arXiv:2303.04100v1 [physics.data-an] 7 Mar 2023

粒子束计量的连续时间建模与分析

Akshay Agarwal、Minxu Peng 和 Vivek K Goyal

摘要—**粒子束显微术（PBM）通过逐像素捕获标量值进行纳米尺度成像，这些标量值表示在驻留时间内积分的二次电子（SEs）响应的含噪测量值。将其扩展至计量领域后，目标包括估计每个像素处的二次电子产额，以及检测像素之间二次电子产额的差异；其中的障碍包括粒子源中的散粒噪声，以及对单个二次电子的仪器响应缺乏了解且存在变化。近期引入的时间分辨测量范式有望缓解源散粒噪声，但其分析和发展在很大程度上局限于估计问题，并且基于这样一种理想化假设：二次电子脉冲串能够被直接且完美地计数。本文将分析扩展至特征检测问题中的错误指数，以及针对估计问题、能够代表实际仪器行为的退化测量。对于基于理想化二次电子计数的估计，本文还对现有估计量进行了分析，并给出一种更优的估计量。对于现实 PBM 成像场景中的估计，本文对理想化模型进行了扩展，讨论了模型参数提取方法，并展示了时间分辨数据带来的显著改进。**

索引词—**二元假设检验、电子显微术、费 Fisher 信息、氦离子显微术、Kullback–Leibler散度、Neyman A型分布、泊松过程、截断泊松分布、零膨胀泊松分布。**

I. 引言

粒子束显微术（PBM）技术，例如扫描电子显微镜（SEM） [1], [2] 和氦离子显微镜（HIM） [3], [4], 广泛用于对纳米尺度的样品进行成像和表征。图像通过光栅扫描聚焦的高能带电粒子束（SEM 中的电子和 HIM 中的氦离子），并检测从样品中发射的二次电子（SEs），逐像素形成。像素值是对在一段驻留时间内积分的二次电子信号强度进行的含噪测量。其尺度通常是任意的；因此，显微照片仅显示空间变化，并不代表经过量化的物理属性。对束流电流 （表示单位时间内入射粒子的平均数量）以及每个二次电子的平均仪器响应进行校准，可以实现更高阶的计量目标，使像素值表示每个入射粒子的二次电子产额 估计值。

初级粒子入射的随机性——源散粒噪声——是 PBM 的一项关键特性，会导致其噪声，进而影响生成高质量图像所需的平均次数。PBM 可实现的图像质量往往受成像剂量（即入射粒子数量）的限制。对于蛋白质和生物分子等辐射敏感材料而言，这一限制尤为重要；越来越多的研究正采用各种 PBM 技术对这类材料进行成像 [5], [6]。尽管此前已有研究探讨剂量与图像质量之间的权衡 [7]–[9],，也有人尝试通过去噪和反卷积技术提高 PBM 图像质量 [10]–[14], ，但目前仍缺乏关于样品二次电子产额信息与所用成像剂量之间关系的基础性研究，也缺乏基于 PBM 所采集信号、具有统计学依据的二次电子产额估计技术。

本文探讨了粒子束计量的基本极限，并介绍了一种新颖的成像方案：该方案以采用二次电子信号模拟信号耦出的时间分辨测量，取代在驻留时间内进行积分。对于二次电子产额的检测和估计，我们发现，时间分辨测量可带来显著改进。从一个假设二次电子可被完美计数的理想化模型出发，我们表明，这些改进可通过高斯分布与零膨胀泊松分布之间的 Kullback–Leibler散度和费舍尔信息差异来表征。我们进一步扩展建模与分析，纳入导致二次电子计数不准确的三种因素：二次电子计数中的饱和、检测信号链产生的加性噪声，以及时间上相邻的入射粒子所产生响应的重叠。

在 [15] 中，研究者首次提出了在 PBM 中利用时间分辨率的概念。在 [16], 中，研究者首次提出了 PBM 的连续时间建模，并对若干二次电子产额估计量进行了理论分析和蒙特卡洛模拟。在 [17],[18],中，研究者证明了该方法对未知束流电流具有稳健性；在 [19], [20] 中，研究者研究了束流电流和二次电子产额的联合估计。一篇近期论文提出了基于即插即用方法的去噪程序，可用于处理时间分辨数据 [21]。上述先前研究都集中于一种假设二次电子能够被完美计数的模型。因此，这些研究可能会让人误以为，时间分辨测量的优势取决于这一理想化假设。本文通过纳入二次电子观测中的各种退化因素，强调即使二次电子检测并不理想，时间分辨测量仍然具有优势。

A. 贡献

本文的主要贡献包括：

- 二次电子产额的检测。我们首次给出了基于

作者现供职于美国马萨诸塞州波士顿市波士顿大学电气与计算机工程系，邮编 02215（电子邮箱：akshayag@bu.edu；mxpeng@bu.edu；v.goyal@ieee.org）。本研究部分由美国国家科学基金会通过第 1815896 号和第 2039762 号资助项目提供资助。

二次电子计数测量。无限的改进
利用库尔贝克–莱布勒散度分析时间分辨测量导致的错误指数。

- 改进二次电子产额估计。我们提出了一种基于二次电子计数测量来估计二次电子产额的新估计量，其性能优于 [16] 中分析和仿真的估计量。我们还对 [16] 中的一些估计量和界限提供了新的见解。
- 基于二值二次电子测量进行估计。 我们表明，即使测量结果在 1 个二次电子处饱和，也可以估计二次电子产额；并刻画了这种受限测量形式下的性能极限。
- 基于退化的二次电子测量进行估计。我们分析了二次电子测量中的加性噪声导致估计误差下界增大的情况。我们还提供了一种将模型参数拟合到实验数据的流程。
- 非零脉冲宽度的影响。 针对脉冲重叠可能导致的探测事件漏计数，我们提出了一种补偿方法。

B. 概述

第二节介绍了一个用于 PBM 的抽象模型，并汇总了若干初步计算，这些计算涉及在对二次电子进行完美计数时生成的 Neyman A 型观测。第三节专门讨论将特征检测抽象为二元假设检验的情形。我们计算了常规测量和时间分辨测量的错误指数，并发现采用时间分辨测量后，错误指数会大幅提高（错误概率会大幅降低），提高幅度可能无界。第四节转向估计问题，仍假设对二次电子进行完美计数。我们深入分析了现有估计量，并介绍了一种基于预知估计器的条件期望的新估计量。第五节介绍了一种估计二次电子产额的估计量，它不需要二次电子计数；相反，它仅使用探测事件的数量，就像二次电子探测器在单个电子处饱和时所得到的结果。第六节建立了一个更丰富的二次电子噪声检测模型，并提出了若干适用于这一情形的估计量。我们展示了测量的费 Fisher 信息如何随着噪声增大而衰减。我们开发了拟合模型参数的方法，并展示了使用真实仪器采集的数据所得的结果。估计仿真表明，时间分辨测量带来了显著改进。第七节作总结。

II. 理想二次电子计数的抽象模型

在简要介绍第二节-A 中典型仪器的工作原理后，我们将在第二节-B 中回顾一种假设二次电子计数理想化的抽象模型 [16] 。这一理想化模型用于第三节中的检测问题，以及第四节中的估计问题。

第二节-D中建立的二次电子理想化常规测量的Neyman A型分布可用于各种数值评估，但不利于获得闭式解析结果。因此，我们引入高剂量和低剂量近似，以及一个受确定性入射粒子束概念启发的代理量。这些近似及其渐近线为理解理想化常规测量的分布行为提供了深刻直观的认识。为便于之后与时间分辨测量进行衬度，我们还给出了常规测量的费 Fisher 信息（第二节-E）和Kullback–Leibler散度（第二节-F）计算结果。

入射粒子可以是电子或离子，但为简便起见，我们将其统称为离子。

A. 典型仪器的工作原理

在典型的粒子束成像装置中，如图1(a)的示意图所示，样品每个像素发射的二次电子由埃弗哈特-桑利（ET）探测器检测 [22], 。该探测器由闪烁体和光电倍增管（PMT）组成。检测单个入射离子产生的二次电子通常在几飞秒内完成 [23],，而离子的平均到达间隔时间约为 100 ns。二次电子从样品像素发射后，通常会被加速至 10 千电子伏，并入射到闪烁体上。闪烁体会产生数量随机的光子，其平均数量与入射二次电子的数量成正比。随后，这些光子经由导光管导向光电倍增管，并在其中产生平均脉冲高度与光子数量成正比的电压脉冲。因此，ET 探测器的最终输出信号由一系列电压脉冲构成，如图1(e)所示的实验数据。

尽管理想的二次电子图像应当是样品二次电子产额的逐像素映射，但传统粒子束显微术由于两个原因并不尝试生成这样的图像。首先，二次电子检测链中涉及的增益和损失因素通常不为显微镜操作员或成像软件所知。其次，单个二次电子产生的电压信号可能存在很大的方差。由于缺乏关于每个二次电子的平均仪器响应的信息，成像时通常不会评估每个像素的二次电子计数，因此无法估计二次电子产额。取而代之的是，以固定周期（通常为 100 ns）对电压信号进行采样，并在每个像素驻留时间内求和，从而生成一个标量 8位像素亮度。

B. 随机过程抽象

我们的测量模型和估计技术可按像素分别处理，因此省略像素索引。用 t 表示像素驻留时间。对于每个像素，入射离子的到达过程建模为速率已知、每单位时间为 Λ 的泊松过程，如图1(b)中 $t = 10$ µs 的情形所示。入射离子 i 与样品相互作用，导致检测到数量为 X_i 的二次电子，如图1(c)所示。每个 X_i 都可以描述为均值为 η [24] 的泊松随机变量。这个 η 称为二次电子产额，是我们希望测量的像素参数。请注意，检测效率 [25], [26] 已纳入 η 的定义中。

该模型可描述为标记泊松过程$\{(T_1,\ X_1),\ (T_2,\ X_2)\ \ldots\}$，其中（$T_1,\ T_2,$ .....）是离子的到达时间序列。入射离子的数量 M 是满足 $T_i \le t$ 的最大 i （当 $T_1 > t$时 $M = 0$ ）。该 M 是均值为 $\lambda = \Lambda t$的泊松随机变量，我们将其称为剂量。

