arXiv:2303.04189v1 [math.LO] 7 Mar 2023

亚纯向量场的模型论

RAHIM MOOSA

Abstract. 受亚纯向量场研究的启发，本文提出一种关于“配备泛导子的紧复流形”的模型论。我们用 *differential* CCM-*structure* 的概念将其精确化。本文给出了存在闭微分 CCM 结构的一阶公理化。由此得到的理论 DCCM，是微分闭域理论与紧复流形理论的共同扩张。本文着手研究 DCCM 的基础模型论，包括证明其完备性、量词消去、虚元消去和全超越性。本文证明，DCCM 中的有限维类型恰好是亚纯向量场的泛型类型。

1. Introduction

研究（常）代数微分方程组的模型论方法，是通过特征零下微分闭域的一阶理论 DCF_0 进行的。至少在自治情形下，当方程具有常参数时，这类方程组可以用几何方式表述为代数向量场；也就是说，一个射影代数簇 X 配备一个指向切空间的有理截面 $v\colon X \to TX$。事实上，DCF_0 的有限维片段基本上与代数向量场的双有理几何相一致。（例如，[13] 对从这一角度出发的 DCF_0 作了阐述。）在本文中，我希望将这一模型论框架推广到亚纯向量场；也就是说，此时 X 是一个不一定为代数簇的紧复流形，而 v 是全纯切丛的亚纯截面。DCF_0 建立在代数闭域（ACF_0）理论之上，而我所寻求的新理论则应建立在紧复流形的一阶理论之上。

大约三十年前，在 [17], 作为“扎里斯基型结构”概念发展的一部分，Zilber提出了紧复流形的模型论。与ACF_0 和DCF_0, 不同，Zilber为紧复流形提出的一阶理论既不是通过明确的公理化给出的，也不是作为某类自然代数结构的模型伴随给出的，而是作为特定结构的理论给出的：紧复流形 M 被视为一种一阶结构，其语言中对 M的每个有限笛卡尔幂中的每个闭复解析子集都设有一个谓词。Zilber证明，任何这类结构的理论都具有许多与其代数前身相同的性质：尤其是，它们都允许量词消去，且具有有限的莫利秩（不超过 M的维数）。后来，例如在Hrushovski [5] 和Pillay [15], 的研究中，人们开始普遍考虑所有紧复流形，乃至所有（约化的）紧复解析空间，并将它们一并纳入一个多类结构中；该结构的理论

Date: 2023年3月9日。R. Moosa 部分获得了 NSERC探索资助的支持。

如今称为CCM。与微分闭域类似，CCM是ACF_0的真扩张。与DCF_0, 类似，ACF_0所缺乏的几何稳定性理论的丰富内容，在CCM中大多都具备。例如，Zilber三分法的所有情形都出现了。

本文将介绍 CCM 与 DCF_0，的一个共同扩张，并将其称为 DCCM。下文第 8 节将会表明，DCCM 的有限维片段将精确刻画亚纯向量场的双亚纯几何。因此，它实现了本引言中提出的目标。

DCCM 理论是通过考察微分 CCM 结构得到的；其基本做法是在 CCM 中某个类型（例如 X）的泛点的可定义闭包上添加一个“导子”。之所以能够这样做，是因为 X 的泛点的可定义闭包中的元素可以视为从 X 到其他类型的亚纯映射，因而可以求导。详细说明见第 2 节和第 3 节。

本文的具体目标如下：

(1) 通过给出存在闭模型的几何一阶公理化，证明微分 CCM 结构的（全称）理论存在一个模型伴随，即 DCCM（定理 5.5）；(2) 证明 DCCM 是完备的，具有量词消去（命题 6.3）和虚元消去（定理 7.6），并给出可定义闭包与代数闭包的几何刻画（命题 6.4）；(3) 证明 DCCM 是完全超越的（定理 7.5），并给出非分叉独立性的几何刻画（推论 7.4）；以及 (4) 建立 DCCM 中有限维类型（在空集上）与亚纯向量场之间的对应关系（定理 8.3）。

这些证明主要是为 DCF_0 中已熟知的代数论证寻找几何类比。

研究 DCCM 的下一步（本文未尝试）是沿用 [16] 在 DCF_0 情形下的策略，为有限维类型建立典范基性质。这将涉及在 DCCM 中发展喷射空间理论；例如，参见 [1]，其中为带泛自同构的紧复流形（CCMA）完成了这项工作。无论如何，一旦建立了典范基性质，DCCM 中有限维极小类型的 Zilber 二分法就会有具体体现。届时，我们有理由预期，模型论在代数向量场中的许多近期应用（例如 [4] 和 [6] 中的工作）也能推广到亚纯向量场。

在任何给定的、值得关注的一阶理论中加入一个自同构，然后寻求其模型伴随，这一过程已有深入研究（参见 [2]）。而在这里，我们加入的则是“一个导子”。显然，这对任意理论都说不通。但依循此处提出的思路，或许值得探究一种更具普适性的框架，使得加入导子变得合理。一个可能的候选是 Zilber 意义上的扎里斯基型结构：它扩张了 ACF_0，并且允许有一个函子，将代数簇上的切空间构造推广到所有类型。

