arXiv:2303.04127v1 [math.PR] 7 Mar 2023

从淬火不变性原理到半群收敛及其在排斥过程中的应用

ALBERTO CHIARINI、SIMONE FLOREANI 和 FEDERICO SAU

摘要。考虑从原点出发、定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的平移不变且遍历的随机环境中的随机游走。在适当重标度后的随机游走满足淬火不变性原理的假设下，本文通过这一简短说明展示如何推导出相应半群的 L^1 收敛。随后，我们将该结果应用于在 $\mathbb{Z}^d$ 上的简单对称排斥过程，以获得淬火路径态流体动力学极限；其中具有独立同分布的对称最近邻电导 $\omega_{xy} \in [0,\infty)$，且仅满足

$$\mathbb{Q}(\omega_{xy} > 0) > p_c \,,$$

其中，p_c 是键渗流的临界值。

1. 引言

随机环境中的随机游走近年来受到了广泛关注，研究其标度极限是主要挑战之一（例如参见综述 [9,27]）。极限定理通常表述为关于从原点出发的随机游走的淬火不变性原理（QIP）。具体而言，记 $\mathbb{Q}$ 为环境的分布律，在 $\mathbb{Q}$满足某些自然的平稳性和遍历性假设时，对于 $\mathbb{Q}$- 几乎处处的环境实现，随机游走 $(X_t)^{t\geq 0}$ 在 $X_0 = 0$ 重标度后收敛于一个过程$(\mathbb{X}_t)^{t\geq 0}$，其分布律不依赖于环境的具体实现。

我们所考虑的示例是定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上、生成元具有如下形式的随机游走

$$Af(x) := \frac{1}{\nu_x} \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \omega_{xy} \left(f(y) - f(x)\right) \,, \qquad x \in \mathbb{Z}^d \,, \tag{1.1}$$

分别具有随机键权重和点权重ω_{xy}和 ν_x。特别地，若 $\omega_{xy} = \omega_{yx}$，则该游走称为随机电导模型（例如参见 [9]），其中 ν_x 起到该游走的不变测度的作用：当 $\nu_x \equiv 1$ 时，得到所谓的变速随机游走；而当 $\nu_x = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \omega_{xy}$ 时，则得到定速随机游走。另一个相关的例子是*Bouchaud* 陷阱模型（例如参见 [7]）：给定一组取值于 i.i.d.$\mathbb{N}$ 的随机变量 $\alpha = (\alpha_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$，满足对某个 $\beta \in (0,1)$，

$$\mathbb{Q}\big(\alpha_0 \geq u\big) = u^{-\beta}\left(1 + o(1)\right) \,, \quad \text{as } u \to \infty \,,$$

2020年 数学主题分类。 60K35；60K37；60G22；35B27；60F17；82C41；82B43。关键词和短语。 淬火不变性原理；遍历定理；对称排斥过程；流体动力学极限。

这种模型是无穷小生成元为

$$Af(x) := \sum_{y\sim x} \alpha_x^{a-1}\alpha_y^a \left(f(y) - f(x)\right) , \qquad x \in \mathbb{Z}^d . \tag{1.2}$$

在此公式中，求和遍历 x 中 $\mathbb{Z}^d$ 的最近邻点，而 $a \in [0,1]$ 是一个用于调节模型非对称性的附加参数。

对于所有这些模型，在各种条件下都已建立了定量不变原理（QIP）（例如参见 [1–10, 12, 14, 16]）。在许多情况下，极限过程是布朗运动，其扩散矩阵不依赖于环境的具体实现。在其他情况下，例如对于 Bouchaud 陷阱模型以及具有独立同分布且重尾的 ω_{xy}^{-1}（当 $d \geq 2$时）的恒速随机游走，其标度极限是一个称为 分数动力学过程 [4] 的半马尔可夫过程。

在研究随机环境中的相互作用粒子系统（IPS）的水动力学极限时，这类随机环境中随机游走的标度极限可能会很有用。事实上，正如例如 [18, 28], 对满足自对偶性的随机环境中相互作用粒子系统所展示的那样，相互作用粒子系统经验密度场的淬火收敛（就有限维分布收敛而言）可以由单粒子系统半群的淬火收敛得到。

大多数关于随机环境中的随机游走的论文，只讨论从原点出发的随机游走的收敛。然而，对于随机环境中相互作用粒子系统（IPS）的流体动力学极限应用，通常需要随机游走半群的某种适当收敛，而这可由从原点出发的定量不变原理（QIP）加强为任意起点QIP得到。值得一提的是，推导任意起点QIP这一问题由 [30], 提出，直到最近才在[14] 中针对一类随机环境得到解决（另见 [23, 29]）；对于这类环境，可以对格林函数和热核进行更精细的分析。

本文将展示，如何在对底层环境的分布律仅额外假设平移不变性和遍历性的条件下，由从原点出发的定量不变原理（QIP）推出相应半群（若极限过程不是马尔可夫过程，则为伪半群）的某种适当的L^1-收敛。随后，我们运用这一结果，推导出 $\mathbb{Z}^d$、 $d \geq 2$上具有 $[0,\infty$中独立同分布电导率的简单对称排斥过程的淬火函数型流体动力学极限，其中这些电导率仅满足

$$\mathbb{Q}(\omega_{xy} > 0) > p_c ,$$

从而使具有严格正电导率的键发生渗流。水动力学方程是热方程，其扩散率矩阵的形式为 $\sigma^2 \boldsymbol{I}$，其中 $\sigma > 0$ 取决于d 和 $\mathbb{Q}$，但不取决于环境的具体实现。简单对称排斥过程是研究最为广泛的相互作用粒子系统之一，由许多（可能是无限多个）对称最近邻随机游走组成，并受排斥规则约束：每个位置至多允许一个粒子。具有随机电导率的简单对称排斥过程的流体动力学极限已得到广泛研究（参见例如 [18–21、23–25, 29]）；然而，此处所采用的关于电导率的假设此前尚未被研究过。