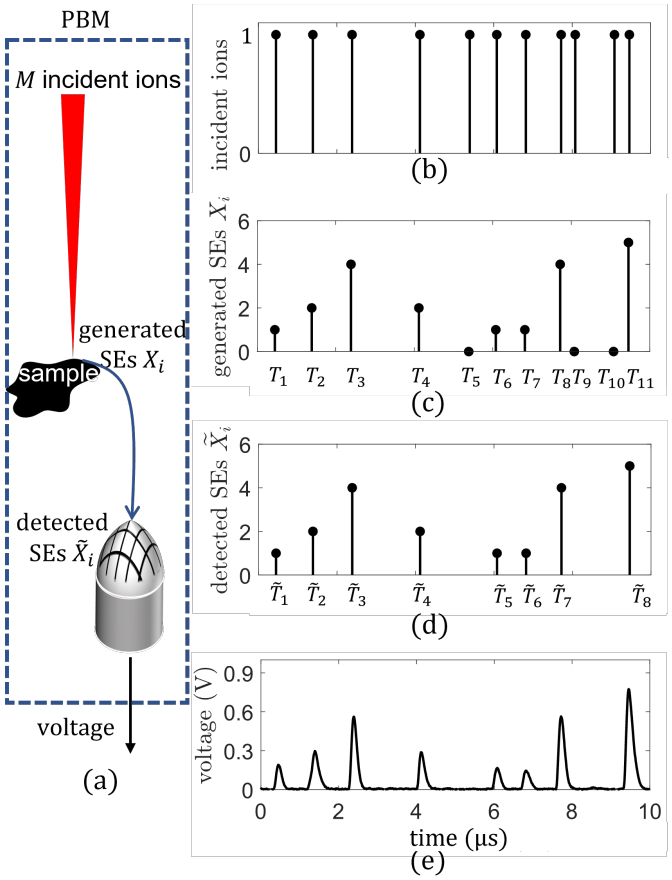


图 1：PBM 中二次电子成像生成模型所涉及随机过程的一种可能实现。(a) PBM 中二次电子成像示意图。(b) M 入射离子的生成。(c) 底层标记泊松过程 $\{(T_1, X_1), (T_2, X_2) \ldots\}$，离子在时刻 T_1，T_2，..... 入射，并生成检测到的二次电子计数 X_1，X_2，.....。$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$(d) 标记泊松过程 $\{(T_1, X_1), (T_2, X_2) \ldots\}$，通过丢弃未检测到二次电子的离子而得到。(e) 二次电子探测器的电压响应。该面板是氦离子显微镜电压输出的实际快照。

离子只能通过检测二次电子间接观测。当 $X_i = 0$时，不会观测到事件。因此，可观测的是标记稀疏化泊松过程 $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim\{(T_1, X_1), (T_2, X_2) \ldots\}$，其中 T_i 是产生正数检测到的二次电子的第i个离子的到达时间，$\sim X_i$ 是相应的检测到的二次电子数量，如$\sim$ $\sim$图 $\sim$1 $\sim$ M i $T_i \le t$ (d)所示。定义 $\sim$为满足条件的$\sim$最大值（当 $T_1 > t$时 $M = 0$）。

C. 时间分辨测量模型

观测

$$\left\{\widetilde{M}, \widetilde{T}, \widetilde{X}\right\} = \left\{\widetilde{M}, (\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, ..., \widetilde{T}_{\widetilde{M}}), (\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, ..., \widetilde{X}_{\widetilde{M}})\right\} \tag{1}$$

[1]更常见的定义是，剂量指单位面积上的入射粒子平均数；这里我们不考虑绝对空间尺度。

在 [16] 中以连续时间、时间分辨测量的形式引入，与此前在 [15] 中引入的离散时间模型形成对比。这里我们只考虑连续时间情形，这样可以得到更简单且更易于解释的结果。

由于稀疏化独立于离子入射过程，且 $\mathrm{P}(X_i = 0) = e^{-\eta}$，

$$\widetilde{M} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda(1 - e^{-\eta})). \tag{2}$$

$\sim$每个 X_i 都服从参数为 η 的零截断泊松分布：

$$\mathrm{P}_{\widetilde{X}_i}(j; \eta) = \frac{e^{-\eta}}{1 - e^{-\eta}} \cdot \frac{\eta^j}{j!}, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

该分布的均值为

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{X}_i\right] = \frac{\eta}{1 - e^{-\eta}}. \tag{4}$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$给定 M，$(X_1, \ldots, X_{\widetilde{M}})$ 独立同分布。以 $M = \widetilde{m} > 0$为条件，归一化后的$\sim$时间 T_i/t 服从 Beta$(i, \widetilde{m} + 1 - i)$ 分布（与 η 无关）。

D. 传统测量分布

如第二节 A 部分所述，典型仪器会为光栅扫描中的每个位置生成一个标量值，而这个值受到许多噪声源的影响。理想化的标量测量是指仪器给出驻留时间 t 内的累积二次电子计数（即，测量结果为每个像素对应一个标量值，而不是向量值时间分辨测量）：

$$Y = \sum_{i=i}^{M} X_i. \tag{5}$$

该 Y是一个参数为λ 和 η的 Neyman A 型随机变量，记作 Neyman(λ, η)。其概率质量函数为

$$\mathrm{P}_Y(y; \eta, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\eta^y}{y!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\eta})^m m^y}{m!}, \quad y = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

其均值为

$$\mathbb{E}[Y] = \lambda\eta, \tag{7}$$

其方差为

$$\mathrm{var}(Y) = \lambda\eta(\eta + 1). \tag{8}$$

与泊松分布类似，方差随均值增大；但与泊松分布不同的是，方差大于均值，且随着 η 增大，这种情况会愈发明显。这种超额方差与实验观测一致，并且复合泊松分布此前已用于模拟 PBM 中二次电子的分布 [27]–[30]。

概率质量函数 (6) 中的级数使 Neyman A 型分布在解析和计算上都难以处理。虽然有时我们会直接使用 (6)，但在高或低λ的情况下，使用近似方法能简化某些计算，也能让某些比较更直观。纯粹假设存在一束确定性入射束，也有助于理解问题背景。

1) 确定性束流（泊松近似）：如果 λ 是正整数，我们可以设想这样一种情况：恰有λ 个离子入射。由于相互独立的泊松随机变量之和仍是泊松随机变量，我们得到一个简单模型

$$Y_{\mathrm{det}} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda\eta). \tag{9}$$

对比 (8) 可知，Y 的方差比Y_{det}高出 $\eta+1$倍。这一 $\eta+1$ 倍数归因于入射离子计数的随机性，即源散粒噪声。

2) 高 λ （高斯近似）：当 $\lambda \to \infty$时，在矩母函数 [31, §2a]逐点收敛的意义下，(7) 和 (8) 中的匹配矩高斯近似成立：

$$Y_{\mathrm{high}} \sim \mathcal{N}(\lambda\eta, \lambda\eta(\eta+1)). \tag{10}$$

可以通过对区间 $\{[y-\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}]\}_{y=0}^{\infty}$ 积分，利用 (10) 构造近似概率质量函数。对于$\lambda > 10$和 $\eta > 1$，该近似的平方 ℓ^2 误差小于 0.002 [31,图 1]。对于获得高质量显微照片，每像素剂量超过 10 个离子是常见情况。

3) 低 λ （零膨胀泊松近似）：当 $\lambda \to 0$时，概率质量函数 (6) 逐点收敛到一个在零点处额外集中了概率质量的泊松分布 [31, §2b]:

$$\mathrm{P}_{Y_{\mathrm{low}}}(y\,;\,\eta,\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda} + (1-e^{-\lambda})e^{-\eta}, & y=0; \\ (1-e^{-\lambda})e^{-\eta}\eta^y/y!, & y=1,\,2,\,\ldots. \end{cases} \tag{11}$$

我们将其记为 ZIPoisson(λ, η)。对于 $\lambda < 0.3$ 和 $\eta < 10$，此近似的平方 ℓ^2 误差小于 0.001 [31, 图 1]。我们使用此近似来理解连续时间行为，此时 λ 实际上是无穷小的。

E. 费希尔信息

费希尔信息（FI）是用于给估计量的均方误差提供下界的一种基本工具。这里我们汇总 FI 的计算结果，以便为 TR 测量的 FI 提供背景说明。

1) 确定性束流（泊松近似）：关于泊松分布(ν)观测中均值 ν 的费希尔信息为

$$\mathcal{I}(\nu) = \frac{1}{\nu}.$$

因此，我们有 $\mathcal{I}_{Y_{\mathrm{det}}}(\lambda\eta) = 1/(\lambda\eta)$。已知 λ 时，通过简单的缩放可得

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_{Y_{\mathrm{det}}}(\eta;\lambda) = \frac{1}{\eta} \tag{12}$$

采用下文将使用的归一化形式。

2) 高 λ （高斯近似）：关于高斯观测 $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ 中均值 μ 的费舍尔信息为

$$\mathcal{I}(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

对 Neyman(λ, η) 分布使用高斯近似（10），启发式地表明关于 $\lambda\eta$ in Y_{high} 的费 Fisher 信息为

$$\mathcal{I}_{Y_{\mathrm{high}}}(\lambda\eta) = \frac{1}{\lambda\eta(\eta+1)}. \tag{13}$$

已知 λ 时，通过简单的重新缩放可将其转换为

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_{Y_{\mathrm{high}}}(\eta;\lambda) = \frac{1}{\eta(\eta+1)} = \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta+1}\right). \tag{14}$$

事实上，关于

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_Y(\eta;\lambda) = \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta+1} \tag{15}$$

的详细推导见 [16,附录 B]。与（12）相比，费舍尔信息减少了 $\eta+1$ 倍。

3) 低 λ （零膨胀泊松近似）：根据概率质量函数（11），

$$\log \mathrm{P}_{Y_{\mathrm{low}}}(y\,;\,\eta,\lambda) = \begin{cases} \log(e^{-\lambda} + (1-e^{-\lambda})e^{-\eta}), & y=0; \\ \log(1-e^{-\lambda}) - \eta + y\log\eta - \log(y!), & y=1,\,2,\,\ldots. \end{cases}$$

求导可得

$$\frac{\partial \log \mathrm{P}_{Y_{\mathrm{low}}}(y\,;\,\eta,\lambda)}{\partial\eta} = \begin{cases} \dfrac{(1-e^{-\lambda})e^{-\eta}}{e^{-\lambda} + (1-e^{-\lambda})e^{-\eta}}, & y=0; \\ -1 + y/\eta, & y=1,\,2,\,\ldots. \end{cases} \tag{16}$$

现在根据概率质量函数（11）计算该量平方的期望值，可得

$$\mathcal{I}_{Y_{\mathrm{low}}}(\eta;\lambda) = \frac{(1-e^{-\lambda})^2 e^{-2\eta}}{e^{-\lambda} + (1-e^{-\lambda})e^{-\eta}} + (1-e^{-\lambda})\left(\frac{1}{\eta} - e^{-\eta}\right). \tag{17}$$

在 λ 较低的极限下，第一项趋近于零，第二项的第一个因子趋近于 λ，因此

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_{Y_{\mathrm{low}}}(\eta;\lambda) = \frac{1}{\eta} - e^{-\eta}. \tag{18}$$

这与对

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_Y(\eta;\lambda) = \frac{1}{\eta} - e^{-\eta} \tag{19}$$

在 [16, 附录 B] 中的繁琐推导结果一致。

(18) 中费舍尔信息的低 λ 极限比 (15) 中的高 λ 极限大 $(\eta+1)(1-\eta e^{-\eta})$ 倍。当 $\eta = 0$ 时，这一因子为 1；当 η 较高时，则为 $\approx \eta+1$ 。费舍尔信息的这一增益可归因于低 λ 下对入射离子数量的确定性增加，以及由此带来的源散粒噪声 [15] 的降低。

F. Kullback–Leibler 散度

Kullback–Leibler 散度（KLD）是量化分布之间距离的基本工具，尤其可用于确定假设检验的错误指数。此处我们汇总了适用于区分 Neyman(λ, η_0) 分布和 Neyman(λ, η_1) 分布的 KLD 计算结果。这将用于说明 TR 测量的 KLD。

