值，作为模型的性能指标。从表8所示的结果可以看出：（1）平均绝对百分比误差有所增加，但增幅有限；（2）在三个模型中，模型 A 在平均绝对百分比误差和对数似然两方面的表现均最佳；（3）校准参数的变化幅度也有限。以上观察结果充分证明了所提出模型的稳健性。

5.3.2. 使用其他数据源进行测试

为展示所提出模型的泛化能力，我们使用 Zhao and Huang（2016）中的另一个数据集对其进行测试。在该研究中，18名受试者受邀进入实验室，在双路径网络中连续54轮做出决策。Zhao and Huang（2016）提供了个体层面路径选择数据，因此我们可以应用第5.1节中的方法来校准和测试所提出的模型。校准结果见表**??**，所提出模型的估计结果与图9中的实验数据进行了比较。从图9可以看出，结果与基于

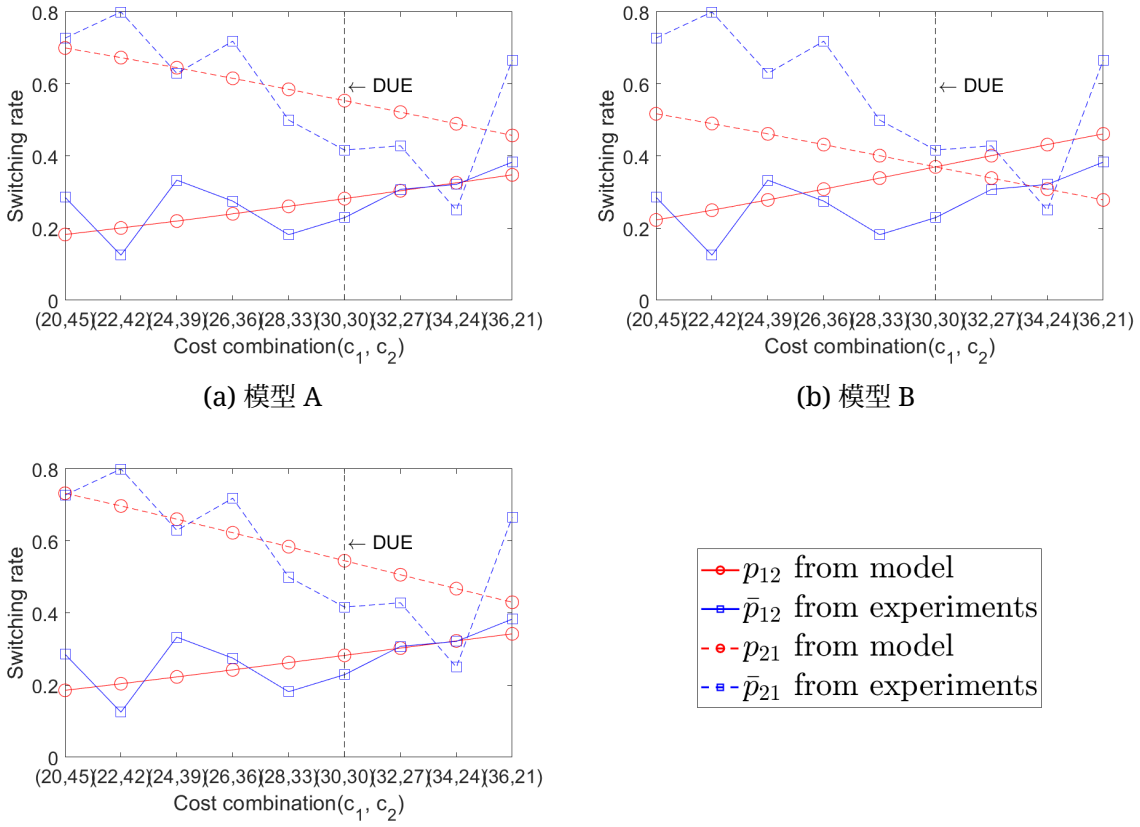
表8：模型A、B和C在八个情景中的样本外测试结果。

情景	模型	θ	η_1	η_2	η_3	MAPE_p	LL
	A	0.0766	0.375	0.357	—	0.105	-696.451
1	B	0.0482	0.367	0.367	—	0.112	-695.559
	C	0.0484	0.3384	0.348	—	0.0990	-696.240
	A	0.0499	0.510	0.367	—	0.153	-547.720
2	B	0.0347	0.485	0.485	—	0.287	-577.417
	C	0.0310	0.603	0.262	—	0.156	-546.614
	A	0.0588	0.513	0.299	—	0.165	-507.918
3	B	0.0441	0.459	0.459	—	0.318	-535.869
	C	0.0336	0.590	0.191	—	0.169	-507.673
	A	0.0195	0.460	0.190	—	0.0991	-977.175
4	B	0.0208	0.390	0.390	—	0.285	-1004.762
	C	0.0128	0.808	0.535	—	0.107	-977.804
	A	0.0287	0.474	0.241	—	0.0988	-1141.048
5	B	0.0304	0.402	0.402	—	0.281	-1213.455
	C	0.0197	0.522	0.176	—	0.112	-1146.382
	A	0.0184	0.474	0.334	0.142	0.271	-1698.518
6	B	0.00394	0.365	0.365	0.365	0.450	-1766.249
	C	0.00255	0.501	0.317	0.101	0.323	-1707.401