本文其余部分的组织如下。在第2节中，我们介绍一般设定，并陈述本文的首要主要结果，即关于半群收敛的定理 2.3 和推论 2.4。在同一节中，我们列出若干适用于本结果的相关示例。在第3.1节中，我们介绍具有独立同分布的无界电导的无限簇上的对称排斥过程，并推导其流体动力学极限。在第 3.2节中，我们概述定理 2.3 在其他类型排斥过程中的若干进一步应用。

2. 从原点处的定量不变原理到半群 L^1-收敛

考虑如下形式的随机环境 $\omega \in \Omega$:

$$\omega = \left((\omega_{xy})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}, (\nu_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}\right), \tag{2.1}$$

其中 $\omega_{xy} \in [0,\infty)$ 且 $\nu_x \in (0, \infty)$，并赋予Ω 一个 σ-σ代数 $\mathcal{F}$。环境按照概率测度 $\mathbb{Q}$采样。我们假设该测度在 $\mathbb{Z}^d$ 中的平移作用下不变且遍历（假设2.1），并且原点处满足定量不变原理（QIP）（可能仅对一部分环境成立，见假设2.2）。满足此类假设的随机环境有若干示例；为方便读者，其中一些将在下文第2.2 节讨论。

下文中，对所有 $z \in \mathbb{Z}^d$, $\tau_z : \Omega \to \Omega$ 表示由下式给出的平移映射

$$\omega = \left((\omega_{xy})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}, (\nu_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}\right) \longmapsto \tau_z\omega := \left((\omega_{x+z,y+z})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}, (\nu_{x+z})_{x\in\mathbb{Z}^d}\right).$$

假设 2.1（环境的遍历性）。所有$(\tau_z)_{z\in\mathbb{Z}^d}$ 均为 $\mathcal{F}$-可测。此外，$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Z}^d$中的平移作用下不变且遍历，即对所有$A \in \mathcal{F}$ 和 $z \in \mathbb{Z}^d$，$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(\tau_z(A))$，并且对所有满足 $\tau_z(A) = A$ 的 $A \in \mathcal{F}$，都有 $\mathbb{Q}(A) \in \{0,1\}$。

给定按照 $\mathbb{Q}$ 抽样且满足假设 2.1 的环境实现 ω，我们考虑定义在 $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ 上的随机游走 X，其中 $X = (X_t)_{t\geq 0}$，其无穷小生成元 $A = A^\omega$ 由 (1.1) 给出。此外，$\mathbf{P}_z^\omega$ 和 $\mathbf{E}_z^\omega$ 分别表示具有 $X_0 = z \in \mathbb{Z}^d$ 的随机游走 X 的分布律及相应的期望。又，$\mathcal{D}([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 表示取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 c`adl`ag 路径所构成的波兰空间，并赋予 J_1-Skorokhod 拓扑（例如见 [11, §16]）。

假设 2.2（从原点出发的定量不变原理）。存在：

(1) 一个序列 $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$；*(2)* 一个集合 $\Omega_0 \in \mathcal{F}$，满足 $\mathbb{Q}(\Omega_0) > 0$；*(3)* 一个过程 $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_t)_{t\geq 0}$，其路径属于 $\mathcal{D}([0,\infty);\mathbb{R}^d)$，且具有平移不变律 $(P_x^{\mathbb{X}})_{x\in\mathbb{R}^d}$，即对所有 $x \in \mathbb{R}^d$，在 $P_x^{\mathbb{X}}$ 下的 $\mathbb{X}$ 与在 $P_0^{\mathbb{X}}$ 下的 $x + \mathbb{X}$ 具有相同的分布律；使得对于 $(\cdot\,|\,\Omega_0)$-几乎处处的 $\mathbb{Q}$ ω，在 P_0^ω 下的 $X^n = (X_{t\theta_n}/n)_{t\geq 0}$ 当 $n \to \infty$ 时，在 $\mathcal{D}([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 中依分布收敛到在 $P_0^{\mathbb{X}}$ 下的 $\mathbb{X}$。

尽管在许多示例中，从原点出发的定量不变原理对于 $\mathbb{Q}$-几乎处处的环境实现都成立，但集合$\Omega_0 \in \mathcal{F}$在假设2.2 中的作用，将在考察超临界渗流簇上的随机游走时变得清晰；这正是下文所处理的示例

第3.1 节：在这种情况下，Ω_0 与原点属于无限簇的环境集合一致。

2.1. **主要结果**。 现在我们可以陈述主要结果了。在下文中，$\mathbf{E}_x^{\mathbb{X}}$表示在 $\mathbb{X}$ 时 $\mathbb{X}_0 = x \in \mathbb{R}^d$的期望。最后，回顾 $X^n = (X_{t\theta_n}/n)_{t\geq 0}$ 来自假设2.2。

定理 2.3。 在假设2.1 和2.2下，对于 $\mathbb{Q}$-几乎处处的 ω，对所有紧集$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$以及所有一致连续有界函数 G，都有： $\mathcal{D}([0,\infty);\ \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n^d} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{I}^{\mathcal{A}}(x/n) \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\omega) \left|\mathbf{E}_x^{\omega}[G(X^n)] - \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}[G(\mathbb{X})]\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{2.2}$$

证明。 固定 $L > 0$和 $M > 0$。令 G： $\mathcal{D}([0,\infty);\ \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ 为 Lipschitz 连续函数，其 Lipschitz 常数为 $\mathrm{Lip}_{\mathcal{D}}(G) \leq L$，且由 M界定：对所有 z， $w \in \mathcal{D}([0,\infty);\ \mathbb{R}^d)$,

$$|G(z) - G(w)| \leq L\,\mathrm{d}_{\mathcal{D}}(z,w)\,, \qquad \|G\|_{\mathcal{D},\infty} := \sup_{z\in\mathcal{D}([0,\infty);\mathbb{R}^d)} |G(z)| \leq M\,. \tag{2.3}$$

其中，$\mathrm{d}_{\mathcal{D}}(\cdot,\cdot)$ 表示在 $\mathcal{D}([0,\infty)$ 上诱导 J_1-Skorokhod 拓扑的度量； $\mathbb{R}^d)$。固定 $K > 0$。对所有 k、 $n \in \mathbb{N}$、 $x \in \mathbb{Z}^d$ 和 $\omega \in \Omega$，定义

$$\begin{aligned} f_{n,x}(\omega) &:= \left|\mathbf{E}_0^{\omega}\left[G(X^n + x/n)\right] - \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}\left[G(\mathbb{X})\right]\right| \\ g_n(\omega) &:= \sup\left\{f_{m,y}(\omega) : m \geq n,\ |y| \geq n\right\}\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