对于同一字母表上的分布 p 和 q ，Kullback–Leibler 散度为

$$D_{\mathrm{KL}}(p\,\|\,q) = \mathrm{E}_P[\,\log(p(Y)/q(Y))\,], \tag{20}$$

这是随机变量 $\log(p(Y)/q(Y))$ 在 Y 服从 p 分布时其期望值的简写。

1) 确定性束流（泊松近似）：对于一般的泊松分布，KLD 表示为

$$D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{Poisson}(\nu_0)\,\|\,\mathrm{Poisson}(\nu_1)) = \nu_1-\nu_0+\nu_0\log\frac{\nu_0}{\nu_1}. \quad (21)$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda}D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{Poisson}(\lambda\eta_0)\,\|\,\mathrm{Poisson}(\lambda\eta_1))\\&=\frac{1}{\lambda}\left[\lambda\eta_1-\lambda\eta_0+\lambda\eta_0\log\frac{\lambda\eta_0}{\lambda\eta_1}\right]\\&=\eta_1-\eta_0+\eta_0\log\frac{\eta_0}{\eta_1}.\end{aligned} \quad (22)$$

2）高 λ （高斯近似）：对于一般的单变量高斯分布，KLD 可表示为

$$\begin{aligned}&D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{N}(\mu_0,\sigma_0^2)\,\|\,\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2))\\&=\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}+\frac{\sigma_0^2+(\mu_0-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2}.\end{aligned} \quad (23)$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{N}(\lambda\eta_0,\lambda\eta_0(\eta_0+1))\,\|\,\mathcal{N}(\lambda\eta_1,\lambda\eta_1(\eta_1+1)))\\&=\frac{1}{2}\log\frac{\lambda\eta_1(\eta_1+1)}{\lambda\eta_0(\eta_0+1)}+\frac{\lambda\eta_0(\eta_0+1)+(\lambda\eta_0-\lambda\eta_1)^2}{2\lambda\eta_1(\eta_1+1)}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\log\frac{\eta_1(\eta_1+1)}{\eta_0(\eta_0+1)}+\frac{\eta_0(\eta_0+1)+\lambda(\eta_0-\eta_1)^2}{2\eta_1(\eta_1+1)}-\frac{1}{2}.\end{aligned} \quad (24)$$

此外，

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}\frac{D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{N}(\lambda\eta_0,\lambda\eta_0(\eta_0+1))\,\|\,\mathcal{N}(\lambda\eta_1,\lambda\eta_1(\eta_1+1)))}{\lambda}\\&\quad=\frac{(\eta_0-\eta_1)^2}{2\eta_1(\eta_1+1)}.\end{aligned} \quad (25)$$

3）低 λ （零膨胀泊松近似）：对于遵循（11）的零膨胀泊松分布，我们可以直接计算 KLD D_{KL}（ZIPoisson(λ, η_0) ‖ZIPoisson(λ, η_1)）。对于 $y=0$ 我们有

$$\log\frac{p(0)}{q(0)}=\log\frac{e^{-\lambda}+(1-e^{-\lambda})e^{-\eta_0}}{e^{-\lambda}+(1-e^{-\lambda})e^{-\eta_1}}; \quad (26)$$

对于 $y=1,\ 2,\ \ldots\ldots$，我们有

$$\frac{p(y)}{q(y)}=\frac{(1-e^{-\lambda})e^{-\eta_0}\eta_0^y/y!}{(1-e^{-\lambda})e^{-\eta_1}\eta_1^y/y!}=e^{-(\eta_0-\eta_1)}(\eta_0/\eta_1)^y,$$

so

$$\log\frac{p(y)}{q(y)}=\eta_1-\eta_0+y\log\frac{\eta_0}{\eta_1}. \quad (27)$$

对于 KLD，我们希望在 p 分布下对 (26) 和 (27) 取平均：

$$\begin{aligned}&D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{ZIPoisson}(\lambda,\eta_0)\,\|\,\mathrm{ZIPoisson}(\lambda,\eta_1))\\&=g(\eta_0)\log\frac{g(\eta_0)}{g(\eta_1)}\\&\quad+(1-g(\eta_0))(\eta_1-\eta_0)+(1-e^{-\lambda})\eta_0\log\frac{\eta_0}{\eta_1},\end{aligned} \quad (28a)$$

其中

$$g(s)=e^{-\lambda}+(1-e^{-\lambda})e^{-s}. \quad (28b)$$

此外，

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to0}\frac{D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{ZIPoisson}(\lambda,\eta_0)\,\|\,\mathrm{ZIPoisson}(\lambda,\eta_1))}{\lambda}\\&=e^{-\eta_0}-e^{-\eta_1}+(1-e^{-\eta_0})(\eta_1-\eta_0)+\eta_0\log\frac{\eta_0}{\eta_1}.\end{aligned} \quad (29)$$

(22)、(25) 和 (29) 的比较比 FI 表达式的类似比较更为微妙。我们将在下一节结合错误指数的具体数值示例进行讨论。

III. 使用 SE 计数进行特征检测

PBM 的一个常见目标是判断某个特征是否存在；该特征表现为二次电子产额η 偏离周围像素的值。例如，检测特征位置是提高线边缘粗糙度测量精度的关键步骤，[32], 这有助于评估半导体制造精度。此处我们考虑在可获取 SE 计数数据时进行特征检测，相关描述见第二节。

A. 二元假设检验

为了说明 TR 测量在特征检测方面的根本优势，我们考虑一个二元假设检验问题：在剂量 λ 已知的情况下，SE 产额的取值为 η_0 （“无警报”）或 η_1 （“警报”）。对于（理想化的）传统测量 Y，必须根据观测更有可能来自 Neyman(λ, η_0) 分布还是 Neyman(λ, η_1) 分布来做出判断。对 $\{M,(T_1,\ X_1),\ (T_2,\ X_2)\ldots\ldots(T_{\widetilde{M}},\ X_{\widetilde{M}})\}$ 的观测至少同样有信息量，我们希望刻画决策准确率的提升幅度。

在本节中，我们设想以剂量 λ 重复进行 PBM实验多次。我们通过一系列奈曼–皮尔逊假设检验中漏检率的指数衰减率来研究其性能；这些检验在满足固定虚警率准则的同时，使漏检率最小。对于 n 次重复，漏检概率 $\mathrm{P_{MD}}(n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\log\mathrm{P_{MD}}(n)=D_{\mathrm{KL}}(p_0\,\|\,p_1), \quad (30)$$

其中，p_0 和 p_1 表示相关的观测分布 [33, §8.3.2]。因此，我们重点关注 KLD计算及比较。

B. 时间分辨测量分布之间的*KLD*

令 p 和 q 分别表示二次电子产额为 η_0 和 η_1 时的分布，其中随机变量可以是隐含的。在

为了使用迭代期望定律，我们作如下简化：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\Big[\log(p(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X})/q(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X}))\,\Big|\,\widetilde{M}=\widetilde{m}\Big]\\
&\overset{(a)}{=}\mathrm{E}_P\Big[\log(p(\widetilde{M},\widetilde{X})/q(\widetilde{M},\widetilde{X}))\,\Big|\,\widetilde{M}=\widetilde{m}\Big]\\
&\overset{(b)}{=}\mathrm{E}_P\left[\log\frac{p(\widetilde{M})}{q(\widetilde{M})}\,\middle|\,\widetilde{M}=\widetilde{m}\right]+\sum_{i=1}^{\widetilde{m}}\mathrm{E}_P\left[\log\frac{p(\widetilde{X}_i)}{q(\widetilde{X}_i)}\right]\\
&\overset{(c)}{=}\log\frac{p(\widetilde{m})}{q(\widetilde{m})}+\widetilde{m}\,\mathrm{E}_P\left[\log\frac{p(\widetilde{X}_i)}{q(\widetilde{X}_i)}\right],
\end{aligned}\tag{31}$$

其中，(a) 是因为在 p 和 q 下，每个 $\sim T_i$ 在给定 M 时的条件分布相同；(b) 是因为给定 $M=\widetilde{m}$ 时，$\{X_1,\ldots,X_{\widetilde{M}}\}$ 条件独立于 $\widetilde{\ }$；而 (c) 是因为 X_i 的分布相同。现在，对 (31) 取期望值并使用迭代期望定律，可得

$$\begin{aligned}
&D_{\mathrm{KL}}(p(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X})\,\|\,q(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X}))\\
&=\mathrm{E}_P\Big[\log(p(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X})/q(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X}))\Big]\\
&=D_{\mathrm{KL}}(p(\widetilde{M})\,\|\,q(\widetilde{M}))+\mathrm{E}[\,\widetilde{M}\,]D_{\mathrm{KL}}(p(\widetilde{X}_i)\,\|\,q(\widetilde{X}_i)).
\end{aligned}\tag{32}$$

回顾一下，M 分布由 (2) 给出。因此，我们可以将 $\nu_i=\lambda(1-e^{-\eta_i})$ 代入 (21)，得到

$$\begin{aligned}
&D_{\mathrm{KL}}(p(\widetilde{M})\,\|\,q(\widetilde{M}))\\
&\quad=\lambda(e^{-\eta_0}-e^{-\eta_1})+\lambda(1-e^{-\eta_0})\log\frac{1-e^{-\eta_0}}{1-e^{-\eta_1}}.
\end{aligned}\tag{33}$$

还要回顾一下，X_i 分布由 (3) 给出。因此，我们有对数概率质量函数比

$$\begin{aligned}
\log\frac{p(x)}{q(x)}&=\log\frac{e^{-\eta_0}\eta_0^x/[(1-e^{-\eta_0})x!]}{e^{-\eta_1}\eta_1^x/[(1-e^{-\eta_1})x!]}\\
&=\eta_1-\eta_0+\log\frac{1-e^{-\eta_1}}{1-e^{-\eta_0}}+x\log\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right).
\end{aligned}\tag{34}$$

在分布 p 下取期望并使用 (4)，可得

$$\begin{aligned}
&D_{\mathrm{KL}}(p(\widetilde{X}_i)\,\|\,q(\widetilde{X}_i))\\
&\quad=\eta_1-\eta_0+\log\frac{1-e^{-\eta_1}}{1-e^{-\eta_0}}+\frac{\eta_0}{1-e^{-\eta_0}}\log\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right).
\end{aligned}\tag{35}$$

最后，将 $\mathrm{E}_P[\,M\,]=\lambda(1-e^{-\eta_0})$、(33) 和代入 (35) (32)，可得

$$\begin{aligned}
&D_{\mathrm{KL}}(p(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X})\,\|\,q(\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X}))\\
&\quad=\lambda(e^{-\eta_0}-e^{-\eta_1})+\lambda(1-e^{-\eta_0})(\eta_1-\eta_0)\\
&\qquad+\lambda\eta_0\log(\eta_0/\eta_1).
\end{aligned}\tag{36}$$