	A	0.0302	0.419	0.249	0.0830	0.265	-1904.96
7	B	0.00636	0.298	0.298	0.298	0.431	-2049.229
	C	0.00327	0.439	0.229	0.0562	0.310	-1940.712
	A	0.00807	0.543	0.314	0.138	0.396	-2948.421
8	B	0.00224	0.404	0.404	0.404	0.534	-3148.511
	C	0.00059	0.566	0.283	0.122	0.449	-2987.147

在我们的实验中，模型 A 和模型 C 在复现 DTD 路径选择方面均表现良好，而模型 B 的表现最差。这进一步证实了引入路径依赖吸引力的重要性。

表 9：使用 Zhao 和 Huang（2016）中的数据集得出的校准结果。

模型	θ	η_1	η_2	MAPE_p	平均绝对百分比误差 $_f$	BIC
A	0.0317	0.340	0.0327	0.195	0.04	737.451
B	0.0337	0.260	0.261	0.323	0.189	752.291
C	0.0286	0.435	0.0119	0.186	0.039	736.723



(a) 模型 A

(b) 模型 B

(c) 模型 C

图9：Zhao和Huang（2016）中模型A、B和C的模型估计结果与观测数据的比较。

6. 数值示例

公式 11 表明，当所有路径依赖吸引系数均为零时，随机用户均衡将是所提出的模型的一个特例。然而，如果存在非零的吸引系数，

所提出的模型的均衡状态将偏离随机用户均衡。路径依赖吸引力有两种作用：(1) 路径依赖惯性阻碍路径变更；(2) 路径依赖偏好对不同路径的效用进行加权。综合这两种作用，吸引力系数较高的路径在演化过程中会吸引更多出行者，并且在均衡状态下具有更大的流量。

本节通过一个数值示例来展示所提出的模型的上述特征。为便于说明，我们没有采用复杂网络，而是使用一个简单的双路径网络，因为该示例的主要目的是将所提出的模型与经典的确定性模型和随机模型进行比较。我们设置了两个情景，包括对称情形和非对称情形，成本函数列于表10。

表10：数值示例中的参数设置。

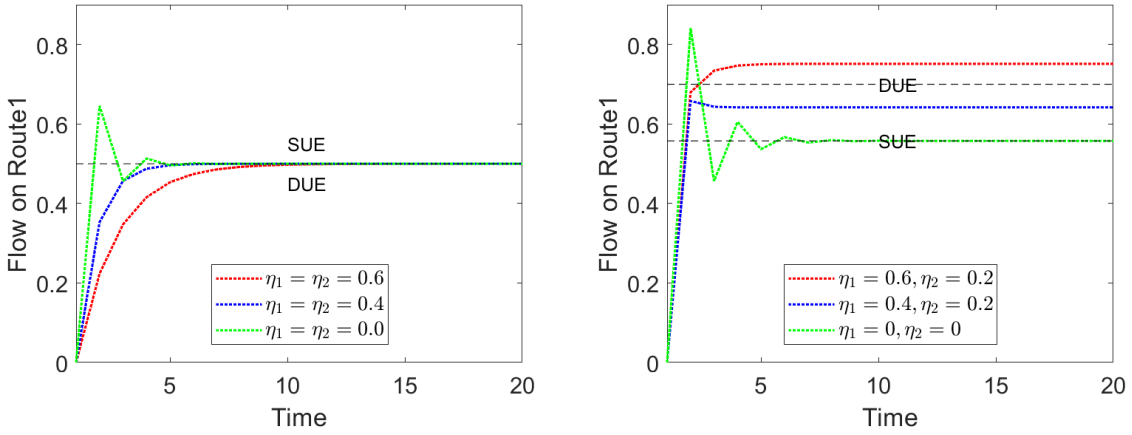
情景	成本函数	DUE*
1	$c_1 = 20(1 + 0.15(f_1/0.5)^2)$ $c_2 = 20(1 + 0.15(f_2/0.5)^2)$	0.5 , 0.5
2	$c_1 = 20(1 + 0.15(f_1/0.6)^2)$ $c_2 = 20(1 + 0.15(f_2/0.4)^2)$	0.6 , 0.4

