arXiv:2303.04155v2 [math.DS] 3 May 2023

具有显式分形维数的时滞泛函微分方程指数吸引子

Wenjie Hu[1,2], Tom´as Caraballo[3*]

1. MOE-LCSM，湖南师范大学数学与统计学院，
中国湖南省长沙市，410081

2. 湖南师范大学期刊社，中国湖南省长沙市，410081

3 微分方程与数值分析系，数学学院 ，
塞维利亚大学，塔尔菲亚街（无门牌号），41012 塞维利亚，西班牙

摘要

本文旨在提出一种新方法，用于构造巴拿赫空间中无限维动力系统的指数吸引子，并给出其显式分形维数。该方法结合了挤压性质与巴拿赫空间有限维子空间的覆盖，从而推广了在希尔伯特空间中建立的方法。所构造的指数吸引子具有显式分形维数，该维数不依赖于熵数，而仅取决于线性部分的谱和非线性部分的利普希茨常数。对于巴拿赫空间中的泛函微分方程，该方法尤为有效；在这类方程中，可以采用线性部分的态分解来证明挤压性质。本文将理论结果应用于滞后泛函微分方程和滞后反应扩散方程。

关键词 指数吸引子、巴拿赫空间、挤压性质、分形维数、时滞

1 引言

无限维动力系统的指数吸引子是相空间中的紧子集，具有有限的分形维数，且正向不变，并以指数速率吸引所有有界

*通讯作者。电子邮箱：caraball@us.es（Tom´as Caraballo）。

子集。众所周知，若指数吸引子存在，则其中包含全局吸引子。尽管指数吸引子可能比全局吸引子大，但由于收敛速度呈指数级，它们在扰动下比全局吸引子更加稳健。因此，在研究无限维非线性动力系统的渐近行为时，尤其是收敛速度较快的系统，它们发挥着重要作用。Eden、Foias、Nicol(a)enco 和 Temam [4] 首次提出了指数吸引子的概念，其理论建立在希尔伯特空间中的挤压性质之上。

然而，现实建模中有许多定义在巴拿赫空间上的演化方程，例如时滞微分方程 [8] 和时滞偏微分方程 [12]。因此，一个自然而然的问题是：如何为巴拿赫空间中的无限维系统构造指数吸引子？Efendiev、Miranville 和 Zelik [3, 5] 采用了半群在两个不同巴拿赫空间之间的所谓平滑性质，来证明巴拿赫空间中系统的指数吸引子和一致吸引子的存在性。这种方法也被广泛用于估计分形维数以及构造各种演化方程的指数吸引子，参见例如 [1, 3, 7, 6, 11, 10] 及其中的参考文献。

需要指出的是，在近期的一项工作 [1], 中，作者将 [3, 5] 中确立的结果推广到了巴拿赫空间中时间连续的渐近紧演化过程情形；这一结果被用于研究近期工作 [11, 10] 中的非自治滞后泛函微分方程的回拉指数吸引子，以及 [?]中的非自治 Chafee-Infante 方程和非自治耗散波动方程。尽管如此，这些工作中的构造通常无法给出分形维数的显式上界，因为它取决于另一个嵌入空间的选择，而该空间可能因空间而异。此外，维数估计取决于两个空间之间的熵数，而要获得其显式上界通常相当困难。事实上， [10],中的作者指出，只有对于标量方程，嵌入 $C \hookrightarrow C^1$ 的熵数才是显式已知的，由此可以估计指数吸引子的分形维数。因此，一个自然而然的问题是：我们能否为巴拿赫空间中的系统构造分形维数具有显式上界的指数吸引子，且这些上界仅取决于系统的内在特征？本文通过将 Eden、Foias、Nicolaenko 和 Temam 的工作 [4] 推广到巴拿赫空间，肯定了这一点。

本文的结构安排如下。第2节回顾无限维动力系统理论中的基本概念和结果，并提出在巴拿赫空间中为无限维动力系统构造具有显式分形维数的指数吸引子的步骤。第3节通过

将这些理论结果应用于自治滞后泛函微分方程和滞后反应扩散方程所生成的系统，说明所得理论结果的有效性。最后，我们总结全文，并指出未来研究的一些潜在方向。

2 指数吸引子

首先，我们介绍一些预备知识，以建立主要结果，包括演化过程、指数吸引子的定义以及若干假设。

定义 2.1. 设 X 为一个巴拿赫空间， $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ 。映射族 $S(t)$: $X \to X$ 称为半群，若满足

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \\ S(0) &= \mathrm{Id}_X, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，$\mathrm{Id}_X : X \to X$ 表示 X 上的恒等映射。

现在给出指数吸引子的如下定义。

定义 2.2. 设 $S(t)$ 是 X 中的一个半群。非空紧子集 $\mathcal{M}$ 称为半群 $S(t)$ 的指数吸引子，若

(i) $\mathcal{M}$ 正向不变，即

$$S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

(ii) $\mathcal{M}$的分形维数 $\dim_f(\mathcal{M})$ 有界，其中 $\dim_f(\mathcal{M})$ 定义为

$$\dim_f(\mathcal{M}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(N_\varepsilon^X(\mathcal{M})\right)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

且 $N_\varepsilon^X(\mathcal{M})$ 表示以 X 中的点为中心、包含于 X 的 ε-球覆盖 $\mathcal{M}$ 所需的最少数量。(iii) $\mathcal{M}$ 以指数速度吸引所有有界集，即存在常数 $\omega > 0$ ，使得对于每个有界子集 $D \subset X$ 以及每个 $t \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\omega t} \operatorname{dist}_X(S(t)D, \mathcal{M}) = 0,$$

其中，$\operatorname{dist}_X(A, B)$表示 A 与 B之间的豪斯多夫半距离，定义为

$$\operatorname{dist}_X(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \qquad for\ A, B \subseteq X.$$

对于巴拿赫空间 X中的有限维子空间 F，分别用 $B_r^F(x)$和 $B_r(x)$表示 F和 X 中以 x 为中心、半径为 r 的球，即 $B_r^F(x) = \{y \in F | \|y - x\| \leq r\}$ 且$B_r(x) = \{y \in X | \|y - x\| \leq r\}$。为后续使用，我们引入以下关于有限维巴拿赫空间中球的覆盖引理，该引理已在 [9]中得到证明。

引理 2.1. 对于巴拿赫空间 X 的任意有限维子空间 F，我们有

$$N\left(r_1, B_{r_2}^F\right) \leq m2^m \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^m, \tag{2.2}$$