令 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^K := \{y \in \mathbb{Z}^d\colon\ |y/n| \leq K\}$；因此，$\frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathcal{A}_n} \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\omega)\, f_{n,\,x}(\tau_x\omega)$ 与（2.2）左侧一致，其中 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$满足 $n\mathcal{A} \cap \mathbb{Z}^d = \mathcal{A}_n$。

对所有满足 $k \leq n$的 n、 $k \in \mathbb{N}$，通过估计 $f_{n,\,x} \leq g_k$ （针对 $x \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_k$）以及 $f_{n,\,x} \leq 2\|G\|_{\mathcal{D},\,\infty} \leq 2M$ （针对 $x \in \mathcal{A}_k$），我们得到

$$\frac{1}{n^d} \sum_{x\in\mathcal{A}_n} \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\omega) f_{n,x}(\tau_x\omega) \leq \frac{1}{n^d} \sum_{x\in\mathcal{A}_n} \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\omega)\, g_k(\tau_x\omega) + \frac{2}{n^d} \sum_{x\in\mathcal{A}_k} M\,. \tag{2.5}$$

（2.5）右侧第二项对每个固定的 $k \in \mathbb{N}$，当 $n \to \infty$ 时趋于零。对于第一项，由于 $\mathbb{I}^{\Omega_0} g_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ 有界，假设 2.1 和逐点遍历定理给出， $\mathbb{Q}$-几乎处处且对所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sum_{x\in\mathcal{A}_n} \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\omega)\, g_k(\tau_x\omega) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}^{\Omega_0} g_k\right]\,. \tag{2.6}$$

最后我们证明， $\mathbb{Q}$-几乎处处， $\mathbb{I}^{\Omega_0} g_k \to 0$ 当 $k \to \infty$；由控制收敛定理可知，(2.6) 右端（因而左端）在 $k \to \infty$时趋于零。由 $\mathbb{X}$ 的平移不变性（见假设 2.2中的第 (3) 项）， 我们有

$$f_{n,x}(\omega) = \left|\mathbf{E}_0^{\omega}\left[G(X^n + x/n)\right] - \mathbf{E}_0^{\mathbb{X}}\left[G(\mathbb{X} + x/n)\right]\right|\,.$$

此外，根据假设2.2 中的收敛以及斯科罗霍德表示定理，对于 $\mathbb{Q}(\,\cdot\,|\,\Omega_0)$-几乎处处的 ω， 存在 $(X^{n,\omega}, \mathbb{X})$ 的一个耦合， 记为 $(X^{n,\omega}, \mathbb{X})$， 其分布律为

$\bar{\mathbf{P}}_0^\omega$，期望为 $\bar{\mathbf{E}}_0^\omega$，且在 $\mathcal{D}([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 中的收敛以 $\bar{\mathbf{P}}_0^\omega$-几乎必然的方式发生：

$$\bar{\mathbf{P}}_0^\omega\text{-a.s.}\,, \qquad \mathrm{d}_{\mathcal{D}}(\bar{X}^n, \bar{\mathbb{X}}) \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{2.7}$$

结合这些事实可得，对于 $\mathbb{Q}$-几乎处处的 $\omega\in\Omega$，

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^{\Omega_0}(\omega)\, g_k(\omega) &:= \sup\{f_{n,y}(\omega) : n\ge k, |y|\ge k\} \\
&\le \mathbb{I}^{\Omega_0}(\omega)\, \sup\left\{\left|\bar{\mathbf{E}}_0^\omega\left[G(\bar{X}^n + y/n) - G(\bar{\mathbb{X}} + y/n)\right]\right| : n\ge k, |y|\ge k\right\} \\
&\le \mathbb{I}^{\Omega_0}(\omega)\, \sup\left\{\bar{\mathbf{E}}_0^\omega\left[\left(L\,\mathrm{d}_{\mathcal{D}}(\bar{X}^n, \bar{\mathbb{X}})\right)\wedge 2M\right] : n\ge k\right\} \xrightarrow{k\to\infty} 0\,,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是（2.3）的推论，而最后一步则由（2.7）和控制收敛定理得出。

因此我们证明了：给定 K、L、$M>0$，存在 $\Omega^{K,\,L,\,M}\in\mathcal{F}$，使得：

- $\mathbb{Q}(\Omega^{K,\,L,\,M}) = 1$;
- （2.2）对所有 $\omega\in\Omega^{K,\,L,\,M}$均成立；对所有包含于半径为 $K>0$的中心欧氏球内的紧集 $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^d$，以及所有满足 $\mathrm{Lip}_{\mathcal{D}}(G)\le L$ 且 $\|G\|_{\mathcal{D},\,\infty}\le M$的 Lipschitz连续有界函数 G，上述结论也成立。

取 $\Omega' := \cap_{K,\,L,\,M\in\mathbb{N}}\Omega^{K,\,L,\,M}$, $\mathbb{Q}(\Omega') = 1$，且（2.2）对所有 $\omega\in\Omega'$、所有紧集 $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^d$以及 $\mathcal{D}([0,\infty)\ \mathbb{R}^d$ 上的所有 Lipschitz连续有界函数均成立。由于后一个函数空间关于一致范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{D},\,\infty}$在一致连续有界函数空间中稠密，证明得证。□

作为定理 2.3 的直接推论，我们得到以下结果，该结果将在第 3.1 节和第 3.2节的应用中使用。下文中，$\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的非负紧支连续函数空间。

推论 2.4。在假设 *2.1* 和 *2.2*成立的条件下，并进一步假设 $\mathbb{X}$ 具有连续样本路径，则对于 $\mathbb{Q}$- 几乎处处的 ω 以及所有 $t>0$，紧集 $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^d$ 和一致连续有界函数 g：$\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{I}^{\mathcal{A}}(x/n)\,\mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\,\omega)\left|\mathbf{E}_x^\omega[g(X_{t\theta_n}/n)] - \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}[g(\mathbb{X}(t))]\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{2.8}$$