2. Meromorphic varieties and their tangent spaces

本节我想稍微放宽复解析空间模型论研究中通常采用的形式体系。这样一来，我们便可以直接在“可紧化”而非紧的情形下开展研究。

关于复解析几何的基本概念，我们推荐阅读 [3]。给定一个约化紧复解析空间 X，我们所说的 X 上的扎里斯基拓扑，是指由 X 的闭复解析子集构成的（诺特）拓扑。如果 X 是一个射影复代数簇，这与扎里斯基拓扑的通常含义并不冲突，因为在这种情况下，复解析集与复代数集一致（乔伊定理）。

定义 2.1。亚纯簇 X 是指约化紧复解析空间中的一个扎里斯基稠密开子集，我们通常将该空间记作 $\overline{X}$。当然， X 继承了 $\overline{X}$ 的结构，因而自身也是一个约化复解析空间，并且可能有其他（双亚纯等价的）紧化。但我们将 X 视为嵌入给定的紧化 $\overline{X}$ 中。

亚纯簇的笛卡尔积 $X \times Y$，视为带有紧化 $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ 的亚纯簇。

X 上的扎里斯基拓扑，指由 $\overline{X}$上的扎里斯基拓扑诱导的拓扑。注意，这比 X上的闭复解析子集所构成的拓扑更粗；当且仅当一个集合在 $\overline{X}$ 中的（欧几里得）闭包是扎里斯基闭集时，它才是 X 中的扎里斯基闭集。

对于亚纯簇之间的可定义全纯映射 $f\colon X \to Y$，我们指的是一个可延拓为亚纯映射 $\overline{f}\colon \overline{X} \to \overline{Y}$的全纯映射。等价地， f的图在 $X \times Y$中是扎里斯基闭集。更一般地，可定义亚纯映射 $f\colon X \to Y$ 是指一个可延拓为从 $\overline{X}$ 到 $\overline{Y}$的亚纯映射的亚纯映射。如果一个这样的映射的像在 Y中扎里斯基稠密，则称它为支配映射。

通常的模型论框架是考虑多类结构 $\mathcal{A}$ 的一阶理论，其中每个约化不可约紧复解析空间对应一个类型，而每个类型的有限笛卡尔积中的每个扎里斯基闭子集对应一个谓词。例如，参见综述 [11] 和 [14]。按上述意义，每个亚纯簇都是 $\mathcal{A}$中的 0-可定义对象，每个有限个亚纯簇的笛卡尔积中的每个扎里斯基闭子集也都是如此。因此，改为使用 $\mathcal{A}$ 到多类结构 $\mathcal{M}$ 的扩张并无妨碍，其中每个不可约亚纯簇对应一个类型，而每个类型的有限笛卡尔积中的每个扎里斯基闭子集对应一个谓词。这样我们就增加了一些类型和谓词，但它们在原结构中都已经是 0-可定义的。我将用 L 表示 $\mathcal{M}$的语言，并用 CCM 表示 $\mathcal{M}$的 L一阶理论。它具有量词消去和虚元消去性质，并且按类型逐一来看，其莫利秩有限。

每个拟射影复代数簇 V，只要给定其在射影紧化 $\overline{V}$ 中的嵌入，就是一个亚纯簇，并且 V 上的代数与解析 Zariski 拓扑一致。特别地，在这种情况下，可定义全纯映射就是正则态射，而可定义亚纯映射就是有理映射。这样，代数几何便作为 CCM 的纯约化结构存在。

我们利用 $\mathcal{M}$ 所提供的灵活性，主要是因为类型的集合在取切空间后仍然封闭。回顾一下，复解析空间 X 的切空间是与微分层

Ω_X 相关联的线性纤维空间 TX。因此， TX 是一个复解析空间，且 $\pi\colon TX \to X$ 是一个满射全纯映射，其纤维均配备了复向量空间结构，即存在全纯映射：加法 $+\colon TX \times_X TX \to TX$、数乘 $\lambda\colon \mathbb{C} \times TX \to TX$ 和零截面 $z\colon X \to TX$，它们都定义在 X 上，并满足向量空间公理。对于任意点 $p \in X$， X 在 p 处的切空间是 $\pi\colon TX \to X$ 在 p 上方的纤维，记作 T_pX；作为复向量空间，它与 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{X,\,p}/\mathfrak{m}^2_{X,\,p}, \mathbb{C})$ 有典范同构，其中 $\mathfrak{m}_{X,\,p}$ 是 X 在 p 处的局部环的极大理想。

我们断言，当 X 是亚纯簇时， TX 也是亚纯簇，并且 π、$+$、λ、z 都是可定义全纯映射。先考虑 $X = \overline{X}$ 已经紧致的情形。我们要为 TX 寻找一种自然的紧化。事实上，对于任意与 X 上的相干解析层 $\mathcal{F}$ 相关联的线性纤维空间 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \to X$，都有一种典范的方法来实现这一点：只需将通常的嵌入相对化，即把 $\mathbb{C}^n$ 嵌入 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的射影化。考虑秩比 $\mathcal{F}$ 大一的相干解析层 $\mathcal{F} \times \mathcal{O}_X$，以及与之相关联的射影线性空间 $\mathbb{P}(\mathcal{F} \times \mathcal{O}_X) \to X$。详情见 [3, 第 1.9] 节。于是，$\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 在 X 上嵌入 $\mathbb{P}(\mathcal{F} \times \mathcal{O}_X)$，并作为一个 Zariski 开集，使得线性结构（即 π、$+$、λ、z）可亚纯地延拓到射影线性空间。将此应用于 $\mathcal{F} = \Omega_X$，便得到 $TX \to X$ 所需的亚纯结构，即 $\overline{TX} := \mathbb{P}(\Omega_X \times \mathcal{O}_X)$。现在，若考虑嵌入 $\overline{X}$ 的一般亚纯簇 X，那么线性空间 $TX \to X$ 正是 $T\overline{X} \to \overline{X}$ 在 X 上的限制，因此 $T\overline{X}$ 可作为 TX 的紧化，线性结构也可亚纯地延拓到该紧化上。