对于所有 $r_1 > 0$、$r_2 > 0$，其中 $m = \dim F$，且 $N\left(r_1、B_{r_2}^F\right)$ 是在度量空间 X 中，用半径为 r_1 的球覆盖 $B_{r_2}^F$ 所需的最少球数。

为了构造指数吸引子，我们需要对半群 $S(t)$ 作出以下假设。

$(\mathcal{H}_1)$ 对于任意 $t \in \mathbb{R}^+$，映射 $S(t) : X \to X$ 是连续的。此外，对于半群 $S(t)$，存在一个有界集 $\mathcal{B} \subset X$，它吸收 X 的所有有界子集；也就是说，对于所有有界子集 $D \subset X$，存在 $T_D > 0$，使得

$$S(t)D \subset \mathcal{B} \quad \text{for all } t \geq T_D.$$

$(\mathcal{H}_2)$ 有界集 $\mathcal{B} \subset X$ 是正不变的，即对于所有 $t \in \mathbb{R}^+$， $S(t)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$。

$(\mathcal{H}_3)$ T 这里有一个有限维投影 $P:\ X \to PX$，其维数有限

$$\Lambda = \dim\{PX\} \tag{2.3}$$

并且存在三个正常数 M_1、M_2、M_3，以及两个常数 λ_0 和 λ_1，使得

$$\|PS(t)\varphi - PS(t)\psi\| \leq M_1 e^{\lambda_0 t} \|\varphi - \psi\| \tag{2.4}$$

and

$$\|(I - P)S(t)\varphi - (I - P)S(t)\psi\| \leq (M_2 e^{\lambda_1 t} + M_3 e^{\lambda_0 t}) \|\varphi - \psi\| \tag{2.5}$$

对于任意 $t \geq 0$，以及 φ、$\psi \in \mathcal{B}$。

W我们首先为离散半群 $\{S(n)\}$ 构造指数吸引子 .

定理 2.1. 设 $\{S(n)\}$ 是 X 中的一个离散半群，且假设 $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$ 对离散时间 $t \in \mathbb{Z}$成立。此外，假设存在 $\alpha > 0$ 使得$\zeta := \alpha e^{\lambda_0} + M_2 e^{\lambda_1} + M_3 e^{\lambda_0} < 1$。那么，存在一个指数吸引子 $\mathcal{M}$，它对应于半群$\{S(n)\}$，且其分形维数有界于

$$\dim_f \mathcal{A} \leq \frac{\Lambda[\ln \Lambda + \ln(2 + \frac{M_1}{\alpha})]}{-\ln \zeta} < \infty. \tag{2.6}$$

证明。1) $S(m)\mathcal{B}$ 的覆盖。我们通过归纳定义满足以下性质的集合族 $W^m, m \in \mathbb{N}$，来构造 $U(m)\mathcal{B}$ 的覆盖

$$\begin{cases} (W1) & W^m \subset S(m)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}, \\ (W2) & \sharp W^m \leq [\Lambda 2^\Lambda \left(1+\frac{M_1}{\alpha}\right)^\Lambda]^m, \\ (W3) & S(m)\mathcal{B} \subset \bigcup_{u\in W^m} B_{\zeta^m R_\mathcal{B}}(u), \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $\sharp W^m$ 表示 W^m的元素个数。

我们先考虑 $m=1$ 的情形，即构造 $S(1)\mathcal{B}$像集的一个覆盖。由于 $\mathcal{B}$ 由 $(\mathcal{H}_1)$ 有界，因此存在常数 $R_\mathcal{B}$，使得 $R_\mathcal{B} := \sup_{u\in\mathcal{B}} \|u\|_X$。于是，对于任意 $u_1 \in \mathcal{B}$，有 $\mathcal{B} \subset B_{R_\mathcal{B}}(u_1)$。对于任意 $u \in \mathcal{B} \cap B(u_1, R_\mathcal{B})$，由 $(\mathcal{H}_3)$ 可得

$$\|PS(1)u - PS(1)u_1\| \leq M_1 e^{\lambda_0} R_\mathcal{B}, \tag{2.8}$$

and

$$\|(I-P)S(1)u - (I-P)S(1)u_1\| \leq (M_2 e^{\lambda_1} + M_3 e^{\lambda_0}) R_\mathcal{B}. \tag{2.9}$$

由引理 2.1，可找到 $y_1^1, \ldots, y_1^{n_1} \in PS(1)\mathcal{B}$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$B_{PX}\left(PS(1)u_1, M_1 e^{\lambda_0} R_\mathcal{B}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} B_{PX}\left(y_1^j, \alpha e^{\lambda_0} R_\mathcal{B}\right) \tag{2.10}$$

with

$$n_1 \leq \Lambda 2^\Lambda \left(1+\frac{M_1}{\alpha}\right)^\Lambda, \tag{2.11}$$

其中 Λ 是 PX 的维数，并记 $B_{PX}(y,r)$ 为 PX 中半径为 r、中心为 y 的球。令

$$u_1^j = y_1^j + (I-P)S(1)u_1 \tag{2.12}$$

对于 $j = 1, \ldots, n_1$ 和 $W^1 = \{u_1^1, u_1^2, \cdots, u_1^{n_1}\}$。于是，对于任意 $u \in \mathcal{B} \cap B(u_1, R_\mathcal{B})$，存在一个 j，使得

$$\begin{aligned} \left\|S(1)u - u_1^j\right\| &\leq \left\|PS(1)u - y_1^j\right\| + \|(I-P)S(1)u - (I-P)S(1)u_1\| \\ &\leq \left(\alpha e^{\lambda_0} + M_2 e^{\lambda_1} + M_3 e^{\lambda_0}\right) R_\mathcal{B} \\ &\leq \zeta_1 R_\mathcal{B}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

这表明对于 $m=1$，条件 $(W3)$ 成立。此外，根据 W^1 的定义，显然它满足 $(W1)$ 和 $(W2)$。至此，情形 $m=1$ 的证明完成。

假设满足 (2.7) 的集合 W^l 已经针对所有 $m \leq l$ 构造完成，即存在覆盖

$$S(l)\mathcal{B} \subset \bigcup_{u\in W^l} B_{\zeta^l R_\mathcal{B}}(u). \tag{2.14}$$

接下来，我们构造满足 (2.7) 的 W^{l+1} 的覆盖。根据半群性质，我们有

$$S(l+1)\mathcal{B} = S(1)S(l)\mathcal{B} \subset \bigcup_{u\in W^l} S(1)B_{\zeta^l R_{\mathcal{B}}}(u), \tag{2.15}$$