请注意，KLD（36）与 Y 的低-λ 近似式的渐近线（29）相符。这类似于之前关于费舍尔信息的一个已知结果，该结果涉及按 λ [16,Sect. III- V] 归一化的 η：连续时间 TR 测量的归一化费舍尔信息与传统测量的低-λ 渐近线相符。KLD 和费舍尔信息的结果有直观的解释。当剂量 λ 非常低时，出现多个入射离子的概率可以忽略不计；而在没有入射离子或只有一个入射离子的情况下，传统测量与 TR 测量完全相同。单次低-λ 传统测量所提供的信息不足以进行有效检测或估计。KLD 和费舍尔信息的分析表明，TR 测量能够实现每个入射粒子的最佳信息量，但这一点对 λ均成立。

C. 错误指数的比较

奈曼 A 型概率质量函数 (6) 无法给出有意义的 KLD 表达式。若谨慎处理级数截断，并避免上溢和下溢，则可以数值计算 $D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_0)\,\|\,\mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_1))$。

图 2 给出了几个示例。黑色曲线表示归一化库尔贝克-莱布勒散度 $D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_0)\,\|\mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_1))/\lambda$。图中还显示了确定性束流（泊松近似）(22)、高-λ (高斯近似) (24) 及其渐近线 (25)，以及低-λ （零膨胀泊松近似）(28) 及其渐近线 (29) 对应的归一化库尔贝克-莱布勒散度。采用时间分辨测量时的归一化库尔贝克-莱布勒散度等于低-λ渐近线。

最重要的观测结果是，采用 TR 测量时的 KLD 始终大于采用传统测量时的 KLD。这意味着错误指数更大，因此在虚警率保持不变时，漏检率更低。

性能差距可能任意大。图3比较了 $\eta_0=2$ 和 $\eta_0=4$ 在一系列 η_1 值下的错误指数。差距随着 $|\eta_1-\eta_0|$ 增大。这也可以通过比较 (36) 和 (25) 得出。

在确定错误指数 (36)（与 (29) 相匹配）可实现之后，进一步比较也很有意思。通过比较 (22) 和 (36)，我们看到，当 η_0 和 η_1 都趋于无穷大时，TR 测量的性能会接近确定性束流下的性能。在图2和图3中，当 η_0 和 η_1 较大时，差距较小。一种解释是，当二次电子产额较大时，CT 测量几乎可以准确获知入射离子 M 的数量；显然，尽管 M 仍具有随机性，但这并不影响在 η_0 和 η_1 之间作出判断。

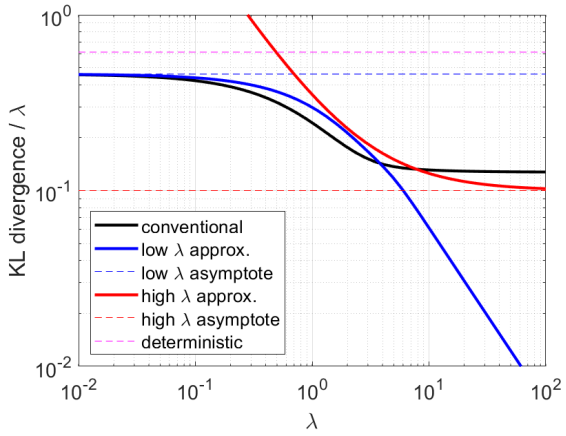
IV. 基于二次电子计数的二次电子产额估计 TING

本节考虑在 PBM 理想化模型下对二次电子产额 η进行估计，其中二次电子计数可按第二节所述获得。这也是 [16] 的核心问题。本节将对费 Fisher 信息的一种分解提供新的解释，并将其与第五节中基于退化观测的估计联系起来。我们还将介绍一种新估计量，并深入分析 [16] 中讨论的估计量。

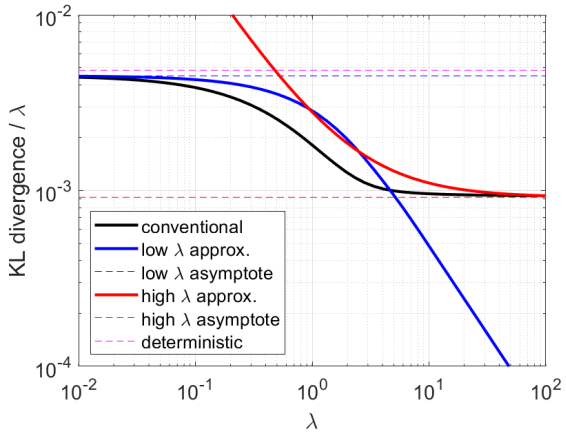
A. 时间分辨测量中的费舍尔信息

在文献 [16]中推导了时间分辨测量 (1) 中关于 η 的费 Fisher 信息，其中 λ 为已知参数。以 λ归一化后，结果为

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_{\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X}}(\eta;\lambda)=\frac{1}{\eta}-e^{-\eta},\tag{37}$$

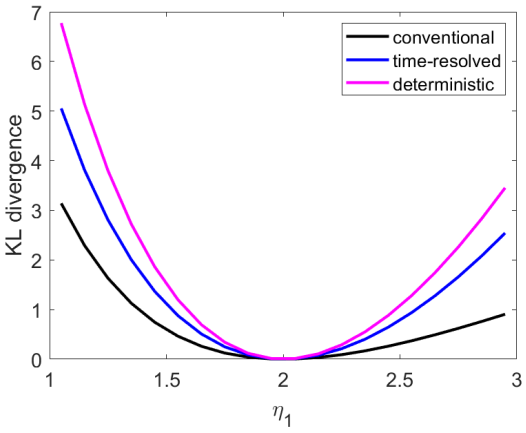


(a) $\eta_0 = 2, \quad \eta_1 = 4$

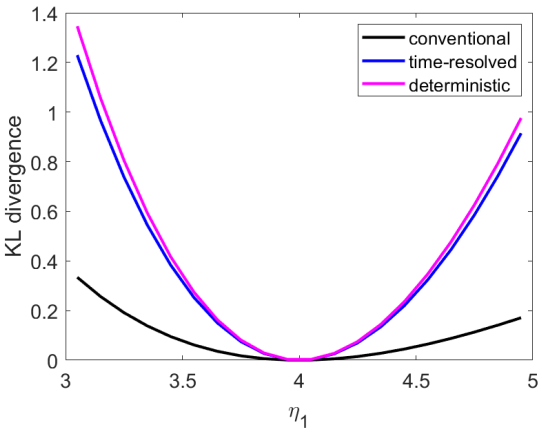


(b) $\eta_0 = 4, \quad \eta_1 = 4.2$

图 2：归一化 KL 散度$D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_0) \,\|\, \mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_1))/\lambda$的计算结果，以及本文推导的近似式和渐近线。品红色（虚线）：确定性束流（22）。红色：高-λ 近似式（24）及其渐近线（25）。蓝色：低-λ 近似式（28）及其渐近线（29）。采用时间分辨测量时，归一化 KL 散度在所有 λ 取值下均与低-λ 渐近线一致。



(a) $\eta_0 = 2, \quad \lambda = 20$



(b) $\eta_0 = 4, \lambda = 20$

图 3：在固定 η_0 、改变 η_1 时，η_0 与 η_1 之间假设检验的错误指数比较。采用传统测量时，错误指数为$D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_0) \,\|\, \mathrm{Neyman}(\lambda,\ \eta_1))$。采用时间分辨测量时，错误指数 (36) 显著更大（性能更优），且接近使用确定性源束时可获得的错误指数 (22)。

这与式 (18) 中费 Fisher 信息在低λ 极限下的结果相同，表明时间分辨测量在低 λ时能够提升费 Fisher 信息。

通过考察费 Fisher 信息的各项贡献，我们可以获得更深入的认识。这是在推导（37）时的一个中间步骤，在 [16],

$$\mathcal{I}_{\widetilde{M},\widetilde{T},\widetilde{X}}(\eta;\lambda) = \mathcal{I}_{\widetilde{M}}(\eta;\lambda) + \mathcal{I}_{\widetilde{X}|\widetilde{M}}(\eta;\lambda). \tag{38}$$

第一项是检测$\widetilde{\ }$事件数量 M所包含的信息，第二项是$\widetilde{\ }$二次电子计数 X集合所包含的信息。以 λ归一化后，各分量的费 Fisher 信息为

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_{\widetilde{M}}(\eta;\lambda) = \frac{e^{-\eta}}{e^{\eta}-1} \tag{39}$$

and

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_{\widetilde{X}|\widetilde{M}}(\eta;\lambda) = \frac{\eta+1}{\eta} - \frac{1}{1-e^{-\eta}}. \tag{40}$$

图4比较了这两种贡献。我们看到，在 η较低时，$\mathcal{I}_{\widetilde{M}}$占主导地位；而在 η较高时则相反。在 η较低时，单次检测事件中出现超过 1 个二次电子的概率很低，因此$\widetilde{\ }$大多数 X_i都为 1。因此，关于$\sim$ $\sim\eta$的大部分信息由 M承载。反之，在 η较高时，$M \approx M$，因为几乎所有入射粒子都会产生至少一个被检测到的二次电子。因此，关于 η 的信息几乎完全由$\sim X$承载。

仅凭检测事件的数量就能获得关于 η 的信息，这意味着即使测量已饱和，我们仍有望估计 η ；即，无法区分每次检测中二次电子数量的不同。无需参考

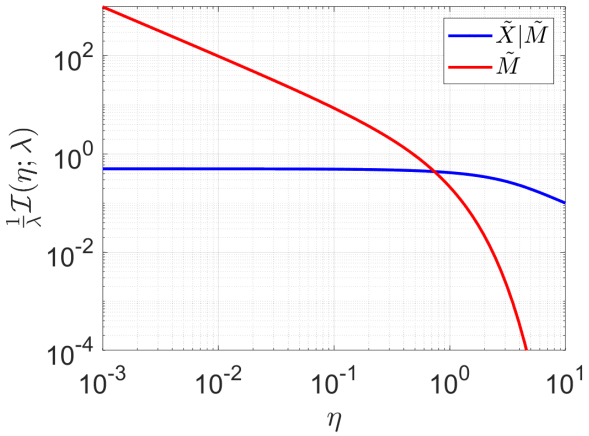


图4： M 和 $X|M$中的费 Fisher 信息。M 中的费 Fisher 信息在 η较低时占优，而在 η较高时则相反。

每次事件中的二次电子数量，这种估计能力在二次电子数量不确定时尤为重要。在第五节中，我们将介绍一种基于M的估计量，用于估计 η；在第六节中，我们将用它在真实的 PBM场景中估计模型参数。在该场景中，二次电子检测链产生的噪声会妨碍我们清楚地区分由不同数量的二次电子产生的信号。

B. 二次电子产额估计

先前的工作 [16] 针对 η提出了以下估计量，这些估计量可以根据理想化的 TR 观测计算得出：

- 传统估计器：将传统测量 (5) 按剂量 λ进行缩放：

$$\widehat{\eta}_{\mathrm{conv}} = \frac{Y}{\lambda}. \tag{41}$$

- 预言机估计量：该估计量利用入射离子 M 的计数来改进$\widehat{\eta}_{\mathrm{conv}}$：

$$\widehat{\eta}_{\mathrm{oracle}} = \frac{Y}{M}. \tag{42}$$

尽管该估计量显然是对 η可能做出的最佳估计，但由于M 不可观测，因此无法在实践中实现。然而，$\widehat{\eta}_{\mathrm{oracle}}$ 为TR估计量的性能提供了有用的下界。

