极小自伴紧算子、子空间的矩与联合数值域

TAMARA BOTTAZZI [1,2] 和 ALEJANDRO VARELA[3,4]

Abstract.我们定义希尔伯特空间 H中一族紧算子的（凸）联合数值域。利用这一集合，我们判定在算子范数下，对于固定基 E，谱中含有 $\pm\|A\|$ 的自伴紧算子A 是否相对于该基下对角算子集合为极小的；也就是说 $\|A\| \leq \|A + D\|$，对所有对角算子 D均成立。我们还用联合数值域描述子空间 $S \subset H$ 的矩集$m_S = \text{conv}\left\{|v|^2 : \ v \in S \text{ 和 } \|v\| = 1\right\}$，并得到了两个子空间的矩集交集与其对应的两个联合数值域交集之间的等价关系。此外，我们将 A 的极小性条件，或其特征空间的矩集交集，与两族特定有限阶厄米矩阵的联合数值域交集联系起来。我们还研究集合 m_S 的几何性质，例如与基 E相关的极值曲线。所有这些条件都与极小自伴紧算子的刻画直接相关。

arXiv:2303.04128v1 [math.FA] 7 Mar 2023

1. Introduction and preliminaries

给定一个希尔伯特空间 H，若对于固定的标准正交基 $E = \{e_i\}_{i\in I}$，对 H 中的所有 D 对角算子 $\|A\| \leq \|A+D\|$，且 $\|\cdot\|$ 算子范数，则称 $A \in B(H)$ 为极小算子。注意，在 A 为紧算子的情形下，我们可以假设 H 是可分的，因为只有可数多个集合 $\{e_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 $A(e_{i_k}) \neq 0$。正如文献中所述，这些算子使得我们能够在自然的芬斯勒度量下，对由酉算子轨道构成的齐性空间中的测地线作出具体描述（见 [4]）。在 [7] 中，我们研究了极小自伴紧算子，并指出一般而言，紧极小对角算子的存在性和唯一性都无法得到保证。近期，部分结果已推广至 $K(H)$ 的更一般子代数以及 [14, 15] 中的 C*-代数。

给定一个子空间 $S \subset H$，我们称 S 的矩集为

$$m_S = \text{Diag}\{Y \in \mathcal{B}_1(H) : Y \geq 0, P_S Y = Y, \text{tr}(Y) = 1\}$$

$\mathcal{B}_1(H)$ 中的迹类算子理想。等价地，$m_S =$ 凸包 $\{|v|^2 : \ v \in S$ 和 $\|v\| = 1\}$，其中 $|v|^2 = (|v_1|^2, |v_2|^2, \dots)$ 对于 $v = (v_1, v_2, \dots)$ 是 v 在 E 基下的坐标（见命题 1）。这些集合是检测和参数化极小自伴紧算子的基础。更具体地说，对于 $S \perp V$ 有限维子空间，若 R 是一个自伴算子，且 $\text{ran}(R) \perp S, V$ 和 $\|R\| \leq 1$，则可知 $m_S \cap m_V \neq \{0\}$ 当且仅当 $A = P_S - P_V + R$ 是极小紧自伴算子。并且，每个范数为 1 的紧极小自伴算子 A 都可以用这种方式描述（见 [7]）。

在有限维情形下，[9] 中获得的最新结果描述了极小的 $n \times n$ 厄米矩阵 $M \in M_n^h(\mathbb{C})$ 的性质，并将其与某些联合数值域联系起来。这些联合数值域是 $\{E_i P_+ E_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{E_i P_- E_i\}_{i=1}^n$ 的（凸）联合数值域，其中 P_+ 和 P_- 分别是投影到 $\|M\|$ 和 $-\|M\|$ 的特征子空间上的正交投影算子，而 $E_i = e_i \otimes e_i$ 是投影到张成空间$\{e_i\}$上的秩一投影，其中$e_i \in E$。我们关注这些关系，是因为已有许多关于联合数值域性质的研究，可用于确定条件 [9] 成立的情形

2020年数学主题分类。主要分类：15A60、47A12、47B15。次要分类：47A05、47A30、51M15。关键词和短语：子空间矩、自伴紧算子、极小性、联合数值域。部分研究经费由 CONICET（PIP 0525）、ANPCyT（PICT 2015-1505 和 2017-0019）以及 UNRN（PI 40-B-906）资助。

（参见定理 4）。

在本文中，我们将把 [9] 的主要结果推广到紧算子的情形。为此，我们需要定义无限多个紧算子的（凸）联合数值域（见定义 1）。在此情形下，第 2 节介绍联合数值域 $W(\mathbf{A})$、联合数值半径 $w(\mathbf{A})$ 和矩集 m_S。我们研究它们的一些一般性质，以及对于特定族 $A=\{P_SE_iP_S\}_{i=1}^{\infty}$，$W(\mathbf{A})$ 与 m_S 之间的密切关系（见命题 3）。

第 3 节描述了 m_S 的一些极值点和曲线，它们与 S 和由固定基 $E, i\in\mathbb{N}$ 的元素 e_i 生成的典范子空间之间的主角有关。

第 4 节将定义在维数为 $\dim S = r<\infty$ 的子空间 $S\subset H$ 上的厄米算子实向量空间，与厄米 $r\times r$ 矩阵的实子空间 $M_r^h(\mathbb{C})$ 联系起来。我们利用盖尔曼广义基构造了一个明确的（实）等距同构 U，它在 $M_r^h(\mathbb{C})$ 与 $\mathcal{B}_S^h=P_SB^h(H)P_S$ 之间建立映射（见命题10）。此外，U 及其逆映射保持联合数值域。这些结果使我们能够利用有限族维数为 $\dim S\times\dim S$ 和维数为 $\dim V\times\dim V$ 的矩阵，描述两个有限维正交子空间 $S, V\subset H$ 的矩集非空交集条件。通过验证某些联合数值域交集非空这一等价条件即可实现这一点。这些条件使得构造所有极小紧算子成为可能。

由此，我们可以证明主要结果，该结果联系了 H 的正交有限维子空间的矩、联合数值域、一对子空间的支撑以及极小厄米紧算子（见第 5 节中的定理 4）。

2. Joint numerical range for a sequence of operators in $\mathcal{K}(H)$

设 $\mathcal{K}(H)$ 是可分希尔伯特空间 H 中的紧算子理想，其中我们用 $\langle$ 表示 $\rangle$ 的内积，用 $\|\|$ 表示由此诱导的范数。在有界算子代数 $B(H)$ 中，我们还用 $\|\|$ 表示算子范数。

紧算子 $(\mathcal{K}(H))^*=\mathcal{B}_1(H)$ 的对偶空间是迹类算子理想 $T\in\mathcal{K}(H)$，满足 $\mathrm{tr}\,|T|<\infty$（其中 tr 表示通常的迹）。

定义 1. 考虑一列自伴紧算子 $\mathbf{A}=\{A_j\}_{j=1}^{\infty}\in\mathcal{K}(H)^{\mathbb{N}}$ A_j，其范数有界（$\|A_j\|\le c$，对所有 j）。我们将 A 的联合数值域定义为

$$W(\mathbf{A})=\left\{\{\mathrm{tr}\,(\rho A_j)\}_{j=1}^{\infty}:\rho\in\mathcal{B}_1(H)\wedge\mathrm{tr}(\rho)=1\wedge\rho\ge 0\right\}. \tag{2.1}$$

注意，$|\mathrm{tr}(\rho A_j)|\le\|A_j\|\mathrm{tr}(\rho)\le c$，这意味着 $\{\mathrm{tr}\,(\rho A_j)\}_{j=1}^{\infty}\in\ell^{\infty}(\mathbb{R})$，因此 $W(\mathbf{A})\subset\ell^{\infty}(\mathbb{R})$。由迹的线性性以及集合 $\mathcal{D}=\{\rho\in\mathcal{B}_1(H)^h:\mathrm{tr}(\rho)=1\wedge\rho\ge 0\}$的凸性，显然 $W(\mathbf{A})$ 是一个凸集。

定义2。对于族$\mathbf{A}=\{A_j\}_{j=1}^{\infty}\in\mathcal{K}(H)^{\mathbb{N}}$，其中 $\|A_j\|\le c$，对所有 j，我们还将 p-联合数值半径定义为

$$w_p(\mathbf{A})=\sup\left\{\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}|\,\mathrm{tr}(\rho A_j)|^p\right)^{1/p}:\ \rho\in\mathcal{B}_1(H)\wedge\mathrm{tr}(\rho)=1\wedge\rho\ge 0\right\},\ \textit{for every } p\in[1,+\infty). \tag{2.2}$$

显然，$w_p(\mathbf{A})$ 可能会因族A而异。

给定一个子空间 S of H，我们将考虑其密度算子集合

$$\mathcal{D}_S=\{Y\in\mathcal{B}_1(H):P_SY=Y\ge 0\ ,\mathrm{tr}(Y)=1\} \tag{2.3}$$

（注意，对于 $Y\in\mathcal{D}_S$，有 $P_SY=YP_S=P_SYP_S$）。如果 $\dim S<\infty$，则 $\mathcal{D}_S$ 的仿射包也是有限维的。

下面的结果是对 [9]中引理6.1的推广。

引理 1. 设 S 为 H 的子空间，且 $\mathcal{D}_S$ 如(2.3)中所示，则

$$\mathcal{D}_S = \{\rho \in \mathcal{B}_1(H) : \ \rho \geq 0, \ \mathrm{tr}(\rho) = \mathrm{tr}(P_S \rho P_S)\}.$$

证明。设 $Y \in \mathcal{B}_1(H)$ 满足 $P_S Y = Y \geq 0$。那么，$\mathrm{tr}(P_S Y P_S) = \mathrm{tr}(Y P_S) = \mathrm{tr}(Y) = 1$，这意味着 $Y \in \{\rho \in \mathcal{B}_1(H) : \ \rho \geq 0, \mathrm{tr}(\rho) = \mathrm{tr}(P_S \rho P_S)\}$。反向包含关系可用引理 6.1] 中的相同思路推出。□

现在，受 [9] 和 [11], 中所研究对象的有限维情形启发，我们定义

$$\begin{aligned} m_S &= \mathrm{Diag}(\mathcal{D}_S) \\ &= \{\mathrm{Diag}(Y) : Y \in \mathcal{D}_S\} \ \subset \left\{ x \in \ell^1(\mathbb{R}) : x_j \geq 0 \text{ and } \sum_{j=1}^{\infty} x_j = 1 \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中，$\mathrm{Diag}(K)$ 表示一个对角紧算子，其对角线与 $K \in \mathcal{K}(H)$ 相同，这里是相对于 H 的标准（固定）基 $E = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 而言。我们还将 $\mathrm{Diag}(\mathcal{D}_S)$ 中的对角矩阵与 $\mathbb{R}(\ell^1)$ 中相应的序列视为等同。

注 1. 在无限维情形下，集合 m_S 曾用于证明 [7, 定理7], 中的 (3) $\Rightarrow$ (2)，其中 S 是 $\|A\|$ 或 $-\|A\|$ 对应的特征空间，且 A 为极小自伴紧算子（即$\|A\| = \mathrm{dist}(A,$ 对角映射 $(\mathcal{K}(H)))$。此时 $\dim(\mathrm{Ran}(P_S)) < \infty$，因此每个 $Y \in \mathcal{D}_S$ 都可视为有限固定维空间之间的自伴算子。于是，限制在这些空间上的所有范数都等价，并且对于任意范数， $m_S =$Diag$(\mathcal{D}_S)$都是紧凸集。

此外，如果 $\{-\|A\|, \|A\|\} \subset \sigma(A)$，与 $\|A\|$ 和 $-\|A\|$ 的特征子空间相关的矩对应的集合交集非空，则意味着这样的紧厄米算子 A 是极小的（见 [7,推论 10] 和命题 1）。