即 $S(l+1)\mathcal{B}$可由 $\bigcup_{u\in W^l} S(1)B_{\zeta^l R_{\mathcal{B}}}(u)$ 覆盖。下面我们构造 $\bigcup_{u\in W^l} S(1)B_{\zeta^l R_{\mathcal{B}}}(u)$ 的一个覆盖。

令 $u_l \in W^l$。由归纳假设（$W1$）和（$W3$）可得

$$u_l \in S(l)\mathcal{B} \subset \bigcup_{u\in W^l} B_{\zeta^l R_{\mathcal{B}}}(u). \tag{2.16}$$

因此，对于任意 $u \in \mathcal{B} \cap \bigcup_{u\in W^l} S(1)B_{\zeta^l R_{\mathcal{B}}}(u)$，由（$\mathcal{H}_3$）可得

$$\|PS(1)u - PS(1)u_l\| \le M_1 e^{\lambda_0}\zeta^l R_{\mathcal{B}}, \tag{2.17}$$

and

$$\|(I-P)S(1)u - (I-P)S(1)u_l\| \le (M_2 e^{\lambda_1} + M_3 e^{\lambda_0})\zeta^l R_{\mathcal{B}}. \tag{2.18}$$

由引理 2.1，可找到 $y_l^1, \ldots, y_l^{n_l} \in S(1)S(l)\mathcal{B}$，使得

$$B_{PX}\left(PS(1)u_l, \alpha e^{\lambda_0} R_{\mathcal{B}}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n_l} B_{PX}\left(y_l^j, M_1 e^{\lambda_0}\zeta^l R_{\mathcal{B}}\right) \tag{2.19}$$

with

$$n_l \le \Lambda 2^{\Lambda}\left(1 + \frac{M_1}{\alpha}\right)^{\Lambda}, \tag{2.20}$$

其中 Λ 是 PX 的维数。令

$$u_l^j = y_l^j + (I-P)S(1)u_l \tag{2.21}$$

对于 $j = 1, \ldots, n_l$，存在一个 j，使得

$$\begin{aligned} \left\|S(1)u - u_l^j\right\| &\le \left\|PS(1)u - y_l^j\right\| + \|(I-P)S(1)u - (I-P)S(1)u_l\| \\ &\le \left(\alpha e^{\lambda_0} + M_2 e^{\lambda_1} + M_3 e^{\lambda_0}\right)\zeta^l R_{\mathcal{B}} = \zeta^{l+1} R_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

这意味着 $\bigcup_{u\in W^l} S(1)B_{\zeta^l R_{\mathcal{B}}}(u)$ 可由半径为 $\zeta^{l+1}R_{\mathcal{B}}$、中心为 $\{u_l^1, u_l^2, \cdots, u_l^{n_l}\}$ 的球覆盖，因此 ($W3$) 成立。将新的中心集合记为 W^{l+1}。由归纳假设可得 $\sharp W^l \le [\Lambda 2^{\Lambda}\left(1 + \frac{M_1}{\alpha}\right)^{\Lambda}]^l$，从而得到 $\sharp W^{l+1} \le n_l \sharp W^l \le [\Lambda 2^{\Lambda}\left(1 + \frac{M_1}{\alpha}\right)^{\Lambda}]^{l+1}$，并证明了 ($W2$)。根据中心集合 W^{l+1} 的构造，我们可以看出 $W^{l+1} \subset S(1)S(l)\mathcal{B} = S(l+1)\mathcal{B}$，由此完成性质 ($W1$) 的证明。

2) $\{S(n)\}$ 的随机指数吸引子的构造。我们定义 $E^1 := W^1$ 并设

$$E^{n+1} := W^{n+1} \cup S(1)E^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.23}$$

于是，根据集合 $E^n(k)$ 的定义、集合 $W^n(k)$ 的性质以及吸收集 $\mathcal{B}$ 的正不变性可知，集合族 $E^n, n \in \mathbb{Z}^+$ 满足

(E1) $S(1)E^{n-1} \subset E^n$, $E^n \subset S(n)\mathcal{B}$, (E2) $E^n = \bigcup_{i=0}^n S(l)$
W^{n-i}, $\sharp E^n \leq \sum_{i=0}^n (\Lambda 2^\Lambda \left(1 + \frac{M_1}{\alpha}\right)^\Lambda)^i$, (E3) $S(n)$
$\mathcal{B} \subset \bigcup_{u \in E^n} B_{\zeta^n R_{\mathcal{B}}}(u)$.

基于集合族 E^n，我们定义 $\mathcal{M} := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E^n}$ ，并证明它为半群 $\{S(n)\}$ 的一个指数吸引子。

正不变性 性 $\mathcal{M}$。由性质（$E1$）可知，对所有 $l \in \mathbb{Z}^+$，我们有 e

$$S(l) \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} S(l)E^n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E^{n+l} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E^n. \tag{2.24}$$

得益于（$\mathcal{H}_1$）中的连续性，我们可以对（2.24）两边取闭包，从而得到

$$S(l)\mathcal{M} := S(l)\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E^n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} S(l)E^n} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E^{n+l}} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E^n} = \mathcal{M}. \tag{2.25}$$

$\mathcal{M}$的紧性和有限维性。我们将在下文证明，集合$\mathcal{M}$ 非空、相对紧且具有有限分形维数。由（$E1$）可知，对于任意$l \in \mathbb{Z}^+$ 和 $m \geq l+1$，有

$$E^l \subset S(l)B. \tag{2.26}$$

因此，对于任意 $l \in \mathbb{Z}^+$ ，有

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E^n = \bigcup_{n=0}^{l} E^n \cup \bigcup_{n=l+1}^{\infty} E^n \subset \bigcup_{n=0}^{l} E^n \cup S(l)\mathcal{B}. \tag{2.27}$$

由于 $\zeta < 1$，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得

$$\zeta^{l+1} R_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon < \zeta^l R_{\mathcal{B}}, \tag{2.28}$$

结合这一事实

$$S(l)\mathcal{B} \subset \bigcup_{u\in W^l} B_\varepsilon(u). \tag{2.29}$$

这表明 覆盖 $bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}E^n$ 所需的 X 中 ε 个球的数量估计为

$$\begin{aligned} N_\varepsilon\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E^n\right) &\leq \sharp\left(\bigcup_{n=0}^{l} E^l\right) + \sharp W^l \leq (l+1)\sharp E^l + (\Lambda 2^\Lambda \left(1 + \frac{M_1}{\alpha}\right)^\Lambda)^l \\ &\leq (l+1)^2[\Lambda 2^\Lambda \left(1 + \frac{M_1}{\alpha}\right)^\Lambda]^l. \end{aligned} \tag{2.30}$$

