arXiv:2303.04095v1 [physics.soc-ph] 7 Mar 2023

基于实验室实验的日常路径选择研究与建模。第二部分：基于路径依赖吸引力的随机过程模型

Hang Qi[a,c,*], Ning Jia[b,c,*], Xiaobo Qu[d], Zhengbing He[e,**]

[a]湖北经济学院金融与经济研究院，湖北经济学院，中国 [b]系统工程研究所，管理与经济学院，天津大学，中国[c]复杂管理系统计算与分析实验室（天津大学），中国 [d]汽车安全与节能国家重点实验室，清华大学，中国[e]北京市交通工程重点实验室，北京工业大学，中国

摘要

为解释一系列实验室实验中观察到的日常路径选择行为和交通动态，本研究第一部分提出了一种基于离散选择的分析性动态模型（Qi等，2023）。尽管确定性模型能够很好地再现实验观测，但它会收敛至路径流量的稳定均衡，而观察到的日常演化显然存在随机振荡。为克服这一局限，本文基于本研究第一部分中的相同行为假设，提出了一种基于路径依赖吸引力的随机过程（RDAB-SP）模型。通过仔细比较基于模型的估计结果与实验观测，研究表明，所提出的RDAB-SP模型能够准确再现流量切换和路径流量演化方面的随机振荡。据我们所知，这是首次尝试使用随机过程DTD模型解释和建模实验观测；有趣的是，看似出乎意料的现象（即随机路径切换行为）实际上由简单规则主导，即独立且基于概率的路径选择行为。最后，本文开发了一种近似模型，以便以简单高效的方式模拟该随机过程并评估均衡分布，使所提出的模型成为交通政策设计中实用有效的工具。

关键词：日常动态、路径选择行为、马尔可夫过程、随机过程

*共同第一作者

**通讯作者电子邮箱：he.zb@hotmail.com (Zhengbing He)

预印本提交至 *2023*年*3*月*8*日

1. 引言

日复一日（DTD）交通动态受到广泛关注，用于描述网络流从非平衡状态过渡到均衡状态的瞬态行为。日复一日交通动态的理论模型，或以出行者的路径选择行为为基础，或以路径之间的流量交换为基础。基于实验的研究是连接日复一日交通动态理论研究与现实研究的重要途径，而后者受限于难以收集覆盖整个网络的高质量路径选择相关数据（Guo and Liu，2011年；Zhu et al.，2011年；He and Liu，2012；Watling et al.，2012）。

在本研究的第一部分中，我们开展了一系列多情景多次重复的日复一日路径选择实验，并提出了一个基于离散选择的日复一日模型，用以解释新近观察到的现象（Qi等，2023）。研究表明，所提出的模型能够令人满意地再现实验观测结果，例如切换率和均衡流量。然而，与许多其他基于微分函数的模型一样（Watling，1999；He和Liu，2012；Cantarella和Watling，2016；He和Peeta，2016；Kumar和Peeta，2015；Xiao等，2016；Ye和Yang，2017；Xiao等，2019），所提出的模型会收敛到稳定均衡的路径流量预测，而这与我们实验以及现有研究中的实验观测结果并不一致（Iida等，1992；Selten等，2007；Zhao和Huang，2016；Ye等，2018；Qi等，2019；Han等，2021）。主要原因在于，这些模型都是确定性的：给定初始条件后，网络流演化过程便完全确定（其发生概率为1）。

随机过程DTD模型（Cascetta，1989；Cantarella 和 Cascetta，1995）是弥补这一空白的一种可行方法。在随机过程模型中，当前的流量分配仅决定下一时刻流量分配的概率分布，而不像确定性模型那样形成一一对应的映射。此外，流量分配会收敛至流量状态的均衡概率分布，而非单一的稳态均衡；这一分布可能因随机过程中所采用的行为假设和交通相关假设而异。因此，随机过程模型不仅描述了网络流演化过程中的“期望”动态行为，也描述了其中的概率振荡

网络流演化过程。

目前已有少数随机过程DTD模型被提出。Cascetta（1989）可能是最早提出随机过程模型的研究。该研究指出，连续时段内网络状态的序列是一个随机过程的实现，因为交通系统不可能始终保持在同一状态。随后，Davis和Nihan（1993）提出了两种通用随机过程DTD模型，并证明这些通用模型可以近似视为确定性过程或时变线性高斯过程。Cantarella and Cascetta (1995) 尝试统一网络流DTD动态建模中的确定性过程与随机过程。当出行需求和路段容量足够大时，系统演化的确定性描述与随机性描述之间的差距会缩小。Watling和Cantarella（2013）分析了不同类型的随机过程模型，并指出随机过程模型在捕捉真实交通系统中各种方差来源方面具有巨大潜力。为更好地描述现实生活中的不确定性，Smith et al. (2014) 提出了两种在DTD动态中引入随机性的方法。第一种方法是在确定性过程中嵌入一个随机要素，第二种则基于个体旅行者相互独立且随机的选择。最近，Cantarella和Watling（2016）通过考虑旅行者习惯和过往天数记忆，提出了一种通用的随机过程DTD动态模型。

如第一部分的实验所示，网络流的演化具有非确定性特征，无法通过确定性模型得到良好的再现（Qi等，2023）。因此，探究随机模型能否反映这种非确定性特征颇有意义。然而，据我们所知，此前尚无研究使用随机DTD模型来解释实验观测。原因可能有两方面。首先，大多数实验室实验的数据不够丰富，无法探究统计规律。其次，现有模型都无法令人满意地再现实验观测。鉴于本研究第一部分已获得丰富得多的数据，并提取了若干关键行为规则（Qi等，2023），我们得以克服上述两个障碍。本部分通过提出一种基于路径依赖吸引力的随机过程（RDAB-

SP）模型来研究实验DTD动态，该模型基于与第一部分完全相同的行为假设（Qi等，2023）。此外，基于随机过程的模型通常会带来较高的计算负担，从而妨碍其实际应用。为克服这一缺点，我们进一步提出一种近似模型，可在精度损失可接受的情况下简化仿真过程。本文的贡献如下。

- 本文提出了一种名为 RDAB-SP模型的新型随机过程模型。该模型能够准确再现：（1）DTD 路径选择实验中观察到的随机振荡，不仅包括路径流量中的随机振荡，也包括路径切换行为中的随机振荡；（2）路径流量演化过程的随机特征，包括转换振荡和路径流量振荡。这表明，实验室实验中观察到的意外行为规律（即路径依赖的惯性与偏好），实际上由简单规则主导，即独立且基于概率的路径选择。

- 本文对 RDAB-SP模型进行了近似处理，有助于以简单高效的方式模拟随机过程并评估均衡分布。这个简化版本将有效地使该模型成为交通规划人员和政策制定者实用且有价值的工具。

据我们所知，本研究首次尝试使用随机过程模型解释和建模实验观察结果，也是首次成功再现路径流量随机振荡的研究。本研究证实了研究第一部分提出的路径选择行为框架具有普适性，即基于离散选择、具有路径依赖惯性与偏好的模型（Qi等，2023）。此外，本研究还彰显了显式建模个体选择行为相较于建模流量交换规则的优势，因为所提出的RDAB-SP模型是基于个体的独立选择构建的。

此外，所提出的随机模型更适合用于分析交通政策的影响，因为它能够捕捉长期网络影响的概率分布，而不仅仅是预期趋势或均衡点。因此，它将大大有助于交通工程师和规划者理解并提升交通

政策。

本文结构安排如下。第2节简要介绍第一部分（Qi等，2023）开展的研究，包括DTD 路径选择实验和确定性基于离散选择的模型。第3节提出RDAB-SP模型，第4节则利用实验数据对其进行了仔细检验。第5节提出了RDAB-SP模型的一种近似方法，有助于更高效地模拟随机演化过程。第7节总结全文。

2. 背景

2.1. 日常路线选择实验

我们首先简要介绍在受控实验室环境中开展的DTD 路径选择实验。有关研究的更多细节，请参阅第一部分（Qi等，2023）。

共有312名参与者受邀参加决策实验，男女比例大致相同，实验报酬取决于他们的表现。参与者被随机分为17个组，并须在彼此不交流的情况下进行日常路线选择。实验设置了以下八种具有相同起讫点（OD）对的DTD场景。

- 场景 1 是包含对称双路径网络的基准场景。
- 情景2–5通过采用非对称双路径网络和不同的成本函数扩展了场景 1，以研究不同成本反馈下受试者的路径选择行为。
- 情景6–7采用包含三条路径的非对称网络，以观察更复杂的路径选择行为。
- 场景 8将配置扩展到非线性成本函数和不同的组规模（场景 8 中每组有 24 名受试者，而其他场景中每组有 16 名），从而展示所提出理论模型的稳健性。

这些路径被设计为容易发生拥堵。每个场景分别分配了16/24名参与者，并告知他们，路径的出行时间是路径流量的增函数。在每位受试者都完成路径选择后，

随后向所有参与者显示完整的反馈信息。路线选择轮次的数量通过在75到110之间随机选择一个数确定。

实验结果中观察到一些有趣的现象，包括路径流量持续振荡且没有稳定终点，以及两种现有模型无法充分解释的行为模式。

2.2. 基于离散选择的确定性模型

在本研究的第一部分中，我们提出了如下基于离散选择的动态模型（Qi等，2023）。

$$f_j^{t+1} = \sum_{i=1}^{N} \Delta f_{ij}^t = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}^t f_i^t \tag{1}$$

其中，f_{tj} 表示时刻t 路径j 上的出行者人数（即路径流量）； Δf_{tij} 表示时刻t从路径i 切换到路径j 的预期流量；N 表示连接同一起讫点对的路径可行集大小；p_{ij}^t 表示时刻t从路径i 切换到路径j 的切换率，其定义为在t 和$t+1$ ($t \geq 1$)期间从路径i 切换到路径j的出行者比例。切换率p_{ij}^t 定义如下。

$$p_{ij}^t = \begin{cases} P_i \dfrac{e^{-\theta C_j^t}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k^t}}, & \text{if } i \neq j \\ (1 - P_i) + P_i \dfrac{e^{-\theta C_j^t}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k^t}}, & \text{if } i = j \end{cases} \tag{2}$$

假设每条可用路径都有一个路线属性相关吸引系数（记为 η_i），并将两种行为模式，即路径依赖惯性和路径依赖偏好，引入并纳入公式2，如下所示。

- 路径依赖惯性。无论上一轮所选路径的成本如何，出行者都有保持选择上一轮路径的恒定倾向。这里的惯性具有路径依赖性，意味着出行者的这种倾向会因所选路径不同而异。在公式2中，通过设定$P_i = P(\eta_i)$来引入路径依赖惯性。

- 路径依赖偏好。有意克服惯性的出行者会重新考虑其路径选择。切换决策不仅受到上一轮所选路径与备选路线之间成本差异的影响（现有模型通常会考虑这一因素），还受到出行者对路线属性的相关偏好的影响（实验数据中观察到了这一因素，但现有模型很少考虑）。在公式2中，通过设定$C_{ti} = C(c_{ti}, \eta_i)$来纳入路径依赖偏好。

对模型参数进行了估计，结果表明，该模型在贝叶斯信息准则（BIC）、平均切换率和均衡流量的平均绝对百分比误差（MAPE）方面表现令人满意（表1）。

表1：所提出的确定性模型在八种场景下的校准结果 s.