对于 $E = \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$，我们将 $e_j \otimes e_j = E_j$记为投影到由 $e_j \in E$生成的子空间上的秩一正交投影，其中所有 $j \in \mathbb{N}$均成立。我们将特别关注 $\mathbf{A} = \mathbf{As}, \ \mathbf{E} = \{P_S E_j P_S\}_{j=1}^{\infty}$ 且 S 为 H的有限维子空间时， $W(\mathbf{A})$ 的研究。

$$W(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}) = \left\{ \{\mathrm{tr}(P_S E_j P_S \rho)\}_{j=1}^{\infty} : \rho \in \mathcal{B}_1(H), \ \rho \geq 0 \text{ and } \mathrm{tr}(\rho) = 1 \right\}. \tag{2.5}$$

注意，在此情形下

$$\mathrm{tr}(P_S E_j P_S \rho) = \mathrm{tr}(E_j P_S \rho P_S E_j) = \langle P_S \rho P_S e_j, e_j \rangle = (P_S \rho P_S)_{jj}$$

是 j, j 对角线 E-坐标是正半定迹类算子 $P_S \rho P_S$ 的坐标。因此 re

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}(E_j P_S \rho P_S) = \sum_{j=1}^{\infty} (P_S \rho P_S)_{j,j} = \mathrm{tr}(P_S \rho P_S) \leq \|P_S\| \, \mathrm{tr}(\rho) = 1 \tag{2.6}$$

这就证明，在此情形下，序列 $\{$迹 $(P_S E_j P_S \rho)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}$，因此

$$W(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}) \subset \ell^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}. \tag{2.7}$$

注 2. 对于族$\mathbf{As},\mathbf{E}$,

(1) p-联合数值半径

$$w_p(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}) = \sup \left\{ \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathrm{tr}(P_S E_j P_S \rho))^p \right)^{1/p} : \ \rho \in \mathcal{B}_1(H) \wedge \mathrm{tr}(\rho) = 1 \wedge \rho \geq 0 \right\}$$

对每个 $p \in [1, \infty$ 都是有限的）。这是（2.7）的推论，因为每个序列 $\{\mathrm{tr}(P_S E_j P_S \rho)\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$。

（2）此外，对每个 $p \in [1, \infty,\ \ w_p$ (As,E) ≤ 1，因为

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} (\mathrm{tr}(P_S E_j P_S \rho))^p &= \sum_{j\in\mathbb{N}} (P_S\rho P_S)^p_{jj} = \|Diag(P_S\rho P_S)\|_p^p \\ &\leq \|P_S\rho P_S\|_p^p \leq \|P_S\|^p \|\rho P_S\|_p^p \leq \|P_S\|^{2p}\|\rho\|_p^p \leq \|\rho\|_1^p = 1,\end{aligned}$$

其中，第一个不等式源于 Schatten p-范数的压缩性质（[13]中的定理 1.19）。

（3）由（2.6）和引理 1 可推出

$$w_1\left(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}\right) = 1.$$

注意，对于满足 dim(S) $= \infty$ 的 S，（2.6）、（2.7）和注 2 均成立。

下一个结果是对 [9] 中引理 6.2 和定理 6.3 所研究的有限维情形的推广。

命题 1. 以下给出了 m_S 的等价定义，即与 H 的基 $E = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相关的、维数为 dim $S = r$ 的 S 的矩 $r < \infty$。注意，对角算子与序列之间作了对应识别。

a) m_S =对角映射($\mathcal{D}_S$)。 b) m_S = 凸包 $\{|v|^2 \colon v \in S$ 和 $\|v\| = 1\}$ .c) $m_S = \bigcup_{\{s^i\}_{i=1}^r \, o.n. \ set \ in \ S}$ 凸包$\{|s^i|^2\}_{i=1}^r$.d) $m_S = \{$(tr(E_1Y) . . . , tr(E_nY) . . .) $\in \ell^1(\mathbb{R}) \colon Y \in \mathcal{D}_S\}$. e) $m_S = W(P_SE_1P_S, \ldots, P_SE_nP_S, \ldots) \cap \{x \in \ell^1(\mathbb{R}) \colon x_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1\}$，其中 P_S 是到 S 的正交投影，而 W 是定义 1 中的联合数值域。

证明。陈述 a) 是定义 (2.4)。接下来我们将考察与 a)、b) 和 c) 中所述集合相关的一些包含关系，以证明这些条目中给出的等式。首先注意，如果 $s \in S$ with$\|s\| = 1$，那么 $Y = s \otimes s \in \mathcal{D}_S$，因为 tr($s \otimes s$) $= \sum_{i=1}^{\infty} |s_i|^2 = 1$, $s \otimes s \geq 0$ 且 P_S($s \otimes s$) $= s \otimes s$。因此，由于对角映射($s \otimes s$) $= |s|^2$ 且 m_S 是凸的，可得凸包 $\{|v|^2 \colon v \in S$ 且 $\|v\| = 1\} \subset m_S$ =对角映射($\mathcal{D}_S$)。
现在，若 $\{s^i\}_{i=1}^r$ 是 S 中的标准正交集，显然有

$$\mathrm{conv}\{|s^i|^2\}_{i=1}^r \subset \mathrm{conv}\left\{|v|^2 : v \in S \text{ and } \|v\| = 1\right\}.$$

这意味着 $\bigcup_{\{s^i\}_{i=1}^r \text{中的标准正交集 } S}$ conv$\{|s^i|^2\}_{i=1}^r \subset$ conv $\{|v|^2 \colon v \in S$ 和 $\|v\| = 1\}$.

现在取 $Y \in m_S$ = Diag($\mathcal{D}_S$)。存在 S 的标准正交基 $\{y_i\}_{i=1}^r$，使得 $Y = \sum_{i=1}^r \lambda_i (y_i \otimes y_i)$，其中 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$。于是 Diag($Y$) $= \sum_{i=1}^r \lambda_i$ Diag($y_i \otimes y_i$) $\simeq \sum_{i=1}^r \lambda_i |y_i|^2$，这是由标准正交集 $\{y_i\}_{i=1}^r \subset S$ 中的 $\{|y_i|^2\}_{i=1}^r$ 构成的凸组合。于是 Diag(Y) $\in \bigcup_{\{s^i\}_{i=1}^r \text{中的标准正交集 } S}$ conv$\{|s^i|^2\}_{i=1}^r$。这证明了前三项所描述的集合相同

（在某些情况下，将序列视为对角矩阵）。

现在证明命题 d)：任取 $x =$ 对角映射(Y) $\in m_S$ 满足 $Y \in \mathcal{D}_S$ 和 $Y_{j,j} =$ tr($E_jP_SYP_SE_j$) =tr(E_jYE_j) = tr(E_jY) 对每个 $j \in \mathbb{N}$都成立。

为了证明 e)，注意到利用 d)，每个 $x \in m_S$ 都可以写成 $x = \{$迹 $(E_jYE_j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{R})$，其中 $Y \in \mathcal{D}_S$。于是 $x \in W$ (As, E) 和

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}\left(E_jYE_j\right) = \mathrm{tr}(Y) = 1.$$

另一方面，取 $x \in W(\mathbf{As},\ \mathbf{E}) \cap \{x \in \ell^1(\mathbb{R})\colon\ x_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1\}$，则存在 $\rho_0 \in \mathcal{B}_1(H)$，$\rho_0 \geq 0$，迹$(\rho_0) = 1$ 使得

$$x = \{\mathrm{tr}\,(P_S E_j P_S \rho_0)\}_{j=1}^{\infty},\ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}\,(P_S E_j P_S \rho_0) = 1.$$

因此，$Y = P_S \rho_0 P_S$ 满足 $Y \geq 0$ 且

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}\,(P_S E_j P_S \rho_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}\,(E_j P_S \rho_0 P_S E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (P_S \rho_0 P_S)_{jj} = \sum_{j=1}^{\infty} Y_{jj} = \sum_{j=1}^{\infty} (P_S Y P_S)_{jj}\,.$$

由引理 1 可得，$Y \in \mathcal{D}_S$ 和 $x \in m_S$。 □

在相同的背景下，我们可以定义经典联合数值域

定义 3. 考虑由自伴厄米紧算子A_j 组成的序列 $\mathbf{A} = \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}(H)^{\mathbb{N}}$，其范数有界（$\|A_j\| \leq c$，对所有 j均成立）。我们将 A 的经典联合数值域定义为

$$W_{class}(\mathbf{A}) = \left\{\{\langle A_j x, x\rangle\}_{j=1}^{\infty} : x \in H,\ \|x\| = 1\right\}. \tag{2.8}$$

注意，$|\langle A_j x、\ x\rangle| \leq \|A_j x\| \leq \|A_j\| \leq c$，这意味着 $\{\langle A_j x, x\rangle\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}(\mathbb{R})$，因此$W_{class}(\mathbf{A}) \subset \ell^{\infty}(\mathbb{R})$。

在 $\mathbf{A} = \mathbf{As},\ \mathbf{E}$ 的特殊情形下，$W_{class}(\mathbf{A}_{S,\ E}) \subset \ell^1(\mathbb{R})$。这是因为 $\rho_x = x \otimes x \in \mathcal{D}$，且 $\mathbf{tr}(P_S E_i P_S \rho_x) = |(P_S x)_{i,\ i}|^2 = |\langle P_S x,\ e_j\rangle|^2$，这意味着 $\sum_{i=1}^{\infty} |(P_S x)_{i,\ i}|^2 = \|P_S x\|^2 \leq 1$，并且

$$W_{class}(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}) = \left\{\{|\langle P_S x, e_j\rangle|^2\}_{j=1}^{\infty} : x \in H,\ \|x\| = 1\right\} = \left\{|P_S x|^2 : x \in H,\ \|x\| = 1\right\}.$$

定义 4. 作为推广，对于所有 j，我们将具有 $\|A_j\| \leq c$ 的 $\mathbf{A} = \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}(H)^{\mathbb{N}}$ 的经典p-联合数值半径定义为

$$w_{class,p}(\mathbf{A}) = \sup\left\{\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle A_j x, x\rangle|^p\right)^{1/p} : x \in H, \|x\| = 1\right\},\ for\ 1 \leq p \leq \infty \tag{2.9}$$

此外，正如 $w_p(\mathbf{A})$ 的情形一样，$w_{class,\ p}(\mathbf{A})$ 可能是 ∞，并且取决于族A。事实上，注意到，如果我们考虑一个固定的酉 $x \in H$并定义 $\bar{x}$ 使得 $\bar{x}_j = \langle A_j x, x\rangle$（对 $j \in \mathbb{N}$），那么

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle A_j x, x\rangle|^p\right)^{1/p} \leq \|\bar{x}\|_1,$$

对每个 $p \geq 1$，由于 $\bar{x} \in W_{class}(\mathbf{As},\mathbf{E}) \subset \ell^1(\mathbb{R})$。因此，对每个$p \geq 1$，$w_{class,p}(\mathbf{As},\mathbf{E})$ 是有限数。

注 3. 请注意，即使族A是一个基数大于一的有限族，W_{class} 也不是凸集（文献中有若干例子，例如 [5], [10] 和 [12]）。

命题 2. 若 $\dim S < \infty$ 且 $W_{class}(\mathbf{As},\mathbf{E})$ 是凸的，则

$$W_{class}(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}) = W(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}})\,. \tag{2.10}$$

证明. 回顾一下，$W_{\mathrm{class}}(\mathbf{As},\mathbf{E}) = \{(\mathbf{tr}(P_S E_1 P_S(x \otimes x) \ldots, P_S E_n P_S(x \otimes x) \ldots)\colon\ x \in H, \|x\| = 1\} = \{(\langle P_S E_1 P_S x, x\rangle, \ldots, \langle P_S E_n P_S x, x\rangle, \ldots)\colon\ x \in H, \|x\| = 1\}$。于是

$|s|^2 = (\langle P_S E_1 P_S s, s\rangle, \ldots, \langle P_S E_n P_S s, s\rangle, \ldots)$ 有 $\{|s|^2\colon\ s \in S, \|s\| = 1\} \subset W_{\mathrm{class}}(\mathbf{As},\mathbf{E})$。现在，命题 1 的 b) 项以及假设的 $W_{\mathrm{class}}(\mathbf{As},\mathbf{E})$ 的凸性推出

$$m_S = \mathrm{conv}\{|s|^2 : s \in S, \|s\| = 1\} \subset W_{\mathrm{class}}(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}})$$