这证明了$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}E^n$ 在 X 中的预紧性，由此可直接推出闭包 $\mathcal{M}:=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}E^n}$ 在 X 中是紧的，因为 X 是巴拿赫空间。

由 (2.28) 和 (2.30) 可知，集合 $\mathcal{M}$ 的分形维数可估计为

$$\begin{aligned}\dim_f\mathcal{M}&=\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{\ln N_\varepsilon(\mathcal{M})}{-\ln\varepsilon}\\&\le\limsup_{l\to\infty}\frac{\ln(l+1)^2+\ln[\Lambda 2^\Lambda\left(1+\frac{M_1}{\alpha}\right)^\Lambda]^l}{-\ln(\zeta^l R_{\mathcal{B}})}\\&=\frac{\Lambda[\ln\Lambda+\ln(2+\frac{M_1}{\alpha})]}{-\ln\zeta}<\infty.\end{aligned}\tag{2.31}$$

3) $\mathcal{M}$ 的指数吸引。接下来需要证明，集合 $\mathcal{M}$ 在时刻 $l\in\mathbb{Z}^+$ 指数吸引 X 的所有有界子集。由假设 ($\mathcal{H}_1$) 可知，对于任意有界子集 $D\subset X$，存在一个 $n_D\in\mathbb{Z}^+$，使得对于所有 $l\ge n_D$，都有 $S(l)D\subset\mathcal{B}$。若 $l\ge n_D+1$，即 $l\ge n_D+n_0$，其中某个 $n_0\in\mathbb{N}$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_X\left(S(l)D,\mathcal{M}\right)&=\operatorname{dist}_X\left(S(l)D,\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}E^n}\right)\\&\le\operatorname{dist}_X\left(S\left(n_0\right)S\left(l-n_0\right)D,\bigcup_{n=0}^{\infty}E^n\right)\\&\le\operatorname{dist}_X\left(S\left(n_0\right)\mathcal{B},\bigcup_{n=0}^{\infty}E^n\right)\\&\le\operatorname{dist}_X\left(S\left(n_0\right)\mathcal{B},E^{n_0}\right)\\&\le\zeta^{n_0}R_{\mathcal{B}}\le ce^{-\omega n}\end{aligned}\tag{2.32}$$

其中某些常数为 $c\ge0$ 和 $\omega>0$。证毕。 □

采用与 [1], 中定理 3.2 的证明相同的步骤，可得关于巴拿赫空间中连续半群存在性的以下结果。

定理 2.2. 对于巴拿赫空间 X 上的上述半群 $S(t)$，假设条件 (H_1)-(H_3) 成立。则该半群 $\{S(t)\}$ 存在一个指数吸引子 $\mathcal{M}$，且其分形维数有界于

$$\dim_f\mathcal{A}\le\frac{\Lambda[\ln\Lambda+\ln(2+\frac{M_1}{\alpha})]}{-\ln\zeta}<\infty.\tag{2.33}$$

3 应用

本节关注将上述已建立的理论结果应用于滞后泛函微分方程（RFDE）和时滞反应扩散方程。

3.1 滞后泛函微分方程

考虑以下非线性自治滞后泛函微分方程

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bx(t-\tau) + f(x_t), \\ x_0 &= \phi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, b 为常数, r 表示时滞, f 是从 X 到 $\mathbb{R}^n$的连续非线性映射。初始条件为 $\phi \in \mathcal{C}$, $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, 其中 $\mathcal{C}$ 是从 $[-r,0]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续函数所构成的巴拿赫空间，赋予上确界范数$\|\phi\|_X = \sup_{\theta\in[-r,0]} |\phi(\theta)|$，对于任意 $\phi \in X$，而 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^n$的通常范数。为简化记号，将 (3.1) 的线性部分定义为从 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射 L，其定义为

$$L\phi = A\phi(0) + b\phi(\tau) \tag{3.2}$$

对于任意 $\phi \in X$。

由于 L 是线性的，存在一个 $n \times n$ 矩阵 $\eta(\theta)$ $-r \le \theta \le 0$，其元素有界变差，且经过归一化，使得 η 在 $(-r, 0)$ 上左连续，并且 $\eta(0) = 0$，使得，

$$L\phi = \int_{-r}^{0} d[\eta(\theta)]\phi(\theta), \quad \phi \in X. \tag{3.3}$$

用 u_t^ϕ 表示线性部分的解

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Lx_t, \\ u_0 &= \phi. \end{aligned} \tag{3.4}$$

那么，由 $u_t^\phi = S(t)\phi$ 定义的解算子构成一个强连续半群，其无穷小生成元为

$$\begin{aligned} A\phi &= \frac{d\phi}{d\theta}, \\ \mathcal{D}(A) &= \left\{ \phi \in C : \frac{d\phi}{d\theta} \in C, \frac{d\phi}{d\theta}(0) = \int_{-r}^{0} d[\eta(\theta)]\phi(\theta) \right\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

此外，当 $t \geq r$ 时， $S(t)$ 是紧的。根据 [8] 中第 7 章的引理 2.1，由方程 (3.5) 定义的算子 A 只有点谱，即 $\sigma(A) = P\sigma(A)$，并且 λ 属于 $\sigma(A)$ 当且仅当 λ 满足特征方程

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta). \tag{3.6}$$

记 $\Sigma = \{\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots > \varrho_m\}$ 为方程 (3.6) 的特征值有限集，其重数为 $n_1, n_2, \cdots$，其中 ϱ_1 定义为

$$\varrho_1 = \max\left\{ \operatorname{Re}\lambda : \Delta(\lambda)\xi = \left[\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)\right]\xi = 0 \right\}. \tag{3.7}$$

由 [8] 中第 7 章的定理 6.1 和引理 2.1 可知，对于任意给定的 $\varrho_m < 0, m \geq 1$，存在一个

$$k_m = n_1 + n_2 + \cdots + n_m \tag{3.8}$$

维子空间 $X_{k_m}^U$，使得

$$X = X_{k_m}^U \bigoplus X_{k_m}^S$$

X 是由 ϱ_m 对其作出的分解。令 P_{k_m} 和 Q_{k_m} 分别为 X 在 $X_{k_m}^U$ 和 $X_{k_m}^S$ 上的投影，即 $X_{k_m}^U = P_{k_m}X$, $X_{k_m}^S = (I - P_{k_m})X = Q_{k_m}X$。根据定义$P_{k_m}$ 和 Q_{k_m}，存在正常数 K，使得

$$\|S(t)Q_{k_m}x\| \leq Ke^{\varrho_m t}\|x\|, \quad t \geq 0. \tag{3.9}$$

为证明挤压性质，我们将 $U(t)$ 的定义域扩展到以下由一些不连续函数构成的空间

$$\hat{C} = \left\{ \phi : [-r, 0] \to X; \phi\|_{[-r,0)} \quad \text{is continuous and } \lim_{\theta \to 0^-} \phi(\theta) \in X \quad \text{exists} \right\} \tag{3.10}$$