* DUE流量分配；单位为“出行者”。

图 10 展示了数值结果，与本节开头的分析一致。具体而言，在对称情形下，两条路径的出行时间和流量相同，这表明均衡流量分配与动态用户均衡和随机用户均衡的结果一致。然而，当路径依赖吸引系数较大时，系统需要花费更多时间才能收敛至均衡状态。收敛缓慢是由较大的路径依赖惯性造成的，这使得出行者不太可能更换路径。

在非对称情形下，正如预期，当所有吸引系数均为零时，所提出的模型的均衡流量分配与随机用户均衡相同。然而，当吸引系数不为零时，它显然不同于动态用户均衡和随机用户均衡。此外，所提出的模型的均衡流量分配会随不同路径依赖吸引力系数而变化

。结果与我们的猜想一致，即吸引力系数越高，均衡状态下的流量就越大。



(a) 场景1　　(b) 场景2

图 10：数值测试结果。以路径1上的交通流为例。

7. 讨论

7.1. 流量振荡的再现

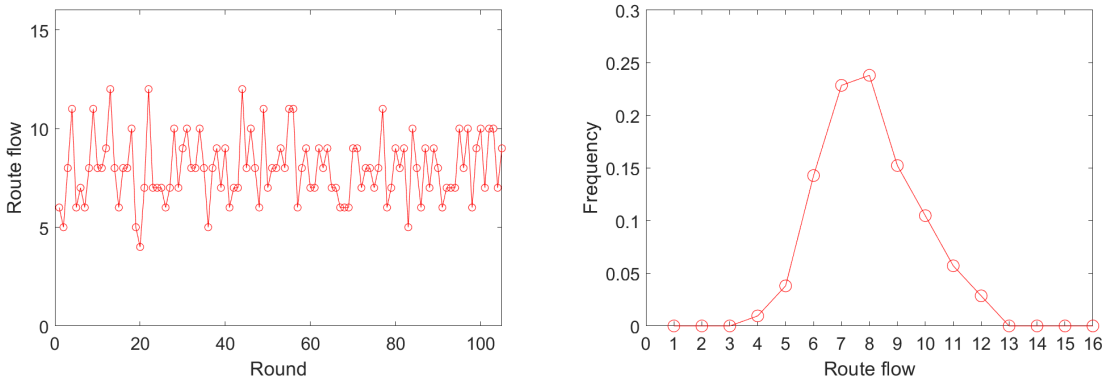
我们讨论网络流演化呈现不收敛趋势的可能原因如下。原因之一可能在于，我们实验中的路线选择博弈本质上是具有多个均衡的非合作N人博弈。多个均衡的数量取决于网络的结构和网络用户的数量，可能多达数千个，偶尔甚至达到数百万个。以论文中的场景2为例，尽管所有均衡都具有相同的流量分布（上方路径有5名参与者，下方路径有11名受试者），但在16人群体中，5名参与者的可能排列会因不同均衡而异。再举一例，Mak 等（2015）研究了一个（对于实验研究而言）非常“复杂”的网络，其中包含12条链路和8条路径，每次实验会话均有18名参与者参加。他们的实验中存在超过33亿个纯策略均衡。因此，正如 Rapoport 和 Mak（2019）在一章节中所评论的那样，“如果用户的行为‘仿佛’他们拥有完全理性的共同知识，那么他们仍几乎不可能协调一致以达到任何特定均衡”。