用于证明 (2.12) 的相同论证表明 $(0,\dots,0,\dots) \in W_{\text{class}}(\mathbf{As},\mathbf{E})$，因此 $W_{\text{class}}(\mathbf{As},\mathbf{E})$ 的凸性推出

$$\{t\,x : 0 \le t \le 1 \text{ and } x \in m_S\} \subset W_{\text{class}}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}\right)$$

推论 3 以及包含关系 $W_{\text{class}}(\mathbf{As},\ \mathbf{E}) \subset W(\mathbf{As},\ \mathbf{E})$ 恒成立这一事实，证明了等式 (2.10)。□

命题 3. 沿用式 (2.3) 中的记号 $\mathcal{D}_S$、定义 1 中的式 (2.1) W 以及式 (2.5) 中的 $(\mathbf{As},\ \mathbf{E})$ W，有如下等式

$$W\left(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}\right) = \{t\,x : 0 \le t \le 1 \ and\ x \in m_S\} = \bigcup_{t\in[0,1]} \{t\,(\operatorname{tr}(\mu P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(\mu P_S E_2 P_S), ...) : \mu \in \mathcal{D}_S\} \tag{2.11}$$

因此

$$cone\left(W\left(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}\right)\right) = cone\left(m_S\right).$$

证明。式 (2.11) 中的第一个等式可以用与 [9, 命题 6.4] 相似的方法证明，方法见同一篇论文第 7 节的开头。

考虑 $\rho_x = x \otimes x$，其中 $x \in S^{\perp}$、$\|x\| = 1$。则

$$(\operatorname{tr}(P_S E_1 P_S \rho_x), \dots, \operatorname{tr}(P_S E_n P_S \rho_x), \dots) = (0,\dots,0,\dots) \in W\left(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}\right). \tag{2.12}$$

接下来注意到命题 1 的 e) 项蕴含 $m_S \subset W(\mathbf{As},\ \mathbf{E})$，于是由 (2.12) 和 $W(\mathbf{As},\ \mathbf{E})$ 的凸性可得 $\{t\,x :\ 0 \le t \le 1$ 且 $x \in m_S\} \subset W(\mathbf{As},\ \mathbf{E})$。
现在考虑一个非零的 $w = (\operatorname{tr}(P_S E_1 P_S \rho)\dots, \operatorname{tr}(P_S E_n P_S \rho)\dots) \in W(\mathbf{As},\ \mathbf{E})$。那么 $w = t\,x$ 对于 $t = \operatorname{tr}(P_S \rho P_S) \le 1$（见公式 (2.6)），并且 $x = {}^{1}\!/_{\operatorname{tr}(P_S\rho P_S)} w \in m_S$，~~因为~~ $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1$（命题 1 的 e) 项）。因此 $w = t\,x \in \{t\,x :\ 0 \le t \le 1$ 且 $x \in m_S\}$，并且包含关系

$$W(\mathbf{A}_{\mathbf{S},\mathbf{E}}) \subset \{t\,x : 0 \le t \le 1 \text{ and } x \in m_S\}$$

成立。

对于 (2.11) 中的第二个等式，考虑 $\rho \in \mathcal{D}$ 以及 $(\operatorname{tr}(\rho P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(\rho P_S E_2 P_S)\ ...) \in W(\mathbf{As},\ \mathbf{E})$。我们分两种情况讨论：

- 如果 $\operatorname{tr}(P_S \rho P_S) \neq 0$，那么存在 $t \in (0,1]$ (例如 $t = \operatorname{tr}(P_S \rho P_S)$) 和 $\mu \in \mathcal{D}_S$，使得 $P_S \rho P_S = t\mu$ 并且

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{tr}(\rho P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(\rho P_S E_2 P_S), ...) = (\operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_2 P_S), ...) \\
&= \operatorname{tr}(P_S \rho P_S)\left(\frac{1}{\operatorname{tr}(P_S \rho P_S)} \operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_1 P_S), \frac{1}{\operatorname{tr}(P_S \rho P_S)} \operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_2 P_S), ...\right) \\
&= t\left(\frac{1}{\operatorname{tr}(P_S \rho P_S)} \operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_1 P_S), \frac{1}{\operatorname{tr}(P_S \rho P_S)} \operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_2 P_S), ...\right) \\
&= t\left(\operatorname{tr}(\mu P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(\mu P_S E_2 P_S), ...\right),
\end{aligned}$$

  其中 $t \in (0,1]$。
- 如果 $\operatorname{tr}(P_S \rho P_S) = 0$，并且由于 $P_S \rho P_S \ge 0$，那么 $P_S \rho P_S = 0$。因此，

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tr}(\rho P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(\rho P_S E_2 P_S), ...) &= (\operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(P_S \rho P_S E_2 P_S), ...) \\
&= (0, 0, ...) \\
&= 0\left(\operatorname{tr}(\mu P_S E_1 P_S), \operatorname{tr}(\mu P_S E_2 P_S), ...\right),
\end{aligned}$$

□

备注 4. 类似于命题 3，可以证明，对于任意族$\mathbf{As,T}=\{P_ST_nP_S\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\{T_n\}\subset\mathcal{K}(H)^h$,

$$W(\mathbf{A_{S,T}})=\bigcup_{t\in[0,1]}\{t\,(\mathrm{tr}(\mu P_ST_1P_S),\mathrm{tr}(\mu P_ST_2P_S),...):\mu\in\mathcal{D}_S\}$$

成立。

我们得到两个矩之间豪斯多夫距离的以下上界，其中配备了$\|z\|_\infty=\sup_{i\in\mathbb{N}}|z_i|$，对 $z\in\ell^1(\mathbb{C})$。

引理 2. 设 S和 V是 H的子空间。那么，$\mathrm{dist}_H(m_S,m_V)\leq 2$. 此外，若 $S\perp V$，则

$$dist_H(m_S,m_V)\leq 1.$$

证明. 设 S,T是 H的子空间， $x\in m_S$且 $y\in m_V$。那么， $x=\{\mathrm{tr}(E_iY)\}_{i\in\mathbb{N}}$其中 $Y\in\mathcal{D}_S$,$y=\{\mathrm{tr}(E_iZ)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 其中 $Z\in\mathcal{D}_V$ 且

$$\|x-y\|_\infty=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\,\mathrm{tr}(E_iY)-\mathrm{tr}(E_iZ)|=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\,\mathrm{tr}(E_iYE_i)-\mathrm{tr}(E_iZE_i)|=\sup_{i\in\mathbb{N}}|Y_{i,i}-Z_{i,i}|\leq 2,$$

因为 $\|Y\|_1=\|Z\|_1=1$。

在 $S\perp V$ 的情形下，注意到 Y、$Z\geq 0$ 和 $YZ=YP_SP_VZ=0$（支撑不相交）。因此，根据 [6] 中的命题 3

$$\|Y-tZ\|=\|Y+tZ\|=\max\{\|Y\|;\|Z\|\}\leq 1,\forall t\in\mathbb{C}.$$

因此,

$$\mathrm{dist}_H(m_S,m_V)=\max\left\{\sup_{x\in m_S}d(x,m_V);\ \sup_{y\in m_V}d(y,m_S)\right\}\leq 1$$

若 $S\perp V$（对任意 S 和 T，$\mathrm{dist}_H(m_S,m_V)\leq 2$）。 □

以下内容受到 [9] 中注 5 的启发。设 S 是 H 的一个有限维子空间。由下式定义的 m_S 中的元素

$$c(m_S)=\frac{1}{\dim S}\sum_{i=1}^{\dim S}|s^i|^2=\frac{1}{\dim S}\mathrm{Diag}(P_S) \tag{2.13}$$

对于 S 的任意标准正交基 $\{s^1,s^2,\ldots,s^r\}$，在矩集 m_S 中都满足一些有趣的对称性质。

令 aff (X) 表示 $X\subset B(H)$ 的仿射包。由于 $\mathcal{D}_S$ 可被刻画为 $M_n^h(\mathbb{C})$ 的子集，因此 $\dim\left(\mathrm{aff}\,(\mathcal{D}_S)\right)<\infty$ 且 $\dim\left(\mathrm{aff}\,(\text{对角映射}\,(\mathcal{D}_S))\right)<\infty$。于是，通过应用哈恩 - 巴拿赫超平面分离定理，以下结果可由其在 [9, 中有限维对应结果命题 3.4] 的证明几乎相同的证明得出。

命题4. 设 $S\subset H$是维数为$S\geq 2$的子空间。则 $\dim\left(\mathrm{aff}\,(\mathcal{D}_S)\right)<\infty$, $\dim\,(\mathrm{aff}(m_S))<\infty$and $c(m_S,E)$ 是 m_S 相对于 m_S的仿射包的内点。

证明。aff $(\mathcal{D}_S)$ 和 aff(m_S) 的维数有限性已在上一段讨论。现在假设 $c=c(m_S,E)$ 不是 aff(m_S) 的仿射包中的内点，而 aff(m_S) 是 m_S with $\dim(\mathrm{aff}(m_S))=d$ 的仿射包。那么， m_S 的紧性和凸性（见注 1）意味着 c 属于其边界。现在考虑实子空间 T，$\dim\,T=d$ 的 aff$(m_S)=c+T\subset\ell^1(\mathbb{R})$。在这些假设下，存在泛函 $f:\ell^1(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$，使得 $f(c)=k$ 且 $f(x)\leq k,\forall x\in m_S$。假设存在 $v\in S$, $\|v\|=1$，使得 $|v|^2\in m_S$ 且 $f(|v|^2)<k$。现在将向量

$v = s^1$ 扩充为 S 的标准正交基 $\{s^i\}_{i=1}^r$（其中 $r = \dim S$）。由 (2.13) 中 c 的定义可知 $c = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r |s^i|^2$，因此，利用 f 的线性性

$$\begin{aligned} k = f(c) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} f\left(|s^i|^2\right) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; k = f(c) = \frac{1}{r} f\left(|s^1|^2\right) + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r} f\left(|s^i|^2\right) < \frac{k}{r} + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r} f\left(|s^i|^2\right) \leq \frac{k}{r} + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r} k = k, \end{aligned} \tag{2.14}$$

这就产生了矛盾。利用命题 1 b) 中对 m_S 的刻画可知，对于每个 $x \in S$，必有 $f(|x|^2) = k$，其中 $\|x\| = 1$。但这意味着 aff(m_S) 的维数至少比 d少 1。于是， c 不可能是 m_S 在 aff(m_S) 中的边界点。□

注 5. 注意， m_S 的实仿射包为 aff(m_S) = 对角映射$\left(\mathcal{B}_S^h\right)$，其中 $\mathcal{B}_S^h = \{X \in B(H) : P_S X = X P_S$ 且 $X^* = X\}$。

命题 5. 设 S 是 H 的一个非平凡有限维子空间，且 $\dim S = r$； E 是 H 的一个固定基，并且 $c(m_S)$ 按照 (2.13) 定义。那么， $c(m_S)$ 满足以下性质。

(1) $c(m_S) \in m_S$. (2) $c(m_S)$ 与由任意一个 S 的标准正交基 $\{w^1, w^2, \ldots, w^r\}$ 所生成的单纯形 $\{|w^1|^2, |w^2|^2, \ldots, |w^r|^2\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\geq 0}$ 的重心或质心重合。(3) 设 V 是 H 的另一个子空间，$\dim V = k$，且 $S \perp V$。那么，

$$c\left(m_{S\perp V}\right) = \frac{1}{r+k}(r\, c(m_S) + k\, c(m_V)). \tag{2.15}$$