回顾一下，切空间构造具有函子性：对于复解析空间之间的每个亚纯（分别地，全纯）映射 $g\colon X \to Y$，都存在一个亚纯（分别地，全纯）映射 $dg\colon TX \to TY$，使得

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{dg} & TY \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

交换成立，并且我们有函子性性质 $d(g \circ h) = (dg) \circ (dh)$。如果 X 和 Y 是亚纯簇，且 $g\colon X \to Y$ 是可定义的亚纯（分别地，全纯）映射，那么 $dg\colon TX \to TY$ 也如此。也就是说，如果 g 延拓为亚纯映射 $\overline{X} \to \overline{Y}$，那么 dg 就延拓为亚纯映射 $\overline{TX} \to \overline{TY}$。

3. The differential structure

我所说的 CCM结构，是指 CCM 模型中的一个可定义闭子集。换言之，是一个 CCM 模型$_\forall$。本节的目标是描述我们可以在 CCM结构上视作“导子”的对象。但首先，让我们回顾一下 CCM结构本身是什么样的。

由于我们处于一种关系语言中，且 $\mathcal{M}$ 中的所有元素都已命名，因此 $\mathrm{CCM}_\forall$ 的一个模型就是 $\mathcal{M}$的某个初等扩张 $\mathcal{N}$的一个非空子集 A。由于我们处于多排序设置中，这里的非空是指相对于每个类型都非空：因此，对于 L的所有类型 S，都有$S(A) \neq \emptyset$。不过，我们主要关注有限生成可定义闭子结构，即存在某个 $a \in X(\mathcal{N})$ 和某个不可约亚纯簇 X，使得 $A = \mathrm{dcl}(a)$。将 X 替换为 a的轨迹后，我们可以假设

a 是 X 的一个一般点，也就是说，对于任意真 Zariski 闭子集 $Y \subsetneq X$，它都不属于 $Y(\mathcal{N})$。在这种情况下，我们可以将 A 与所有可定义亚纯映射 $g\colon X \to S$ 的集合等同，其中 S 遍历所有其他类型。事实上，这种对应由 $g \mapsto g(a) \in S(A)$ 给出；注意， $S(A)$ 中的每个点都以这种方式表示为 $A = \mathrm{dcl}(a)$，并且若两个可定义亚纯映射在 a 上相等，那么根据一般性，它们在 X 上也相等。

将其与代数情形进行比较是有益的，因此当 X 恰好是一个拟射影复代数簇时，情况尤为如此。在这种情况下，只需考虑单一的目标类型 $S = \mathbb{P}$，即射影直线。事实上，在这种情况下，$\mathrm{dcl}(a) = \mathbb{C}(X)$ 就只是有理函数域。对于非代数的亚纯簇，如果我们只考虑 $S = \mathbb{P}$ ，就会得到 X 的亚纯函数域，而不一定能得到泛点的完整可定义闭包。事实上，在某些紧复解析空间上，即代数维数为 0 的那些空间上，不存在非常数亚纯函数，但却存在许多映射到其他类型的非常数亚纯映射。

我想要考虑的微分结构，是由双亚纯几何中的以下自然对象的研究所启发的:

定义 3.1。亚纯向量场是指一个不可约亚纯簇 X ，其配备了一个可定义亚纯截面 $v\colon X \to TX$ 到 X 的切空间。

例如，任何配有零截面的亚纯簇都是一个亚纯向量场，我们称之为平凡向量场。另一方面，不可约拟射影复代数簇上的每个有理向量场都是亚纯向量场。对于非平凡的非代数例子，可以从任意紧复流形 X 开始，考虑其自同构群 $G = \mathrm{Aut}_0(X)$ 的连通分支；它本身是一个复李群。 G 的李代数由 X 上的全纯向量场组成，见 [9, III.1]。这些都提供了许多非代数亚纯向量场的例子。

设 (X, v) 是一个亚纯向量场， $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ 是一个初等扩张，且 $a \in X(\mathcal{N})$ 是 X 的一个泛点。那么， v 在 $A := \mathrm{dcl}(a)$ 上诱导什么结构? 对于任意可定义亚纯映射 $g\colon X \to S$，我们都有可定义亚纯映射 $\nabla_v(g) := dg \circ v\colon X \to TS$。将 $g \in S(A)$ 视为 .....，我们为所有类型 S 定义了一个函数 $\nabla_v\colon S(A) \to TS(A)$。这个函数有两个显著性质，可以利用切空间构造的函子性轻松验证:

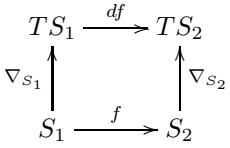
- $\pi \circ \nabla_v(g) = g$ 其中 $\pi\colon TS(A) \to S(A)$ 是投影。
- $df \circ \nabla_v(g)$ 对任意可定义的亚纯 $f\colon S \to T(f \circ g)$。

因此，我们需要考虑以下概念:

定义 3.2. 设 $L_\nabla = L \cup \{\nabla\}$ 其中 $\nabla =$ （$\nabla_S\colon$ L的 S 型），且 ∇_S 是从类型 S 到类型 TS的函数符号。令 $\mathrm{CCM}_{\forall,\ \nabla}$ 表示通过向 CCM_∇ 添加以下公理而得到的通用L_∇-理论:

(1) For each sort S, $\nabla_S : S \to TS$ is a section to $\pi : TS \to S$.