为弥补这一空白，本小节通过考察网络流量随时间的振荡，从动态视角评估所提出的模型。

假设所有出行者都是同质的，切换率p_{ij}^t 可视为单个出行者从路径i切换到路径j 的概率。因此，从路径i 切换到路径j 的切换流量（即公式7中的 Δf_{tij}）是f_{ti} 次相互独立的伯努利试验中成功次数的总和，每次试验成功的概率为p_{ij}^t。因此， Δf_{tij} 是一个服从二项分布的随机变量，即：

$$\Delta f_{ij}^t \sim \text{Binomial}(f_i^t, p_{ij}^t). \tag{31}$$

根据方程7，时刻$t+1$ 路径i 上的流量（即$f^{t+1}{}_i$）是伯努利分布变量 Δf_{tki}之和。因此，$_t$时刻$f^{+1}{}_i$服从泊松二项分布，该分布仅由时刻t所有路径上的网络流量（记为 $\vec{}F^t$）决定。 $\vec{}F^{t+1}$ 仅取决于 $\vec{}F^t$ 这一事实表明，网络流量的演化是一个马尔可夫过程。因此，路径流量始终持续波动也就不足为奇了。在给定的马尔可夫过程中，任意两个状态之间的转移概率均非零。因此，它是一个具有有限状态空间的不可约非周期马尔可夫链，且该马尔可夫过程存在唯一的平稳分布（Serfozo，2009）。图11展示了场景2第3场次中路径流量演化及其分布的一个示例。



(a) 演化过程　　(b) 路径流量分布

Fi图11：路径流量演化与分布示例（场景2中的第3场次）

此外，我们将实验中的路径流量分布与所提出模型得出的分布进行比较。与切换率不同，路径流量分布的理论值难以通过解析方法计算，因为马尔可夫过程非常复杂，难以求解。因此，我们使用校准参数进行数值模拟。为尽可能与实验保持一致，模拟配置与相应实验相同，包括网络配置、成本函数、出行者数量、轮数以及校准后的模型参数。每种情景均重复模拟30次。每次重复模拟都会得到一组流量分布数据。令 $\nu_i(x)$ 表示路径i 上的流量为x时该情况出现的频数，并可根据30组流量分布数据计算 ν_i 的均值和标准差。图12所示结果清楚表明，所提出的模型与实验数据拟合良好，说明该模型能够描述路径流量DTD演化的随机细节。

7.2. 路径依赖吸引力

尽管路径特定吸引系数和外生吸引系数对于解释实验观测结果至关重要，但由于难以在大规模网络中获取此类路径特定参数，可能会带来一些应用方面的顾虑。一种可能的解决方案是将eta_i 与路径i的特征相关联，这样便可利用路径i的参数直接计算eta_i ，从而避免任意指定数值。解决这一问题需要更多数据，但这超出了本文的研究范围，留待未来研究。

此外，本文提出以下两个关于吸引力系数的猜想。(i) 吸引力系数由路径的旅行时间波动决定。我们利用表11验证均值-方差决策规则。表11列出了所有情景下的旅行时间方差和路径特定吸引系数。可以看出，在每种情景下，吸引系数与旅行时间方差均呈负相关，这表明出行者偏好方差较小的路径。(ii) 吸引力系数可能与路径容量有关，因为出行者可能更偏好