这可以推广到任意多个两两正交子空间。

(4) 给定一个子空间 $D \subset S$，其维数 $\dim D = d < \dim S = r$，则 $c(m_{S\ominus D}) = c(m_{S\cap D^\perp}) = \frac{1}{r-d}(r\, c(m_S) - d\, c(m_D))$。(5) 设 S 和 V 是 $\mathbb{C}^n$ 的两个子空间，其维数分别为 r 和 k，且 $D = S \cap V$ 的维数为 d，并满足 $\left(S \cap D^\perp\right) \perp \left(V \cap D^\perp\right)$。则 $c(m_{S+V}) = \frac{1}{r+k-d}(r\, c(m_S) + k\, c(m_V) - d\, c(m_D))$。

证明沿用了 [9, 命题 3.5]中相应证明的相同思路。

注 6. 注意，方程 (2.15) 与用于计算不相交集合 m的几何质心或重心的方程相似，其中 A_j借助 $c(\cup_{j=1}^m A_j) = \frac{\sum_{j=1}^m c(A_j)\mu(A_j)}{\sum_{j=1}^m \mu(A_j)}$计算，$\mu$ 为相应测度。

如同 [11] 在有限维情形中所做的那样，我们类似地定义 H的一对子空间构成支撑的概念（参见 [11, 定理 3]，其中给出支撑的若干等价定义）。

定义 5. 设 S 和 T 是 H 的子空间，且 $\dim S = p$ 和 $\dim T = q$。如果 $m_S \cap m_T \neq \emptyset$，则称这一对（$S$， T）构成一个支撑；等价地，若存在标准正交集$\{v^i\}_{i=1}^p \subset S$和$\{w^j\}_{j=1}^q \subset T$，使得

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i |v^i|^2 = \sum_{j=1}^{q} \beta_j |w^j|^2, \tag{2.16}$$

其中 α_i、 $\beta_j \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^p \alpha_i = \sum_{i=1}^p \beta_j = 1$。

请注意，如果存在满足（2.16）的有限组正交集 $\{v^i\}_{i=1}^p \subset S$ 和 $\{w^j\}_{j=1}^q \subset T$，那么定义 5 也可以针对 H 的无限维子空间 S 和 T 来表述。

注7。根据定义和 [7, 推论 10], , 给定具有 $\pm\|C\| \in \sigma(C)$ 的 $C \in \mathcal{K}(H)^h$，则 C 是极小算子, 当且仅当有序对（S_+, S_-）是一个支撑，其中 S_+ 和 S_- 是 $\pm\|C\|$ 对应的特征空间。

3. Principal vectors and curves of extremal points in m_S

本节将定义4.2中给出的主（标准）向量的定义加以推广，以获得矩集 m_S中极值点曲线的描述。我们还纳入了对 [9]第4节和第5节所含结果的自然推广。

3.1. 主标准向量。

定义6. 若存在 $x \in S$ 使得对每个 $j \in \mathbb{N}$都有 $\langle x、\ e_j\rangle \neq 0$，则称子空间 $S \subset H$ 是关于基 $E = \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的一般子空间。此定义等价于以下任一陈述

对于 $j \in \mathbb{N}$, • S 不包含在张成空间$\{e_j\}^{\perp}$ 中,

•$(P_S(e_j))_j = \langle P_S e_j,\ e_j\rangle = \langle P_S e_j,\ P_S e_j\rangle = \|P_S e_j\|^2 \neq 0$对所有 $j \in \mathbb{N}$。

注意，在此定义中， S 可以是无限维的。还需注意，如果 S 不是一般的，我们可以转而在另一个希尔伯特空间 $H \subset H$ 中进行研究，使得 S 可以等距地嵌入其中，并且 S 在 H中是一般的。因此，在下文中，我们假设所讨论的是 H的 S 一般子空间。

定义7. 给定 H的一个一般子空间 S，记

$$v^j = \frac{P_S e_j}{\|P_S e_j\|} \tag{3.1}$$

与标准基 E 相关的唯一主（酉）向量，满足 $(v^j)_j = v_j^j = \langle v^j、\ e_j\rangle = \|P_S e_j\| > 0$，并使 S 与张成空间$\{e_j\}$之间的夹角最小，即

$$\left\langle v^j, e_j\right\rangle = \max_{s\in S, \|s\|=1} |\left\langle s, e_j\right\rangle| = \|P_S e_j\| \leq 1$$

唯一性可通过如下方式证明：若存在 $w \in S$ 使得 $\|w\| = 1$ 且 $\langle w、\ e_j\rangle = \langle v^j、\ e_j\rangle$，那么

$$\|v^j - w\|^2 = \|v^j\|^2 + \|w\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\left\langle v^j, w\right\rangle\right) = 0,$$

因为 $\langle v^j, w\rangle = \frac{\langle e_j,\ w\rangle}{\|P_S e_j\|} = 1$。

引理 3. 正交投影 P_S 可以用矩阵形式表示，其相对于基 E 的无限关联矩阵具有以下性质:

(1) $(P_S)_{ij} = \langle P_S e_i, e_j\rangle = \|P_S e_i\| v_j^i$, 对每个 $i, j \in \mathbb{N}$ 均成立。(2) $(P_S)_{jj} = \langle P_S e_j, e_j\rangle = \|P_S e_j\|^2 = (v_j^j)^2$。

(3) 由于 $P_S = P_S^*$, $\|P_S e_i\| v_j^i = \|P_S e_j\| \overline{v_i^j}$ 且

$$\frac{\overline{v_i^j}}{v_j^i} = \begin{cases} \dfrac{\|P_S e_i\|}{\|P_S e_j\|} \neq 0. & if\ \ v_i^j, v_j^i \neq 0 \\ 0 & if\ \ v_i^j = v_j^i = 0 \end{cases}$$

(4) 对每个 $i, j \in \mathbb{N}$, $v_i^j = \langle v^j, e_i\rangle = \langle v^j, P_S e_i\rangle = \|P_S e_i\| \langle v^j, v^i\rangle$。因此，$v_j^j > 0$ 且

$$0 = v_i^j \Leftrightarrow v^i \perp v^j.$$

命题 6. 设 $\{v^j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 (3.1) 中定义的主向量。则以下结论成立。

(1) 给定 $w \in S$，且满足 $\|w\| = 1$。则对于每个 j,

$$w_j = \|P_S e_j\| \left\langle w, v^j \right\rangle$$

以及 $|w_j| \leq v_j^j = |v_j^j|$。

(2) $v_j^j = |w_j|$ 当且仅当 $w = e^{i \arg(w_j)} v^j$. (3) 特别地，$v_j^j = |v_j^k|$ 当且仅当 $v^k = e^{i \arg(v_j^k)} v^j$。这也等价于对每个 $i \in \mathbb{N}$，$|v_i^j| = |v_i^k|$。(4) 因此，$\{v^j, v^k\}$ 线性无关当且仅当

$$v_j^j \neq |v_j^k| \Leftrightarrow v_k^k \neq |v_k^j|$$

证明。令 $w \in S$ 满足 $\|w\| = 1$，则存在 $v \in H$ 使得 $w = P_S v$，并由引理 3

$$w_j = \langle w, e_j \rangle = \langle P_S v, e_j \rangle = \langle w, P_S e_j \rangle = \|P_S e_j\| \left\langle w, v^j \right\rangle.$$

另一方面，注意到 $v_j^j = |w_j|$ 可推出

$$v_j^j = \|P_S e_j\| \, |\left\langle w, v^j \right\rangle|,$$

或者等价地

$$\|w\|\|v\| = 1 = \left\langle v^j, v^j \right\rangle = |\left\langle w, v^j \right\rangle|.$$

当且仅当 w 和 v^j 成比例（即 $w = \lambda v^j$满足 $|\lambda| = 1$）时，柯西–施瓦茨不等式取等号。

将 $w = v^k$ 代入第 (2) 项即可证明第 (3) 项。 □

使用命题 4.4 在 [9]中的相同论证，可由命题 6 推出以下结果。

命题 7. 设 S是 H的一个一般子空间。那么，$|v^j|^2 = (|v_1^j|^2, |v_2^j|^2, \ldots, |v_n^j|^2, \ldots)$ 是 m_S中的一个极值点。此外，若 $|v^j|^2$是 $|y|^2$和 $|z|^2$的一个凸组合，且 $y, z \in S$，则 y和 z 必定与 v^j成比例。

3.2. m_S中的极值点曲线。

定义 8. 设 S 是 H 的一个一般子空间，且 v^j、v^k 是 S的两个线性无关的主标准向量。我们定义曲线 $v^{j \to k}$： $[0, 2\pi] \to S$

$$v^{j \to k}(t) = \cos(t) v^j + \sin(t) e^{i \arg(v_k^j)} \frac{(v^k - \left\langle v^k, v^j \right\rangle v^j)}{\|v^k - \left\langle v^k, v^j \right\rangle v^j\|}, \tag{3.2}$$

接下来，我们类比 [9]，建立这些曲线的一些性质。利用标准方法即可证明这些性质。

命题 8. 设 S 是 H 的一个一般子空间，其中 $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是与标准基 E 和 S相关的主酉向量的集合。以下性质成立：

(1) 向量 v^j和 $(v^k - \left\langle v^k, v^j \right\rangle v^j) \|v^k - \langle v^k, v^j \rangle v^j\|$ 是酉且正交的。那么，对于每个t, $v^{j \to k}(0) = v^j$，$\|v^{j \to k}(t)\| = 1$，并且

$$\left\langle v^{j \to k}(t), e^{i \arg\left(v_k^j\right)} v^k \right\rangle \geq 0, \ \textit{for every } t \in [0, \pi/2].$$

(2) 根据引理 3，$v^{j \to k}(t)$的 j 和 k 坐标为

$$v_j^{j \to k}(t) = \cos(t) v_j^j \quad \textit{and} \quad v_k^{j \to k}(t) = \cos(t) v_k^j + \sin(t) e^{i \arg\left(v_k^j\right)} \sqrt{(v_k^k)^2 - |v_k^j|^2}, \tag{3.3}$$

分别。

(3) 限制 $v^{j\to k}(t):\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to \mathrm{Im}\,(v^{j\to k})$ 是双射。

(4) *If* $\beta^{j\to k}(t)=\cos(t)\dfrac{e_j}{\|P_S e_j\|}+\sin(t)e^{i\arg(v_k^j)}\dfrac{\left(\dfrac{e_k}{\|P_S e_k\|}-\langle v^k,v^j\rangle\dfrac{e_j}{\|P_S e_j\|}\right)}{\|v^k-\langle v^k,v^j\rangle v^j\|}$, *then*

$$v^{j\to k}(t)=P_S(\beta^{j\to k}(t)).$$

(5) 若 $e^{j\to k}(t)=\dfrac{\beta^{j\to k}(t)}{\|\beta^{j\to k}(t)\|}$,
则

$$\left\langle v^{j\to k}(t),\ e^{j\to k}(t)\right\rangle=\max_{s\in S,\|s\|=1}|\left\langle s,e^{j\to k}(t)\right\rangle|=\left\|P_S(e^{j\to k}(t))\right\|$$

以及 $v^{j\to k}(t)=\dfrac{e^{j\to k}(t)}{\|e^{j\to k}(t)\|}$.