并引入 以下在 [2中建立的常数变易公式的非正式表述]

$$u_t^{\phi} = S(t)\phi + \int_0^t S(t-s)X_0 f(u_s)ds, \quad t \geq 0, \tag{3.11}$$

其中 X_0: $[-r, 0] \to B(X, X)$ 由 $X_0(\theta) = 0$ 给出，当且仅当 $-r \leq \theta < 0$ 且 $X_0(0) = Id$。

注 3.1. 一般而言，由 (3.11) 定义的解半群在不连续函数上没有定义，且公式中的积分并非相空间中的积分，因而没有定义。不过，若作适当解释，可以看出 (3.11) 确实是有意义的。详情见 *[2]* 第 144 和 145 页。

在本文余下部分，我们始终假设 $\varrho_1 < 0$，因此根据 [8]第 24 页的定理 6.2，可得以下结果。

引理 3.1。 若 $\varrho_1 < 0$，则存在正常数 $\gamma < -\varrho_1$ 和 $K_0(\gamma)$，使得 t

$$\|S(t)\phi\| < K_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}\|\phi\| \tag{3.12}$$

对所有 $t \geq 0$均成
立。

将由 (3.1) 生成的非线性动力系统定义为 $\Phi(t)\phi = u_t^{\phi}$，对任意 $\phi \in X$均成立。由 [8]第 24 页上的定理 2.2 可知， $\Phi(t)$：对任意 $t \in \mathbb{R}^+$， $X \to X$ 都是连续的。下文将为 Φ构造指数吸引子。我们首先证明 Φ 存在一个正不变吸收集，即 $(\mathcal{H}_1)$ 和 $(\mathcal{H}_2)$ 成立。我们对非线性项 f 作如下假设。

假设 A1 $\|f(\phi_1) - f(\phi_2)\| \leq L_f \|\phi_1 - \phi_2\|$ 对任意 $\phi_1, \phi_2 \in X$.

定理 3.1。假设假设 A1 成立且 $\varrho_1 < 0$。取 $0 < \gamma < -\varrho_1$ 使得 $K_0 < 1$，并假设 $K_0 L_f - \gamma < 0$，则动力系统 Φ 存在一个不变吸收集 $\mathcal{B}$，其定义为

$$\mathcal{B} = \{\phi \in C | \|\phi\| \leq \frac{1}{1-K_0}[\frac{K_0 L_f f(0)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma - K_0 L_f}]\}. \tag{3.13}$$

证明。由式 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}
\|u_t\| \leq & \|(S(t)\phi)\| + \| \int_0^t [S(t-s)X_0 f(u_s)]\,\mathrm{d}s\| \\
\leq & K_0 e^{-\gamma t}\|\phi\| + K_0 L_f \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}(\|u_s\| + f(0))\mathrm{d}s \\
\leq & K_0 e^{-\gamma t}\|\phi\| + K_0 L_f \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|u_s\|\mathrm{d}s + \frac{K_0 L_f f(0)(1-e^{-\gamma t})}{\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

将式 (3.14) 两边乘以 $e^{\gamma t}$，得到

$$e^{\gamma t}\|u_t\| \leq K_0\|\phi\| + K_0 L_f \int_0^t e^{\gamma s}\|u_s\|\mathrm{d}s + \frac{K_0 L_f f(0) e^{\gamma t}}{\gamma}. \tag{3.15}$$

应用 Gr¨onwall 不等式可得

$$e^{\gamma t}\|u_t\| \leq K_0\|\phi\| e^{K_0 L_f t} + \frac{K_0 L_f f(0) e^{\gamma t}}{\gamma} + \frac{e^{(\gamma - K_0 L_f)t}}{\gamma - K_0 L_f}, \tag{3.16}$$

因此

$$\begin{aligned}
\|u_t\| \leq & K_0\|\phi\| e^{(K_0 L_f - \gamma)t} + \frac{K_0 L_f f(0)}{\gamma} + \frac{e^{-K_0 L_f t}}{\gamma - K_0 L_f} \\
\leq & K_0\|\phi\| e^{(K_0 L_f - \gamma)t} + \frac{K_0 L_f f(0)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma - K_0 L_f}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

因此，在 $K_0L_f-\gamma<0$ 的情形下，对于任意 $\phi\in X$，存在一个 $t_{\|\phi\|}>0$，使得

$$\|u_t\|\leq\frac{1}{1-K_0}[\frac{K_0L_ff(0)}{\gamma}+\frac{1}{\gamma-K_0L_f}]. \tag{3.18}$$

也就是说， $\mathcal{B}$ 是 Φ的一个吸收集。事实上，对于任意有界子集 $D\subset X$，记$r_D=\sup_{u\in D}\|u\|_X$，若取$T_D=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{r_D\gamma}{(1-K_0)(\gamma-K_0L_f)K_0L_ff(0)(\gamma-K_0L_f)+\gamma}$，则有

$$\Phi(t)D\subset\mathcal{B}$$

对所有 $t\geq T_D$均成立。

不变性显然成立，因为对于任意 $\phi\in\mathcal{B}$，由(3.17)和(3.18)可得

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\phi\|=\|u_t\|&\leq K_0\|\phi\|e^{(K_0L_f-\gamma)t}+\frac{K_0L_ff(0)}{\gamma}+\frac{e^{-K_0L_ft}}{\gamma-K_0L_f}\\&\leq(\frac{K_0}{1-K_0}+1)[\frac{K_0L_ff(0)}{\gamma}+\frac{1}{\gamma-K_0L_f}]\\&\leq\frac{1}{1-K_0}[\frac{K_0L_ff(0)}{\gamma}+\frac{1}{\gamma-K_0L_f}].\end{aligned} \tag{3.19}$$

证明至此完成。 □

接下来，我们证明 Φ的挤压性质，即($\mathcal{H}_3$)成立。

定理 3.2. 设 P 为由(3.9)定义的有限维投影 P_{k_m}， K、 ϱ_m和 γ 分别由(3.7)、(3.8)和(3.12)定义，则有

$$\|P\Phi(t)\varphi-P\Phi(t)\psi\|\leq 2e^{(L_fK_0-\gamma)t}\|\varphi-\psi\| \tag{3.20}$$

and

$$\|(I-P)\Phi(t)\varphi-(I-P)\Phi(t)\psi\|\leq(Ke^{\varrho_mt}+\frac{KL_fK_0}{-\gamma+L_f-\varrho_m}e^{(L_f-\gamma)t})\|\varphi-\psi\| \tag{3.21}$$