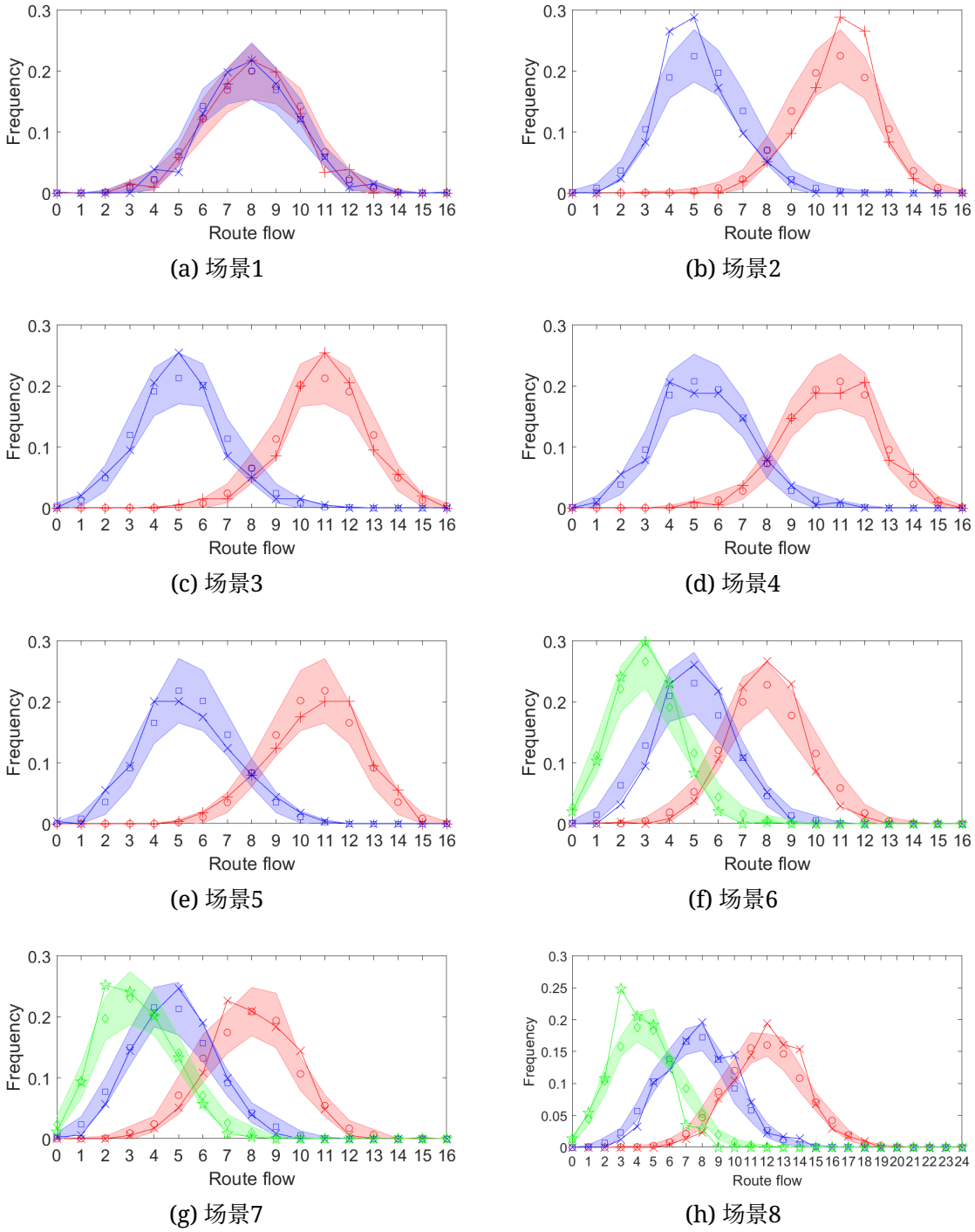


图12：实验与理论预测的路径流量分布对比。

容量较大的路径。如表11所示，吸引系数与路径成本对流量的敏感度呈正相关，即与路径容量指标呈正相关。

表11：关系　　边际容量、旅行时间方差与路径吸引系数之间的关系　　.

情景	路径	成本敏感度	旅行时间方差	吸引力系数 η_i
1	1	2	3.55	0.359
	2	2	3.55	0.351
2	1	4	6.09	0.555
	2	6	9.14	0.403
3	1	2	3.42	0.518
	2	3	5.13	0.307
4	1	4	7.52	0.443
	2	6	11.28	0.197
5	1	2	3.90	0.468
	2	3	5.84	0.235
6	1	4	5.99	0.480
	2	6	8.61	0.315
	3	8	10.32	0.1250
7	1	2	3.34	0.439
	2	3	4.64	0.218
	3	4	5.90	0.0976
8	1	13.125(f_1/6))	10.11	0.516
	2	13.125(f_2/4))	14.23	0.319
	3	13.125(f_3/2))	22.93	0.116

尽管通过引入路径依赖惯性和偏好，理论结果与实验观察表现出良好的一致性，但这并不意味着所提出的模型是唯一能够解释实验观察的模型。目前已有许多选择行为模型，例如 de Moraes Ramos 等人（2011）、Avineri 和 Ben-Elia（2015）提出的模型，以及作为风险厌恶的一种广受认可的解释的前景理论。因此，使用其他理论工具分析实验观察很有意义。