(6) 如果 $w\in S$ 满足 $\|w\|=1$,

$$\left|\left\langle v^{j\to k}(t),e^{j\to k}(t)\right\rangle\right|=\left\langle v^{j\to k}(t),e^{j\to k}(t)\right\rangle\geq|\left\langle w,e^{j\to k}(t)\right\rangle|,$$

对所有 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。此外,

$$\left\langle v^{j\to k}(t),e^{j\to k}(t)\right\rangle=|\left\langle w,e^{j\to k}(t)\right\rangle|\Leftrightarrow w=e^{i\arg\left(\left\langle w,e^{j\to k}(t)\right\rangle\right)}v^{j\to k}(t). \tag{3.4}$$

(7) 特别地,

$$\left\langle v^{j\to k}(t),e^{j\to k}(t)\right\rangle=|\left\langle v^{j\to k}(t_0),e^{j\to k}(t)\right\rangle|,\ \textit{for}\ t_0\in[0,\pi/2]$$

$$\Leftrightarrow|\left\langle v^{j\to k}(t),e^{j\to k}(t)\right\rangle|=|\left\langle v^{j\to k}(t_0),e^{j\to k}(u)\right\rangle|,\ \forall u\in[0,\pi/2]\,.$$

(8) 因此，集合 $\{v^{j\to k}(t)\ v^{j\to k}(s)\}$ 线性无关，当且仅当

$$\left\langle v^{j\to k}(t),e^{j\to k}(t)\right\rangle\neq|\left\langle v^{j\to k}(s),e^{j\to k}(t)\right\rangle|$$

定理 1. 若 $v^{j\to k}(t)$ 是 (3.2) 中定义的曲线，且满足 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，并且 $x\in S$ 满足 $\|x\|=1$，则存在唯一的 $t_x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得

$$|x_j|=|v_j^{j\to k}(t_x)|\quad and\quad |x_k|\leq|v_k^{j\to k}(t_x)|. \tag{3.5}$$

此外，若

$$w^{jk}=e^{i\arg(v_k^j)}\frac{(v^k-\langle v^k,v^j\rangle v^j)}{\|v^k-\langle v^k,v^j\rangle v^j\|} \tag{3.6}$$

且 $x=av^j+bw^{jk}+cy$ 满足 $y\in S$，并且 y 与 v^j 和 w^{jk}正交，则 $t_x=\arccos(|a|)$。

证明。 证明与 [9, 中给出的有限维情形定理 5.5] 类似。 . □

定理 2. 设 $S\subset H$ 是一般子空间， $\{v^j,v^k\}$ 是两个线性无关的主标准向量， m_S 是命题 1 中的 S 的矩，并且 $\gamma_{j,\ k}:\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to m_S$ 是由下式定义的曲线

$$\gamma_{j,k}(t)=\left|v^{j\to k}(t)\right|^2=\left(|v_1^{j\to k}(t)|^2,|v_2^{j\to k}(t)|^2,...\right) \tag{3.7}$$

其中 $v^{j\to k}(t)$ 如 (3.2) 所示。于是,

(1) $\left(|v_j^{j\to k}(t)|,|v_k^{j\to k}(t)|\right)$ 是以原点为中心的 $\mathbb{R}^2$ 中的一个椭圆的一部分。(2) 如果 v^j 和 v^k 正交，那么 $\left(|v_j^{j\to k}(t)|^2,|v_k^{j\to k}(t)|^2\right)$ 参数化了一条线段，该线段位于 m_S 在由 e_j 和 e_k张成的平面上的投影的边界上。

(3) 如果 v^j 和 v^k 不正交，那么 $\left(|v_j^{j\to k}(t)|^2, |v_k^{j\to k}(t)|^2\right)$ 是集合$\{(x_j, x_k) : \ x \in m_S\}$和$\gamma_{j,k}(t)$ 对每个 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$都是 m_S的一个极值点。

证明。利用 (3.3) 中给出的 $v^{j\to k}(t)$ 的坐标，显然，数对 $\left(|v_j^{j\to k}(t)|, |v_k^{j\to k}(t)|\right)$ 对于 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 构成以 (0, 0) 为中心的椭圆的一部分。

另一方面，注意到

$$\left(|v_j^{j\to k}(t)|^2, |v_k^{j\to k}(t)|^2\right) = \cos^2(t)\left((v_j^j)^2, |v_k^j|^2\right) + \sin^2(t)\left(0, (v_k^k)^2 - |v_k^j|^2\right) + 2\sin(t)\cos(t)\left(0, |v_k^j|\sqrt{(v_k^k)^2 - |v_k^j|^2}\right). \tag{3.8}$$

注意 $\left(|v_j^{j\to k}(0)|^2, |v_k^{j\to k}(0)|^2\right) = \left((v_j^j)^2, |v_k^j|^2\right)$ 和 $\left(|v_j^{j\to k}\left(\frac{\pi}{2}\right)|^2, |v_k^{j\to k}\left(\frac{\pi}{2}\right)|^2\right) = \left(0, (v_k^k)^2 - |v_k^j|^2\right)$。因此，这条曲线有多种情形值得探究：

a) (3.8) 中的最后一项仅当 $t \in \{0, \pi/2\}$, $v_k^j = 0$ 或 $v_k^k = |v_k^j|$ 时才为 0。根据假设，$\{v^j, v^k\}$ 线性无关，因此这个最后条件不可能成立（参见命题 6 中的第 (2) 项）。于是，只有当 $v_k^j = 0$ 时，(3.8) 才是线段。在这种情况下，

$$0 = v_k^j = \left\langle v^j, e^k \right\rangle = \|P_S e_k\| \left\langle v^j, v^k \right\rangle,$$

也就是说 $v^j \perp v^k$。

b) 现在，v^j 和 v^k 不正交，当且仅当 $v_k^j \neq 0$。于是，(3.8) 所给出的曲线可视为映射 $f\colon [0, (v_j^j)^2] \to (0, +\infty)$ 的图像，该映射是凹函数。因此，利用 (3.5) 可以证明，$\left(|v_j^{j\to k}(t)|^2, |v_k^{j\to k}(t)|^2\right)$ 是集合 $\{(x_j, x_k) : \ x \in m_S\} \subset \mathbb{R}^2$ 中的一个极值点。利用这一事实并按照命题 6 中相同的步骤，可以证明，对于每个 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$，$\gamma_{j,\,k}(t)$ 都是 m_S 的极值点。□

注记 8. 如注 5 所示，若 $\dim(S) < \infty$，则 m_S 的仿射包是有限维的。尽管如此，定理 2 的 (3) 中提到的极值曲线 $\gamma_{j,k}$ 对无限多对 $j, k \in \mathbb{N}$ 仍可能不同。下面的结果将更准确地说明这一情况。

定理 3. 设 $S \subset H$ 是一般子空间，$\{v^j, v^k\}$ 是两个线性无关的主标准向量，且 $v^j \not\perp v^k$，并设 $\gamma_{j,k}\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to m_S$ 是按 (3.7) 定义的曲线。那么，若 $\gamma_{m,n}$ 是另一条具有 (3.7) 形式的曲线，且 $\{v^m, v^n\}$ 线性无关并满足 $\gamma_{j,k}(t_0) = \gamma_{m,n}(t_1)$，则

$$either \ \left(v^j = v^m \wedge v^k = v^n\right) \ or \ \left(v^j = v^n \wedge v^k = v^m\right).$$

证明. 证明沿用定理 5.6] 中所用的类似技巧，以证明点 $\gamma_{j,k}(t_0)$ 是极值点。更确切地说，若假设 $\gamma_{j,k}(t_0) = \gamma_{m,n}(t_1)$，则可以证明 $\gamma_{j,k}(t_0) = |v^m|^2 = |v^n|^2$ 成立。然后利用命题 6 的 (3)，这与 v^m 和 v^n 线性无关的假设矛盾。□

推论 1. 设 $S \subset H$ 为一般子空间，$\{v^j, v^k\}$ 和 $\{v^m, v^n\}$ 为两对线性无关的主标准向量，且满足 $v^j \not\perp v^k$。那么 $\gamma_{j,k}$ 与 $\gamma_{m,n}$ 互不相交。

4. The moment m_S and the space of Hermitian trace zero 维 $S \times$ 维 S matrices

本节将证明，子代数 $\mathcal{B}_S = P_S B(H) P_S$ of $\mathcal{K}(H)$ 与 $r \times r$ 复矩阵空间等距同构。

设 $\{s^j\}_{j=1}^r$ 是 S 的标准正交基。考虑 $\mathbb{R}^r$ 中由 $R=\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0)\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$ 给出的标准基，并像往常一样将这些向量记为 $e_1,e_2,\ldots,e_r$。利用这个预先选定的基，对于所有 $1\le i,j\le r$，我们将 $e_i\otimes e_j$ 记作由下式定义的秩一矩阵 $r\times r$

$$e_i\otimes e_j=e_i\cdot(e_j)^t,$$

其中 e_k 表示 R 的 k^{th} 元素，而 $(e_k)^t$ 表示其转置。

我们定义以下集合

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r^{h,0}&=\{M\in M_r(\mathbb{C}):\ M=M^*,\operatorname{tr}(M)=0\}\\ \mathcal{V}_S^{h,0}&=\{A\in\mathcal{K}(H)^h:\ P_SA=A,\operatorname{tr}(A)=0\}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

在上下文明确时，我们将它们简记为 $\mathcal{M}_r$ 和 $\mathcal{V}_S$。显然，$\mathcal{M}_r$ 和 $\mathcal{V}_S$ 分别是 $M_r(\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{K}(H)$ 的实子空间。注意，对于 (2.3) 中的 $\mathcal{D}_S$

$$m_S-\frac{1}{r}\operatorname{Diag}(P_S)=\operatorname{Diag}\left(\mathcal{D}_S-\frac{1}{r}P_S\right)$$

是.....的子集 $\mathcal{V}_S$因为对每个 $Y\in\mathcal{D}_S$，都有 $Y-\frac{1}{r}P_S\in\mathcal{K}(H)^h$，迹$(Y-\frac{1}{r}P_S)=0$且

$$\operatorname{aff}(m_S)-\frac{1}{r}\operatorname{Diag}(P_S)\subseteq\operatorname{Diag}(\mathcal{V}_S).$$

命题 9. 设 S 是 H的有限维子空间，$\mathcal{D}_S$ 如 (2.3) 所示，$\mathcal{V}_S$ 如 (4.1) 所示。则有以下等式

$$aff(\mathcal{D}_S)-\frac{1}{r}P_S=\mathcal{V}_S$$

并且由此可得 $\operatorname{Diag}\left(\operatorname{aff}(\mathcal{D}_S)-\frac{1}{r}P_S\right)=\operatorname{aff}(m_S)-\frac{r1}{r}\operatorname{Diag}(P_S)=\operatorname{Diag}(\mathcal{V}_S)$

a .

证明. 首先取 $X=\sum_{i=1}^k a_iY_i\in\operatorname{aff}(\mathcal{D}_S)$，其中 $a_i\in\mathbb{R}$、$Y_i\in\mathcal{D}_S$ 对所有 $i=1$、$\ldots k$ 和 $\sum_{i=1}^k a_i=1$ 均成立。则 $\operatorname{tr}(X-\frac{1}{r}P_S)=1-1=0$，$X-\frac{1}{r}P_S$ 是厄米的，且 $P_S(X-\frac{1}{r}P_S)=X-\frac{1}{r}P_S$，这证明了 $\operatorname{aff}(\mathcal{D}_S)-\frac{1}{r}P_S\subset\mathcal{V}_S$。

为证明另一包含关系，设 $Z\in\mathcal{V}_S$。则 $\operatorname{tr}(Z)=0$，$Z^*=Z$，并考虑 $Z=\sum_{i=1}^r\lambda_i(v^i\otimes v^i)$，它是 Z 的谱分解，其中 $\sum_{i=1}^r\lambda_i=0$、$v^i\in S$、$\|v^i\|=1$，且对于 $i\ne j$，有 $v^i\perp v^j$。于是，由于$P_S=\sum_{i=1}^r v^i\otimes v^i$

$$Z=\sum_{i=1}^r\lambda_i(v^i\otimes v^i)+\frac{1}{r}P_S-\frac{1}{r}P_S=\sum_{i=1}^r\left(\lambda_i+\frac{1}{r}\right)(v^i\otimes v^i)-\frac{1}{r}P_S.$$

注意，如果 $Y_i=v^i\otimes v^i$，对于 $i=1$、.....、r，那么 $\operatorname{tr}(Y_i)=1$、$0\le Y_i\in S$，因此 $Y_i=v^i\otimes v^i\in\mathcal{D}_S$。此外，$\sum_{i=1}^r(\lambda_i+\frac{1}{r})=0+1=1$，因此 $Z\in\operatorname{aff}(\mathcal{D}_S)-\frac{1}{r}P_S$。

等式 $\operatorname{Diag}\left(\operatorname{aff}(\mathcal{D}_S)-\frac{1}{r}P_S\right)=\operatorname{Diag}(\mathcal{V}_S)$ 可由 Diag 的线性性以及 $\operatorname{Diag}(\mathcal{D}_S)=m_S$ 这一事实得到。□