场景	θ	η_1	η_2	η_3	MAPE_p†	MAPEf‡	BIC
1	0.0618	0.332	0.323	—	0.0896	0.0001	5647.002
2	0.0635	0.512	0.394	—	0.135	0.004	4845.526
3	0.083	0.49	0.305	—	0.112	0.0058	4854.039
4	0.019	0.448	0.192	—	0.0389	0.059	5980.376
5	0.036	0.470	0.224	—	0.0571	0.007	6975.715
6	0.043	0.487	0.362	0.25	0.197	0.0419	13936.454
7	0.0625	0.418	0.239	0.172	0.185	0.0504	14577.203
8	0.00875	0.516	0.319	0.116	0.288	0.0784	18192.628

† 切换率的平均绝对百分比误差（MAPE）。

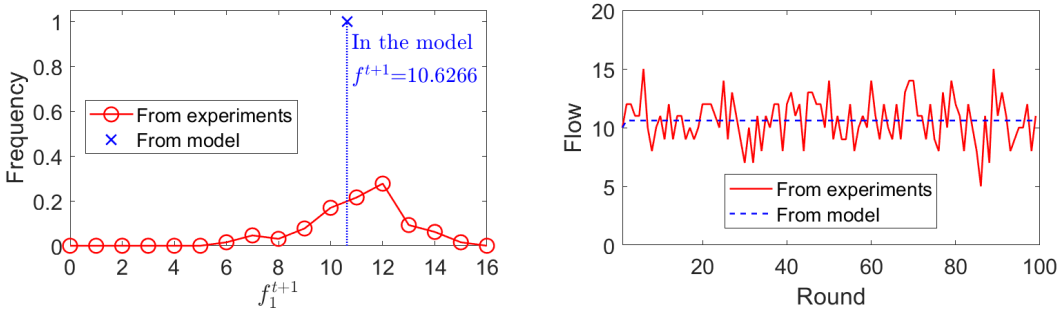
‡ 均衡流量的平均绝对百分比误差（MAPE）。

2.3 确定性模型的局限性

尽管已取得令人满意的表现，所提出的模型仍受其确定性本质的限制。具体而言，设$\vec{f}_t = (f_t1, f_t2, \cdots, f_{tN})$为时刻$t$的网络流分配，而在该模型中，$\vec{f}^{t+1}$仅由$\vec{f}^{t}$决定。相比之下，在实验中，$\vec{f}^{t}$之后可能出现不同的流量分配（示意见图1）。下文将从$\vec{f}^{t}$到$\vec{f}^{t+1}$的单步投影称为单步演化，其本质上是给定$\vec{f}^{t}$时$\vec{f}^{t+1}$的条件分布。

确定性的单步演化导致理论流量演化轨迹与实验流量演化轨迹之间出现偏差。以估计

误差最小的场景 4 为例（图1），可以看到，所提出的确定性模型产生了平滑且端点稳定的轨迹，而实验中的路径流量则持续振荡，没有稳定的端点。Iida 等人（1992）、Selten et al. (2007)、Meneguzzer 和 Olivieri（2013）、Zhao 和 Huang（2016）以及 Ye 等人（2018）等现有研究也报告了类似的观察结果。



(a) 单步演化（ $f^t = (10, 6)$）　　(b) 路径流量

图1：确定性模型的局限性：以场景 4 中的路线1为例进行说明。

3. Ro　基于路径吸引力的随机过程日常演化模型　　el

一些现有的基于实验的研究将路径流量的振荡归因于受试者的有限理性行为（Iida等，1992；Selten等，2007；Dixit和Denant-Boemont，2014；Zhao和Huang，2016）。尽管有限理性或感知误差可能部分解释这些振荡，但本文尝试利用基于出行者独立选择决策的随机过程模型来再现这些振荡。

假设所有出行者都是同质的，因此，切换率 p_{ij}^t 可视为单个出行者在时刻t从路径i切换到路径j 的概率。如果路径i 上的出行者选择路径j，则这是一次“成功”试验，概率为p_{ij}^t；如果该出行者选择其他路径，则这是一次“失败”试验，概率为 $1 - p_{ij}^t$。由于出行者独立地做出决策，在时刻t 从路径i 切换到路径j 的出行者人数，是f_i^t 次相互独立的伯努利试验之和，成功率为p_{ij}^t。因此，公式 1 中的切换率 Δf_{tij} 是一个服从

二项分布的随机变量，可表示如下。

$$\Delta f_{ij}^{t} \sim \text{Binomial}(f_i^t, p_{ij}^t). \tag{3}$$

根据公式1，时刻$t+1$路径j上的流量，即$f^{t+1}{}_j$，是从$\Delta f_t 1_j$到Δf_{tNj}的伯努利分布变量之和，由此得到如下RDAB-SP模型。

$$\begin{cases} f_j^{t+1} = \sum_{i=1}^{N} \Delta f_{ij}^t, \\ \Delta f_{ij}^t \sim \text{Binomial}(f_i^t, p_{ij}^t), \\ p_{ij}^t = \begin{cases} P_i \dfrac{e^{-\theta C_j^t}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k^t}}, & \text{if } i \neq j \\ (1-P_i) + P_i \dfrac{e^{-\theta C_j^t}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k^t}}, & \text{if } i = j \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

其中，$f^{t+1}{}_j$是N个相互独立的二项分布变量之和，服从泊松-二项分布，并且仅由时刻t的网络流分配，即$\vec{f}^t$决定。因此，$\vec{F}^{t+1}$仅依赖于$\vec{F}^t$这一事实表明，网络流的演化是一个马尔可夫过程。在给定的马尔可夫过程中，任意两个状态之间的转移概率均非零。因此，它是一个具有有限状态空间的不可约非周期马尔可夫链，并且该马尔可夫过程存在唯一平衡分布（Serfozo，2009）。

公式4中的RDAB-SP模型通过考虑个体旅行者的独立选择行为，自然地扩展了研究第一部分（Qi等，2023）中的确定性模型。一方面，RDAB-SP模型与确定性模型密切相关，即公式1中的切换流Δf_{tij}是公式4中Δf_{tij}的期望值。因此，确定性模型可视为RDAB-SP模型的期望演化版本或平均演化版本。出于同样的原因，所提出的确定性模型和随机模型具有相同的对数似然函数，即研究第一部分中公式（27）（Qi等（2023））。因此，在下一节的模型检验中，我们采用表1中确定性模型的标定参数，该模型展现了令人满意的

一般性，验证了研究第一部分提出的确定性路径选择框架的普适性（Qietal., 2023）。另一方面，RDAB-SP模型的马尔可夫性质保证了演化过程具有非确定性，这显然不同于确定性模型，但与实验观测更加接近。

需要注意的是，现实中的出行者决策可能并非只依据最新的出行成本。这似乎与马尔可夫链模型的“无后效性”相矛盾。事实上，此前大多数实验室实验都表明，切换频率存在显著的异质性（Qi et al. (2019),Selten et al. (2007)），这说明一些受试者只对最新的激励作出反应，而另一些受试者则会更多地考虑历史经验。与此不同，本文提出了一种马尔可夫链模型，将上述两种决策过程纳入考虑。首先，如果这种马尔可夫链模型所需的历史信息少于经典强化学习模型或典型的DTD模型，却仍能很好地预测人类受试者的动态变化，我们就可以得到一个尽可能简单的动态模型。其次，由于对历史信息的需求极少，所提出的马尔可夫链模型可以随时开始预测汇总交通流，无需经历冷启动过程，因此具有实际应用价值。

4. 模型检验

本节通过三个指标检验所提出的 RDAB-SP模型的预测能力，分别是切换流（公式3）、一步流演化（公式4）以及均衡流量分布（Cantarella 和 Cascetta，1995；Smith 等，2014）。此外，本研究还利用其他研究人员收集的实验数据，检验所提出的 RDAB-SP模型的普适性。

4.1. 切换流

正如所提出的模型所假设的，从路径 i 切换到路径 j 的切换率由网络流的当前分配决定。给定特定的流量分配$\vec{f}^{*}=(f_1^{*},f_2^{*},\cdots,f^{*}N)$，如果一条实验数据记录 $\vec{f}t$ 等于 $\vec{f}^{*}$, $\Delta f tij$（由 $\vec{f}t$ 确定），那么它就是随机变量 $\Delta f^{*}ij$（由 $\vec{f}^{*}$确定）的一个样本。因此，可以在时间 t 计算 $\Delta f tij$ 来构造一组样本，其中 $\vec{f}t=\vec{f}^{*}$，并且