（2）对于每个在型之间的可定义亚纯映射 $f\colon\ S_1 \to S_2$，以下图表交换：



记住，f 和 df 并非语言中的函数符号，而是其图作为谓词；我们的意思是公理

$$\forall xy\big((x,y)\in\Gamma(f)\implies(\nabla_{S_1}x,\nabla_{S_2}y)\in\Gamma(df)\big).$$

通常我们会省略下标，只写 ∇ 表示 ∇_S，前提是从上下文可以清楚看出我们正在讨论哪种类型。

公理（2）的一个常被用到却不加说明的推论是，在识别 $T(S_1\times S_2)=TS_1\times TS_2$ 后，$\nabla(a_1,a_2)=(\nabla a_1,\nabla a_2)$。

我们总可以唯一地扩张到可定义闭包：

命题 3.3. 假设 $A\subseteq\mathcal{N}\models\mathrm{CCM}$ 且 $(A,\nabla)\models\mathrm{CCM}_{\forall,\,\nabla}$。那么存在 ∇ 到可定义闭包 $\mathrm{dcl}(A)$ 的唯一扩张，使其成为 $\mathrm{CCM}_{\forall,\,\nabla}$ 的一个模型。

证明。设 $B:=\mathrm{dcl}(A)$。给定一个类型 S，我们需要在 $S(B)$ 上定义 ∇。固定 $b\in S(B)$，并令 $X:=\mathrm{loc}(b)\subseteq S$，使得 $b\in X(B)$ 是一般点。由于 $b\in\mathrm{dcl}(A)$，存在另一个不可约亚纯簇 Y，它具有一个支配可定义亚纯映射 $f\colon Y\to X$，以及一个泛点 $a\in Y(A)$，使得$b=f(a)$。现在，$df\colon TY\to TX$ 且 $\nabla(a)\in TY(A)$。定义 $\nabla(b):=df(\nabla a)$。事实上，这是定义 3.2 的公理（2）所强制的，因此也保证了命题中唯一性部分的成立。

我们需要验证它是良定义的。假设另有一个 $f'\colon Y'\to X$，且 $a'\in Y'(A)$ 是一般点，并且同样有 $b=f'(a')$。令 $Z=\mathrm{loc}(a,a')\subseteq Y\times Y'$，并考虑 $\bar{f}:=(f,f')\colon Z\to X^2$。由于 $\bar{f}$将 Z 的一般点映到对角线 $D\subseteq X^2$，我们有 $\bar{f}(Z)\subseteq D$。因此，$d\bar{f}\colon TZ\to T(X^2)$ 落在 TD 中，而它是 $T(X^2)=(TX)^2$ 中的对角线。由函子性，$d\bar{f}(\nabla(a,a'))=(df(\nabla a)\ df'(\nabla a'))$，这意味着 $df(\nabla a)=df'(\nabla a')$，正如所需。

接下来，注意到如此定义的 ∇ 是从 $S(B)$ 到 $TS(B)$ 的函数，并且是 π 的一个截面：$TS\to S$。也就是说，(B,∇) 确实满足定义 3.2 的公理（1）。在上述构造中取 $f=\mathrm{id}$，我们还可看到 $(A,\nabla)\subseteq(B,\nabla)$。

剩下需要验证公理（2）。也就是说，给定 $g\colon\ S_1\to S_2$ 一个类型之间的可定义亚纯映射，以及满足 $g(b_1)=b_2$ 的 $b_i\in S_i(B)$，我们需要证明 $dg(\nabla b_1)=\nabla b_2$。注意，通过拼接——即在笛卡尔积中进行操作——我们可以安排使 b_1 和 b_2 定义在来自 A 的同一个元组上。也就是说，存在一个类型 S，其中 $a\in S(A)$，使得 $b_1=f_1(a)$ 且 $b_2=f_2(a)$，其中 $f_i\colon\ S\to S_i$ 是可定义亚纯映射。取扎里斯基轨迹后，我们可以假设 a 是 S 中的一般点，并且每个 b_i 都是 S_i 中的一般点。因此

$$\begin{aligned}
dg(\nabla b_1) &= dg(df_1(\nabla a)) \ \text{ by how } \nabla \text{ is defined on } B\\
&= d(gf_1)(\nabla a)) \ \text{ by functoriality}\\
&= df_2(\nabla a)) \quad \text{as } gf_1=f_2, \text{ as that is the case on the generic } a\\
&= \nabla b_2 \quad \text{ by how } \nabla \text{ is defined on } B,
\end{aligned}$$

如所期望。 □

定义 3.4. 微分 CCM-结构是一个模型 $(A, \nabla) \models \mathrm{CCM}_{\forall,\nabla}$，满足 $A =$可定义闭包(A)。