7.3 实验室实验的设计

另一项讨论涉及实验的设计设置。经济学家 Roth E. Alvin 提出了一种广为认可的实验室实验分类方法。任何实验的目标都可归为三类，即“面向

理论家”（检验并修正形式经济理论）、“寻找事实”（发现未预料到的规律），以及“向王公耳语”（直接影响政策制定过程）（Roth，1986）。我们的实验特意首先用于寻找行为规律，其次据此检验并改进现有的路径选择理论。实验室实验方法的一项重要优势是，可以控制关键变量（如成本、收益和信息），从而收集“清晰”的数据，而这在实地研究中往往难以做到（Rapoport 和 Mak，2019）。为了充分发挥实验的优势，我们不可避免地需要简化交通实际情况的某些属性，例如网络拓扑、成本函数、信息提供机制、决策环境等。

8. 结论

为了解出行者的DTD路径选择动态，我们邀请312名志愿者进入实验室，针对多种路径选择情景开展了人在回路实验。实验发现了若干与现有模型不一致的DTD行为模式。本文引入了路径依赖吸引力这一行为假设，并提出了一种基于离散选择的可分析DTD网络流动态模型。利用本研究实验数据以及其他研究报告的数据，本文明确证明，所提出的模型能够从平均切换率和网络均衡流量两个方面，令人满意地再现实验中的DTD动态。本文有助于连接理论路径选择模型与人类出行者的DTD路径选择行为，并有望成为开发现实道路网络流量演化模型的桥梁。

未来的研究方向包括但不限于以下几个方面。首先，应在实验室实验中探索更多参数和规模更大的网络。然而，应妥善解决路径丰富的网络中参数校准的难题。其次，我们提出的 DTD 网络流动态模型应在更广泛的数据集中进行检验，以测试其外部效度。第三，应精心设计更多实验，以区分多种备择假设所预测的

心理机制，并确认哪些机制最能描述路径依赖吸引力这一现象。

所提出的模型是一个确定性模型，其收敛于稳定且固定的均衡路径流值。显然，现实世界中的网络流演化（实验数据也显示了这一点）呈现振荡特征，难以使用确定性模型进行描述（Watling，1999；He 和 Liu，2012；Cantarella 和 Watling，2016；He 和 Peeta，2016；Kumar 和 Peeta，2015；Xiao 等，2016；Ye 和 Yang，2017；Xiao 等，2019）。为克服这一局限，第 7.1 节所介绍的随机建模方法可能是一种值得未来探索的有效途径。

致谢

本研究ได้รับ国家自然科学基金（72101085、71871010）和复杂管理系统计算与分析实验室（CACMS）（天津大学）的资助。

参考文献

Avineri，E.、Ben-Elia，E.，2015。前景理论及其在出行选择建模中的应用，载于：《有限理性选择行为：交通运输中的应用》。Emerald Group Publishing Limited，第 233–256 页。

Avineri, E., Prashker, J.N., 2005年。对出行时间变异性的敏感度：旅行者学习视角。《交通研究C辑：新兴技术》13, 157–183。

Ben-Akiva, M., Morikawa, T., 1990年。基于显示偏好和陈述意向的转换模型估计。《交通研究A辑》24, 485–495。

Cantarella, G.E., Cascetta, E., 1995年。交通网络中的动态过程与均衡：迈向统一理论。《交通科学》29, 305–329。

Cantarella, G.E.、Watling, D.、Stefano, L.、Roberta, D.，2019。《交通系统中的动态性与随机性：交通网络建模工具》。Elsevier。

Cantarella, G.E.、Watling, D.P.，2016。日常动态交通分配的一般随机过程：公式化、渐近行为与稳定性分析。《交通研究B辑：方法论》92，3–21。Chorus, C.G.、Arentze, T.A.、Timmermans, H.J.，2008。出行选择的随机遗憾最小化模型。《交通研究B辑：方法论》42，1–18。

Chorus, C.G., Dellaert, B.G., 2012. 出行选择惯性：风险厌恶与学习的共同作用。《交通经济与政策杂志》46, 139–155。

Chumura, T., 2012. 交通情境中的响应模式与协调：中国人和德国人参与者的实验比较。《新加坡经济评论》56, 489–501。

Claeskens, G., Hjort, N.L., 等, 2008. 模型选择与模型平均。剑桥大学出版社。

Daganzo, C.F., 1977. 关于交通分配的随机模型。《交通科学》11, 253–274。

Dixit, V.V., Denant-Boemont, L., 2014. 交通均衡是纯纳什均衡、混合均衡还是随机均衡?《交通研究C辑：新兴技术》48, 301–310。