- 商模式（*QM*）估计量：

$$\widehat{\eta}_{\mathrm{QM}}(\widetilde{M}, Y) = \begin{cases} 0, & \widetilde{M} = 0; \\ Y/\widetilde{M}, & \widetilde{M} > 0. \end{cases} \tag{43}$$

- 兰伯特商模式（*LQM*）估计量：唯一根为

$$\widehat{\eta} = \frac{Y}{(1 - e^{-\widehat{\eta}})^{-1}\widetilde{M}}, \tag{44a}$$

它是

$$\widehat{\eta}_{\mathrm{LQM}} = W(-\widehat{\eta}_{\mathrm{QM}} e^{-\widehat{\eta}_{\mathrm{QM}}}) + \widehat{\eta}_{\mathrm{QM}}, \tag{44b}$$

其中 $W(\cdot)$ 是 Lambert W 函数 [34]。

- 最大似然（*ML*）估计量：.....的唯一根

$$\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}} = \frac{Y}{\widetilde{M} + \lambda e^{-\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}}}}. \tag{45}$$

在 [16]，中，已证明TR估计量的性能优于传统估计器。在介绍一种新估计量之前，我们先重新审视这些估计量，从而对它们的相对性能获得一些新的认识。

1）将*LQM*估计量视为失配的最大似然估计：在 [16],中，LQM估计量有一个启发式依据，详见第四节B部分的IV-B2节。本小节将说明，它也可以作为对 η 的类最大似然估计得出，其似然表达式忽略了 M的分布。

假设已观测到 $M = \widetilde{m}$和 $X = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots\ldots, \widetilde{x}_{\widetilde{m}})$。利用式 (3) 中 X_i 的分布，给定 $M = \widetilde{m}$ 时该观测的条件似然为

$$\prod_{i=1}^{\widetilde{m}} \mathrm{P}_{\widetilde{X}_i}(\widetilde{x}_i\,;\,\eta) = \left(\frac{e^{-\eta}}{1 - e^{-\eta}}\right)^{\widetilde{m}} \frac{\eta^{\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \cdots + \widetilde{x}_{\widetilde{m}}}}{\widetilde{x}_1!\,\widetilde{x}_2!\,\cdots\,j_{\widetilde{m}}!}. \tag{46}$$

去掉与 η 无关的因子后，基于式 (46) 得到的类最大似然估计为

$$\arg\max_{\eta} \left(\frac{e^{-\eta}}{1 - e^{-\eta}}\right)^{\widetilde{m}} \eta^{y}, \tag{47}$$

其中 $y = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \cdots + \widetilde{x}_{\widetilde{m}}$。唯一的极大值点满足

$$\eta = \frac{Y}{\widetilde{M}(1 - e^{-\eta})^{-1}}, \tag{48}$$

这就是 LQM估计量。

请注意，式 (46) 并非观测 $(\widetilde{m},\ \widetilde{x})$ 的似然，因为它省略了因子 $\mathrm{P}_{\widetilde{M}}(\widetilde{m}\,;\,\eta)$。将 LQM估计量视为忽略了 η 在 M 中所含信息的估计量，这与其性能通常不如最大似然估计量一致。这也与其在 η 较低时性能相对较差的情况一致，因为图 4 表明，在 η 较低时，M 所含信息远多于 X。

2）估计 M：</style}假设入射离子的数量是某个已知正数 m。那么 Y ~泊松分布($m\eta$)，而 $\widehat{\eta} = Y/m$ 显然是一个良好的估计量。它是无偏的、有效的，也是最大似然估计。入射离子的数量 M 无法直接观测到，关于 M的任何信息都包含在 M中；给定 M后，T 和 X 的分布与 M无关。

在 [16],中，QM估计器通过将 代入 M以替代 M来引入，而LQM估计量则基于 $(1 - e^{-\widehat{\eta}})^{-1}\widetilde{M}$是对 M的一种临时改进估计而引入。具体而言，由于 $M \sim$服从二项分布(M，$1 - e^{-\eta}$)，因此可得 $\mathrm{E}[\,M \,|\, M\,] = (1 - e^{-\eta})M$。然而，这并不意味着 $\mathrm{E}[\,M \,|\, M\,] = (1 - e^{-\eta})^{-1}M$。事实上，$\mathrm{E}$ 有一个简单的表达式$[\,M\,|\,M\,]$。利用 给定 M 时 M 的条件分布服从二项分布，且 M 的分布为泊松分布（λ），根据贝叶斯法则，可以确定给定 M 时 M 的条件分布为

$$\mathrm{P}_{M|\widetilde{M}}(m \,|\, \widetilde{m}\,;\,\eta,\lambda) = \frac{\exp(-\lambda e^{-\eta})(\lambda e^{-\eta})^{m-\widetilde{m}}}{(m - \widetilde{m})!}, \tag{49}$$

$m = \widetilde{m},\ \widetilde{m}+1,$ .....。这是一个平移了 $\widetilde{m}$的泊松分布（$\lambda e^{-\eta}$），因此

$$\mathrm{E}[M \mid \widetilde{M}] = \widetilde{M} + \lambda e^{-\eta}. \tag{50}$$

将其用作 M 的代理量，可得最大似然估计量 (45)；在 [16] 中，该估计量由似然最大化推导得出。将估计量 (43)–(45)归入同一个族，并为 M 采用不同的代理量，可以解释为何 $\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}}$ 通常（但并非始终）表现最佳，而 $\widehat{\eta}_{\mathrm{QM}}$表现最差。

3) η的条件期望估计量：我们还可以利用在给定 M 时 M 的条件分布，为 η构造一个新的估计量。我们已指出，预言机估计量Y/M是对 η的良好估计。观测到 Y和 M后，我们可以计算

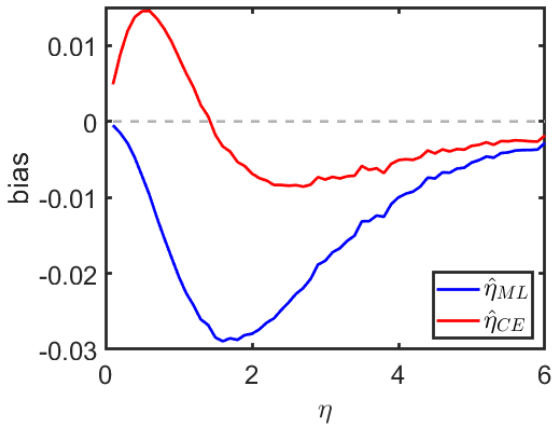
$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}(y,\widetilde{m}) &= \mathbb{E}\left[\, Y/M \,\middle|\, Y = y,\ \widetilde{M} = \widetilde{m} \,\right] \\ &= y\,\mathbb{E}\left[\, \frac{1}{M} \,\middle|\, \widetilde{M} = \widetilde{m} \,\right].\end{aligned} \tag{51}$$

该条件期望是基于条件概率质量函数 (49) 计算的，因此得到

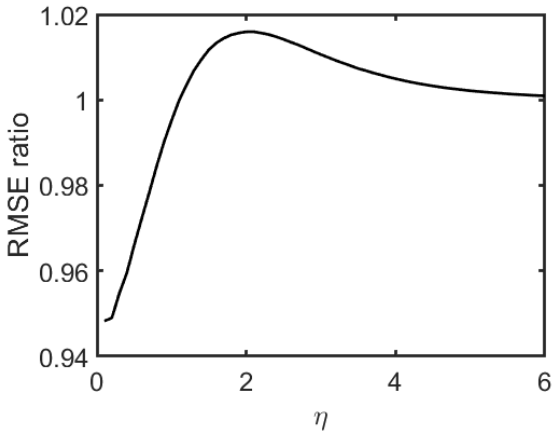
$$\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}(y,\widetilde{m}) = y\exp(-\lambda e^{-\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}}) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell+\widetilde{m}} \frac{(\lambda e^{-\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}})^{\ell}}{\ell!}, \tag{52}$$

这可以通过合适的求根算法求解。

图 5(a)比较了 $\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}$ 与 $\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}}$的偏差，这些结果是通过对 $\lambda = 20$进行蒙特卡洛模拟得到的。我们看到，在很大范围的 η内，$\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}$ 的偏差幅度都低于 $\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}}$。这两个估计量的方差几乎相同，因此未在图中绘出。图 5(b)中，我们绘出了 $\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}}$的均方根误差 (RMSE) 与 $\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}$的均方根误差之比。



(a) 偏差



(b) 均方根误差比

图5：对 $\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}$ 估计量（51）与最大似然估计量 $\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}}$ （45）进行数值比较。 $\widehat{\eta}_{\mathrm{CE}}$ 的偏差幅度小于 $\widehat{\eta}_{\mathrm{ML}}$。在 η的整个范围内，均方根误差比都接近1。

V. 基于饱和二次电子计数的二次电子产额估计

如第四节-A所述，M 包含有关η的信息，因此我们可以仅根据 M构造 η 的估计量。该估计量会将探测事件视为二元或饱和的，因为它只考虑探测事件的存在（$X_i \geq 1$）或缺失，而不参考 X_i 单次探测事件中二次电子的确切数量。

回顾式（2），导致至少检测到一个二次电子的入射粒子数服从 M ~泊松分布($\lambda(1-e^{-\eta})$)。由于 λ 已知，η的估计量等价于估计该泊松分布的均值，其最大似然估计为观测值 $\widetilde{m}$。当 $M < \lambda$时，我们得到

$$\widehat{\eta} = -\log\left(1 - \frac{\widetilde{M}}{\lambda}\right)$$

作为根据 M对 η 的最大似然估计；当 $M \geq \lambda$时，似然是 η的递增函数，这表明 $\widehat{\eta} = \infty$。因此，我们定义估计量

$$\widehat{\eta}_{\widetilde{M}} = \begin{cases} -\log\left(1 - \widetilde{M}/\lambda\right), & \widetilde{M} < \lambda; \\ \eta_{\max}, & \widetilde{M} \geq \lambda, \end{cases} \tag{53}$$

其中，$\eta_{\max}$ 是某个固定值，例如最合理的最大二次电子产额。在没有 η的先验范围时，可以将 $\eta_{\max}$ 设为 $M < \lambda$时返回的最大可能值：

$$\eta_{\max} = -\log\left(1 - \frac{\lceil\lambda\rceil - 1}{\lambda}\right). \tag{54}$$

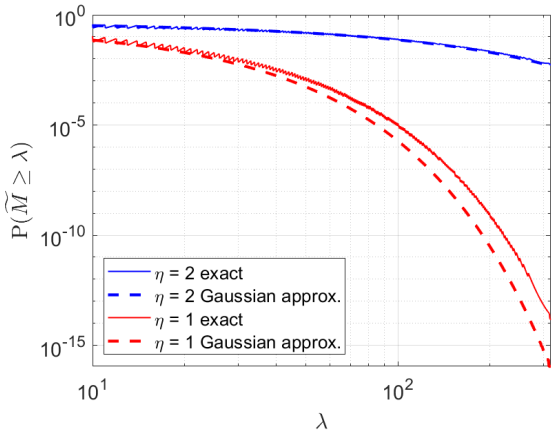
然而，这个表达式在λ的整数值处有较大的跳变。选择

$$\eta_{\max} = -\log\left(1 - \frac{\lceil\lambda\rceil - 1}{\lceil\lambda\rceil}\right) \tag{55}$$