现在定义以下 $r\times r$ $\mathcal{M}$的零迹厄米矩阵

$$\begin{aligned}W^{j,j}&=\frac{1}{\sqrt{1+1/j}}\left(\left(\sum_{l=1}^j\frac{1}{j}e_l\otimes e_l\right)-e_{(j+1)}\otimes e_{(j+1)}\right),\ \text{for } j=1,\ldots,r-1,\\ W^{k,j}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_k\otimes e_j+e_j\otimes e_k\right),\ \text{for } k,j=1,\ldots,r \text{ and } k<j,\\ W^{k,j}&=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(e_k\otimes e_j-e_j\otimes e_k\right),\ \text{for } k,j=1,\ldots,r \text{ and } j<k\end{aligned}\tag{4.2}$$

以及使用 S的一组标准正交基 $\{s^l\}_{l=1}^r$ 得到的 $\mathcal{V}$ 的迹为零的自伴算子

$$V^{j,j} = \frac{1}{\sqrt{1+1/j}} \left(\left(\sum_{l=1}^{j} \frac{1}{j} s^l \otimes s^l \right) - s^{(j+1)} \otimes s^{(j+1)} \right), \text{ for } j = 1, \ldots, r-1,$$

$$V^{k,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(s^k \otimes s^j + s^j \otimes s^k \right), \text{ for } k, j = 1, \ldots, r \text{ and } k < j$$

$$V^{k,j} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(s^k \otimes s^j - s^j \otimes s^k \right), \text{ for } k, j = 1, \ldots, r \text{ and } j < k. \tag{4.3}$$

那么，对于集合 $J = \{(k,j)\colon\ k = 1、\ldots\ldots、\ r \wedge j = 1、\ldots\ldots、\ r\} \setminus \{(r,r)\}$，经过简单计算可得

$$\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J} \text{ and } \{V^{k,j}\}_{(k,j)\in J}$$

分别是 $\mathcal{M}_r$ 和 $\mathcal{V}_S$ 的实正交归一基（两种情况下均取由迹给出的内积），并且两个子空间的维数均为 $= r^2 - 1$。去掉归一化因子的集合 $\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J}$被称为广义盖尔曼基 [2]。

注9. 设 S 是 H 的一个有限维子空间，并取定其一个标准正交基 $\{s^j\}_{j=1}^r$。注意，按照前文所采用的记号，集合 $\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} I \right\}$ 是 $M_r^h(\mathbb{C})$的实正交归一基，同时也是 $M_r(\mathbb{C})$的复正交归一基，即

$$span \left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} I_r \right\} \oplus_{\mathbb{R}} span\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J} = M_r^h(\mathbb{C}),$$

and

$$span \left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} I_r \right\} \oplus_{\mathbb{C}} span\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J} = M_r(\mathbb{C}).$$

另一方面，子空间 $\text{span}\{P_S\} \oplus_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_S$ 是 $\mathcal{K}(H)$的子代数，并且可以将其与$\mathcal{B}_S = P_S B(H) P_S = \text{span}\{P_S\} \oplus_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_S$等同起来。在此背景下，$\{\frac{1}{\sqrt{r}} P_S\} \cup \{V^{k,j}\}_{(k,j)\in J}$也是其厄米算子实子空间 $\mathcal{B}_S^h$ 的一组标准正交基（相对于迹内积）。

命题10. 使用前述记号，我们按如下方式定义双射线性算子 $U : M_r(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}_S$，它作用于由 (4.2) 定义的正交矩阵以及$\frac{I_r}{r}$

$$\begin{cases} U(W^{k,j}) &= V^{k,j} \quad for\ every \quad (k,j) \in J \\ U\left(I_r\right) &= P_S, \end{cases}$$

其中，算子 $V^{k,j}$ 由 (4.3) 定义。

那么，对于每个 $A, B \in M_r(\mathbb{C})$

(1) $\text{tr}(U(A)) = \text{tr}(A)$. (2) $(U(A))^* = U(A^*)$. (3) $(U(A))^* = U(A)$ 当且仅当 $A = A^*$. (4) $U(AB) = U(A)U(B)$ 且 $U^{-1}(U(A)U(B)) = AB$. (5) 如果 $A \in M_r(\mathbb{C})$ 可逆，那么 $U(A)$ 在代数 $\mathcal{B}_S$ 中可逆，且 $U(A^{-1})U(A) = P_S$. (6) $A \geq 0$ 当且仅当 $U(A) \geq 0$. (7) $\langle U(A)\ U(B) \rangle_{tr} = \text{tr}\left(U(A)(U(B))^*\right) = \text{tr}\left(AB^*\right) = \langle A, B \rangle_{M_r(\mathbb{C})}$ （U是酉的）。(8) $P \in M_r(\mathbb{C})$ 是投影，当且仅当 $U(P)$ 是投影。(9) $U\left(\{R \in M_n^h(\mathbb{C})\colon\ R \geq 0 \wedge \text{tr}(R) = 1\}\right) = \mathcal{D}_S$（其中 $\mathcal{D}_S$如 (2.3) 所示）。

证明。首先注意，任意 $A \in M_r(\mathbb{C})$ 都可以用注9中定义的标准正交基表示:

$$A = a_r I_r + \sum_{(k,j)\in J} a_{kj} W^{k,j}, \text{ with } a_r, a_{kj} \in \mathbb{C}.$$

那么,

$$U(A) = U\left(a_r I_r + \sum_{(k,j)\in J} a_{kj} W^{k,j}\right) = a_r P_S + \sum_{(k,j)\in J} a_{kj} V^{k,j}$$

(1) 迹$(U(A)) = 迹\left(a_r P_S + \sum_{(k,\ j)\in J} a_{kj} V^{k,\ j}\right) = a_r r + \sum_{(k,\ j)\in J} a_{kj}$ 迹$(V^{k,\ j}) = a_r r =$ 迹(A)。

(2) 该结果显然成立，因为$(U(A))^* = \overline{a}_r P_S + \sum_{(k,\ j)\in J} \overline{a}_{kj} V^{k,\ j}$ 且 $A^* = \overline{a}_r I_r + \sum_{(k,\ j)\in J} \overline{a}_{kj} W^{k,\ j}$。

(3) 若 $A = A^*$，则由第 (2) 项可直接推出$(U(A))^* = U(A)$。另一方面，若$(U(A))^* = U(A)$，则 $U(A) = U(A^*)$，并且

$$a_r P_S + \sum_{(k,j)\in J} a_{kj} V^{k,j} = \overline{a}_r P_S + \sum_{(k,j)\in J} \overline{a}_{kj} V^{k,j}$$

这意味着 $a_r r, a_{kj} \in \mathbb{R}$。因此， $A = A^*$。

(4) 根据 [3] 中的 (4)，存在复系数 α_r 和 $\alpha_{ll'}$ ，使得 $\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J}$ 中的任意元素乘积都可以写成

$$W^{k,j} W^{k',j'} = \alpha_r I_r + \sum_{(l,l')\in J} \alpha_{k,j,k',j',l,l'}\ W^{l,l'},$$

类似地

$$V^{k,j} V^{k',j'} = \alpha_r P_S + \sum_{(l,l')\in J} \alpha_{k,j,k',j',l,l'}\ V^{l,l'}$$

对于 $(l,l') \in J$，系数仍为 $\alpha_{k,\ j,\ k',\ j',\ l,\ l'} \in \mathbb{C}$。这是根据定义 (4.2) 和 (4.3) 以及基 $\{e_l\}_{l=1}^r$ 和 $\{s\}_{l=1}^r$ 的正交归一性得出的。于是,

$$\begin{aligned} U\left(W^{k,j} W^{k',j'}\right) &= \alpha_r U(I_r) + \sum_{(l,l')\in J} \alpha_{k,j,k',j',l,l'}\ U\left(W^{l,l'}\right) = \alpha_r P_S + \sum_{(l,l')\in J} \alpha_{k,j,k',j',l,l'}\ V^{l,l'} \\ &= V^{k,j} V^{k',j'} = U\left(W^{k,j}\right)\ U\left(W^{k',j'}\right). \end{aligned}$$

于是，利用这一性质，结合 $\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J} \cup \{\frac{I_r}{r}\}$ 是 $M_r(\mathbb{C})$ 的标准正交基这一事实以及 U的线性性，可得 $U(AB) = U(A)U(B)$，对所有 $A, B \in M_r(\mathbb{C})$ 均成立。

等式 $AB = U^{-1}(U(A)U(B))$ 可类似地得出。

(5) 由第（4）项可直接得出，因为 $U(A^{-1})U(A) = U(A^{-1}A) = U(I_r) = P_S$。

（6）若 $A \geq 0$ 存在 $T \in M_r(\mathbb{C})$ 使得 $A = T^*T$。那么，利用第 3 项和第 4 项

$$U(A) = U(T^*T) = (U(T))^* U(T) \geq 0.$$

另一方面，若 $U(A) \geq 0$，则存在 $K \in \mathcal{K}(H)$ 使得 $U(A) = K^*K$。此外，由于 $\mathcal{B}_S$ 是一个子代数 $K \in \mathcal{B}_S$。于是， $K = U(B)$ 且 $B \in M_r(\mathbb{C})$,

$$U(A) = U(B)^* U(B) = U(B^*B),$$

以及 $A = B^*B \geq 0$。

(7) 利用 $\{W^{k,j}\}_{(k,j)\in J}$ 和 $\{V^{k,j}\}_{(k,j)\in J}$ 是零迹的标准正交集，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(U(A)U(B)^*\right) &= \operatorname{tr}\left(U\left(a_rI_r+\sum_{(k,j)\in J}a_{kj}W^{k,j}\right)U\left(\bar{b}_rI_r+\sum_{(k,j)\in J}\bar{b}_{kj}W^{k,j}\right)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\left(a_rP_S+\sum_{(k,j)\in J}a_{kj}V^{k,j}\right)\left(\bar{b}_rP_S+\sum_{(k,j)\in J}\bar{b}_{kj}V^{k,j}\right)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(a_r\bar{b}_rP_S+\sum_{(k,j)\in J}a_{kj}\bar{b}_{kj}V^{k,j}\right)\\ &= a_r\bar{b}_r=\operatorname{tr}(AB^*).\end{aligned}$$

利用前面的条目 (1)、(4)、(6) 和 (7)，可以很容易地证明条目 (8) 和 (9)。

□

注 10. 限制 $U|_{M_r^h(\mathbb{C})}$ 是 $M_r^h(\mathbb{C})$ 与 $\mathcal{B}_S^h = P_SB(H)^hP_S =$ 张成空间 $\{P_S\}\oplus_{\mathbb{R}}\mathcal{V}_S$ 之间的一个（实）等距同构。此外，$U|_{\mathcal{M}_r}$ 是 $\mathcal{M}_r$ 与 $\mathcal{V}_S$ 之间的等距映射。

推论 2. 使用前面各段中的相同记号，以下两个联合数值域重合

$$W(P_SE_1P_S,\dots,P_SE_nP_S)=W\left(U^{-1}(P_SE_1P_S),\dots,U^{-1}(P_SE_nP_S)\right),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

证明. 证明直接由命题10的性质 (1)、(4)、(6) 和 (9) 得出。 □

注 11. 在有限维情形下，可以得到与推论 2 中结果类似的结论，如 [9] 的注 6.3 (3) 中所述。在该描述中，子空间 $S\subset\mathbb{C}^n$ 的联合数值域与维数为 $\dim(S)\times\dim(S)$ 的矩阵的联合数值域相关。

5. Condition of minimality using finite $n\times n$ matrices

设 S、V 是 H 的正交子空间，且 $\dim(S)=r$、$\dim(V)=t$。本节将使用命题10中定义的算子 $U_S\colon M_r(\mathbb{C})\to\mathcal{B}_S$ 和 $U_V\colon M_t(\mathbb{C})\to\mathcal{B}_V$，将 S 和 V 的某些性质与更易处理的 $r\times r$ 和 $t\times t$ 厄米矩阵情形联系起来。