对于任意的 $t\geq 0$、 φ和 $\psi\in\mathcal{B}$。

证明。对于任意的 φ、 $\psi\in X$，记 $y=\varphi-\psi$ 和 $w_t=\Phi(t)\varphi-\Phi(t)\psi=u_t^\varphi-u_t^\psi$。由(3.11) 可得

$$w_t=S(t)y+\int_0^tS(t-s)X_0[f(u_s^\varphi)-f(u_s^\psi)]ds,\quad t\geq 0. \tag{3.22}$$

对 (3.22) 两边进行 $I-P$ 投影，得到

$$\begin{aligned}\|(I-P)w_t\|_X=&\|(I-P)S(t)y+\int_0^t(I-P)S(t-s)X_0[f(u_s^\varphi)-f(u_s^\psi)]ds\|_X\\&\leq Ke^{\varrho_mt}\|y\|_X+L_fK_0\int_0^te^{-\gamma(t-s)}\|(I-P)w_s\|_Xds.\end{aligned} \tag{3.23}$$

将 (3.23) 两边乘以 $e^{\gamma t}$，得到

$$e^{\gamma t}\|(I-P)w_t\|_X \leq Ke^{(\varrho_m+\gamma)t}\|y\|_X + L_fK_0\int_0^t e^{\gamma s}\|(I-P)w_t\|_X ds. \tag{3.24}$$

应用 Gronwall不等式，可得

$$e^{\gamma t}\|(I-P)w_t\|_X \leq \|y\|[Ke^{(\varrho_m+\gamma)t} + \frac{KL_fK_0}{\varrho_m+\gamma-L_fK_0}(e^{(\varrho_m+\gamma)t} - e^{L_fK_0})], \tag{3.25}$$

这表明

$$\begin{aligned}\|(I-P)w_t\|_X \leq &\|y\|[Ke^{\varrho_m t} + \frac{KL_fK_0}{\varrho_m+\gamma-L_fK_0}(e^{\varrho_m t} - e^{(L_fK_0-\gamma)t})] \\ \leq &\|y\|[Ke^{\varrho_m t} + \frac{KL_fK_0}{-\gamma+L_fK_0-\varrho_m}e^{(L_fK_0-\gamma)t}].\end{aligned} \tag{3.26}$$

因此，第二部分对 $\lambda_0 = L_fK_0 - \gamma$、 $\lambda_1 = \varrho_m$、 $M_2 = K$ 和 $M_3 = \frac{KL_fK_0}{-\varrho_m-\gamma+L_fK_0}$ 成立。

随后 ，我们证明第一部分。由于 $S(t)y = PS(t)y + (I-P)S(t)y$，因此有

$$\|PS(t)y\|_X \leq \|S(t)y\| + \|(I-P)S(t)y\|_X. \tag{3.27}$$

对（3.11）两边取 P 的投影，并结合（3.27），可得

$$\begin{aligned}\|Pw_t\|_X =&\|S(t)y\| + \|(I-P)S(t)y\| + \int_0^t \|PS(t-s)X_0[f(u_s^\varphi) - f(u_s^\psi)]ds\|_X \\ \leq&(e^{-\gamma t} + e^{\varrho_m t})\|y\| + L_fK_0\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|Pw_t\|_X ds \\ \leq&2e^{-\gamma t}\|y\| + L_fK_0\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|Pw_t\|_X ds.\end{aligned} \tag{3.28}$$

将 (3.29) 两边乘以 $e^{\gamma t}$，得到

$$e^{\gamma t}\|Pw_t\|_X \leq 2\|y\| + L_fK_0\int_0^t e^{\gamma s}\|Pw_t\|_X ds. \tag{3.29}$$

应用 Gronwall不等式，得到

$$e^{\gamma t}\|Pw_t\|_X \leq 2\|y\|e^{L_fK_0 t}, \tag{3.30}$$

这表明

$$\|Pw_t\|_X \leq 2\|y\|e^{(L_fK_0-\gamma)t}. \tag{3.31}$$

因此，取 $M_1 = 2$ 和 $\lambda_0 = L_fK_0 - \gamma$，第一部分成立。 □

因此，由定理 2.2 可知，关于由 (3.1) 生成的非线性动力系统 Φ 的指数吸引子 $\mathcal{M}$ 的存在性，我们有如下结果。

定理 3.3. 设 k_m、 ϱ_1、 ϱ_m、 γ 和 K 分别由 (3.9)、(3.7) 和 (3.8) 定义， P 为有限维投影 P_{k_m} ，由 (3.12) 定义。假设定理 3.1 的条件成立。此外，假设存在 $\alpha > 0$ ，使得 $\zeta :$ $= \alpha e^{(L_f K_0 - \gamma)} + K e^{\varrho_m} + \frac{K L_f K_0}{-\gamma + L_f K_0 - \varrho_m} e^{(L_f K_0 - \gamma)} < 1$，那么 (3.1) 存在一个指数吸引子 $\mathcal{M}$，其分形维数有一个上界

$$\dim_f \mathcal{M} \leq \frac{k_m[\ln k_m + \ln(2 + \frac{2}{\alpha})]}{-\ln \zeta} < \infty. \tag{3.32}$$

注 3.2. 由于 ϱ_1 和 ϱ_m 分别表示方程 (3.1) 的线性部分 L （其中包含时滞效应）的第一和第 m个特征值，我们可以看出，方程 (3.1) 的指数吸引子 $\mathcal{M}$ 的豪斯多夫维数取决于时滞，并通过线性部分 L 的特征值分布体现出来。此外，由 (3.32) 可知，分形维数取决于指数二分常数、非线性项的利普希茨常数以及线性部分 L的谱隙，这表明全局吸引子 $\mathcal{M}$ 的分形维数可以通过多种参数灵活调节。

下面给出情形 $m = 1$下全局吸引子 $\mathcal{M}$ 的分形维数的一个特殊情形。

推论 3.1. 令 k_m、 K_0、 ϱ_m、 γ和 K分别由 (3.9)、(3.7) 和 (3.8) 定义，令 P为有限维投影， P_{k_m} 由 (3.12) 定义。假设定理 3.1 的条件成立，且 $k_1 = 1$。此外，假设存在 $\alpha > 0$ 使得 $\zeta := \alpha e^{(L_f K_0 - \gamma)} + K e^{\varrho_1} + \frac{K L_f K_0}{-\gamma + L_f K_0 - \varrho_1} e^{(L_f K_0 - \gamma)} < 1$，则 (3.1) 存在一个指数吸引子 $\mathcal{M}$，其分形维数具有上界

$$\dim_f \mathcal{M} \leq \frac{\ln(2 + \frac{2}{\alpha})}{-\ln[(\alpha + K)e^{(L_f K_0 + \varrho_1)} + K e^{\varrho_1}]} < \infty. \tag{3.33}$$