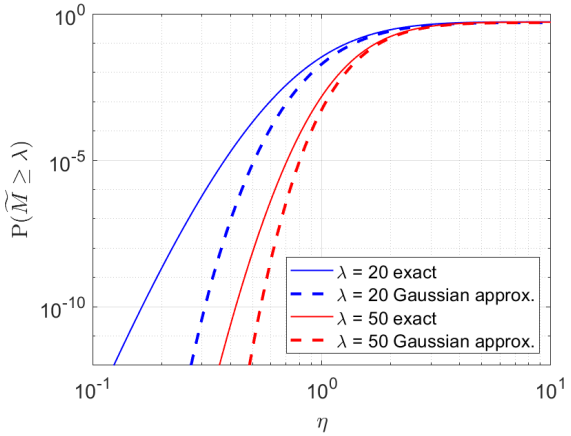
更为保守。

对于任意固定的 η，$M \geq \lambda$ 的概率会随着 λ的增加而降低；对于任意固定的 λ，$M \geq \lambda$的概率会随着 η的降低而降低。这些趋势如图6所示。成像中的 λ 典型值范围为 ~ 10 至~ 100。然而，如第五节-C所述，在校准中可能出现大得多的值。

估计量的性能如图7所示，适用于$\lambda = 100$ 和 $\lambda = 100\,000$，其中 $\eta_{\max}$ 使用式（55）和$\eta \in [\frac{1}{10}, 10]$设置。偏差和方差分别展示，可以看出，在 η 较低时，均方根误差主要由方差决定，而在较高时则主要由偏差决定



(a) 在固定 η 时对 λ 的依赖关系



(b) 在固定 λ 时对 η 的依赖关系

图6：基于 η 的 M 估计量在 $\mathrm{P}(M \geq \lambda)$ 时失效。随着 (a) λ 增大或 (b) η 减小，这种情况发生的概率趋近于零。

。方差在约为 $\eta_{\max}$的一半处趋于平稳。绝对偏差曲线中的拐点是由于偏差从 η 较低时的正值变为 η较高时的负值。

根据我们对图4中 M 内关于 η 的 Fisher 信息的分析，我们预计该估计量会随着 η 增大而变差，而实际观测结果确实如此。在下一节中，我们将使用 $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}}$ 来估计 PBM 模型的参数，该模型纳入了二次电子检测链引入的二次电子数不确定性。

VI. 根据二次电子探测器电压进行二次电子产额估计

如第二节-A所述，在真实的粒子束显微镜中，通常无法直接计数二次电子。相反，如图1(e)所示，二次电子探测器的输出是一系列电压脉冲。假设二次电子数量到电压脉冲的转换是线性的，我们预计每个脉冲的平均高度与入射到探测器上的二次电子计数成正比。当 η 较低时，入射粒子产生多个二次电子的概率较低，因此可以通过对脉冲计数来估计真实的二次电子计数。在扫描电子显微镜中确实是这种情况，因此脉冲计数已被用于实现扫描电子显微镜中的二次电子计数成像 [27],[35]–[40]。然而，如果 η 较高（如在氦离子显微镜中），单个入射粒子激发出多个二次电子的可能性就会增加。因此，需要更复杂的建模来估计η。

本节将描述一个用于观测到的二次电子电压信号的概率模型，并分析关于 η 的费 Fisher 信息如何随模型参数变化。我们还将讨论如何估计模型参数。最后，我们将讨论基于该模型的 η 估计量的性能。

A. 脉冲高度模型

与 [15], 中一样，我们使用 泊松分布–泊松分布–高斯 (PPG) 模型来描述二次电子数到电压的转换。假设每个二次电子产生的电压服从一个 $\mathcal{N}(c_1, c_2)$ 随机变量，其中 c_1 为平均电压， c_2 为方差。假设这些贡献相互独立且可加，因此 j 个二次电子产生的电压服从 $\mathcal{N}(jc_1, jc_2)$ 分布。因此，第 i 次检测事件中产生的 $\widetilde{}$ 电压 U_i 的概率密度函数为

$$f_{\widetilde{U}_i}(u\,;\,\eta, c_1, c_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}_{\widetilde{X}}(j;\eta) f_Z(u\,;\,j, c_1, c_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\eta}}{1-e^{-\eta}} \frac{\eta^j}{j!} f_Z(u\,;\,j, c_1, c_2), \quad (56)$$

其中， $f_Z(u\,;\,j, c_1, c_2)$ 是服从 $\mathcal{N}(jc_1, jc_2)$ 随机变量的概率密度函数。

检测到的 SE 脉冲的高度以及脉冲总数共同构成时间分辨观测

$$\left\{\widetilde{M}, \widetilde{T}, \widetilde{U}\right\} = \left\{\widetilde{M}, (\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, ..., \widetilde{T}_{\widetilde{M}}), (\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, ..., \widetilde{U}_{\widetilde{M}})\right\}. \quad (57)$$

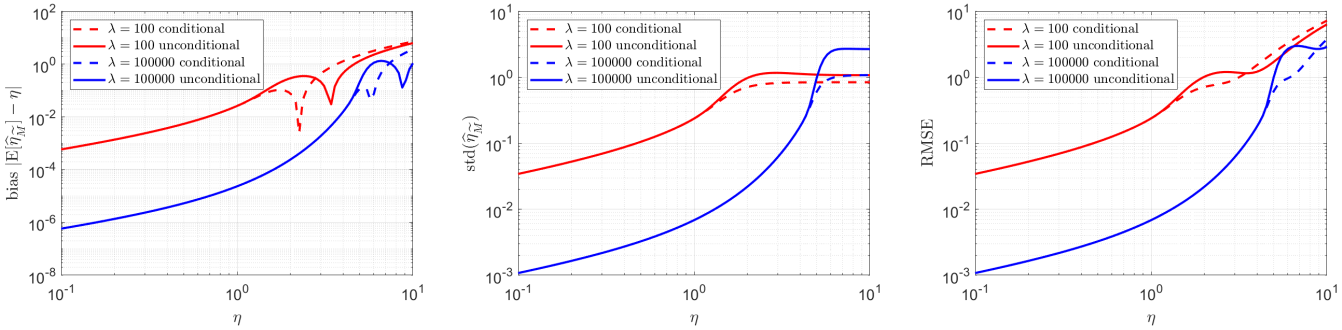
在该模型下，不具备时间分辨率的常规观测为

$$V = \sum_{i=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{U}_i. \quad (58)$$

类似于 II-C 节中的讨论，在给定 $\sim$ M 的条件下， T 中不含关于 η 的信息。 $\sim$

B. 费 Fisher 信息

我们可以对费 Fisher 信息进行数值评估。图8绘制了PPG模型的费 Fisher 信息（以λ归一化），分别针对传统测量和时间分辨测量，作为$\sqrt{c_2/c_1}$的函数，并取 $\eta = 3$。对于时间分辨情形，当 $\sqrt{c_2/c_1} \leq 0.1$时，费舍尔信息几乎保持不变。在 $\sqrt{c_2/c_1}$如此低的取值下，不同数量二次电子产生的 U_i概率密度峰之间几乎没有$\widetilde{}$重叠，因此能够近乎完美地区分二次电子计数。于是，费舍尔信息达到所标示的渐近线，即采用SE计数时的费舍尔信息（37）。同样，传统测量的费舍尔信息也达到该渐近线



(a) 偏差 (b) 标准差 (c) 均方根误差

图 7： $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}}$的性能，即使用二次电子检测事件数量而不使用二次电子计数信息的估计量 (53)。$\widetilde{\ }$条件曲线表示在给定 $M < \lambda$ 时的相应量；此时最大似然估计为有限值。无条件曲线则表示相应量，并包含根据 (55) 进行选择的影响 $\eta_{\max}$ 。

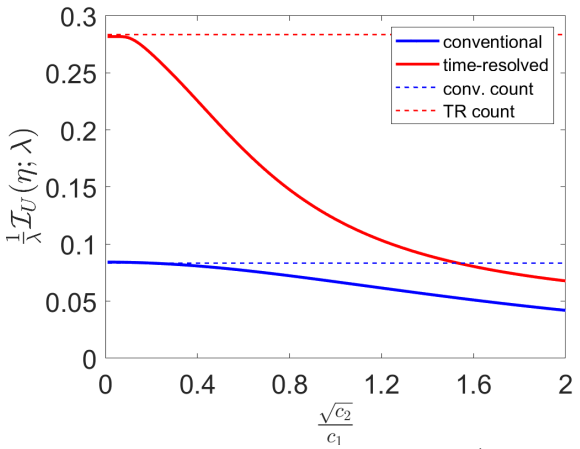


图 8：时间分辨测量的归一化费 Fisher 信息 $\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_{\widetilde{M},\,\tilde{U}}(\eta;\,\lambda)$，以及常规测量的 $\frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_V(\eta;\,\lambda)$，随 $\sqrt{c_2}/c_1$ 变化，其中 $\lambda = 20$ 和 $\eta = 3$。

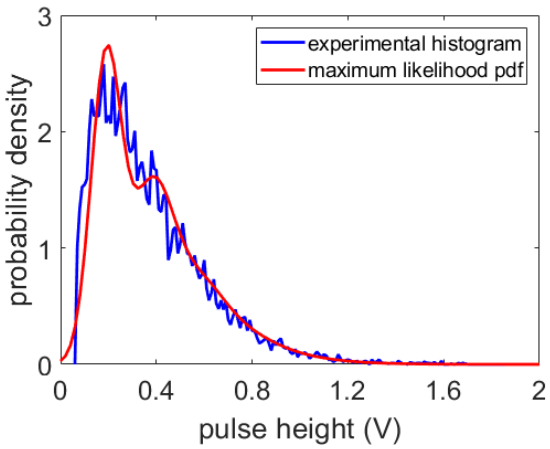


图 9：PPG 模型参数 c_1 和 c_2 的估计。图中绘出了模型参数最大似然估计对应的概率分布，并与观测到的脉冲高度直方图一同展示。

（15）。随着 $\sqrt{c_2}/c_1$ 增大，费舍尔信息下降，这反映出由于不同数量二次电子的密度存在重叠，导致在辨识二次电子数量时存在歧义。我们注意到，尽管在$\sqrt{c_2}/c_1$的整个范围内，时间分辨测量所得的费舍尔信息始终高于传统测量，但时间分辨测量的相对优势会在 $\sqrt{c_2}/c_1$较高时减弱。

C. 估计 c_1 和 c_2

对于给定的粒子束显微镜，PPG 模型参数 c_1 和 c_2 通常是未知的。这些参数的取值取决于二次电子探测器的硬件设置，例如光电倍增管倍增极级的增益、前置放大器电路的具体配置等。用户无法获取这些设置的取值，因此无法直接计算模型参数。