$\vec{}$样本量取决于实验中f^* 的实现值数量。根据公式3，该样本应服从二项分布，其试验次数为f_i^*，成功率为p_{ij}^*。

为验证RDAB-SP模型，我们将实验中的切换流分布与所提出的模型推导出的分布进行比较。结果如图2所示。每个场景的图由两个面板组成。左侧面板比较切换流实验分布与理论分布的均值和标准差，计算方法如下。

$$\begin{cases} \mu(\Delta f_{ij}) = f_i p_{ij} \\ \sigma(\Delta f_{ij}) = \sqrt{f_i p_{ij}(1 - p_{ij})} \end{cases} \tag{5}$$

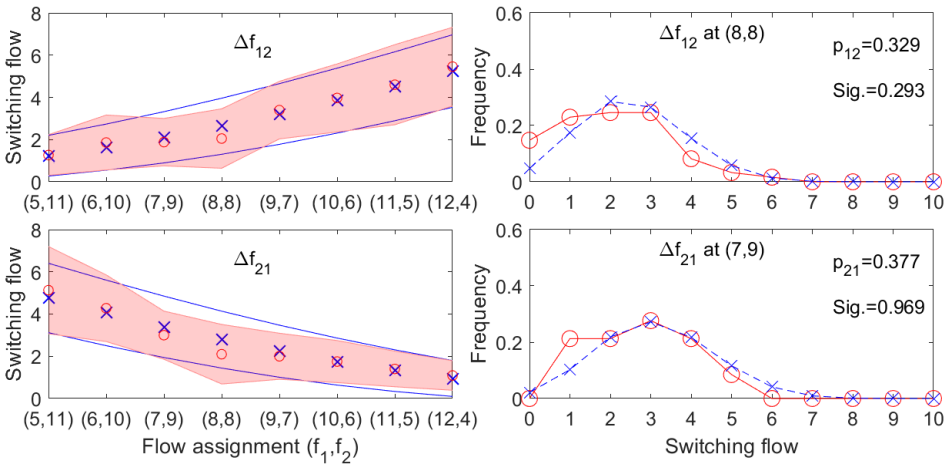
右侧面板展示了在具有代表性的流量分配[1]，下分布曲线的详细比较，并附有切换率和KS检验结果。

从图2可以看出，该模型能够很好地描述切换流。具体而言，在左侧面板中，所提出的模型得出的大多数均值和标准差都与实验结果吻合良好。右侧面板选取并展示了模型表现不太理想的一些情况的详细分布；可以看出，分布曲线的形状仍然彼此相似，这进一步证实了所提出的RDAB-SP模型表现良好。KS检验结果也表明，除场景2和3中的用户均衡点外（事实上，这些是仅有的例外），其他情况均无显著差异。我们推测，出行者在用户均衡点处的行为模式可能发生了变化。深入研究超出了本文的范围，我们将在未来开展这方面的研究。

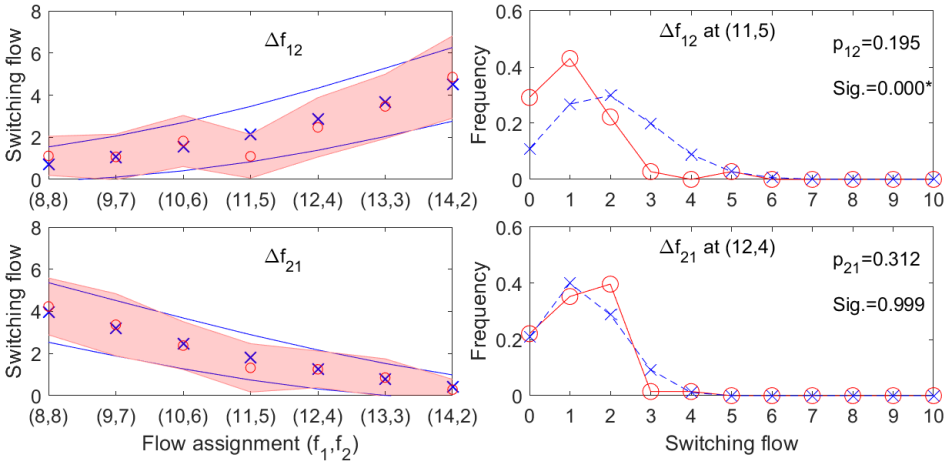
4.2. 一步流演化

公式4所定义的随机过程表明，在给定流量分配 $\vec{f}^t = \vec{f}^*$ 的情况下，$f^{t+1}{}_j$ 服从由 $\vec{f}^*$ 表征的泊松-二项分布。本小节将检验实验数据是否与这一理论预测一致。