3.2 滞后反应-扩散方程

本小节旨在研究滞后反应-扩散方程的指数吸引子的存在性。我们考虑有界区域上具有狄利克雷边界条件的以下自治方程

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - a u(x,t) - b u(x,t-r) + f(u(x,t-r)), 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t \geq 0, \\ u(x,t) = \phi(t)(x), 0 \leq x \leq \pi, -r \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

其中 a、 b 和 r 为正常数。记 $H = L^2(0,\pi)$，其内积为 $(\xi,\eta) = \int_0^\pi \xi(x)\eta(x)dx$，范数为 $\|\xi\|_H = [\int_0^\pi \xi^2(x)dx]^{1/2}$。对于任意 ξ、 $\eta \in H$，以及 $X = C([-r,0],H)$，表示从 $[-r,0]$ 到 H 的连续函数空间，并赋予上确界范数 $\|\phi\|_X = \sup_{\theta \in [-r,0]} \|\phi(\theta)\|_H$

对于任意 $\phi \in X$。为了在抽象半群框架中设定解，我们定义 $A: H \to H$ 为

$$Ay = \ddot{y} \tag{3.35}$$

定义域为 $\mathrm{Dom}(A) = \{y \in C^2([0,\pi]);\ y(0) = y(\pi) = 0\}$, $L: X \to H$ 由

$$L\phi \triangleq -a\phi(0) - b\phi(-r) \tag{3.36}$$

对任意 $\phi \in C$ 和 $A_U:\ X \to X$ 由

$$A_U\phi = A\phi(0) + L\phi \tag{3.37}$$

对任意 $\phi \in X$。众所周知，$A - aI$ 在 H 上生成一个解析紧半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$，且 [12] 在 H 上生成半群 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$。此外，我们还假设 f满足利普希茨条件假设 A2。

由 [12] 定理 2.6 可知，(3.34) 存在一个整体解 $u^{\phi}(\cdot): [-r,\infty] \to H$，使得当 $t \in [-r,0]$ 时，$u(t)^{\phi} = \phi(t)$，并且

$$u^{\phi}(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)\left[L\left(u_s^{\phi}\right) + f\left(u_s^{\phi}\right)\right] ds, \tag{3.38}$$

当 $t > 0$时。

定义 $\Phi: \mathbb{R} \times X \to X$，由 $\Phi(t)\phi = u_t^{\phi}(\cdot)$ 给出。由于解的唯一性，它构成一个无限维动力系统。大量文献报道了半线性或非线性偏泛函微分方程（包括作为特例的方程 (3.34)）的吸引子的存在性。例如，[13] 研究了具有非稠密定义线性部分的自治情形。显然，(3.34) 满足 [13] 中的其他假设，因此由 [13] 中的命题 3.1 和定理 3.1 可知，(3.34) 存在一个全局吸引子，这意味着存在正不变吸收集，如下所述。

引理 3.2. 假设假设 A2 成立。则对于任意 $\phi \in X$，存在一个常数$\gamma > a$，使得方程 (3.34) 的积分解 $u_t^{\phi}(\cdot)$ 满足以下不等式

$$\|x_t\| \leq \frac{c_1 \mathrm{e}^{\gamma r}}{a - L_f \mathrm{e}^{\gamma r}} + \mathrm{e}^{\gamma r}\left(\|\phi\| - \frac{c_1}{a - L_f \mathrm{e}^{\gamma r}}\right)\mathrm{e}^{\left(L_f e^{\gamma r} - a\right)t}, \quad t \geq 0, \tag{3.39}$$

其中 $c_1 = \|f(0)\|$，$a \neq L_f e^{\gamma r}$。若 $a > L_f e^{\gamma r}$，则方程 (3.34) 存在一个非空的全局吸引子 $\mathcal{B}$。

现在，我们基于引理 3.2 中得到的全局吸引子 $\mathcal{B}$ 构造指数吸引子。由于 $\mathcal{B}$ 是正不变且吸收的，即满足 $(\mathcal{H}_1)$ 和 $(\mathcal{H}_2)$。我们只需估计引理 3.2 中得到的全局吸引子的维数。首先介绍

在 [12]中建立的方程 (3.37) 的线性部分 A_U 的以下状态分解结果。由 [12] 可知，线性部分 A_U 的特征值是以下特征方程的根

$$\Delta(\lambda)\xi = \left[A - \left(\lambda + a + be^{-\lambda r}\right) I\right] \xi = 0. \tag{3.40}$$

由于 A_U 是紧的，由 [12] 中的定理 1.2 (i) 可知， A_U 的谱均为点谱，我们将其记为 $\varrho_1 > \varrho_2 > \cdots$，重数为 n_1、n_2、$\cdots$，其中 ϱ_1 定义为

$$\varrho_1 = \max\left\{\operatorname{Re}\lambda : \Delta(\lambda)\xi = \left[A - \left(\lambda + a + be^{-\lambda r}\right) I\right] \xi = 0\right\}. \tag{3.41}$$

在下文中，我们始终假设 $b - a < 1$，由 [12] 中第 73 页的引理 1.13 可知，若 $a > 0$、$b > 0$ 和 $b - a < 1$，则 $\varrho_1 < 0$。对于任意给定的 $\varrho_m < 0$， $m \geq 1$，存在一个

$$k_m = n_1 + n_2 + \cdots + n_m \tag{3.42}$$

维子空间 $X^U_{k_m}$，使得

$$X = X^U_{k_m} \bigoplus X^S_{k_m}$$

是 X 关于 ϱ_m 的分解。令 P_{k_m} 和 Q_{k_m} 分别为 X 在 $X^U_{k_m}$ 和 $X^S_{k_m}$ 上的投影，即 $X^U_{k_m} = P_{k_m}X$、$X^S_{k_m} = (I - P_{k_m})X = Q_{k_m}X$。由定义 P_{k_m} 和 Q_{k_m} 可知

$$\|U(t)Q_{k_m}x\| \leq Ke^{\varrho_m t}\|x\|, \quad t \geq 0, \tag{3.43}$$

其中， K 和 γ 是一些正常数。

运用与定理 3.1 相同的方法，可以得到如下挤压性质。

定理 3.4. 设 P 为有限维投影， P_{k_m} 由（3.43）定义， ϱ_1、ϱ_m、γ 和K 分别由（3.41）和（3.43）定义，则有

$$\|P\Phi(t)\varphi - P\Phi(t)\psi\| \leq 2e^{(L_f + \varrho_1)t}\|\varphi - \psi\| \tag{3.44}$$

and

$$\|(I - P)\Phi(t)\varphi - (I - P)\Phi(t)\psi\| \leq (Ke^{\varrho_m t} + \frac{KL_f}{\varrho_1 + L_f - \varrho_m}e^{(L_f + \varrho_1)t})\|\varphi - \psi\| \tag{3.45}$$