相反，我们必须估计参数 c_1 和 c_2。如果对具有已充分表征的 η的样品成像，我们就可以很方便地做到这一点。在这种情况下，我们可以找到最大似然估计

通过在 PPG模型 (56) 下最大化观测到的脉冲高度的似然，来估计 c_1 和 c_2 。尽管不同材料的 η 标准值广为人知 [26],[41]，但特定样品的 η 精确值取决于多种因素，例如显微镜真空室中的碳污染程度和表面氧化，因此很难估计 c_1 和 c_2 。不过，我们可以利用式 (53) 中给出的 $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}}$ 来估计 η，因为该估计量不依赖于二次电子的数量（即检测到的电压脉冲的高度），而只依赖于检测到的脉冲数量。因此，它不受脉冲高度方差导致的费舍尔信息损失的影响，如图8所示。借助这一 η估计值，我们可以构造 c_1 和 c_2 的最大似然估计。

为展示这一过程，我们使用氦离子显微镜（蔡司 Orion），以10^5 像素的分辨率对均匀、无特征的硅芯片进行成像，束流电流为 0.1 pA，像素驻留时间为 10 µs，对应于 $\lambda = 6.25$。图1(e)显示了图像中一个$\widetilde{\ }$像素检测到的电压脉冲快照。观测到的平均 M （每像素）为

该样品的数值为 4.95。由于整个样品均被视为均匀，我们将所有像素的 M 总和以及式（53）中所有像素的总 λ 相加，从而得到 $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}} = 1.58$。接下来，我们使用该估计值 η 来构造 c_1 和 c_2 的最大似然估计。由此得到的概率密度函数如图9所示，同时还展示了实验数据中的脉冲高度分布。通过该技术得到的 c_1 和 c_2 的最大似然估计分别为 $c_1 = 0.19$ V 和 $c_2 = 0.0040$ V^2。

本节最后，我们对使用 $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}}$ 估计 c_1 和 c_2 作几点说明。首先，虽然我们可以使用 $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}}$ 估计 c_1 和 c_2，但在成像过程中不会用它来估计 η。如第五节所述并如图7所示，要获得良好的准确度，该估计量要求剂量非常高。其次，尽管模型概率密度函数与实验脉冲高度直方图拟合良好，但它预测高度接近零伏及低于零伏的脉冲具有显著的密度。这显然不符合物理实际，表明模型与实验不匹配。

D. 考虑非零脉冲宽度

电压脉冲的另一个特征是其在时域中具有非零宽度。根据图1(e)所示的实验脉冲序列等数据，我们发现脉冲形状近似为高斯分布，平均宽度为 $\tau = 160$ 纳秒。非零宽度可能导致连续入射粒子产生的检测事件相互重叠，进而造成二次电子检测事件漏计数。为补偿这种漏计数，我们引入校正因子 $\gamma_\tau(\lambda, \eta)$，使得

$$\widetilde{M}_{\text{corrected}} = \frac{\widetilde{M}}{\gamma_\tau(\lambda, \eta)}. \tag{59}$$

该校正因子是通过将SE到达间隔时间的指数概率分布积分至平均脉冲宽度 τ 得到的。由此可得

$$\gamma_\tau(\lambda, \eta) = \exp\left(-\lambda(1 - e^{-\eta})\,\tau\right). \tag{60}$$

$\widetilde{\ }$下面介绍的部分估计量使用 $M_{\text{corrected}}$。

E. 估计量

现在，我们介绍适用于PPG模型的 η 估计量。我们构造这些估计量，使其类似于使用二次电子计数的估计量（见第四节B部分）。为便于比较，我们还纳入了典型仪器的模型、一个经过一定理想化处理的传统估计器，以及两个预知估计器。

1) 传统仪器：如第二节-A所述，典型仪器通过对二次电子探测器的电压输出进行采样，将每个像素的样品值相加，并对这些和值进行量化，从而获得一幅8位图像。为了与其他 η 估计量进行比较，我们通过模拟这一过程来定义 $\widehat{\eta}_{\text{CI}}$。对于每个入射粒子，都会生成一个脉冲，其高度遵循式（56），宽度为τ。随后以100 ns的周期对所得波形进行采样，并将采样值相加以获得一个估计值。要使结果处于正确的尺度，还需要一个额外因子；我们通过使均值与下文改进型传统估计量的均值相匹配来确定这一缩放因子。

2) 改进型传统方法：在PPG模型中，式（58）中的 V 包含了在没有时间分辨率的情况下所能获取的全部信息。除以 c_1 后，V 便处于二次电子产额η的尺度上，因此，类似于式（41），我们定义

$$\widehat{\eta}_{\text{IC}} = \frac{V/c_1}{\lambda}. \tag{61}$$

3) 离子计数预言机：为了说明可实现估计器的性能，我们采用式（42）中的预知估计器，并加入一个离子计数预言机，假设已知离子的真实计数 M：

$$\widehat{\eta}_{\text{ICO}} = \frac{V/c_1}{M}. \tag{62}$$

*4) QM*估计器：与第四节B部分中的QM估计器类似，$\widetilde{\ }$我们可以使用 $M_{\text{corrected}}$ 作为 M的代理量。于是，我们的估计值是下式的唯一根：

$$\widehat{\eta}_{\text{QM}} = \frac{V/c_1}{\widetilde{M}/\gamma_\tau(\lambda, \widehat{\eta}_{\text{QM}})}. \tag{63}$$

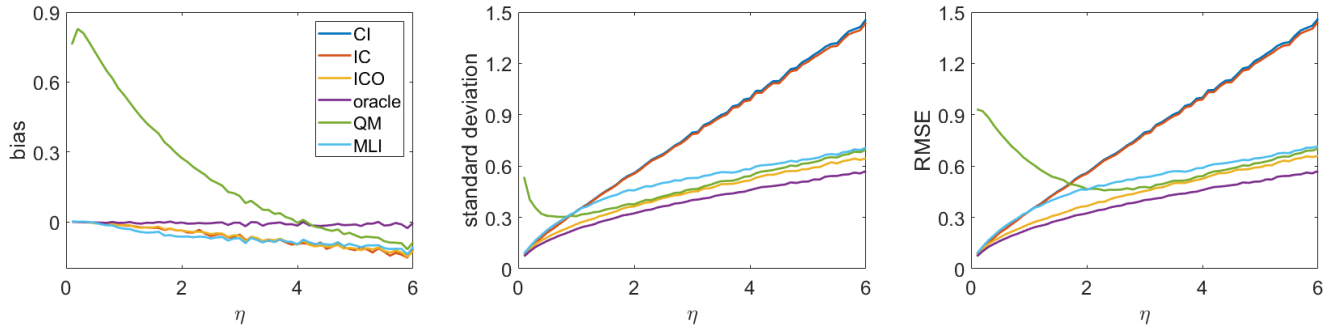
5）受*ML*启发的估计器：我们可以仿照第四节B部分中的最大似然估计量，对 $\sim M_{\text{corrected}}$ 中的偏差进行校正，同时注意，在当前模型下，这并不是真正的最大似然估计量。该估计值是下式的唯一根

$$\widehat{\eta}_{\text{MLI}} = \frac{V/c_1}{\widetilde{M}/\gamma_\tau(\lambda, \widehat{\eta}_{\text{MLI}}) + \lambda e^{-\widehat{\eta}_{\text{MLI}}}}. \tag{64}$$

图10绘出了这些估计量的偏差、标准差和均方根误差随 η 变化的情况，所用的 c_1 和 c_2 取自第VI-C节，而 $\lambda = 20$。这些数值通过蒙特卡洛模拟计算得到。从图中可以观察到，TR估计量在这里所考察的几乎整个 η 范围内，仍优于传统估计器。与 [16] 中的结果类似，$\widehat{\eta}_{\text{QM}}$ 在 η 较低时偏差较大，这是因为 M 被显著低估；但对于 $\eta > 1.9$，其均方根误差仍低于传统估计器。两个传统估计器 $\widehat{\eta}_{\text{CI}}$ 和 $\widehat{\eta}_{\text{IC}}$ 的性能几乎相同；然而，若不计算 $\widehat{\eta}_{\text{IC}}$，$\widehat{\eta}_{\text{CI}}$ 中的因子 k 就无法得知，均方根误差也可能更大。离子计数预言机 $\widehat{\eta}_{\text{ICO}}$ 为非预言机估计器的均方根误差提供了有效下界；当 η 较高时，$\widehat{\eta}_{\text{QM}}$ 和 $\widehat{\eta}_{\text{MLI}}$ 的性能接近 $\widehat{\eta}_{\text{ICO}}$。$\widehat{\eta}_{\text{oracle}}$ 的均方根误差比 $\widehat{\eta}_{\text{ICO}}$ 低 ~ 1.4 倍，这反映了二次电子计数的不确定性增加导致关于 η 的信息损失。

VII. 结论

在这项工作中，我们证明，对于每个像素都测量完整二次电子检测向量的 TR 测量，在检测 η 的变化或估计 η 方面，优于传统的标量值PBM。我们通过量化低剂量 λ 下估计 η 时费 Fisher 信息的增益，以及使用 KLD 区分 η 两个取值时错误指数的提升，阐明了 TR 测量的优势。我们还证明，TR估计量在 η 方面优于传统估计量，无论是在可以获取检测到的二次电子直接计数的理想化场景中（此时测量向量为 $\{\widetilde{M}, \widetilde{T}, \widetilde{X}\} = \{\widetilde{M}, (\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \ldots\ldots, \widetilde{T}_{\widetilde{M}}), (\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots\ldots, \widetilde{X}_{\widetilde{M}})\}$），还是在更现实的场景中——此时噪声来自



(a) 偏差 (b) 标准差 (c) 均方根误差

图 10：在 $c_1 = 0.19$ V、 $c_2 = 0.011$ V^2, 和 $\lambda = 20$ 条件下，PPG估计量的相对性能。 $\widehat{\eta}_{\mathrm{MLI}}$ 在 η 较低时与 $\widehat{\eta}_{\mathrm{CI}}$ 和 $\widehat{\eta}_{\mathrm{IC}}$ 的性能相当，而在 $\eta > 1$ 时则显著优于它们。

SE检测过程使直接二次电子计数无法获$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$取（此时测量向量为 $\{M,T,U\} = \{M,(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \ldots\ldots, \widetilde{T}_{\widetilde{M}}), (\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots\ldots, \widetilde{U}_{\widetilde{M}})\}$）。

我们重新分析了此前为 η 推导的估计量，从而深入了解了它们的相对性能。我们还开发了两种新的估计量：一种是条件期望$\widetilde{\ }$估计量，使用给定 M时 M 的条件分布；另一种是$\widetilde{\ }$基于 M的估计量，仅使用 SE 脉冲的计数。后一种估计量对于推导 PPG 模型参数 c_1 和 c_2的值尤其有用。

估计量 $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}}$ 也可用于计算 PBM探测器效率 [25]，[26]。对于此应用，需要对在所用成像条件下 η 已知的块体样品进行成像（或者，也可以使用标准技术 [41]在 PBM 中测量块体样品的 η ）。然后， $\widehat{\eta}_{\widetilde{M}}$ 与真实样品η 的比值即为仪器的探测效率。在 [39] 中也使用了类似技术来计算探测器效率；由于 η较低，该项工作得以进一步简化，因此$\widetilde{\ }$可将探测效率估计为 M与 λ 乘以已知 η的比值。