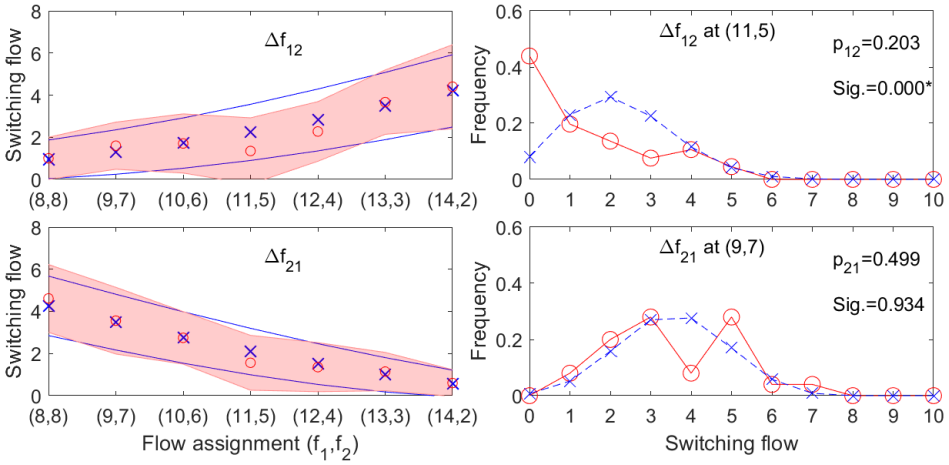
[1]由于篇幅有限，此处无法展示所有情况的详细分布



(a) 场景 1

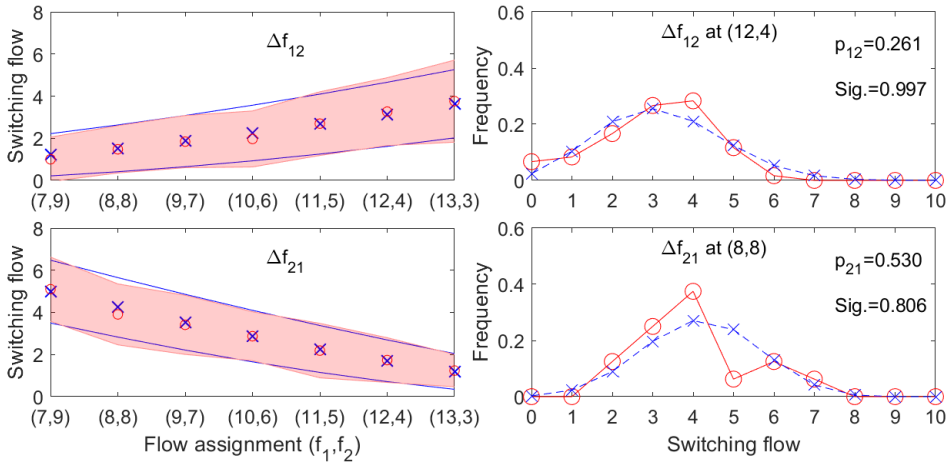


(b) 场景 2

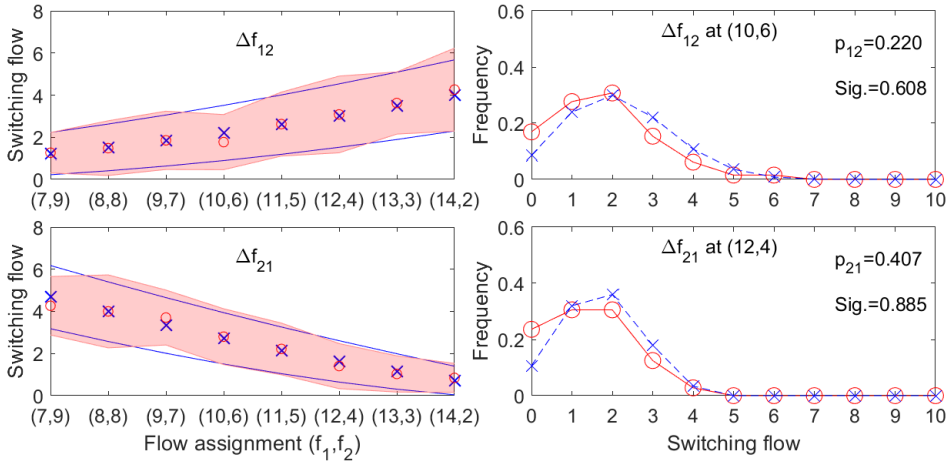


(c) 场景 3

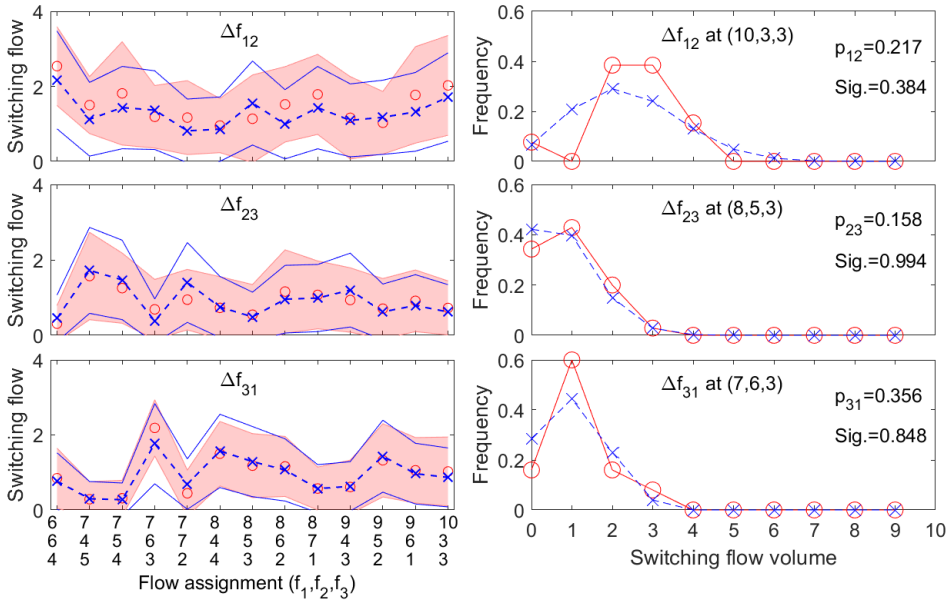
图 2a：流量切换的实验均值和标准差与理论均值和标准差的比较。



(d) 场景 4

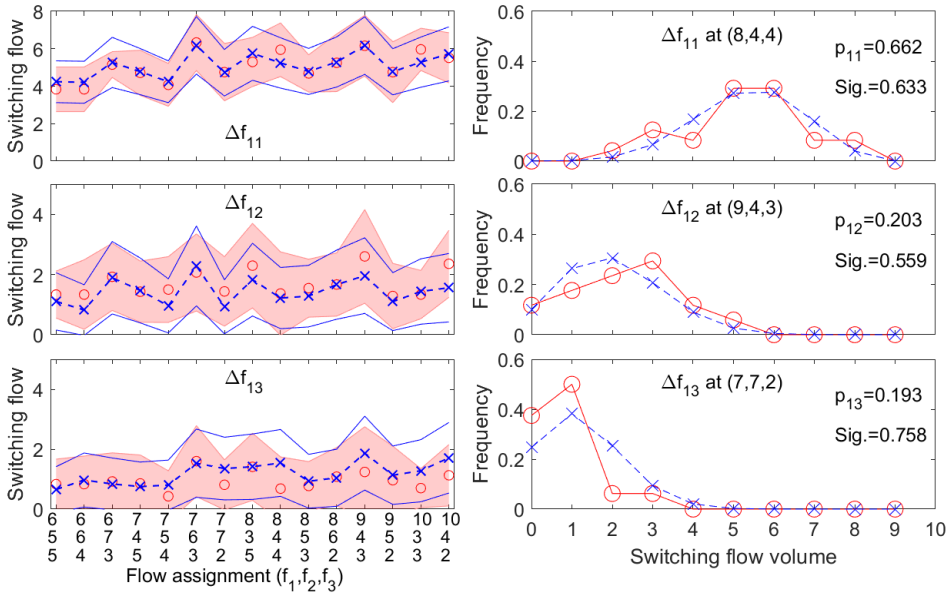


(e) 场景 5

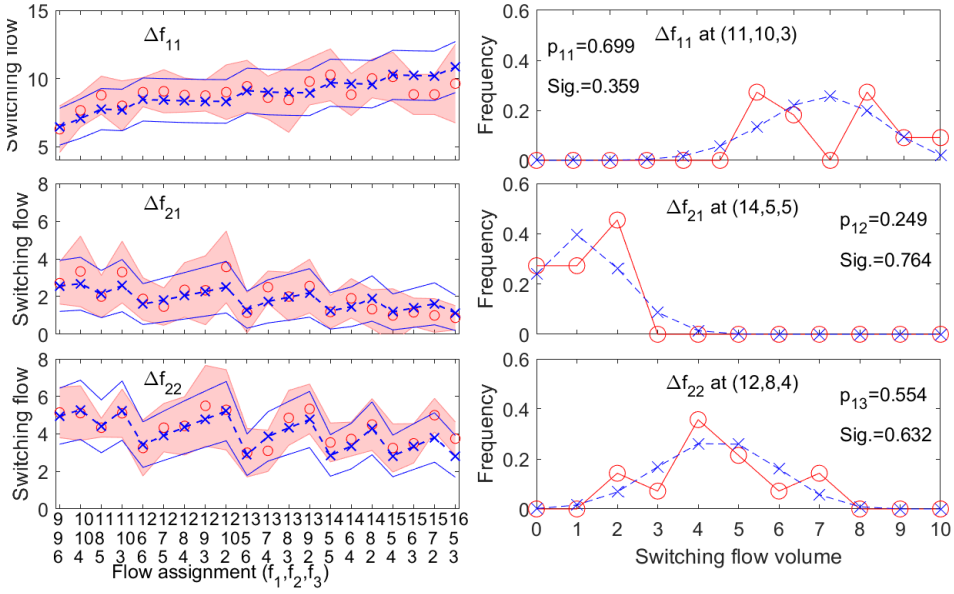


(f) 场景 6

图 2b：续。



(g) 场景 7



(h) 场景 8

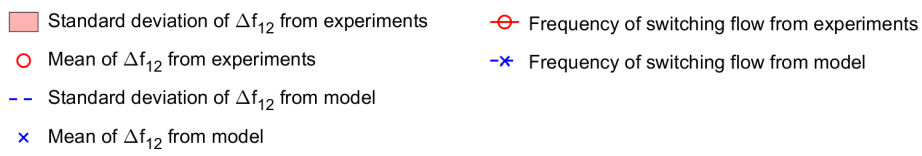


图 2c：续。

首先，采用与第4.1节类似的方法，提取对应于特定 $\vec{f}^t$ 的f_1^{t+1}的实验分布，然后将其与所提出的模型预测的理论分布进行比较。分别以场景 3（双路线场景）和场景 6（三路线场景）中的路线1为例，见图3和图4。

从图3可以看出，场景 3 中的分布曲线形状相似，且所有KS检验结果均不显著，这表明实验分布与理论分布之间不存在显著差异。

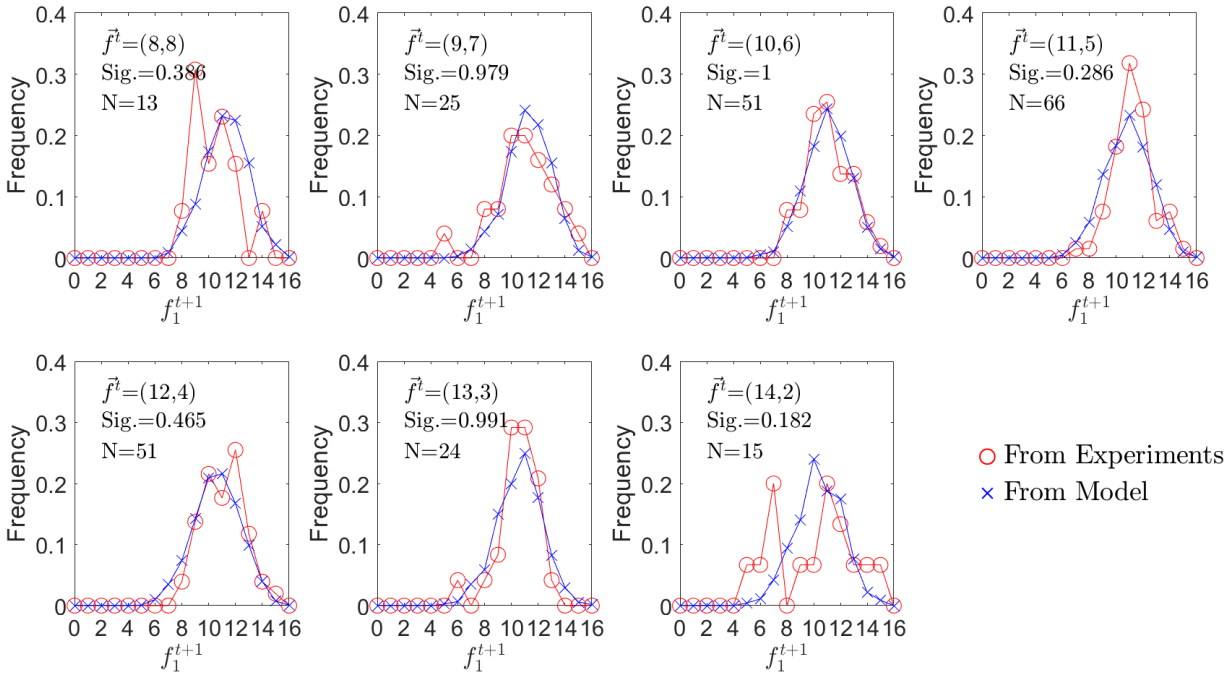


图3：场景 3 中路线1的一步流演化实验分布与理论分布的比较。N 为样本量，显著性为KS检验的结果。

在场景 6（图4）中，实验分布与理论分布之间的偏差变大了，这可能是因为三路线场景中的样本量小得多[2]。不过，当样本量相对较大时，两种分布在视觉上仍然相似，而且 KS 检验也表明两者没有显著差异。因此，所提出的 RDAB-SP模型能够很好地解释实验