根据命题 3.3 的推论，在研究 $\mathrm{CCM}_{\forall,\ \nabla}$ 的模型时，假设我们有一个微分 CCM-结构，即其底集在 CCM 中可定义闭包，几乎不会损失一般性。

值得注意的是，标准点总是常数：

引理 3.5. 假设 (A, ∇) 是一个微分 CCM-结构，且 S 是一种类型。若$p \in S(\mathcal{M})$，则 $\nabla(p) = 0 \in T_pX$。

证明. 注意到 $X := \{p\}$ 本身是一个不可约亚纯簇，我们可以将该包含关系视为一个可定义全纯映射 $f\colon X \to S$。现在$TX = \{(p, 0)\}$，因此 $\nabla_X = 0$。但是，根据定义 3.2 的公理（2），这迫使$\nabla_S(p) = df(\nabla_X(p)) = 0$，因为 $df_p\colon T_pX \to T_{f(p)}S$ 是一个线性映射。□

在有限可定义闭包生成情形中，我们恰好恢复了启发定义 3.2 的亚纯向量场：

命题 3.6. 设 X 是一个不可约亚纯簇，a 是 X 在某个初等扩张中的泛点，且 $A =$ 可定义闭包生成 a。那么 A 上的微分 CCM 结构恰好是由亚纯向量场 $v\colon X \to TX$ 所诱导的 ∇_v。

证明. 我们已经看到，如果 (X, v) 是一个亚纯向量场，那么 $(A, \nabla_v) \models \mathrm{CCM}_{\forall,\nabla}$。反过来，设 $(A, \nabla) \models \mathrm{CCM}_{\forall,\nabla}$。注意，$a \in X(A)$ 和 $\nabla(a) \in TX(A)$。作为可定义亚纯映射，$a \in X(A)$ 是 X 上的恒等映射，而 $\nabla(a) \in TX(A)$ 是某个 $v\colon X \to TX$。公理（1）保证 v 是 $\pi\colon TX \to X$ 的一个截面，因此是 X 上的亚纯向量场。剩下要验证的是 $\nabla = \nabla_v$。设 $g(a) \in S(A)$，其中 $g\colon X \to S$ 是一个可定义亚纯映射，且 S 是一种类型。那么

$$\nabla_v(g(a)) = dg \circ v(a) = dg \circ \nabla(a) = \nabla(g(a))$$

其中最后一个等式由公理（2）得出。 □

因此，研究亚纯向量场相当于研究（有限生成的）微分 CCM 结构。按照通常的模型论思路，我们最终将寻找一个模型伴随，即一套公理化存在闭微分 CCM-结构的理论。

我们通过将微分 CCM-结构的概念推广到 ∇ 可以取扩张中的值的情形，来结束本节。接下来的讨论中会用到这一点。

定义 3.7. 设 $\mathcal{N} \models \mathrm{CCM}$，且 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个可定义闭集。称 A 上的一个$\mathcal{N}$值微分 CCM-结构为映射 $\nabla\colon S(A) \to TS(\mathcal{N})$，对每个类型 S均如此，并满足 ∇ 是 $\pi\colon TS \to S$的一个截面，且对所有 $a \in S(A)$ 以及所有可定义亚纯映射 f，都有 $df(\nabla a) =\nabla(f(a))$。

4. Prolongations

本节中，我们构造一种由微分结构扭曲的切空间。由于微分结构只有在 $\mathcal{M}$的真初等扩张中才有实际内容，因此这里讨论的必然是 CCM 任意模型中的“参数上的亚纯簇”。我们将从回顾这一概念开始。

固定一个模型 $\mathcal{N} \models$CCM。给定一个不可约亚纯簇 X，我们将其视为 L 的一个类型，并考察其 $\mathcal{N}$-点 $X(\mathcal{N})$。回顾一下带有来自 $\mathcal{N}$ 的参数的 $X(\mathcal{N})$ 上的 Zariski 拓扑；为强调我们不一定处于素模型 $\mathcal{M}$ 中，有时将其称为非标准扎里斯基拓扑。更详细的讨论请参见 [10,第 2] 节。每个 Zariski 闭子集 $Y \subseteq X(\mathcal{M})$ 都在 L 中命名为一个谓词，因此我们可以考虑 $Y(\mathcal{N})$。这些是 $X(\mathcal{N})$ 的 0-可定义 Zariski 闭子集。更一般地，给定一组参数 $A \subseteq \mathcal{N}$， $Y \subseteq X(\mathcal{N})$ 上的 Zariski 闭子集是形如 $Y = Z_a$ 的子集，其中 $a \in S(A)$ 是另一类型 S 的一个泛点，而 $Z \subseteq S \times X$ 是一个投影支配 S 的（0-可定义）Zariski 闭子集。图示如下：

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & S \times X \\ {\scriptstyle \rho}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

也就是说， $Y = Z_a$ 是 X上一个 0-可定义的扎里斯基闭子集族的一般点成员。这在 $X(\mathcal{N})$上形成一个诺特拓扑。如果 Y 是 A-不可约的，那么我们可以取 Z 为不可约的；如果 Y 是绝对不可约的，那么我们可以取 Z 使得 ρ： $Z \to S$ 是一个纤维空间，这意味着其在标准模型中的一般纤维是不可约的。