第六节-E 中所述 η 估计量的成功应用，取决于PPG模型对仪器响应的准确表征，以及对模型参数的准确估计。如前所述，PPG模型留下了出现负 SE电压脉冲高度这一不符合物理规律的可能性。可采用启发式方法解决此问题，例如对概率密度函数进行零截断或折叠。或者，也可以在较低的 η下采集类似图9所示的脉冲高度直方图，使得从给定像素检测到多个 SE 的概率足够低。随后可将此类直方图用作经验性的单SE仪器响应。

如图8所示，随着二次电子计数的不确定性增加，费舍尔信息会损失，这表明在PBM中采用硬件SE计数可能带来益处。虽然在透射电子显微镜 [42]–[44], 等基于透射的PBM技术中可以直接计数二次电子，但基于SE的技术尚未对此进行探索。在扫描电子显微镜和氦离子显微镜中实施这一方法，可能会大幅提升可实现的图像质量——

益。

致谢

作者感谢物理系的 Leila Kasaei博士、Hussein Hijazi博士和 Leonard Feldman教授（罗格斯大学），他们为本研究所用实验数据的获取提供了支持，并就数据解读进行了富有成效的讨论。

参考文献

[1] C. W. Oatley，“扫描电子显微镜的早期历史”，应用物理学杂志，第 53 卷，第 2 期，1982 年 2 月。[2] D. McMullan，“扫描电子显微术 1928–1965”，《扫描》，第 17 卷，第 3 期，第 175–185 页，1995 年 5–6 月。[3] E. W. M¨uller 和 T. T. Tsong，场离子显微术：原理与应用。美国爱思唯尔，1969 年。[4] B. W. Ward、J. A. Notte 和 N. P. Economou，“氦离子显微镜：纳米尺度显微术与计量的新工具”，《真空科学与技术*B*辑》，第 24 卷，第 6 期，第 2871–2874 页，2006 年 11 月。[5] M. S. Joens、C. Huynh、J. M. Kasuboski、D. Ferranti、Y. J. Sigal、F. Zeitvogel、M. Obst、C. J. Burkhardt、K. P. Curran、S. H. Chalasani、L. A. Stern、B. Goetze 和 J. A. J. Fitzpatrick，“利用氦离子显微镜（HIM）对生物样品进行亚纳米分辨率成像”，《科学报告》，第 3 卷，第 3514 号，2013 年 12 月。[6] A. Merolli、L. Kasaei、S. Ramasamy、A. Kolloli、R. Kumar、S. Subbian 和 L. C. Feldman，“氦离子显微术揭示 SARS-CoV-2 的一种细胞质内传播途径”，《科学报告》，第 12 卷，2022 年 12 月。[7] V. Castaldo、C. W. Hagen、P. Kruit、E. van Veldhoven 和 D. Maas，“溅射对扫描离子显微镜分辨率测定的影响”，《真空科学与技术*B*辑》，第 27 卷，第 6 期，第 982–994 页，2009 年。[8] V. Castaldo、C. W. Hagen 和 P. Kruit，“离子成像模拟：溅射、衬度、噪声”，《超显微学》，第 111 卷，994，2011 年，第 982 页。[9] T. Dahmen、M. Engstler、C. Pauly、P. Trampert、N. de Jonge、F. M¨ucklich 和 P. Slusallek，“扫描电子显微术的特征自适应采样”，《科学报告》，第 6 卷，第 25350 页，2016 年 7 月。[10] A. J. Barlow、J. F. Portoles、N. Sano 和 P. J. Cumpson，“消除氦离子显微术中的束流伪影：图像处理技术比较”，显微镜与微量分析，第 22 卷，第 5 期，第 939–947 页，2016 年 10 月。[11] M. Peng、M. Cokbas、U. Dorken Gallastegi、P. Ishwar、J. Konrad、B. Kulis 和 V. K. Goyal，“利用卷积神经网络对聚焦离子束显微图像进行去噪”，载于*IEEE* 第 *31* 届机器学习与信号处理国际研讨会论文集，澳大利亚昆士兰州黄金海岸，2021 年 10 月。[12] W. E. Vanderlinde 和 J. N. Caron，“扫描电子显微镜图像的盲反卷积”，载于第 *33* 届国际测试与失效分析研讨会论文集，2007 年 11 月，第 97–102 页。

[13] S. Pang、X. Zhang、H. Li 和 Y. Lu，“通过图像修复和各向异性扩散改进扫描电子显微镜图像的边缘判定，以用于微结构测量与分析”，测量，第 176 卷，第 109217 页，2021 年。[14] P. Potocek、R. Schoenmakers、P. Trampert、T. Dahmen 和 M. Peemen，“用于连接组学成像与分割的稀疏扫描电子显微镜”，载于 IEEE 生物信息学与生物医学国际会议（BIBM）论文集，2018 年，第 2461–2465 页。[15] M. Peng、J. Murray-Bruce、K. K. Berggren 和 V. K. Goyal，“通过时间分辨测量减轻聚焦离子束显微镜中的源散粒噪声”，《超显微学》，第 211 卷，第 112948 号，2020 年 4 月。[16] M. Peng、J. Murray-Bruce 和 V. K. Goyal，“时间分辨聚焦离子束显微术：建模、估计方法与分析”，IEEE 计算成像汇刊，第 7 卷，第 547–561 页，2021 年。[17] L. Watkins、S. W. Seidel、M. Peng、A. Agarwal、C. C. Yu 和 V. K. Goyal，“时间分辨测量对粒子束显微术中未知且变化的束流电流的鲁棒性”，载于 IEEE 图像处理国际会议论文集，美国阿拉斯加州安克雷奇，2021 年 9 月，第 3487–3491 页。[18] ——，“防患于未然胜过事后清除：通过时间分辨传感避免粒子束显微术中电流变化引起的条纹伪影”，显微镜与微量分析，第 27 卷，增刊 1，第 422–425 页，2021 年 8 月。[19] S. W. Seidel、L. Watkins、M. Peng、A. Agarwal、C. Yu 和 V. K. Goyal，“粒子束显微术中的在线束流电流估计”，IEEE 计算成像汇刊，第 8 卷，第 521–535 页，2022 年。[20] S. W. Seidel、L. Watkins、M. Peng、A. Agarwal、C. C. Yu 和 V. K. Goyal，“通过在线束流电流估计应对氖气场离子源的不稳定性”，显微镜与微量分析，第 28 卷，增刊 1，第 36–39 页，2022 年 8 月。[21] M. Peng、R. Kitichotkul、S. W. Seidel、C. Yu 和 V. K. Goyal，“利用即插即用方法对粒子束显微照片进行去噪”，arXiv:2208.14256v2 [physics.med-ph]，2023 年 2 月。[22] T. E. Everhart 和 R. F. Thornley，“用于微微安级低能电子电流的宽带探测器”，《科学仪器杂志》，第 37 卷，第 246–248 页，1960 年。[23] C. Li、S. F. Mao 和 Z. J. Ding，“二次电子发射的时间相关特性”，应用物理学杂志，第 125 卷，第 024902 号，2019 年 1 月。[24] D. C. Joy，“低电压扫描电子显微镜中的噪声及其影响”，载于《生物低电压扫描电子显微术》，H. Schatten 和 J. B. Pawley 编，Springer New York，2008 年，第 129–144 页。[25] D. C. Joy、C. S. Joy 和 R. D. Bunn，“扫描电子显微镜探测器性能的测量”，《扫描》，第 18 卷，第 533–538 页，1996 年。[26] D. C. Joy，“电子-固体相互作用数据库”，《扫描》，第 17 卷，第 270–275 页，2006 年 12 月。[27] Y. Uchikawa、K. Gouhara、S. Yamada、T. Ito、T. Kodama 和 P. Sardeshmukh，“扫描电子显微镜中二次电子电子计数与常规模拟检测的比较研究”，《电子显微镜杂志》，第 41 卷，第 253–260 页，1992 年。[28] L. Frank，“二次电子发射中的噪声：低产额情形”，《电子显微镜杂志》，第 54 卷，第 4 期，第 361–365 页，2005 年 8 月。[29] L. Nov´ak 和 I. M¨ullerov´a，“闪烁体-光导-光电倍增管探测器的单电子响应”，《显微镜杂志》，第 233 卷，83，2009 年，第 76 页。[30] F. Timischl、M. Date 和 S. Nemoto，“扫描电子显微术中信号—噪声的统计模型”，《扫描》，第 34 卷，第 3 期，第 137–144 页，2012 年。[31] D. C. Martin 和 S. K. Katti，“实际问题中 Neyman A 型分布的近似”，《生物计量学》，第 18 卷，第 3 期，第 354–364 页，1962 年 9 月。[32] J. Croon、G. Storms、S. Winkelmeier、I. Pollentier、M. Ercken、S. Decoutere、W. Sansen 和 H. Maes，“线边缘粗糙度：表征、建模及其对器件行为的影响”，载于《国际电子器件会议文摘》，2002 年，第 307–310 页。[33] P. Moulin 和 V. V. Veeravalli，《工程师与数据科学家的统计推断》。剑桥大学出版社，2019 年。[34] R. M. Corless、G. H. Gonnet、D. E. G. Hare、D. J. Jeffrey 和 D. E. Knuth，“关于 Lambert W 函数”，《计算数学进展》，第 5 卷，第 1 期，第 329–359 页，1996 年 12 月。[35] S. Yamada、T. Ito、K. Gouhara 和 Y. Uchikawa，“扫描电子显微镜中用于二次电子检测的电子计数”，《扫描》，第 12 卷，第 I–28–I–29 页，1990 年。[36] ——，“扫描电子显微镜中的二次电子计数图像”，载于第十二届国际电子显微镜大会论文集，1990 年，第 402–403 页。[37] ——，“扫描电子显微镜中的电子计数成像”，《扫描》，第 13 卷，第 165–171 页，1991 年。[38] ——，“用于扫描电子显微镜电视扫描速率二次电子图像的高速电子计数系统”，载于美国电子显微学会第*49*届年会论文集，1991年，第512–513页。[39] A. Agarwal、J. Simonaitis 和 K. K. Berggren，“基于图像直方图的二次电子计数：评估扫描电子显微镜中的探测量子效率”，《超显微学》，第224卷，113238页，2021年。[40] A. Agarwal、J. Simonaitis、V. K. Goyal 和 K. K. Berggren，“扫描电子显微镜中的二次电子计数成像”，《超显微学》，第254卷，113662，2023年。[41] H. Seiler，“扫描电子显微镜中的二次电子发射”，应用物理学杂志，第54卷，R1页，1983年。[42] R. Ishikawa、A. R. Lupini、S.D. Findlay 和 S. J. Pennycook，“利用单电子信号进行定量环形暗场电子显微术”，显微镜与微量分析，第20卷，第99–110页，2014年2月。[43] X. Sang 和 J. M. Lebeau，“表征基于闪烁体的探测器对单电子的响应”，《超显微学》，第161卷，9，2016年3页。[44] G. McMullan、A. Faruqi 和 R. Henderson，“直接电子探测器”，载于《分辨率革命：冷冻电镜的最新进展》，《酶学方法》丛书，R. Crowther 编。学术出版社，2016年，第579卷，第1–17页。