[2]与双路线场景相比，三路线场景中的样本量较小，因为三路线场景中的流量组合要多得多。

单步演化数据。

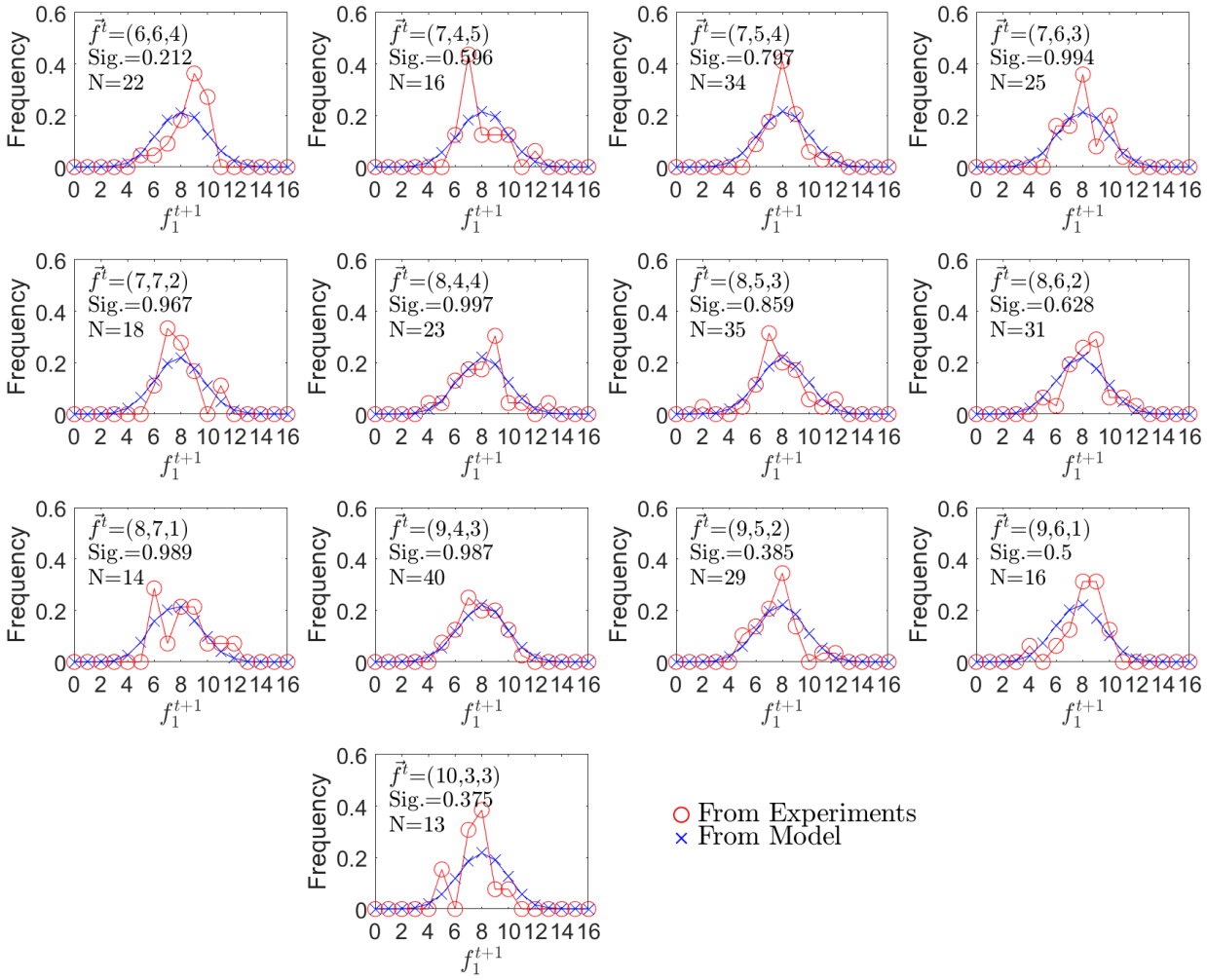
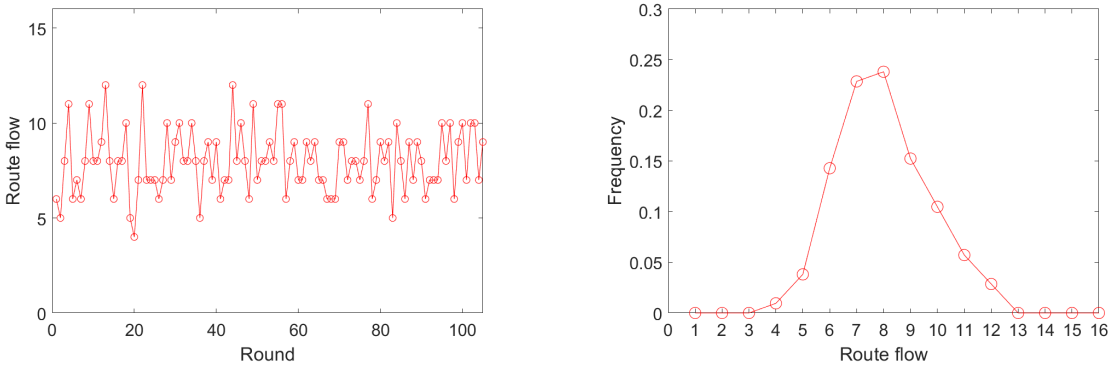


图4：场景 6 中路线1的一步流演化实验结果与理论结果对比。N 为样本量，显著性为KS检验结果。

4.3. 路径流分布

RDAB-SP模型预测的是网络流均衡状态下的概率分布，而非某个特定的均衡点；这意味着路径流量的频率长期来看会稳定在某个给定值。为说明均衡分布的存在，我们绘制了演化过程和频率分布

图5中的实验数据。若演化过程持续较长时间，分布曲线的形状便会趋于稳定。



(a) 演化过程　　(b) 稳定后的路径流分布

图5：路径流量演化与分布示例（场景 2 中的第3场次）。

我们比较实验中的路径流量分布与所提出的模型得出的分布。与切换率不同，平衡路径流量分布的理论值难以通过解析计算得到，因为马尔可夫过程很难求解。因此，我们通过数值模拟获得理论流量分布。

为与实验保持一致，模拟的配置设定为与相应实验相同，包括网络配置、成本函数、出行者数量、轮次数以及校准后的模型参数。每个场景均重复模拟 30 次。由此，每次重复都可获得一组流量分布数据。令 $v_i(x)$ 表示路径 i 的流量为 x时的频率，并根据 30 组流量分布数据计算 v_i 的均值和标准差。图 6 所示结果清楚地表明，所提出的模型与实验数据拟合良好，说明该模型能够描述路径流量 DTD 演化的随机细节。

4.4. 其他数据来源

为考察模型泛化，我们利用现有论文中的实验数据对RDAB-SP模型进行验证。在一项具有影响力的开创性研究中（Selten等，2007），一项

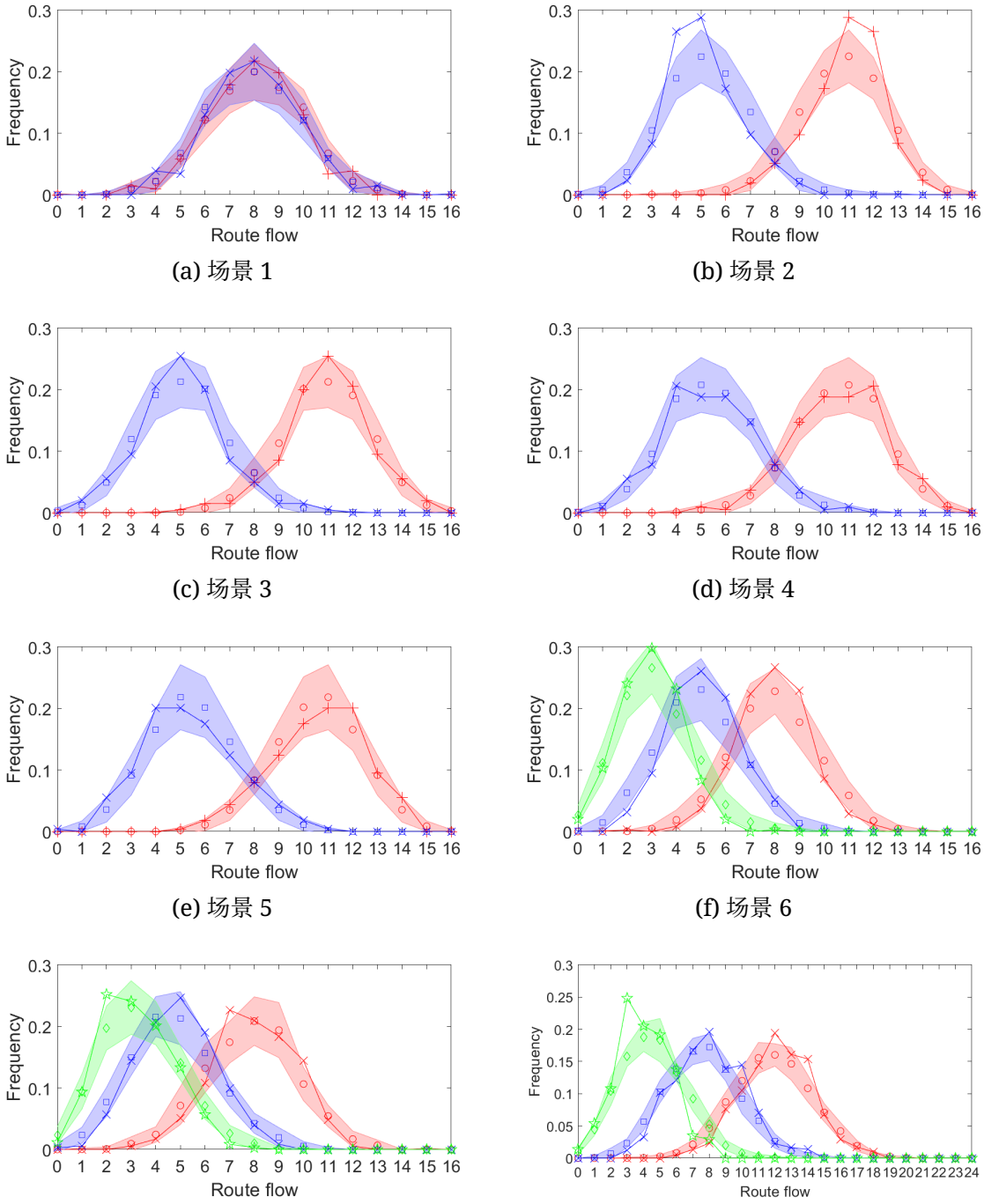


图 6：实验路径流量分布与理论路径流量分布的比较。

邀请一组受试者（每个实验轮次18人）从两条成本函数不同的备选路径中做出选择，实验持续了200轮。路径流分布取自 Selten et al. (2007) 的图2中的200个实验数据点。我们使用流量分布数据校准所提出的模型的参数。校准中使用以下性能指标。

$$\min \sum_{k=1}^{F} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\tilde{r}_{ki} - r_{ki}|}{r_{ki} + \xi} \tag{6}$$