对于每个 $q\in\mathbb{N}$，我们定义实泛函 $\varphi_q\colon M_r^h(\mathbb{C})\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi_q(M)=\langle U(M)e_q,e_q\rangle=(U(M)_{E,E})_{q,q}$$

（考虑标准基 E 时，$U(M)$ 的 q、q 对角线元素。）

由维数定理，$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi_q))=r^2-1$，因此 $\dim(\ker(\varphi_q)^\perp)=1$。所以，$\varphi_q$ 可以写成

$$\varphi_q(M)=\langle M,Q_q\rangle_{tr}=\operatorname{tr}(Q_qM),$$

其中某个 $Q_q\in\ker(\varphi_q)^\perp\subset M_r^h(\mathbb{C})$，且 $\|Q_q\|_2=\sqrt{\operatorname{tr}\left((Q_q)^2\right)}=1$。

现在假设 $M\in M_r^h(\mathbb{C})$ 写作 $M=a_{r,r}\frac{I_r}{\sqrt{r}}+\sum_{(k,j)\in J}a_{k,j}W^{k,j}$，其中 $a_{k,j}\in\mathbb{R}$ 是其在实向量空间 $M_r^h(\mathbb{C})$ 的标准正交基下的坐标（见注 9）。那么，对于 $q\in\mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}\varphi_q(M)=\langle U(M)e_h,e_h\rangle_H=(U(M)_{E,E})_{h,h}&=a_{r,r}\left(U\left(\frac{I_r}{\sqrt{r}}\right)\right)_{h,h}+\sum_{(k,j)\in J}a_{k,j}\left(U(W^{k,j})_{E,E}\right)_{h,h}\\ &=a_{r,r}\left(\frac{P_S}{\sqrt{r}}\right)_{h,h}+\sum_{(k,j)\in J}a_{k,j}\left(V^{k,j}_{E,E}\right)_{h,h}=\langle M,Q_q\rangle\end{aligned}\tag{5.1}$$

for $Q_q = \left(\frac{P_S}{\sqrt{r}}\right)_{q,q} \frac{I_r}{\sqrt{r}} + \sum_{(k,j)\in J} \left(V_{E,E}^{k,j}\right)_{q,q} W^{k,j} \in M_r^h(\mathbb{C})$.

注意，由于我们假设子空间 S 是一般的，因此向量 Q_q 不可能为零（否则，在 S 中的每个算子下，E 基中的 h,h 坐标都将为 0）。因此，对于 $e_q \in E$ （ $K(H)$ 中的标准基）

$$(U(M)_{E,E})_{q,q} = \langle U(M)e_q, e_q\rangle = \mathrm{tr}(Q_q M).$$

于是，我们可以定义 φ:$M_r^h(\mathbb{C}) \to$对角映射$(B^h(S)) \subset \ell^1(\mathbb{R})$，定义为 $\varphi(M)$ =对角映射$(U(M))$，并使用以下方法计算

$$\varphi(M) = (\varphi_1(M), \varphi_2(M), \ldots, \varphi_q(M), \ldots) = (\mathrm{tr}(Q_1 M), \mathrm{tr}(Q_2 M), \ldots, \mathrm{tr}(Q_q M), \ldots).$$

5.1. 通过有限个算子构成的族来表示联合数值域的交。设 S 为如前所述的一个 r 维子空间，并考虑 $\mathcal{B}_S^h$，其中 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}_S^h) = r^2$。定义 ϕ : $\mathcal{B}_S^h \to$ 对角映射 $(\mathcal{B}_S^h) \subset K^h(H)$，定义为 $\phi(A)$ = 对角映射(A)，其中对角映射是 H的标准 E 基下的对角线。注意，由于 $S \subset H$ 是有限维的，因此我们可以将对角映射$(\mathcal{B}_S^h)$视为 $\subset \ell^1(\mathbb{R})$。

在此情形下，由于 $\phi_n(A) = A_{n,\ n}$ （对角映射(A)的 n、 n 项）是空间 $\mathcal{B}_S^h$上的一个泛函，因此存在算子 $T_n \in \mathcal{B}_S^h$，满足 $\|T_n\|_2 = 1$，使得

$$\phi(A) = \mathrm{Diag}\left(\{\mathrm{tr}(AT_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \mathrm{Diag}(A). \tag{5.2}$$

类似地，对于另一个与 S 正交的子空间 V of H ，若 $\dim(V) = t$ ，我们可以定义 ψ :$\mathcal{B}_V^h \to \mathrm{Diag}(\mathcal{B}_V^h)$ $\subset K^h(H)$ as $\psi(C)$ = Diag({v14)。同样，在这种情况下，存在算子 $L_n \in \mathcal{B}_V^h$，满足 $\|L_n\|_2 = 1$，使得

$$\psi(C) = \mathrm{Diag}\left(\{\mathrm{tr}(CL_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \mathrm{Diag}(C). \tag{5.3}$$

命题11. 设 ϕ 如 (5.2) 中所示， ψ 如 (5.3) 中所示，并定义 Δ : $\mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h \to \mathrm{Diag}(K^h(H))$ as

$$\Delta(A,C) = \phi(A) - \psi(C), \quad for\ A \in \mathcal{B}_S^h\ and\ C \in \mathcal{B}_V^h. \tag{5.4}$$

那么，经过对基 E 适当重排后，存在 $\{(T_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个有限子集，记作 $\{(T_n, L_n)\}_{i=1}^m$ ，使得

$$\begin{aligned}(A,C) \in \ker(\Delta) &\Leftrightarrow \mathrm{Diag}(A) = \mathrm{Diag}(C)\\ &\Leftrightarrow (A,-C) \perp (T_n, L_n), \forall n = 1,\ldots,m\end{aligned} \tag{5.5}$$

证明. 第一个等价关系直接由 Δ 的定义得出。

另一方面，我们有 $(A,C) \in$ker(Δ) $\Leftrightarrow$Diag(A) =Diag(C) $\Leftrightarrow (A,-C)$ $\perp (T_n, L_n)$ $\forall n \in\mathbb{N}$。因此，我们只需证明：经过对基 E 重排后，存在 $\{(T_n, L_n)\}_{i=1}^m$ ，使得若 $(A,-C)$ $\perp (T_n, L_n)$ $\forall n = 1,\ldots,m$，则 (A, C) $\in$ker(Δ)。为此，回顾一下，由于 S 和 V 是 H 的有限维子空间，因此 $\mathcal{B}_S^h$ 和 $\mathcal{B}_V^h$ 也是 $B^h(H)$ 中的有限维 $\mathbb{R}$-子空间。于是 $\dim\left(\mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h\right) = r^2 + t^2 < \infty$，进而 dim (span $(\{(T_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}})$ $\le r^2 + t^2$。为简化记号，我们可以通过对 E 基中单位矩阵相应的行和列进行置换，得到酉算子的共轭，从而重排对角线元素。此后，可设 $\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m$ 是 span$(\{(T_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}})$ 的有限基。显然，对于 (A,C) $\in \mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h$，(A,C) $\perp$span $(\{(T_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}})$ 当且仅当 (X,Y) $\perp$span $(\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^n)$。□

注 12。注意，我们也可以利用正交基 $\mathcal{V}_S$ 和 $\mathcal{V}_V$，通过矩阵乘法来描述 Δ

$$\Delta(A,C) = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{V}_S} & [L_1]_{\mathcal{V}_V} \\ [T_2]_{\mathcal{V}_S} & [L_2]_{\mathcal{V}_V} \\ \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty\times(r^2+t^2)} \cdot \begin{pmatrix} [A]_{\mathcal{V}_S} \\ -[C]_{\mathcal{V}_V} \end{pmatrix}_{(r^2+t^2)\times 1},$$

其中，我们用 $[\,]_{\mathcal{V}_S}$ 和 $[\,]_{\mathcal{V}_V}$ 分别表示相应厄米算子在基 $\mathcal{V}_S$ 和 $\mathcal{V}_V$ 下的坐标（见注9）。

推论 3. 设 $\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m$ 如命题11中所述（见 (5.4) 和 (5.5)）。那么，对于 $A \in B^h(S), C \in B^h(V)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Diag}(A) = \operatorname{Diag}(C) &\Leftrightarrow (A, -C) \perp (T_n, L_n), \forall n = 1, \dots, m \\ &\Leftrightarrow A_{n,n} = C_{n,n}, \forall n = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{5.6}$$

证明。注意到，如果 $(A, -C) \perp (T_n, L_n)$，那么 $0 = \text{迹}(AT_n) + \text{迹}(-CL_n) = A_{n,n} - C_{n,n}$（见 (5.2)、(5.3)、(5.4)），即可得出结论。因此，对角映射(A) = 对角映射(C) 当且仅当对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$(A, -C) \perp (T_n, L_n)$；而根据命题11，这又等价于 $(A, -C) \perp (T_n, L_n)$ 对于 $n = 1, \dots, m$。□

推论4. 设 $\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m$ 如命题11所述（见（5.4）和（5.5））。以下陈述等价

a) $\dim(\operatorname{span}(\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m)) < \dim\left(\mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h\right)$b) 存在一个非零对 $(A, C) \in \mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h$，使得对角映射$(A)$ = 对角映射(C)。

证明. 注意到 $\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m$ 是 $\ker(\Delta)^\perp = \{(A, C) \in \mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h$的一个基：对角映射$(A)$ = 对角映射$(C)\}$（见（5.4））。接着注意，条件 $m = \dim(\operatorname{span}(\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m)) < \dim\left(\mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h\right) = r^2 + t^2$等价于存在一个非零厄米对 $(A, C) \in \mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h$，其中 A 和 C 具有相同的对角线。b) $\Rightarrow$ a) 的推导类似。□

现在可以陈述以下结果。

命题 12. 使用本节前面几段中的记号，以下各陈述等价

(1) $\exists$a 不为零的 $(X, Y) \in \mathcal{B}_S^+ \oplus \mathcal{B}_V^+$ 使得 $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = 1$ 且 $(X, Y) \in \ker(\Delta)$（其中 Δ 如 (5.4) 所示）。(2) $\exists$a 不为零的 $(X, Y) \in \mathcal{B}_S^+ \oplus \mathcal{B}_V^+$ 使得 $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = 1$ 且 $(X, Y) \perp \{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m$，其中 $\operatorname{span}\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m = \ker(\Delta)^\perp$（其中 (T_n, L_n) 如命题11所示）。(3) $\exists$a 不为零的 $(X, Y) \in \mathcal{B}_S^+ \oplus \mathcal{B}_V^+$ 使得 $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = 1$ 且 $(X, Y) \perp \{(T_n, L_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$（见 (5.2)、(5.3)）。(4) $\exists$a 不为零的 $(X, Y) \in \mathcal{B}_S^+ \oplus \mathcal{B}_V^+$ 使得 $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = 1$ 且 $X_{n,n} = Y_{n,n}$ $(n, n$ 基中的对角线元素 $E)$，其中 $n = 1, \dots, m = \dim\left(\ker(\Delta)^\perp\right)$。(5) $\exists$a 不为零的 $(X, Y) \in \mathcal{B}_S^+ \oplus \mathcal{B}_V^+$ 使得 $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = 1$ 且 对角映射(X) = 对角映射(Y) (6) $m_S \cap m_V \neq \emptyset$(7) $W(P_S E_1 P_S, \dots, P_S E_i P_S, \dots) \cap W(P_V E_1 P_V, \dots, P_V E_j P_V, \dots) \neq \{0\}$(8) $W(P_S E_1 P_S, \dots, P_S E_m P_S) \cap W(P_V E_1 P_V, \dots, P_V E_m P_V) \neq \{0\}$

证明。前五项的等价性可直接由前述结果命题11和推论 3得出。涉及 (6)、(7) 与前四个陈述的等价性，可利用命题 1证明。要证明陈述 (4) 等价于 (8)，可利用 (4) 蕴含 (7)，而 (7) 显然蕴含 (8)。反向推导可通过以下观察得到：若 (8) 成立，则存在 $X \in B^+(S)$，$Y \in B(V)$，使得 $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = 1$ 满足 $\operatorname{tr}(XP_S E_n P_S) = \operatorname{tr}(YP_V E_n P_V)$，其中$n = 1, \dots, m$，这进而蕴含 $\operatorname{tr}(XE_n) = \operatorname{tr}(YE_n)$，因此 $X_{n,n} = Y_{n,n}$ 对于 $n = 1, \dots, m$（即 (4)）。□