Dixit, V.V., Ortmann, A., Rutstr¨om, E.E., Ukkusuri, S.V., 2017. 实验经济学与交通出行选择：激励与情境。《交通研究C辑：新兴技术》77, 161–184。

Fifer, S., Rose, J., Greaves, S., 2014. 陈述选择实验中的假设偏差：这是一个问题吗？如果是，我们该如何应对？《交通研究A辑：政策与实践》61, 164–177.

Gelman, A., Hill, J., 2006. 使用回归和多层/层级模型进行数据分析。剑桥大学出版社。

Guo, X., Liu, H.X., 2011. 有限理性与不可逆网络变化。《Transportation Research Part B: Methodological》45,1606–1618。

Han, X., Yu, Y., Jia, B., Gao, Z.Y., Jiang, R., Zhang, H.M., 2021. 出行方式选择中的协调行为：关于均衡转变与选择的实验室研究。《Production and Operations Management》30, 3635–3656。

He, X., Guo, X., Liu, H., 2010年。基于路段的逐日交通分配模型。《交通研究B辑：方法论》44，597–608。

He, X., Liu, H.X., 2012。网络意外中断后的逐日交通演化过程建模。《交通研究B辑：方法论》46，50–71。

He, X., Peeta, S., 2016。基于一步策略思维的边际效用逐日交通演化模型。《交通研究B辑：方法论》84，237–255。

Hensher, D.A., 2010年。假设偏差、选择实验与支付意愿。《交通研究B辑：方法论》44，735–752。

Hu, T.Y., Mahmassani, H.S., 1997年。实时信息与响应式信号控制下网络流量的逐日演化。《交通研究C辑：新兴技术》5，51–69。

Iida, Y., Akiyama, T., Uchida, T., 1992. 动态路径选择行为的实验分析。《交通研究B辑：方法论》26, 17–32。

Jin, W., 2007. 交通分配问题的动力系统模型。《交通研究B辑：方法论》41, 32–48。

Knorr, F., Chmura, T., Schreckenberg, M., 2014. 存在收费公路时的路径选择：出行前信息与学习的作用。《交通研究F辑：交通心理学与行为》27, 44–55。

Kumar, A., Peeta, S., 2015. 固定需求下交通网络非均衡时路径流量演变的逐日动态模型。《交通研究B辑：方法论》80, 235–256.

Lindsey, R., Daniel, T., Gisches, E., Rapoport, A., 2014. 随机出行条件下的出行前信息与路径选择决策：理论。《交通研究B辑：方法论》67, 187–207.

Mak, V., Gisches, E.J., Rapoport, A., 2015. 路径与路段：一项关于易拥堵网络中实时出行信息的实验。Production and Operations Management 24, 947–960.

Meneguzzer, C., 2019. 逆向者表现更好：在模拟逐日路径选择实验中检验参与者对信息的响应。Travel Behaviour and Society 15, 146–156.

Meneguzzer, C., Olivieri, A., 2013. 逐日交通动态：在有限反馈信息下针对简单网络中的路径选择与路径转换开展的类实验室实验。Procedia - Social and Behavioral Sciences 87, 44–59.

Meyer, J., 1989. 双矩决策模型与期望效用最大化。The American Economic Review 79, 597–600.

de Moraes Ramos, G., Daamen, W., Hoogendoorn, S., 2011. 比较期望效用理论、前景理论和后悔理论对路径选择行为的预测。Transportation Research Record 2230,19–28.