其中，r_{ki} 和 $\tilde{r}_{ki}$ 分别表示根据所提出的模型和实验得出的受试者 k 在全部200轮中选择路径 i 的频率；ξ 是一个较小的实数，用于避免除以零。该指标旨在最小化实验流分布与模型估计的流量分布之间的相对偏差。标定参数为 $\theta = 0.349$、$\eta_1 = 0.752$ 和 $\eta_2 = 0.683$。图7对结果进行了比较，表明所提出的模型具有较高的预测准确性。

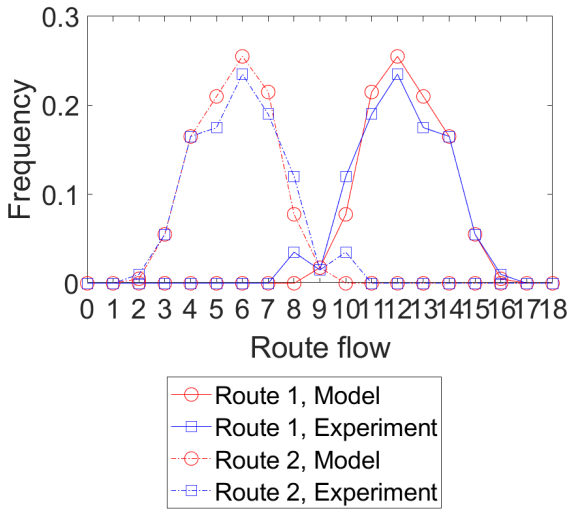


图7：结果比　　较——Selten et al. (2007) 中的模型估计与实验数据　　.

总之，RDAB-SP模型能够很好地解释实验数据所呈现的随机振荡，并且无需引入更多假设，便克服了确定性模型的主要局限。

5. 近似模型

研究表明，RDAB-SP模型成功地从随机视角解释了实验观测。然而，对大量服从二项分布的随机变量进行抽样会带来很高的计算负担，从而妨碍该模型在交通规划和/或政策设计中的实际应用。为解决这一问题，本节提出一种近似模型，在精度损失可接受的情况下简化模拟过程。

回顾公式4，切换流 Δf_{tij} 服从二项分布，其中 $n = f_i^t$，且 $p = p_{ij}^t$。考虑到路径用户的数量通常相当大，切换流 Δf_{tij} 可近似为高斯分布[3]，如下所示。

$$\Delta f_{ij}^t \sim \mathbf{N}(f_i^t p_{ij}^t \,,\, f_i^t p_{ij}^t (1 - p_{ij}^t)). \tag{7}$$

由于不同路径上的出行者独立地选择路径，f_j^t 是N个相互独立的高斯分布变量之和，即:

$$f_j^{t+1} = \sum_{i=1}^{N} \Delta f_{ij}^t \sim \mathbf{N}\left(\sum_{i=1}^{N} f_i^t p_{ij}^t \,,\, \sum_{i=1}^{N} f_i^t p_{ij}^t (1 - p_{ij}^t) \right). \tag{8}$$

通过转换为标准高斯分布，公式8可改写为一个固定项和一个随机项之和，即RDAB-SP模型的近似模型：

$$f_j^{t+1} = \sum_{i=1}^{N} f_i^t p_{ij}^t + \sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i^t p_{ij}^t (1 - p_{ij}^t)} \epsilon_j^t \tag{9}$$

其中，ϵ_j^t 是一个服从标准高斯分布$N(0, 1)$的随机变量。公式 9 是公式4中 RDAB-SP模型的近似模型。有趣的是，它由确定性模型（公式1）加上一个服从高斯分布的随机项构成。

[3]根据连续性校正理论（Anscombe，1948年），如果二项分布 $B(n,p)$ 中的 np 和 $np(1-p)$ 大于5，则该二项分布可以用高斯分布 $N(np,np(1-p))$较好地近似。

5.1 稳定性分析

近似的准确性取决于二项分布的高斯近似的准确性。令 $\bar{f}^{t+1}{}_j$ 为公式 9 中的确定性项，即：

$$\bar{f}_j^{t+1} = \sum_{i=1}^{N} f_i^t p_{ij}^t, \tag{10}$$

如果方程10不存在稳定均衡，近似模型可能会失效（Davis 和 Nihan，1993）。因此，我们将在下一小节进行稳定性分析。

在正式证明之前，我们先介绍如下的**离散动力系统的李雅普诺夫定理**。考虑一个离散时间自治动态系统

$$X(t+1) = H(x(t)) \tag{11}$$

其中，对于所有t，$H(0) = 0$。假设存在一个标量函数$V(x)$，使得对于所有t，$V(0) = 0$，且

- $V(x) > 0$当$x \neq 0$时；
- $\Delta V(x) < 0$ 当$x \neq 0$时，其中 $\Delta V(x)$ 是从x开始沿运动轨迹V 的增长率；

- $V(x)$ 关于x连续；

那么，均衡状态$x_\eta = 0$ 一致渐近稳定，且$V(x)$ 是该系统的李雅普诺夫函数（Kalman 和 Bertram，2003）。

我们采用研究第一部分（Qi 等人，2023）中公式（12）定义的同一个标量函数，即：

$$V(\vec{f}) = z(\vec{f}) - \min z(\vec{f}) \tag{12}$$

其中

$$z(\vec{f}) = \sum_{i=1}^{N} \theta \int_0^{f_i} C_i \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N} f_i \ln(P_i f_i) \tag{13}$$

根据定义，$V(\vec{f})$ 满足离散动力系统李雅普诺夫定理中的第一和第三个条件。

第二个条件证明如下。

$$\begin{aligned}\Delta V(\vec{f}) &= V(\vec{f}^{t+1}) - V(\vec{f}^{t}) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\{\theta(\int_{0}^{f^{t+1}} C_i^{t+1}\mathrm{d}x - \int_{0}^{f^{t}} C_i^{t}\mathrm{d}x) + [f_i^{t+1}\ln(P_i^{t+1}f_i^{t+1}) - f_i^{t}\ln(P_i^{t}f_i^{t})]\} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\{\theta(\int_{0}^{f^{t+1}} C_i^{t+1}\mathrm{d}x + \int_{f^{t}}^{0} C_i^{t}\mathrm{d}x) + (f_i^{t+1}\ln(P_i^{t+1}f_i^{t+1}) - f_i^{t}\ln(P_i^{t}f_i^{t})]\} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\{\theta\int_{f^{t}}^{f^{t+1}} C_i^{t+1}\mathrm{d}x + [f_i^{t+1}\ln(P_i^{t+1}f_i^{t+1}) - f_i^{t}\ln(P_i^{t}f_i^{t})]\}\end{aligned} \tag{14}$$

利用定积分中值定理和拉格朗日中值定理，方程14可改写如下。

$$V(f^{t+1}) - V(f^{t}) = \sum_{i=1}^{N}[\theta C_i(\xi_i) + \ln(P_i(\xi_i)\xi_i) + 1](f_i^{t+1} - f_i^{t}), \tag{15}$$

其中， ξ 介于f_i^t和$f^{t+1}{}_i$之间。

回顾研究第一部分中的方程（25），可得如下结论（Qi等，2023）。

$$\begin{aligned}G(\vec{f}^{t}) &= \sum_{i=1}^{N}[\theta C_i^t + \ln(P_i^t f_i^t) + 1]\left[-P_i^t f_i^t + e^{-\theta C_i^t}\frac{\sum_{k=1}^{N} P_k^t f_k^t}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\theta C_k^t}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N}(\theta C_i^t(f_i^t) + \ln(P_i^t(f_i^t)f_i^t) + 1)(f_i^{t+1} - f_i^t) \\ &< 0.\end{aligned} \tag{16}$$

由于方程16中的G($\vec{\mathrm{f}}^{t}$)在 $\vec{\mathrm{f}}$ t处连续，根据保号性质，存在 μ 的一个邻域，使得对于每个x$\in$ μ，G(x) < 0 。结合方程15可知，若 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$属于 μ，则V(f t^{+1}) $-$ V(f t) < 0，从而满足离散动力系统的李雅普诺夫定理中的第二个条件。由于 ξ_i 介于f t和f t^{+1}之间，只要 $\vec{\mathrm{f}}^{t}$ 与 $\vec{\mathrm{f}}$ t^{+1} i之间的差足够小，V(f t^{+1}) $-$ V(f t)便为负，由此可知，方程10的不动点一致渐近稳定。

请注意，这是稳定性的充分条件，但不是必要条件。它要求路径

流量在两个连续时间步之间不会发生剧烈变化，这可以通过在选择模型参数时采用较小的学习率或较高的选择惯性来保证。

5.2. 模型比较

本小节从单步演化的估计精度方面比较近似模型与所提出的RDAB-SP模型。为节省篇幅，我们以场景 3中的路线1为例，并在图8中展示近似模型的性能。单步演化被用作性能指标。对于单步演化，只有在极端情况下才会出现较小偏差，例如 $\vec{f}^t = (13, 3)$和 $\vec{f}^t = (14, 2)$；这可能是由于路线2的用户数量较少所致。对于均衡分布，近似模型也与RDAB-SP模型一致。因此，可以得出结论：近似模型能够很好地近似所提出的RDAB-SP模型。