ρ 的 $Z \to S$ 的一般标准纤维在 Z不可约时将具有恒定维数，由此为 $X(\mathcal{N})$的不可约扎里斯基闭子集赋予维数概念，我们将其记为 dim Y。

切空间构造可扩展到非标准扎里斯基闭集。固定如上所述的$Y = Z_a$ 。于是，ρ 的纤维的切空间在标准模型中一致地变化：考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccccccc} S \times X & \hookleftarrow & Z & \leftarrow & TZ & \hookrightarrow & TS \times TX \\ & & {\scriptstyle \rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\rho} & & \\ & & S & \leftarrow & TS & & \end{array}$$

并令 z： $S \to TS$为零截面。对于任意 $p \in S(\mathcal{M})$， $d\rho$ 在 $z(p)$上方的纤维 $(TZ)_{z(p)} \subseteq TX$无非就是 $T(Z_p)$，即 $Z_p \subseteq X$的切空间。因此，我们将 $Y = Z_a$ 在 $\mathcal{N}$中的切空间记为 TY，定义为 $(TZ)_{z(a)}$。

现在，假设 $A = \text{dcl}(A)$，且我们有一个定义在 A上的、取值于 $\mathcal{N}$的微分 CCM-结构 ∇ 。那么，我们可以不考虑零截面，而考虑微分截面 ∇。也就是说，由于 $\nabla(a) \in TS(\mathcal{N})$，我们可以考虑 $d\rho$ 在 $\nabla(a)$ 上方的纤维 $(TZ)_{\nabla(a)} \subseteq TX(\mathcal{N})$。我们将其定义为 $Y = Z_a$的延拓空间，并记作 τY。即， $\tau Y := (TZ)^{\nabla(a)}$。

引理 4.1. 上述 τY 的定义只取决于 Y，而不取决于将 Y 表示为 Z_a的方式。

证明。假设 Y也以 Z'_b 的形式出现，其中 $Z' \subseteq S' \times X$是 0-可定义的扎里斯基闭集，且 $b \in S'(A)$ 是一般点。将 b 替换为 (a, b) 后，我们可以假设存在

一个支配可定义亚纯映射 $f\colon S' \to S$，满足 $f(b) = a$，且$Z' \subseteq Z \times_S S'$。因此，$f' := (f, \mathrm{id}_X) \restriction'_Z\colon Z' \to Z$ 在$Z'_b = Y = Z_a$上限制为恒等映射。此外，我们有

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{f'} & Z' \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho'} \\ S & \xleftarrow{f} & S' \end{array}$$

由此得到

$$\begin{array}{ccc} TZ & \xleftarrow{df'} & TZ' \\ {\scriptstyle d\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\rho'} \\ TS & \xleftarrow{df} & TS' \end{array}$$

由于 (A, ∇) 是一个微分 CCM-结构，$df(\nabla b) = \nabla(a)$，因此

$$df'_{\nabla(b)} : (TZ')_{\nabla(b)} \to (TZ)_{\nabla(a)}$$

由于 $df' = (df, \mathrm{id}_{TX}) \restriction_{TZ'}$，这表明 $(TZ')^{\nabla(b)} = (TZ)^{\nabla(a)}$，正如所需。 □

我们也将 $\pi\colon TX \to X$ 到 τY 的限制记作 $\pi\colon \tau Y \to Y$，它与该延拓空间有典范关联。对于任意 $b \in Y$，我们将其纤维记作 $\tau_b Y$，并称之为 Y 在 b 处的延拓空间。注意，若 Y 是 X 的一个 a-可定义 Zariski 闭子集，则 τY 是 TX 的一个 $\nabla(a)$-可定义 Zariski 闭子集，而 $\tau_b Y$ 是 $T_b X$ 的一个 $\nabla(a)b$-可定义 Zariski 闭子集。

引理 4.2. 假设 (B, ∇) 是一个 $\mathcal{N}$ 值的微分 CCM-结构，且它扩张了 (A, ∇)，并且 $b \in Y(B)$。那么 $\nabla(b) \in \tau_b Y$。

证明. 由于 $b \in X(B)$，我们必须有 $\nabla(b) \in T_b X$。因此只需验证$\nabla(b) \in \tau Y$。如上所述，记 $Y = Z_a$。那么 $(\nabla(a)\ \nabla(b)) = \nabla(a, b) \in TZ(\mathcal{N})$。特别地，$\nabla(b) \in (TZ)^{\nabla(a)}$，这是由构造得到的。□

引理 4.3. 若 Y 是 A-不可约的，且 $b \in Y$ 在 A 上一般，则 $\tau_b Y$ 绝对不可约，并且 $\dim(\tau_b Y) = \dim Y$。