Noland, R.B., Polak, J.W., 2002. 出行时间变异性：理论与实证问题综述。Transport Reviews 22, 39–54。

Qi, H., Ma, S., Jia, N., Wang, G., 2019. 易拥堵网络中个体对出行前信息的响应模式：实验室实验。Transportmetrica A: Transport Science 15, 376–395。

Rapoport, A., Gisches, E.J., Daniel, T., Lindsey, R., 2014年。出行前信息与随机出行条件下的路线选择决策：实验研究。《交通研究B辑：方法论》68，154–172。

Rapoport, A., Kugler, T., Dugar, S., Gisches, E.J., 2009。拥堵交通网络中的路线选择：布雷斯悖论的实验检验。《博弈与经济行为》65，538–571。Rapoport, A., Mak, V., 2019。交通网络中的策略互动，载于：《行为运营手册》。新泽西州霍博肯：约翰·威立父子出版公司，第110–138页。Rapoport, A., Qi, H., Mak, V., Gisches, E.J., 2019。当少数人破坏整体：拼车中的一类社会困境。《经济行为与组织杂志》166，125–137。Roth, A.E., 1986。经济学中的实验室实验。《经济学与哲学》2，245–273。Schwarz, G.等，1978年。模型的维度估计。《统计年鉴》6，461–464。Selten, R., Chmura, T., Pitz, T., Kube, S., Schreckenberg, M., 2007。通勤者的路线选择行为。《博弈与经济行为》58，394–406。Serfozo, R., 2009。应用随机过程基础。施普林格科学与商业媒体。Shafer, D.S., 1995。非线性动力学与混沌：及其在物理学、生物学、化学和工程学中的应用（Steven H. Strogatz）。《SIAM评论》37，280–281。Sheffi, Y., 1985。城市交通网络。第6卷。普伦蒂斯霍尔，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯。Smith, M.J., 1984。交通分配动态模型的稳定性——李雅普诺夫方法的应用。《交通科学》18，245–252。Wang, G., Ma, S., Jia, N., 2013。风险下旅行者路线选择演化建模的综合框架。《交通研究C辑：新兴技术》35，156–179。

Wang, S.Y., Guo, R.Y., Huang, H.J., 2021. 具有不同选择集合的网络中的日常路径选择：实验结果。Transportmetrica B: Transport Dynamics 9, 712–745。

Watling, D., 1999. 随机均衡分配问题的稳定性：一种动力系统方法。《交通研究B辑：方法论》33, 281–312。

Watling, D., Hazelton, M.L.M., 2003. 日常分配模型的动态与均衡。Networks and Spatial Economics 3, 349–370。

Wei, F., Jia, N., Ma, S., 2016. 考虑社会互动的逐日交通动态：从个体路径选择行为到网络流模型。《交通研究B辑：方法论》94, 335–354。

Xiao, F., Shen, M., Xu, Z., Li, R., Yang, H., Yin, Y., 2019. 随机用户均衡的逐日流量动态及一种通用Lyapunov函数。《交通科学》53, 683–694。

Xiao, F., Yang, H., Ye, H., 2016。《日常网络流动态的物理学》。《交通研究B辑：方法论》86, 86–103。

Xu, H., Zhou, J., Xu, W., 2011。基于累积前景理论的旅行者路径选择行为建模决策规则。《交通研究C辑：新兴技术》19, 218–228。

Yang, F., Zhang, D., 2009。日常稳态路段流量模式。《交通研究B辑：方法论》43, 119–126。

Ye, H., Xiao, F., Yang, H., 2018。通过虚拟实验探索日常路径选择模型。《交通研究C辑：新兴技术》94, 220–235。

Ye, H., Yang, H., 2017. 有界理性用户均衡下的理性行为调整过程。《交通科学》51, 968–980。

Yu, X., Gao, S., 2019. 基于实时信息，在受扰动的易拥堵网络中学习路径选择策略：一种实验方法。《交通研究C辑：新兴技术》106, 205–219。

Zhang, C., Liu, T.L., Huang, H.J., Chen, J., 2018. 基于累积前景理论的、结合朋友出行信息的通勤者日常路径选择建模方法。《交通研究C辑：新兴技术》86, 527–548。

Zhang, D., Nagurney, A., Wu, J., 2001. 稳态路段流量模式与交通网络均衡之间的等价性。《交通研究B辑：方法论》35, 731–748。

Zhang, J., Yang, H., 2015. 异质现有选择集条件下网络均衡中的路径选择惯性建模。《交通研究C辑：新兴技术》57, 42–54。

Zhao, C.L., Huang, H.J., 2016. 有界理性路径选择行为实验及满意化规则下的模型。《交通研究C辑：新兴技术》68, 22–37。

Zhu, S., Tilahun, N., He, X., Levinson, D.M., 2011。《I-35W大桥》坍塌及重新开放对出行的影响与调整策略，载于：《实践中的网络可靠性》。Springer New York，第 21–36 页。