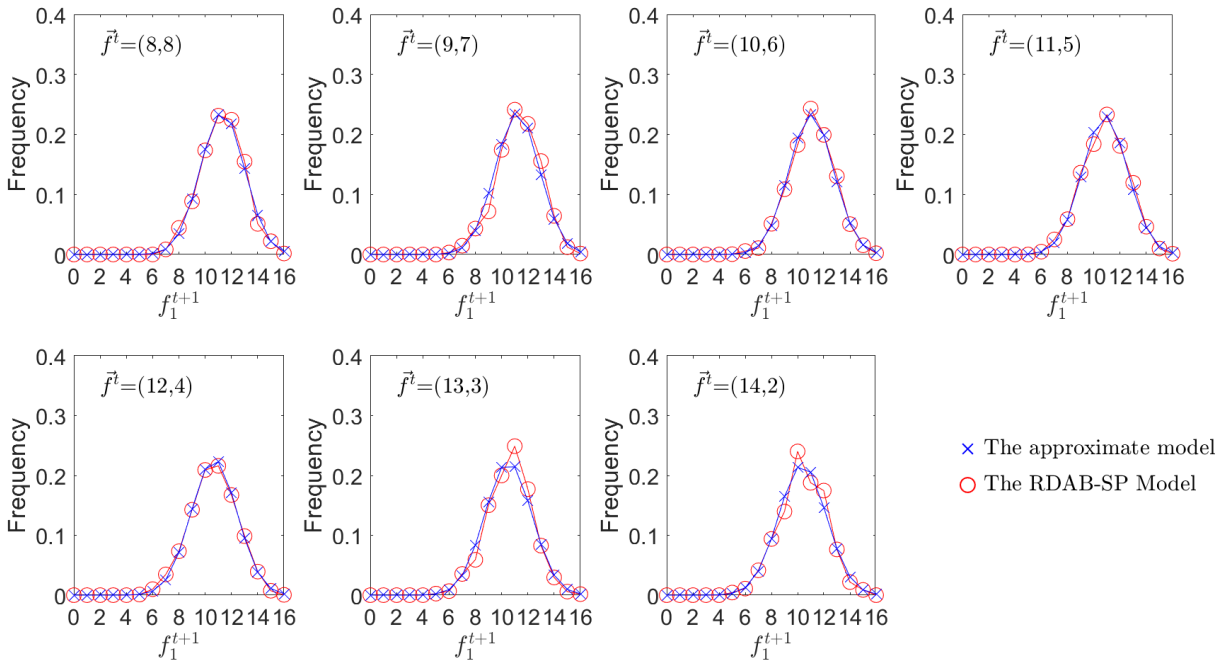


图8：比较近似模型和 RDAB-SP模型生成的场景 3 中路径1的单步演化。

6. 数值示例与政策启示

本节由以下四部分组成。第一部分（第6.1节）考察参数变化对均衡分布的影响，以及在不同设置下RDAB-SP模型与近似模型之间的一致性。第二和第三部分（第6.2节和第6.3节）分别展示模型在演化过程中的稳定性，以及近似模型在计算时间方面的优势。最后一部分（第6.4节）讨论政策启示。

采用一个三路径道路网络[4] 开展数值示例。每条路径的出行成本函数均为二次函数，计算方式为 $t_i = \alpha_i(1 + (f_i/c_i)^2)$ ，其中c_i 是路径i的通行能力。网络配置设为 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$、$c_0 = 30$、$c_1 = 20$和$c_2 = 10$。

6.1. 流量分布

构建并采用了三种不同的模拟场景（表2）。路线1的所得流量分布如图9所示，其中包括使用RDAB-SP模型模拟得到的分布，以及相应的近似模型结果。

从图9的结果中可以得出以下观察。首先，近似模型的结果与RDAB-SP模型得出的精确结果非常相似。其次，在其他参数固定时，场景I中的路线1均值流量高于场景II，这表明路径依赖吸引力系数越大，吸引的流量越多。这与确定性模型中的结果一致。第三，路径流量方差几乎随需求增加而成比例增长（比较场景II与场景III），正如方程8所预测的那样。

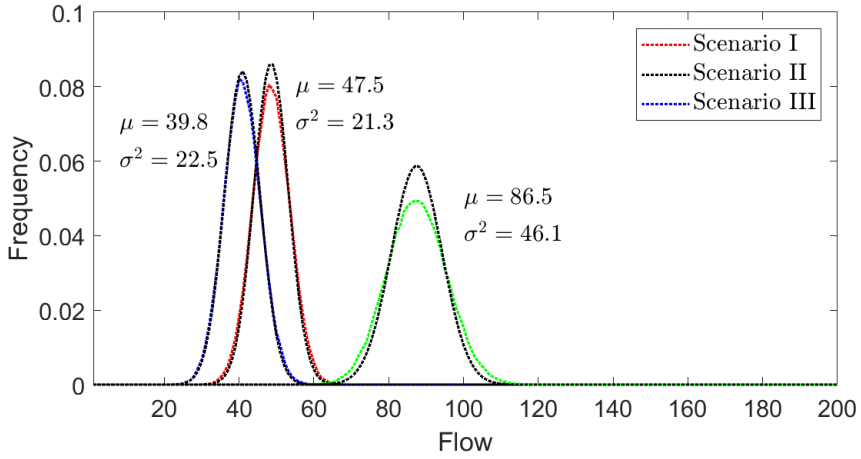
6.2. 演化过程与稳定性

在本部分中，路径依赖吸引力系数设置为 $\eta_0 = 0.3$、$\eta_1 = 0.2$ 和 $\eta_1 = 0.1$，与容量成正比；总需求 $D = 100$；

[4] 由于复杂网络不会改变我们拟研究的结果，因此不采用复杂网络未采用该项，因为它不会改变我们打算考察的结果。

表2：数值示例中的参数。

场景	需求	θ	η_1	η_2	η_3
I	100	0.01	0.5	0.2	0.1
II	100	0.01	0.3	0.2	0.1
III	200	0.01	0.3	0.2	0.1

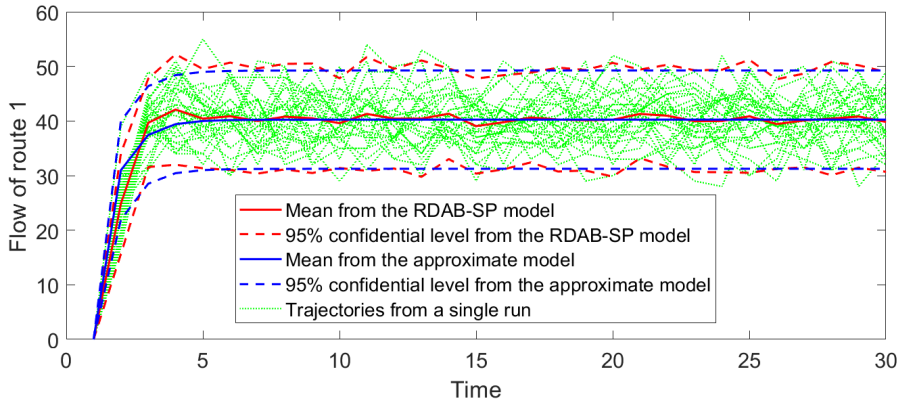


Fi图9：数值示例的结果。为简化起见，重点关注路线1。

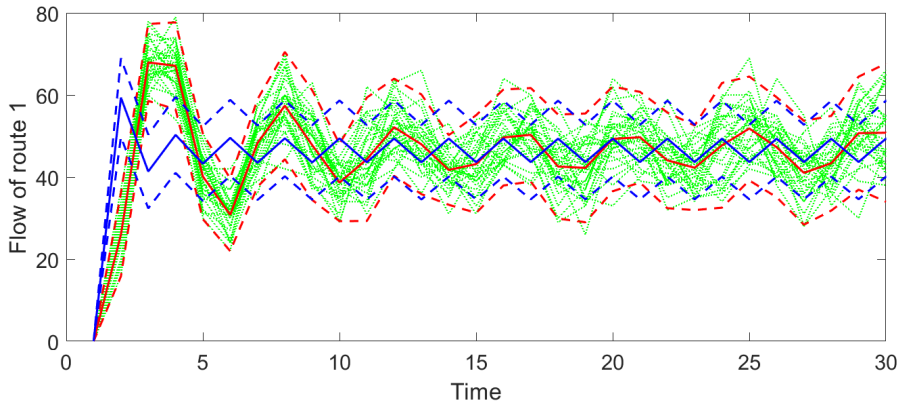
离散参数 θ 将进行调整，以生成不同的结果。

首先，假设选择路线1、2和3的出行者人数分别为0、50和50。然后，我们运行RDAB-SP模型和近似模型，模拟接下来100天（轮次）的情况。对于RDAB-SP模型，我们对该场景进行30次模拟，并根据这30个数据点计算每天的均值和95%置信水平。对于近似模型，我们使用方程10估计$f^{t+1}{}_i$的均值，并假设$f^{t+1}{}_i$服从方差为$\sum_{i=1}^{N} f_i^t p_{ij}^t (1-p_{ij}^t)$的高斯分布，从而计算$f^{t+1}{}_i$的95%置信水平。我们分别针对 $\theta = 0.01$、 $\theta = 0.1$和 $\theta = 1$开展了三组数值实验。

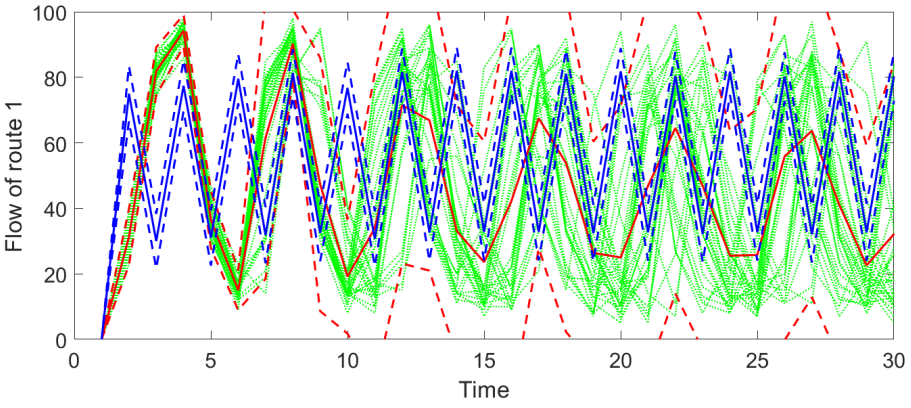
结果如图10所示。正如第5.1节的稳定性分析所示，当 $\theta = 0.01$ 时，路线变更强度很低（图10(a)），因此，两个连续日期之间的路线流量差足够小，可以保证稳定性。从图10(a)还可以发现，单次模拟的轨迹从未收敛，而是在一定范围内振荡。这与我们在本研究第一部分中介绍的路径选择实验观察结果一致（见 Qi等人的图2。