此外，假设对于某个 $f\in\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$，以下两个条件成立：

$$\frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\,\omega)\left(\mathbf{E}_x^\omega[f(X_{t\theta_n}/n)] - \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}[f(\mathbb{X}(t))]\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \tag{2.9}$$

and

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^d}\sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}^d\\ |x|>kn}}\mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\,\omega)\mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}\left[f(\mathbb{X}_t)\right]\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{2.10}$$

于是，

$$\frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\,\omega)\left|\mathbf{E}_x^\omega[f(X_{t\theta_n}/n)] - \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}[f(\mathbb{X}(t))]\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{2.11}$$

证明。 第一个断言，即（2.8），是定理 2.3 和极限过程 $\mathbb{X}$路径连续性的直接推论，这保证了单时刻投影的连续性。第二个断言可由（2.8）与证明中的论证结合得出 [29, 命题 5。3], 为方便读者，我们在此简要回顾这些论证。

固定 $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$。使用 $|a| = a + 2\max\{-a, 0\}, a \in \mathbb{R}$，对所有 $k > 0$，将（2.11）中的表达式拆分如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x \omega) \left(\mathbf{E}_x^{\omega}[f(X_{t\theta_n}/n)] - \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}[f(\mathbb{X}(t))] \right) \\
&\quad + \frac{2}{n^d} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^d \\ |x| \le kn}} \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x \omega) \max \left\{ \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}[f(\mathbb{X}(t))] - \mathbf{E}_x^{\omega}[f(X_{t\theta_n}/n)], 0 \right\} \\
&\quad + \frac{2}{n^d} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^d \\ |x| > kn}} \mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x \omega) \max \left\{ \mathbf{E}_{x/n}^{\mathbb{X}}[f(\mathbb{X}(t))] - \mathbf{E}_x^{\omega}[f(X_{t\theta_n}/n)], 0 \right\} .
\end{aligned}$$

根据假设（$n \to \infty$ 2.9），第一项在 时趋于零；根据（$k >$ 02.8），第二项对每个 $n \to \infty$，在 时趋于零；第三项不超过（2.10）中表达式的两倍，该表达式先取 $n \to \infty$，再取 $k \to \infty$ 时趋于零。□

2.2. **示例**。 这里列出六个示例，在这些示例中，定理 2.3 和推论 2.4均适用，极限过程 $\mathbb{X}$ 具有连续样本路径。根据所涉及的时空缩放类型，我们将这些示例分为两个子类。在这两种情况下，我们始终考虑满足假设 2.1且形如（2.1）的环境，其中 $\mathcal{F}$ 为乘积 Borel σ-域。

2.2.1. 扩散标度。 假设 2.2 对 $\theta_n = n^2$、$\Omega_0 = \Omega$以及 $\mathbb{X}$a d维布朗运动成立，且其协方差矩阵非退化，$\mathbb{Q}$-几乎必然为常数；若随机环境 ω 满足以下条件之一：

(1) 矩条件， $d \ge 1$： ω_{xy} 对称、最近邻，且满足：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\omega_{xy}\right] < \infty \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\omega_{xy}^{-1}\right] < \infty , \qquad d = 1, 2 , \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\omega_{xy}^{p}\right] < \infty \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\omega_{xy}^{-q}\right] < \infty , \qquad d \ge 3 ,
\end{aligned}$$

对于 $p, q \in (1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{2}{d-1}$，其中 $\nu_x = 1$ 或 $\nu_x = \sum_y \omega_{xy}$ 对所有 $x \in \mathbb{Z}^d$ 均成立； [9] 中的 $d = 1$ 参见 2， [6] 中的 $d \ge 3$ ；

(2) 椭圆且独立同分布， $d \ge 2$： ω_{xy} 对称、最近邻，独立同分布，且满足

$$\mathbb{Q}(\omega_{xy} \ge c) = 1 , \quad \text{for some } c > 0 ,$$

且 $\nu_x = 1$ 对所有 $x \in \mathbb{Z}^d$ 均成立； 参见 [5];

(3) 长程， $d \ge 2$： ω_{xy} 对称，满足

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \omega_{0x} |x|^2 \right)^p \right] < \infty \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(1/\omega_{0x}\right)^q \right] < \infty , \ |x| = 1 ,$$

对于 $p,q \in (1,\infty)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{2}{d}$；此外，$\nu_x = \sum_y \omega_{xy}$ 对所有 $x \in \mathbb{Z}^d$ 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\omega_{00}] < \infty$ 均成立；见 [10]；(4) 平衡且独立同分布，$d \geq 1$：$\tilde{\omega}_x(y) := (\tau_x \omega)_{0y}$，满足对每个 $y \in \mathbb{Z}^d$（其中 $|y|=1$），$\tilde{\omega}_z(y) = \tilde{\omega}_z(-y) > 0$，且为独立同分布；进一步，$\nu_x = \sum_y \tilde{\omega}_x(y)$；见 [8]。

2.2.2. 次扩散标度。 假设 2.2 对

$$\theta_n = n^{d/\beta} \text{ if } d \geq 3\,, \qquad \text{or} \quad \theta_n = n^{d/\beta}\log^{1-1/\beta}(n) \text{ if } d = 2\,, \tag{2.12}$$

$\Omega_0 = \Omega$，且 $\mathbb{X} := $ 是分数动力学过程的倍数，如果 ω 满足以下条件之一，其中 $\beta \in \in (0,1)$ 且 c_1、$c_2 > 0$（参见 [4] 关于 $d \geq 3$、[12] 关于 $d=2$）：

(5) 重尾电导：ω_{xy} 对称、最近邻，并满足，

$$\mathbb{Q}(\omega_{xy} > u) = c_1 u^{-\beta}(1+o(1)) \text{ as } u \to \infty\,, \quad \text{and} \quad \mathbb{Q}(\omega_{xy} \geq c_2) = 1\,; \tag{2.13}$$

其中，$\nu_x = \sum_y \omega_{xy}$；

(6) 重尾位点权重：$\omega_{xy} := \alpha_x^{a-1}\alpha_y^a$，其中 $a \in [0,1]$ 且 α_x 独立同分布，并满足

$$\mathbb{Q}(\alpha_x > u) = c_1 u^{-\beta}(1+o(1)) \text{ as } u \to \infty\,, \quad \text{and} \quad \mathbb{Q}(\alpha_x \geq c_2) = 1\,; \tag{2.14}$$

here, $\nu_x = 1$ for all $x \in \mathbb{Z}^d$.