5.2. 有限矩阵意义下的极小矩阵、子空间矩与联合数值域。如前所述，我们将考虑两个正交有限维子空间 S，其维数为 $S = r$

以及 V，其维数为 $V = t$，它们属于 H。我们希望研究它们的矩集和联合数值域与定义在 $M_r(\mathbb{C})$ 和 $M_t(\mathbb{C})$ 上的类似集合之间的关系。为此，考虑映射

$$Z : M_r(\mathbb{C}) \times M_t(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}_S \oplus \mathcal{B}_V, \text{ such that } Z(M,N) = U_S(M) + U_V(N) \tag{5.7}$$

其中 U_S 和 U_V 是命题10中针对相应子空间 S 和 V 所定义的映射。这里，我们在 $M_r(\mathbb{C}) \times M_t(\mathbb{C})$ 上考虑通常的数量积 $\langle (M,N), (X,Y)\rangle = \mathrm{tr}(MX^*) + \mathrm{tr}(NY^*)$。注意，$Z$ 可逆，且 $Z^{-1}(C,D) = (U_S^{-1}(C)\, U_V^{-1}(D))$。还要注意，利用 U_S 和 U_V 的性质（见命题10），映射 Z 是等距同构，并且保持迹、内积以及每个分量中的正定性（以及许多其他性质）。

假设存在 $(M,N) \in M_r^+(\mathbb{C}) \times M_t^+(\mathbb{C})$，使得

$$(M,N) \perp \{(U_S^{-1}(T_n), U_V^{-1}(L_n)\}_{n=1}^m$$

对于在命题11的 (5.5) 中定义的 (T_n, L_n)。当且仅当 $U_S(M) \in \mathcal{B}_S^+$ 和 $U_V(N) \in \mathcal{B}_V^+$ 满足 $(U_S(M)\ U_V(N)) \perp (T_n, L_n)$，其中 $n = 1, \dots, m$，这等价于 $\mathrm{Diag}(U_S(M)) = \mathrm{Diag}(U_V(N))$，也等价于 $m_S \cap m_V \neq \emptyset$ 这一事实（见命题12）。

命题 13. 设 S 是 H 的一个子空间，U_S 如命题10中所定义，m_S 如 (2.4) 中所定义，并且 $p_m : \ell^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ 是由 $p_m(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \dots, x_m)$ 所定义的投影。则

$$\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\, p_m(m_S) = W\left(\{P_S E_j P_S\}_{j=1}^m\right) = W\left(\left\{U_S^{-1}(P_S E_j P_S)\right\}_{j=1}^m\right).$$

证明。算子 $W\left(\{P_S E_j P_S\}_{j=1}^m\right)$ 的联合数值域与矩阵的另一个 $W\left(\left\{U_S^{-1}(P_S E_j P_S)\right\}_{j=1}^m\right)$ 之间的等式成立，这是因为 U_S^{-1} 保持联合数值域（见推论 2）。

现在设 $x \in \cup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\, p_m(m_S)$。则 $x = \alpha(\mathrm{tr}(\mu E_1) \dots, \mathrm{tr}(\mu E_m))$，其中 $\alpha \in [0,1]$ 且 $\mu \in \mathcal{D}_S$（见 (2.3) 和 (2.4)）。现在考虑 $\rho = \alpha\,\mu + (1-\alpha)\ {}^{P_V}/_{\text{维数}\,V}$，其中 $V \subset S^\perp$ 且 $0 < \dim(V) < +\infty$。那么显然，$\tau(\rho) = 1$，$\rho \geq 0$ 且 $\mathrm{tr}(P_S \rho P_S E_i) = \mathrm{tr}(P_S \alpha \mu P_S E_i) = \alpha\,\mathrm{tr}(\mu E_i)$，其中 $i = 1, \dots, m$。因此 $x = \alpha(\mathrm{tr}(\mu E_1) \dots, \mathrm{tr}(\mu E_m)) = (\mathrm{tr}(P_S \rho P_S E_1) \dots, \mathrm{tr}(P_S \rho P_S E_m)) \in W\left(\{P_S E_j P_S\}_{j=1}^m\right)$。

为证明另一方向的包含关系，注意到当 $x = (0, \dots, 0)$ 时的情形可由 $\alpha = 0$ 得到。因此，假设 $x \in W\left(\{P_S E_j P_S\}_{j=1}^m\right)$ 和 x 非零。于是 $x = (\mathrm{tr}(P_S \rho P_S E_1) \dots, \mathrm{tr}(P_S \rho P_S E_m)) \in W\left(\{P_S E_j P_S\}_{j=1}^m\right)$，其中 $\rho \in \mathcal{B}_1(H)$，$\mathrm{tr}(\rho) = 1, \rho \geq 0$。由于 $P_S \rho P_S \geq 0$ 和 x 非零，因此在此情形下 $0 < \mathrm{tr}(P_S \rho P_S) \leq 1$。我们可以定义 $\mu = {}^{P_S \rho P_S}/_{\mathrm{tr}(P_S \rho P_S)} \in \mathcal{D}_S$，然后

$$x = \mathrm{tr}(P_S \rho P_S)\left(\frac{P_S \rho P_S}{\mathrm{tr}(P_S \rho P_S)} E_1, \dots, \frac{P_S \rho P_S}{\mathrm{tr}(P_S \rho P_S)} E_m\right) = \alpha(\mu E_1, \dots, \mu E_m),$$

对于 $\alpha = \mathrm{tr}(P_S \rho P_S) \in (0,1]$ 和 $\mu \in \mathcal{D}_S$。证明至此完成。 □

定理 4. 设 S 和 V 是 H 的正交子空间，其中 $\dim(S) = r$，$\dim(V) = t$，$\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m$ 是 $\ker(\Delta)$ 的一组基（见（5.4）和（5.5）），U_S、U_V 在（5.7）和命题10中定义，并且投影 $p_m : \ell^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ 定义为 $p_m(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \dots, x_m)$。

那么，以下陈述等价

(1) $m_S \cap m_V \neq \emptyset$。(2) $p_m(m_S) \cap p_m(m_V) \neq \emptyset$。(3) $\exists (M,N) = (U_S^{-1}(X)\, U_V^{-1}(Y)) \in M_r^+(\mathbb{C}) \times M_t^+(\mathbb{C})$，对于满足 $X_{j,j} = Y_{j,j}$ 的 $X \in B^+(S)$ $Y \in B^+(S)$，对于 $j = 1, \dots, m$。(4) $W(\{P_S E_j P_S\}_{j=1}^m \cap W(\{P_V E_j P_V\}_{j=1}^m \neq \{(0, \dots, 0)\}$。(5) $W\left(\{U_S^{-1}(P_S E_j P_S)\}_{j=1}^m\right) \cap W\left(\{U_V^{-1}(P_V E_j P_V)\}_{j=1}^m\right) \neq \{(0, \dots, 0)\}$。(6) 子空间对 (S,V) 构成一个支撑（参见定义 5）。

(7) 如果 $R \in (\mathcal{B}_S^h \oplus \mathcal{B}_V^h)^\perp \cap K^h(H)$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $\|R\| \leq \lambda$，那么紧算子 $\lambda(P_S - P_V) + R$是极小的。

证明。由推论 3 的 (5.6) 可得 (1) 与 (2) 等价。$p_m(m_S)$ 和 $\{(T_n, L_n)\}_{n=1}^m$ 的定义连同命题 13 可得 (2) $\Leftrightarrow$ (3)。(3) $\Leftrightarrow$ (4) 的等价性由联合数值域的定义以及 U 和 U^{-1} 保持正定性的事实得出。由推论 2 可得 (4) $\Leftrightarrow$ (5)。定义 5 即为 (1) $\Leftrightarrow$ (6)，而 (1) $\Leftrightarrow$ (7) 例如可见 [7]的推论 10。□

注 13。注意，定理 4 的等价条件 (5) 涉及 $r \times r$ 和$t \times t$ 矩阵的联合数值域。因此，可以应用许多针对有限维矩阵所发展的技术（这些矩阵已在 [9] 中研究并引用），来描述它们。

References

[1] Andruchow, E., Larotonda, G. 酉 Fredholm 群中的可求长距离，Studia Math. 196 (2) (2010), p. 151-178. http://dx.doi.org/10.4064/sm196-2-4.[2] Bertlmann, R., Krammer, P. 量子位元组的布洛赫向量，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, (2008), vol. 41, no 23, p. 235303. http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/41/23/235303.[3] Byrd, M., Khaneja, N. 以相干向量表示刻画密度矩阵的正性。Phys. Rev. A (3) 68 (2003), no. 6, p. 062322. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.68.062322.[4]Dur´an, C. E., Mata-Lorenzo, L. E. Recht, L. C*-代数酉群齐性空间中的度量几何：第一部分——极小曲线。Advances in Mathematics 184(2), (2004), 342-366. https://doi.org/10.1016/S0001-8708(03)00148-8.[5] Gutkin, E., J onckheere, E. A., Karow, M. 联合数值域的凸性：拓扑与微分几何视角，Linear Algebra Appl., 376 (2004), 143-171. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2003.06.011.[6] Bottazzi, T., Conde, C. Sain, D. 有界线性算子正交性的研究。Banach J. Math. Anal. 14 (2020年), no. 3, 1001–1018. http://dx.doi.org/10.1007/s43037-019-00050-0.[7] Bottazzi, T., Varela, A. 通过对角紧算子进行最佳逼近。Linear Algebra Appl., 439.10 (2013) 3044-3056. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2013.08.025.[8] Cho, M., Takaguchi, M. 联合数值域的边界点。Pacific Journal of Mathematics, 95(1) 27-35 1981. http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1981.95.27.[9] Klobouk, A.H., Varela, A. 子空间的矩与联合数值域。Linear and Multilinear Algebra (2022), 1-34. http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2022.2064967.[10] Li, C.-K. and Poon, Y.-T. 联合数值域的凸性，SIAM J ournal on Matrix Analysis and Applications, 21 (2000), 668-678. http://dx.doi.org/10.1137/S0895479898343516.[11] Mendoza, A., Recht, L., Varela, A. 极小厄米矩阵的支撑。Linear Algebra Appl. 584 (2020), 458-482. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2019.09.018.[12]M¨uller, V., Tomilov, Y. 联合数值域：V. M¨uller 和 Y. Tomilov 主讲的最新进展与应用短期课程。Nikolitsa Chatzigiannakidou 协助。Concr. Oper. 7 (2020年), no. 1, 133–154. https://doi.org/10.1515/conop-2020-0102.[13] Simon, B. 迹理想及其应用。AMS, 第2版 (2005)。http://dx.doi.org/10.1090/surv/120.[14] Zhang, Y., Jiang, L. 与 K(H) 的 C*-子代数相关的极小厄米紧算子。Journal of Mathematical Analysis and Applications 506.2 (2022): 125649. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125649.[15] Zhang, Y., Jiang, L. 与 C*-代数中的条件期望相关的极小元素。Ann. Funct. Anal. 14, 28 (2023). http://dx.doi.org/10.1007/s43034-023-00252-6.

[1] Universidad Nacional de Río Negro. Centro Interdisciplinario de Telecomunicaciones, Electrónica, Computación y Ciencia Aplicada, Sede Andina (8400) S.C. de Bariloche, Argentina.

[2] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, (1425) Buenos Aires, Argentina .

[3]Instituto Argentino de Matemática "Alberto P. Calderón", Saavedra 15 3er. piso, (C1083ACA) Buenos Aires, Argentina

[4]Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de Gral. Sarmiento, J. M. Gutierrez 1150, (B1613GSX) Los Polvorines, Argentina电子邮件地址：tbottazzi@unrn.edu.ar, avarela@campus.ungs.edu.ar