(a) $\theta = 0.01$



(b) $\theta = 0.1$



(c) $\theta = 1$

图10：近似模型的数值示例。为便于可视化，仅展示前30天的结果。

(2023))。另一方面，路线1的流量均值轨迹在暂态阶段（第1至5天）平稳变化，并最终收敛至其均衡值（第5天之后）。两种模型的均值和95%置信水平都非常接近，不仅在稳态阶段（第5天之后），在暂态阶段（第1至5天）也是如此。

相比之下，如果设置 $\theta = 1$，网络的均衡点永远不会稳定，因为较大的 θ 意味着即使成本差异很小，出行者也会频繁更换路径。因此，连续两天之间的流量差异也可能很大，这不符合稳定性条件。

当 $\theta = 0.1$时，结果是一个有趣的“中间”情形。在这种情况下，最初几天的估计误差较大，因为在远离均衡的初始状态下，流量变化剧烈。当系统逐渐趋于稳定时，均值和置信水平的估计误差都会大幅减小。

6.3. 计算效率

提出近似模型的主要动机之一是减轻计算负担，因此我们展示了近似模型的计算效率。RDAB-SP模型及其近似模型均使用 C# 语言编写，并在配备 Windows 10 操作系统、Intel i7 2.5 GHz CPU 和 8 GB内存的个人计算机上运行。表3显示了这两个模型的计算时间。可以看出，近似模型在计算效率方面明显优于 RDAB-SP模型，尤其是在出行者数量较多时。

表3：RDAB-SP模型及其近似模型的计算时间比较（1000 天）

需求	计算时间（ms）	
	RDAB-SP模型	近似模型
1000	63	0.89
10000	1649	12.9
100000	16327	12.6

6.4. 政策启示

所提出的 RDAB-SP模型及其近似模型对交通工程、规划和政策制定都具有实际价值。例如，

实施新增收费站或交通限制等新政策后，交通管理者准确预测网络流的日常变化至关重要。传统上，人们只能使用确定性模型估算网络流的趋势或未来期望值。然而，由于存在随机波动，网络流的实际值可能与期望值相差很大，从而对政策成效产生负面影响。如今，借助所提出的随机模型，交通工程师和规划者可以定性预测网络流的统计特征，包括均值、方差、置信区间，甚至概率分布，这对制定更好的政策大有裨益。此外，近似模型较高的计算效率还能进一步确保所提方法的实用性。

7. 结论

受确定性特征的限制，基于微分函数的DTD模型只能呈现网络流的预期或均值演化轨迹。为理解实验中广泛观察到的随机振荡背后的驱动因素，本研究提出了RDAB-SP模型，该模型基于DTD路径选择实验中观察到的行为现象（见本研究第一部分（Qi等，2023））。我们从三个指标对RDAB-SP模型进行检验，即切换流、单步演化和路径流分布。此外，我们采用另一篇论文收集的数据来检验所提出模型的泛化能力。结果表明，该模型能够令人满意地再现网络流演化过程中的随机振荡。此外，我们还提出了所提出模型的一个近似模型，以降低计算负担，从而有效地使该模型成为交通规划人员和政策制定者实用且有效的工具。

据我们所知，本文首次尝试通过提出一种随机过程DTD模型来解释实验发现。值得注意的是，看似杂乱无章的现象（随机路径切换行为）实际上由简单规则主导，即独立且基于概率的路径选择。考虑到

RDAB-SP模型是通过用分布替代期望值，直接从确定性模型推导而来的，这部分研究进一步证实了第一部分中路径选择行为基本框架的普适性，即具有路径依赖惯性和偏好的离散选择（Qi等，2023）。

受一系列路径选择实验中的若干有趣发现启发，本研究（包括第一部分和第二部分）通过对出行者的路径选择行为进行明确建模，探讨了DTD网络流动态。通过所提出的分析，我们从确定性和随机性视角出发，对DTD路径选择行为和网络流动态进行了更好的描述。本研究的关键在于，出行者的路径选择行为受若干简单却有趣的规则驱动；因此，重要的是以个体为单位、采用细分方式处理出行者的路径选择行为，而不只是关注流量交换规则等网络层面的行为。

本研究存在一些有待未来解决的局限性。本文总结的证据可能仅适用于实验所采用的网络，例如采用线性成本函数、路径包含相同数量的边、单一起点、单一终点以及用户同质的网络。其能否推广到拓扑结构更丰富的网络、采用其他博弈协议的情形，以及由异质网络用户构成的群体，仍有待检验。未来研究应探讨参数变化是否以及如何影响结论的普适性，并检验所提出的模型的性能。

致谢

本研究由国家自然科学基金（72101085、71871010）和复杂管理系统计算与分析实验室（CACMS）（天津大学）资助。

参考文献

Anscombe, F.J., 1948年。泊松、二项和负二项数据的变换。Biometrika 35, 246–254。

Cantarella, G.E., Cascetta, E., 1995。交通网络中的动态过程与均衡：迈向统一理论。Transportation Science 29, 305–329。

Cantarella, G.E., Watling, D.P., 2016年. 日常动态交通分配的一般随机过程：建模、渐近行为与稳定性分析. Transportation Research Part B: Methodological 92, 3–21.

Cascetta, E., 1989. 交通网络中时间动态分析的随机过程方法. Transportation Research Part B: Methodological 23, 1–17.

Davis, G.A., Nihan, N.L., 1993. 一般随机交通分配模型的大规模人口近似. Operations Research 41.

Dixit, V.V., Denant-Boemont, L., 2014. 交通均衡是纯纳什均衡、混合均衡还是随机均衡? Transportation Research Part C: Emerging Technologies 48, 301–310.

Guo, X., Liu, H.X., 2011年. 有限理性与不可逆网络变化. Transportation Research Part B: Methodological45,1606–1618.

Han, X., Yu, Y., Jia, B., Gao, Z.Y., Jiang, R., Zhang, H.M., 2021. 出行方式选择中的协调行为：关于均衡转换与选择的实验室研究。《生产与运营管理》30，3635–3656。

He, X., Liu, H.X., 2012. 建模网络意外中断后的日常交通演化过程。Transportation Research Part B: Methodological 46，50–71。

He, X., Peeta, S., 2016. 基于一步战略思维的边际效用日常交通演化模型。Transportation Research Part B: Methodological 84，237–255。

Iida, Y., Akiyama, T., Uchida, T., 1992. 动态路径选择行为的实验分析。Transportation Research Part B: Methodological 26，17–32。

Kalman, R.，Bertram, J.，2003。基于李雅普诺夫第二方法的控制系统分析与设计：（i）连续时间系统；（ii）离散时间系统。Ire Transactions on Automatic Control 4, 112–112。

Kumar, A.， Peeta, S.， 2015。固定需求交通网络非均衡状态下路径流演化的日常动力学模型。Transportation Research Part B: Methodological 80，235–256。

Meneguzzer, C., Olivieri, A., 2013. 每日交通动态：在有限反馈信息下简单网络中路径选择与路径转换的类实验室实验。《社会与行为科学程序汇刊》87, 44–59。

Qi, H., Jia, N., Qu, X., He, Z., 2023. 基于多场景实验室实验研究每日路径选择，第一部分：路径依赖吸引力及其建模。《交通研究A辑：政策与实践》167, 103553。

Qi, H., Ma, S., Jia, N., Wang, G., 2019. 易拥堵网络中通勤者对出行前信息的个体响应模式：实验室实验。《交通计量A辑：交通科学》15, 376–395。

Selten, R., Chmura, T., Pitz, T., Kube, S., Schreckenberg, M., 2007. 通勤者的路径选择行为。《博弈与经济行为》58, 394–406。

Serfozo, R., 2009. 应用随机过程基础。施普林格科学与商业媒体。

Smith, M., Hazelton, M.L., Lo, H.K., Cantarella, G.E., Watling, D.P., 2014. 逐日交通分配模型的长期行为。Transportmetrica A: Transport Sci- ence 10, 647–660.

Watling, D., 1999. 随机均衡分配问题的稳定性：一种动态系统方法。Transportation Research Part B: Methodological 33, 281–312.

Watling, D., Cantarella, G.E., 2013. 交通系统中变异来源的建模：逐日动态模型的理论基础。Transportmetrica B- Transport Dynamics 1, 3–32.

Watling, D., Milne, D.S., Clark, S.D., 2012. 道路容量缩减的网络影响：实证分析与模型预测。Transportation Research Part A-policy and Practice 46, 167–189.

Xiao, F., Shen, M., Xu, Z., Li, R., Yang, H., Yin, Y., 2019. 随机用户均衡的逐日流量动态及一种一般李雅普诺夫函数。Transportation Science 53, 683–694.

Xiao, F., Yang, H., Ye, H., 2016年。逐日网络流动态的物理学。Transportation Research PartB: Methodological86，86–103。

Ye, H., Xiao, F., Yang, H., 2018年。通过虚拟实验探索逐日路径选择模型。Transportation Research Part C: Emerging Technologies 94，220–235。

Ye, H., Yang, H., 2017年。具有有限理性用户均衡的理性行为调整过程。Transportation Science 51，968–980。

Zhao, C.L., Huang, H.J., 2016年。有限理性路径选择行为实验及满意化规则下的模型。Transportation Research Part C: Emerging Tech- nologies 68，22–37。

Zhu, S., Tilahun, N., He, X., Levinson, D.M., 2011年。I-35W大桥坍塌和重新开放的出行影响及调整策略，载于：Network Reliability in Practice。Springer New York，第21–36页。