证明. 取 a，使得对于来自 A 的元素，$Y = Z_a$ 满足 $Z = \mathrm{loc}(a, b) \subseteq S \times X$，如上所述。由于 $\rho\colon Z \to S$ 是支配的，$d\rho$ 限制为标准一般点处切空间之间的满射 $\mathbb{C}$-线性映射。因此，在 $\mathcal{N}$ 中的泛点处，我们有 $d\rho_{(a,b)}\colon T_{(a,b)} Z \to T_a S$ 是一个满射的 $\mathbb{C}(\mathcal{N})$-线性映射，其中 $\mathbb{C}(\mathcal{N})$ 是 $\mathcal{N}$ 中复数域的解释，而复数域本身是一个扩张了 $\mathbb{C}$ 的代数闭域。根据定义，切空间 $T_b Y$ 是 $d\rho_{(a,b)}$ 的核，而延拓空间 $\tau_b Y$ 是 $d\rho^{-1}(a, b)(\nabla a)$。因此，$\tau_b Y$ 是 $T_{(a,b)} Z$ 中 $T_b Y$ 的一个陪集。由此可得 $\tau_b Y$ 绝对不可约，且 $\dim(\tau_b Y) = \dim(T_b Y)$。最后注意，$\dim(T_b Y) = \dim Y$，因为对于标准一般的 $(p, q) \in Z(\mathcal{M})$，$Z_p$ 在 q 处的切空间维数为 $\dim(Z_p)$。□

最后，值得思考 Y 是 0-可定义的情形。也就是说，使用上述记号，此时 $a \in \mathcal{M}$。在这种情况下，根据引理 3.5，∇ 在 a 处与零截面一致，因此 $\tau Y = TZ$ 就是 Y 的切空间。也就是说，对于 0-可定义的 Zariski 闭集，延拓与切空间一致。

5. Differentially closedCCM-structures

我们的目标是证明 CCM$^{\forall,\ \nabla}$ 存在模型伴随。我们先探讨存在闭（e.c.）模型的一些性质。这相当于证明扩张引理。例如，命题 3.3 指出，CCM$^{\forall,\ \nabla}$ 的每个模型都能扩张到其底层模型的可定义闭包；由此可知，若 (A,∇) 是 CCM$^{\forall,\ \nabla}$ 的存在闭模型，那么它就是一个微分 CCM-结构。此外，CCM$^{\forall,\ \nabla}$ 的存在闭模型恰好就是存在闭微分 CCM-结构。这说明：

定义 5.1. 微分闭 CCM 结构是 CCM$^{\forall,\nabla}$ 的一个 e.c. 模型。

下面给出主要的扩张引理：

命题 5.2. 假设 $\mathcal{N} \models$ CCM，且 (A,∇) 是一个 $\mathcal{N}$ 值的微分 CCM-结构。假设 X 是一个不可约亚纯簇，$b \in X(\mathcal{N})$，并且 $Y :=$loc(b/A) 是 $X(\mathcal{N})$ 的最小 A-可定义 Zariski 闭子集。对于任意 $c \in \tau_b Y$，存在 ∇ 的一个扩张，使其成为定义在 dcl(Ab) 上的 $\mathcal{N}$ 值微分 CCM-结构，并且 $\nabla(b) = c$。

证明. 令 $D :=$ dcl(Ab)。我们沿用命题 3.3 的方法。也就是说，给定 D 中的一个元素，例如 $d = f(a,b)$，其中 a 来自 A，且 f: loc$(a,b) \to$ loc(d) 是一个可定义亚纯映射，我们令 $\nabla(d) := df(\nabla a, c)$。我们必须验证 $(\nabla a, c) \in T_{(a,b)}$ loc(a,b)，这样这件事才有意义，也就是说，才能将 df 应用于 $(\nabla a, c)$。首先注意，由于 $Y =$ loc$(b/A) \subseteq$ loc(b)，我们确实有 $c \in \tau_b Y \subseteq T_b$ loc(b)。因此 $(\nabla a, c) \in T_a$ loc$(a) \times T_b$ loc(b)，也就是说，$(\nabla a, c)$ 位于 (a,b) 之上。剩下只需验证 $(\nabla a, c) \in T$ loc(a,b)。由于 $Y =$ loc$(b/A) \subseteq$loc(b/a)，而后者是坐标投影 loc$(a,b) \to$loc(a) 在 a 上的纤维，我们有 $\tau Y \subseteq \tau$loc(b/a)；按定义，后者是 Tloc$(a,b) \to T$loc(a) 在 $\nabla(a)$ 上的纤维。由于 $c \in \tau Y$，这说明 $(\nabla a, c) \in T$loc(ab)，正如所需。

考虑 $d = a$ 和 f : loc$(a,b) \to$ loc(b) 为坐标投影的情形，我们看到，在 D 上对 ∇ 的这个定义扩展了在 A 上给定的 ∇。再考虑 $d = b$ 的情形（此时 a 是空元组，且 $f =$ 为 id），我们看到 $\nabla(b) = c$，正如所需。

虽然命题 3.3 的证明是在 CCM$^{\forall,\nabla}$ 的模型背景下进行的，但它在 $\mathcal{N}$ 值微分 CCM-结构的情形中同样成立。这表明，如上所述，我们在 D 上对 ∇ 的定义，对于任意类型 S，都给出了一个良定义映射 ∇: $S(D) \to TS(\mathcal{N})$，它是 $TS \to S$ 的一个截面，并且对于任意可定义亚纯映射 g 和元组 $d \in S(D)$，都有 $dg(\nabla d) = \nabla(g(d))$。因此，$(D,\nabla)$ 又是一个 $\mathcal{N}$ 值微分 CCM-结构。□

推论 5.3. 若 (A,∇) 是一个微分闭 CCM 结构，则 $A \models$ CCM。

证明。我们有 $A \subseteq \mathcal{N}$，对于某个 $\mathcal{N} \models$ CCM。令 (B,∇) 为扩张 (A,∇) 的极大 $\mathcal{N}$-值微分 CCM-结构。这样的结构存在，因为 $\mathcal{N}$-值微分 CCM-结构在链的并下保持不变，这一点可由定义轻易验证。