上述列表远不完整，有兴趣的读者还可参阅，例如，[3,16,17],第 3.1 节（参见（3.8））中讨论的变速随机游走，以及时变环境的示例，例如 [2]。

3. 排斥过程的应用

3.1. 具有独立同分布电导的对称简单排斥过程。 设 $\mathbb{Z}^d$、$d \geq 2$，并令 E_d 表示 $\mathbb{Z}^d$ 的无向最近邻键集合。设 $\omega = (\omega_e)_{e \in E_d}$ 为定义在 $[0,\infty)$ 上的独立同分布随机变量，我们假设

$$\mathbb{Q}(\omega_e > 0) > p_c\,, \tag{3.1}$$

其中 $p_c = p_c(d) \in (0,1)$ 表示 $\mathbb{Z}^d$ 上独立同分布键渗流的临界概率。定义 $\mathcal{O}(\omega) := \{e \in E_d : \omega_e > 0\}$，并且对于 $\mathbb{Q}$-几乎处处的 ω，令 $\mathcal{C}(\omega) \subset \mathbb{Z}^d$ 为至少有一条相邻键属于 $\mathcal{O}(\omega)$ 的站点所构成的唯一无限连通超临界渗流簇。最后，定义 $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : 0 \in \mathcal{C}(\omega)\}$；则 $\mathbb{Q}(\Omega_0) > 0$。

对于任意按 $\mathbb{Q}$ 抽样得到的 ω，我们将 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ 视为定义在 $\mathcal{C}(\omega)$ 上、电导率为 $(\omega_e)_{e \in E_d}$ 的简单对称排斥过程，即状态空间为 $\Xi := \{0,1\}^{\mathcal{C}(\omega)}$、生成元由下式给出的马尔可夫过程。该式对所有局部函数 $\varphi : \Xi \to \mathbb{R}$ 均成立：

$$\mathcal{L}^\omega \varphi(\eta) := \sum_{\substack{xy \in E_d \\ x,y \in \mathcal{C}(\omega)}} \omega_{xy}\left(\varphi(\eta^{xy}) - \varphi(\eta)\right)\,. \tag{3.2}$$

这里，$\eta^{xy} \in \Xi$ 表示将 η 中的 $\eta(x)$ 与 $\eta(y)$ 互换后得到的构型。由于单粒子系统几乎必然是守恒的（见引理 2.11],），粒子系统 η_t 也几乎必然定义良好（例如，见 [15, 附录 A]）。此外，$\mathbb{P}_\eta$ 表示当 $\eta_0 = \eta$ 时 η_t 的分布律；对于定义在 $\{0,1\}^{\mathcal{C}(\omega)}$ 上的概率分布 μ，我们记作 $\mathbb{P}_\mu := \mu(\mathrm{d}\eta)\mathbb{P}_\eta$。

众所周知（例如，见 [14, 命题 3.14]），$m_n := \frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathcal{C}(\omega)}\delta_{x/n}$ 在 $\mathbb{Q}$-几乎处处的意义下模糊收敛到$\mathbb{R}^d$上勒贝格测度的一个确定倍数。更确切地说，令 $q = q(\mathbb{Q}, d) := \mathbb{Q}(0 \in \mathcal{C}(\omega)) \in (0, 1)$，则几乎必然有 $\mathbb{Q}$，以下收敛关系成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}m_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}x\,, \qquad f\in\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)\,, \tag{3.3}$$

成立。我们的目标是确定粒子系统在 $\mathcal{C}(\omega)$ 上经扩散尺度重标度后的经验密度场的标度极限，即

$$\mathcal{X}_t^n := \frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathcal{C}(\omega)} \eta_{tn^2}(x)\,\delta_{x/n}\,, \qquad t\geq 0\,. \tag{3.4}$$

接下来，我们将 $\mathcal{X}_t^n$视为 $\mathcal{M}_v(\mathbb{R}^d)$ 上的随机测度，即赋予弱拓扑的局部有限测度空间。此外，我们用 $\mathcal{D}([0,\infty); \mathcal{M}_v(\mathbb{R}^d))$ 表示取值于 $\mathcal{M}_v(\mathbb{R}^d)$ 的 *càdlàg* 路径空间，并赋予其 J_1-Skorokhod 拓扑。

命题 3.1。 设 $d \geq 2$ 和 $\omega = (\omega_e)_{e\in E_d}$ 为独立同分布，并满足 (3.1)。假设，$\mathbb{Q}$-几乎处处地，一列概率分布 $(\mu_n)_n$ 在 $\{0,1\}^{\mathcal{C}(\omega)}$ 上满足

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{\mu_n}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mathcal{X}_0^n - q\int_{\mathbb{R}^d} f\,\gamma\,\mathrm{d}x\right| > \varepsilon\right) = 0\,, \qquad f\in\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)\,,\ \varepsilon>0\,, \tag{3.5}$$

对某个确定且连续的 $\gamma\colon \mathbb{R}^d\to[0,1]$。那么，存在 $\sigma = \sigma(\mathbb{Q}, d) > 0$使得，$\mathbb{Q}$-几乎处处地，族 $((\mathcal{X}_t^n)_{t\geq 0})_n$ 在 $\mathcal{D}([0,\infty); \mathcal{M}_v(\mathbb{R}^d))$ 中是紧的，并且满足

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{\mu_n}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mathcal{X}_t^n - q\int_{\mathbb{R}^d} f\,\rho_t\,\mathrm{d}x\right| > \varepsilon\right) = 0\,, \qquad t>0\,,\ f\in\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)\,,\ \varepsilon>0\,, \tag{3.6}$$