对任意的 $t \geq 0$ 和 φ， $\psi \in \mathcal{M}$。

由定理 2.2 可得关于方程 (3.34) 的指数吸引子存在性的以下结果。

定理 3.5. 设 k_m、ϱ_1、ϱ_m、γ 和 K 分别由 (3.41)、(3.42) 和 (3.43) 定义，P 为有限维投影 P_{k_m}，由 (3.43) 定义。假设引理 3.2 的条件成立。此外，假设存在 $\alpha > 0$ 使得 $\zeta := \alpha e^{(L_f+\varrho_1)} + Ke^{\varrho_m} + \frac{KL_f}{\varrho_1+L_f-\varrho_m} e^{(L_f+\varrho_1)} < 1$，则方程 (3.34) 存在一个指数吸引子 $\mathcal{M}$，其分形维数有一个上界

$$\dim_f \mathcal{M} \leq \frac{k_m[\ln k_m + \ln(2+\frac{2}{\alpha})]}{-\ln \zeta} < \infty. \tag{3.46}$$

类似于推论 3.1，我们得到以下关于在情形 $\varrho_m = \varrho_1$ 下指数吸引子 $\mathcal{M}$ 存在性的推论。

推论 3.2. 设 ϱ_1 和 K 分别由 (3.41)、(3.42) 和 (3.43) 定义，P 为有限维投影，P_{k_1} 由 (3.43) 定义。假设引理 3.2 的条件成立，a、b、r 选取得当，使得 $k_1 = 1$。此外，假设存在 $\alpha > 0$，使得 $\alpha e^{(L_f+\varrho_1)} + Ke^{\varrho_1} + Ke^{(L_f+\varrho_1)} < 1$，则 (3.34) 存在一个指数吸引子 $\mathcal{M}$，其分形维数的上界为

$$\dim_f \mathcal{M} \leq \frac{\ln(2+\frac{2}{\alpha})}{-\ln[(\alpha+K)e^{(L_f+\varrho_1)} + Ke^{\varrho_1}]} < \infty. \tag{3.47}$$

4 结论

本文建立了一个新的框架，用于构造巴拿赫空间中具有显式分形维数的无限维动力系统的指数吸引子。所构造的指数吸引子具有显式分形维数，该维数不依赖于熵数，而仅取决于所研究方程的内在特征。对于能够采用线性部分态分解来证明挤压性质的巴拿赫空间中的泛函微分方程，该方法尤其有效。然而，我们仅考虑了自治情形。对于产生演化过程的非自治泛函微分方程，尤其是非线性项 f 依赖于时间的情形，即 $f = f(t, u_t)$，本文采用的半群方法可能不再有效，问题也会困难得多。我们将在后续论文中研究这一问题。

通常，随机效应普遍存在于数学建模中。因此，另一个问题是：对于受随机效应扰动的偏泛函微分方程，即随机偏泛函微分方程（SPFDEs），是否存在具有明确分形维数的指数吸引子？事实上，甚至对于 SPFDEs 在何种条件下生成随机动力系统这一问题，人们也尚未得到完美解决，更不用说状态分解和指数二分性了。这一问题在未来也值得投入大量精力进行研究。

致谢。本研究得到中国博士后科学基金（2019TQ0089）和国家留学基金管理委员会（202008430247）的共同资助。T. Caraballo 的研究还得到西班牙科学与创新部（MCI）、国家研究机构（AEI）、欧洲区域发展基金（FEDER）在项目 PID2021-122991NB-C21 下，以及安达卢西亚自治区政府和 FEDER 在项目 P18-FR-4509 下的部分资助。

本研究是在 Wenjie Hu 作为访问学者访问塞维利亚大学期间完成的。他谨向数学系的工作人员致谢，感谢他们的热情接待，并感谢大学在其访问期间提供的优良设施和支持。

参考文献

[1] Carvalho A.N., Sonner S.：巴拿赫空间中半群的指数吸引子：理论结果。Commun. Pure Appl. Anal., 12 (2013), 3047-3071。[2] Chow S. N., Mallet-Paret J.：积分平均与分岔。J. Differential Equations, 26 (1977), 112-159。[3] Czaja R., Efendiev M.：非自治方程的指数吸引子，第一部分：半线性抛物问题。J. Math. Anal. Appl., 381 (2011) 748-765。[4] Eden A., Foias C., Nicolaenko B., Temam R.：耗散演化方程的指数吸引子。应用数学研究丛书，John-Wiley，纽约，1994。[5] Efendiev M., Miranville A., Zelik S.：R3 中非线性反应扩散系统的指数吸引子。C. R. Acad. Sci., 330 (2000), 713-718。[6] Efendiev M., Yamamoto Y., Yagi A.：非自治耗散系统的指数吸引子。J. Math. Soc. Japan, 63 (2011), 647-673。[7] Efendiev M., Zelik S.：多孔介质方程的有限维与无限维指数吸引子。Proc. London Math. Soc., 96 (2008), 51-77。[8] Hale J. K., Lunel S. M. V.：泛函微分方程导论。Springer Science Business Media, 1993。[9] Man´e R.：论某些非线性映射的紧不变集的维数，载于：《数学讲义》，第898卷，施普林格出版社，柏林/纽约，1981年，第230-242页。[10] Mohamed A. H., Lassaad M., Sana N., Stefanie S.：变时滞微分方程的回拉指数吸引子。Disc. Cont. Dyn. Syst. B, 25 (2020), 301-319。

[11] Sana N., Mohamed A. H., Caraballo T.：时滞微分方程的回拉指数吸引子。Disc. Cont. Dyn. Syst. S, 14 (2021), 1345-1358。[12]Wu J.：偏泛函微分方程的理论与应用，施普林格出版社，纽约，1996。[13] You H., Yuan R.：具有有限时滞的某些偏泛函微分方程的全局吸引子。Nonlinear Anal. TMA, 72(2010), 3566-3574。