其中 $(\rho_t)_{t\geq 0}$ 是在 $\mathbb{R}^d$上的唯一强解，满足

$$\partial_t\rho_t = \sigma^2\Delta\rho_t\,, \quad \textit{with } \rho_0 = \gamma\,. \tag{3.7}$$

我们强调，只需假设独立同分布电导能够渗流（尤其是无需任何矩条件），即可确保淬火流体力学极限非退化。该结果直接来自推论2.4、对称排斥过程的自对偶性，以及 [28] 中提出并在例如 [15, 18, 20, 29]中进一步完善的策略。下面概述主要步骤。

固定一个按照$\mathbb{Q}$采样得到的环境实现ω，并考虑变速随机游走 $X = (X_t)_{t\geq 0}$，它在 $\mathcal{C}(\omega) \subset \mathbb{Z}^d$上，具有

$$A^\omega f(x) = \sum_{y\in\mathcal{C}(\omega)} \omega_{xy}\,(f(y) - f(x))\,, \qquad x\in\mathcal{C}(\omega)\,. \tag{3.8}$$

作为其无穷小生成元。回顾一下，$\mathbf{P}_x^\omega$ 和$\mathbf{E}_x^\omega$ 分别表示 X_t 在 $X_0 = x \in \mathcal{C}(\omega)$时的分布律及相应的期望。此外，对所有 $n\in\mathbb{N}$ 以及有界连续函数 $g\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$，令

$$P_t^n g(x/n) := \mathbf{E}_x^\omega\left[g(X_{tn^2}/n)\right]\,, \qquad x\in\mathcal{C}(\omega)\,,\ t\geq 0\,, \tag{3.9}$$

表示扩散重标度随机游走 $X^n = (X_{n^2t}/n)_{t\geq 0}$ 的半群。

现在我们回顾独立同分布的无界电导随机电导模型的标度极限，该极限最初是在 [5] 在假设 $\mathbb{Q}(\omega_{xy} \geq 1) = 1$下得到的，随后在[1]中得到了进一步推广。这里，$B^\sigma = (B_t^\sigma)_{t\geq 0}$ 表示一个 d维布朗运动，其扩散矩阵为 $\sigma^2 \boldsymbol{I}$，而$(S_t^\sigma)_{t\geq 0}$ 是其半群。

定理 3.2 ([1, 定理 1。1])。 设 $d \geq 2$ 和 $\omega = (\omega_e)_{e\in E_d}$ 是独立同分布的，并满足 (3.1)。那么，对于 $\mathbb{Q}(\cdot \mid \Omega_0)$-几乎处处的 ω， X^n 在 $\mathbb{P}_0^\omega$ 下依分布收敛于 B^σ，其中 $B_0^\sigma = 0$。

作为上述结果的推论，假设 2.1 和 2.2，从而（2.8）在此情形下成立。此外，

- 由于 P_t^n关于 $\mathcal{C}(\omega)$上的计数测度的对称性，（3.3）以及 S_t^σ关于 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度的对称性，条件（2.9）在此情形下成立；
- S_t^σ: $\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$；因此，条件（2.10）在此情形下成立。

因此，推论 2.4 中的 (2.11) 成立，因而，由于 $\mathbb{I}^{\Omega_0}(\tau_x\,\omega) = \mathbb{I}^{x\in\mathcal{C}(\omega)}$，对于 $\mathbb{Q}$-几乎处处的 ω、 $t \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sum_{x\in\mathcal{C}(\omega)} |P_t^n f(x/n) - S_t^\sigma f(x/n)| = 0\,. \tag{3.10}$$

(3.10) 中的断言是命题 3.1 证明中的关键步骤。给定 (3.10)， $\mathcal{X}_t^n$有限维分布收敛的证明可参见例如 [18, 23, 28]（另见 [15], , 该文绕过了粒子系统的显式图形构造）。我们只需指出，在这一步中，关键在于利用这样一个事实：对于任意固定的 ω，生成元由 (3.2) 给出的对称排斥过程 η_t 与 X_t 满足随机对偶关系，其对偶函数为 $D(x, \eta) = \eta(x)$。紧性可由 [21, 第 5 节1] 中的论证（另见 [20, 第 8] 节，其中给出了改进）或 [15, 第 4]节中的论证保证。

为方便读者，我们在下一节概述命题 3.1的证明的主要步骤；专家读者可直接跳至第 3.2 节。

3.1.1. 命题 *3.1* 的证明。 由 $\mathcal{X}_0^n \leq m_n = \frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathcal{C}(\omega)} \delta_{x/n}$ 和（3.10），我们得到 $\mathbb{Q}$-a.s.,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_n}\left[\left|\int_{\mathbb{R}^d} P_t^n f \,\mathrm{d}\mathcal{X}_0^n - \int_{\mathbb{R}^d} S_t^\sigma f \,\mathrm{d}\mathcal{X}_0^n\right|\right] = 0. \tag{3.11}$$

由对偶性和对称简单排斥过程(ω)的负相关性，得到如下方差估计（证明见例如 [15, 命题3.1]）： $\mathbb{Q}$-a.s., 对所有 $t \geq 0, n \in \mathbb{N}$ 以及 $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}_{\mu_n}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mathcal{X}_t^n - \int_{\mathbb{R}^d} P_t^n f \,\mathrm{d}\mathcal{X}_0^n\right)^2\right] \leq \frac{1}{n^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 \,\mathrm{d}m_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \tag{3.12}$$

其中最后一步由（3.3）推出，从而保证 $\lim_{n\to\infty}\int f^2 \,\mathrm{d}m_n < \infty$。最后， （3.5），$\mathcal{X}_0^n \leq m_n$， $S_t^\sigma f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$， $S_t^\sigma f \geq 0$以及（3.3）给出 $\mathbb{Q}$-a.s.,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mu_n}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} S_t^\sigma f \,\mathrm{d}\mathcal{X}_0^n - q\int_{\mathbb{R}^d} S_t^\sigma f\,\gamma \,\mathrm{d}x\right| > \varepsilon\right) = 0\,, \qquad \varepsilon > 0\,. \tag{3.13}$$

(3.6) 中所需的结论可由三角不等式以及 $\int S_t^\sigma f\,\gamma \,\mathrm{d}x = \int f\,\rho_t \mathrm{d}x$ 得出。

关于紧性，我们沿用 [15] 中紧性证明的相同步骤。具体而言，固定$f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$ 和 $\varepsilon > 0$。我们需要证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，存在一个 $\mathbb{Q}$-可测的非递减函数 $\psi_n = \psi_{n,\,\varepsilon}$: $[0,T] \to [0,\infty)$，使得对所有 $t \geq 0$，都有 $\mathbb{Q}$-几乎必然成立:

$$\mathbb{P}_{\mu_n}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mathcal{X}^n_{t+h} - \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mathcal{X}^n_t\right| > \varepsilon \,\middle|\, \mathcal{F}^n_t\right) \leq \psi_n(h)\,, \qquad h \geq 0\,, \tag{3.14}$$

其中 $\mathcal{F}^n_t := \sigma(\mathcal{X}^n_s\colon\ s \leq t)$，并且对 $\mathbb{Q}$-几乎处处，

$$\psi(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\,, \qquad \text{where } \psi(h) := \limsup_{n\to\infty} \psi_n(h)\,. \tag{3.15}$$

记，对于所有 $p \in [1,\infty)$ 和 $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$，$\|g\|_{p,n} := \left(\frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathcal{C}(\omega)} |g(x/n)|^p\right)^{1/p}$ 并紧随 [15, §4], ，我们有 $\psi_n(h)$可取为

$$\psi_n(h) := C_1\sqrt{\|f\|^2_{2,n} - \|P^n_{h/2}f\|^2_{2,n}} + C_2\,\frac{1}{n^{d/2}}\|f\|_{2,n}\,, \tag{3.16}$$

其中某些 $C_1, C_2 > 0$ 仅依赖于 $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$ 和 $\varepsilon > 0$。（注意，上文给出的 $\psi_n(h)$ 关于 $h \geq 0$ 是非递减的。）(3.16) 右侧的第二项当 $n \to \infty$ 时对 $\mathbb{Q}$-几乎处处趋于零。至于第一项，由 $\|P^n_{h/2}f\|^2_{2,n} = \frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathcal{C}(\omega)} f(x/n)\ P^n_h f(x/n)$、(3.10) 和 (3.3)，我们有，对 $\mathbb{Q}$-几乎处处，

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|^2_{2,n} - \|P^n_{h/2}f\|^2_{2,n} = q\int_{\mathbb{R}^d} f\,(f - S^\sigma_h f)\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.17}$$

根据 S^σ_h 在 L^2（$\mathbb{R}^d$）中的强连续性，它会随 $h \to 0$ 趋于零。

3.2. **进一步的应用**。 本节讨论定理 2.3和推论2.4的其他应用。

首先注意，对于具有对称随机导电率的对称排斥过程，如果其满足第2.2 节示例（1）和（3）中的任一条件（在这些情形下，该模型仍是自对偶的，参见例如 [22, §4。1]），则可采用上一节的相同证明策略，得到其淬火流体动力学极限：在这两种情形下，水动力学方程都是热方程，且其扩散矩阵为非退化常数矩阵，不依赖于环境实现。

作为定理2.3的另一项应用，我们简要说明系统中无限多个相互作用的BTM(a)的频率场的流体动力学极限，该系统由 [15] 分析。

简要回顾第 2.2.2 节中的例（6），令 $\alpha = (\alpha_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ 为 $\mathbb{N}$ 值独立同分布随机变量，其服从 $\mathbb{Q}$，并满足（2.14），此处取 $c_1 = c_2 = 1$。粒子系统 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 在状态空间 Ξ: $= \prod_{x\in\mathbb{Z}^d}\{0,1,\ldots,\alpha_x\}$ 上演化，其马尔可夫生成元作用于局部函数 φ： $\Xi \to \mathbb{R}$ 时，形式如下:

$$\mathcal{L}^\alpha\varphi(\eta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \eta(x)\,\alpha_x^{a-1} \sum_{y\,:\,|x-y|=1} \alpha_y^a\,(1 - \eta(y)/\alpha_y)\,(\varphi(\eta^{x,y}) - \varphi(\eta))\,, \qquad \eta \in \Xi\,, \tag{3.18}$$

其中 $\eta^{x,\,y} := \eta - \delta_x + \delta_y$。我们考虑以下重新缩放的经验频率场 :

$$t \in [0,\infty) \longmapsto \mathcal{Z}^n_t := \frac{1}{n^d}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \frac{\eta_{t\theta_n}(x)}{\alpha_x}\,\delta_{x/n} \in \mathcal{M}_v(\mathbb{R}^d)\,, \tag{3.19}$$

其中 $\theta_n = \theta_{n,\ \beta,\ d}$ 由（2.12）给出。作为推论 2.8）的直接结果，并结合 2.4中的证明主要步骤 [15, 第 5] 节（尤其是其中的注 5.1），我们得到以下结果，它是 [15, 命题 2.6] 在 $d \geq 2$时的淬火版本：

命题 3.3 ([15, 命题 2。6])。 设 $d \geq 2$。给定一个一致连续函数$\gamma\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$，对所有 $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \otimes_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{Bin}(\alpha_x, \gamma(x/n))$，将其设为粒子系统的初始分布。则存在 $\sigma = \sigma(\mathbb{Q}, d) > 0$，使得 $\mathbb{Q}$-几乎必然，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mu_n}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mathcal{Z}_t^n - \int_{\mathbb{R}^d} f\,\rho_t\,\mathrm{d}x\right| > \varepsilon\right) = 0\,, \qquad t \geq 0\,,\ f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)\,,\ \varepsilon > 0\,,$$

成立，其中$(\rho_t)_{t\geq 0}$ 是 $\mathbb{R}^d$上的唯一有界强解，满足

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\rho_t = \sigma^{2/\beta}\Delta\rho_t\,, \quad \textit{with } \rho_0 = \gamma\,. \tag{3.20}$$

在此公式中，$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$表示阶数为 $\beta \in (0,1)$ 的 *Caputo* 导数，即对所有 $t \geq 0$和 $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$，$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}h(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^\beta} h'(s)\mathrm{d}s$。

致谢。 S.F. 感谢英国工程与物理科学研究理事会通过 EPSRC 青年学者奖学金 EP/V027824/1 提供资助。A.C.、S.F. 和 F.S. 感谢豪斯多夫数学研究所（波恩）在初级学者季度项目 生命科学中的随机建模 期间提供的热情接待。该项目由德国研究联合会（DFG）根据德国卓越战略资助，项目编号为 EXC-2047/1 - 390685813。本文撰写期间，A.C. 受聘于 INdAM（弗朗切斯科·塞韦里国家高等数学研究所）和 GNAMPA。最后，S.F. 感谢 Noam Berger 和 Martin Slowik 富有启发性的有益讨论。

参考文献

[1] Andres, S., Barlow, M. T., Deuschel, J.-D., and Hambly, B. M. 随机电导模型的不变性原理。概率论及相关领域 *156*, 3-4 (2013), 535–580。[2] Andres, S., Chiarini, A., Deuschel, J. D. and Slowik, M. 时变遍历退化权重下随机游走的淬火不变性原理。概率年刊 *46*, 1 (2018), 302–336。[3] Andres, S., Deuschel, J. D. and Slowik, M. 退化遍历环境中随机电导模型的不变性原理。概率年刊 *43*, 4 (2015), 1866–1891。[4] Barlow, M. T., and ˇCern´y, J. 与无界电导率相关的随机游走收敛至分数动力学。概率论及相关领域 *4149*, 3 (2011), 639–673。[5] Barlow, M. T., and Deuschel, J.-D. 无界电导率随机电导模型的不变性原理。概率年刊 *38*, 1 (2010), 234–276。[6] Bella, P., and Sch¨affner, M. 随机退化电导率下随机游走的淬火不变性原理。概率年刊 *48*, 1 (2020年), 296–316。[7] Ben Arous, G., and ˇCern´y, J. 陷阱模型的动力学。载于数理统计物理 (Elsevier B. V., Amsterdam, 2006), pp. 331–394[8] Berger, N., Deuschel, J. D.. 独立同分布的平衡随机环境中非椭圆随机游走的淬火不变性原理。概率论及相关领域 *158*, (2014), 91–126.[9] Biskup, M. 随机电导模型的最新进展。概率调查 *8* (2011), 294–373。

[10] Biskup, M., Chen, X., Kumagai, T., and Wang, J. 一类具有长程跳跃的随机电导模型的淬火不变性原理。概率论及相关领域 180, (2021), 847–889。[11] Billingsley, P. 概率测度的收敛，威利概率与统计丛书第 320 卷：概率与统计。John Wiley & Sons, Inc., 纽约，第二版，1999。Wiley-Interscience 出版物。[12] ˇCern´y, J. 重尾电导下的二维随机游走。电子概率期刊 16, 10 (2011), 293–313。[13] Chen, Z. Q. 时间分数阶方程与概率表示。混沌、孤子与分形 102 (2017), 168–174。[14] Chen, Z.-Q., Croydon, D. A., and Kumagai, T. 带边界的随机介质中随机游走与椭圆扩散的淬火不变性原理。概率年刊 43, 4 (2015), 1594–1642。[15] Chiarini, A., Floreani, S., Redig, F. and Sau, F. 相互作用的 Bouchaud 陷阱模型的马尔可夫系统导出的分数阶动力学方程。arXiv:2302.10156 (2023)。[16] Deuschel, J.-D., Nguyen, T. A., and Slowik, M. 带退化遍历权重的随机图上随机电导模型的淬火不变性原理。概率论及相关领域 170, (2018), 847–889。[17] Deuschel, J. D., Guo, X., and Ram´ırez, A. F . 时变平衡随机环境中随机游走的淬火不变性原理。Ann. Inst. H. Poincar´e Probab. Statist. 54, 1 (2018), 363–384。[18] Faggionato, A. 键无序一维排斥过程的整体扩散。马尔可夫过程及相关领域 13, 3 (2007), 519–542。[19] Faggionato, A. 随机无限簇上的随机电导率随机游走与排斥过程：均匀化与流体动力学极限。电子概率期刊 13 (2008), no. 73, 2217–2247。[20] Faggionato, A. 通过对偶性与均匀化研究对称随机环境中简单排斥过程的流体动力学极限。概率论及相关领域 184, 3 (2022), 1093–1137。[21] Faggionato, A., Jara, M., and Landim, C. 随机电导率一维次扩散排斥过程的流体动力学行为。概率论及相关领域 144, 3-4 (2009), 633–667。[22] Floreani, S., Jansen, S., Redig, F., and Wagner, S. 相容马尔可夫过程的交织与对偶性。arXiv:2112.11885 (2021)。[23] Floreani, S., Redig, F., and Sau, F. 随机环境中部分排斥过程的流体动力学。随机过程及其应用 142, (2021), 124–158。[24] Jara, M. 非均匀介质中排斥过程的流体动力学极限。载于《动力学、博弈与科学 II》（柏林，海德堡，2011），M. M. Peixoto, A. A. Pinto, and D. A. Rand, 编，Springer Berlin Heidelberg, pp. 449–465。[25] Jara, M., and Landim, C. 键无序排斥过程中的标记粒子的淬火非平衡中心极限定理。Ann. Inst. Henri Poincar´e Probab. Stat. 44, 2 (2008), 341–361。[26] Kallenberg, O. 现代概率论基础。Springer Science+Business Media New York, 纽约，2021 。[27] Kumagai, T. 无序介质上的随机游走及其标度极限。Springer, 2014。[28] Nagy, K. 一维随机环境中的对称随机游走。匈牙利数学期刊 45, 1-2 (2002), 101–120。[29] Redig, F., Saada, E., and Sau, F. 动态环境中的对称简单排斥过程：流体动力学。电子概率期刊 25 (2020), Paper No. 138, 47.[30] Rhodes, R. 反射随机微分方程的随机均匀化。电子概率期刊 15 (2010), 989–1023。

帕多瓦大学电子邮箱:
chiarini@math.unipd.it

牛津大学电子邮箱: simone.floreani@maths.ox.ac.uk

的里雅斯特大学电子邮箱:
federico.sau@units.it