我们断言 $B = \mathcal{N}$。给定某个类型 X 的 $b \in X(\mathcal{N})$，令 $Y =$loc(b/B)，并选取 $c \in \tau_b Y$。根据命题 5.2，我们可以将 ∇ 扩张为定义在可定义闭包 dcl(Bb) 上的 $\mathcal{N}$ 值微分 CCM 结构。由极大性可知，$b \in X(B)$ 一开始就成立。由于 X 和 b 是任意的，这表明 $B = \mathcal{N}$。

我们有，$(A,\nabla) \subseteq (\mathcal{N},\nabla)$ 是微分 CCM 结构的一个扩张。由量词消去，CCM 具有一个全称－存在公理化。由于 (A,∇) 是存在闭的，这类公理在 $(\mathcal{N},\nabla)$ 中成立，就意味着它们在 (A,∇) 中也成立。也就是说，$A \models$ CCM，正如所需。□

当然，这还不够。也就是说，并非每个 CCM 模型上的微分 CCM-结构都是微分闭的。例如，标准模型 $\mathcal{M}$ 可赋予平凡微分结构 $\nabla = 0$，但它并非存在闭，因为我们可以利用命题 5.2 构造非平凡的微分 CCM-结构扩张。

以下微分闭 CCM-结构的性质称为几何公理，可以将其理解为：∇ 是切空间的一个“一般”截面：

命题 5.4. 如果 $(\mathcal{N},\nabla)$ 是一个微分闭 CCM-结构，那么它满足以下条件：

(GA) 假设 S 是一个类型，$X \subseteq S$ 是一个 $\mathcal{N}$-可定义的不可约扎里斯基闭子集，$Y \subseteq \tau X$ 是一个 $\mathcal{N}$- 可定义的不可约扎里斯基闭子集，且其在 X 上的投影支配地映射到 X；$Y_0 \subsetneq Y$ 是一个真 $\mathcal{N}$- 可定义的扎里斯基闭子集。那么存在 $a \in X(\mathcal{N})$，使得 $\nabla(a) \in Y \setminus Y_0$。

证明。根据推论 5.3，我们已经知道 $\mathcal{N} \models$ CCM。令 $\mathcal{U} \succeq \mathcal{N}$ 为一个足够饱和的初等扩张，并令 $c \in Y(\mathcal{U})$ 在 Y 上关于 $\mathcal{N}$ 为一般点。特别地，$c \in Y \setminus Y_0$。由支配性，$b := \pi(c) \in X(\mathcal{U})$ 在 $\mathcal{N}$ 上是一般点。特别地，$\mathrm{loc}(b/\mathcal{N}) = X$，且 $c \in \tau_b X(\mathcal{U})$。因此，根据命题 5.2，我们可以将 ∇ 扩张为定义闭包 $\mathrm{dcl}(\mathcal{N}b)$ 上的一个 $\mathcal{U}$ 值微分 CCM-结构，使得 $\nabla(b) = c$。接着，如推论 5.3 的证明中那样，我们可以将 ∇ 进一步扩张到整个 $\mathcal{U}$，使得 $(\mathcal{U},\nabla) \models \mathrm{CCM}_{\forall,\nabla}$。现在，$b$ 证明了在 $(\mathcal{U},\nabla)$ 中存在一个 X 中的点，该点经 ∇ 映射到 $Y \setminus Y_0$ 中。由 $(\mathcal{N},\nabla)$ 的存在闭性，必然存在 $a \in X(\mathcal{N})$，使得 $\nabla(a) \in Y \setminus Y_0$。□

正如术语所示，几何公理刻画了微分闭CCM结构：

定理 5.5. 模型 $(\mathcal{N},\nabla) \models \mathrm{CCM}_{\forall,\nabla}$ 是存在闭的，当且仅当$\mathcal{N} \models$CCM且满足命题 5.4 的条件 (GA)。

证明. 推论 5.3 和命题 5.4 给出了从左到右的方向。因此我们假设 $\mathcal{N} \models$ CCM 且 $(\mathcal{N},\nabla)$ 满足 (GA)，并证明 $(\mathcal{N},\nabla)$ 是存在闭的。设 S 为一个类型，x 为属于 S 的一个变量，且 $\phi(x)$ 是一个关于 $\mathcal{N}$ 的 L_∇-文字的（有限）合取式，它在某个扩张 $(A,\nabla) \models \mathrm{CCM}_{\forall,\nabla}$ 中由 $c \in S(A)$ 实现，该扩张是 $(\mathcal{N},\nabla)$ 的扩张。我们需要证明 $\phi(x)$ 在 $(\mathcal{N},\nabla)$ 中已经有一个实现。与推论 5.3 的证明一样，我们可以将 (A,∇) 进一步扩张为 $(\mathcal{U},\nabla) \models \mathrm{CCM}_{\forall,\nabla}$，其中 $\mathcal{U} \models$ CCM。

令 d 为 $\phi(x)$ 的阶，也就是说，使得 $\nabla^d(x)$ 出现在 $\phi(x)$ 中的最大正整数，其中 ∇ 迭代 d 次并作用于 x。读者可以自行验证，此时 $\phi(x)$ 可改写为 $\big(\nabla^d(x) \in U\big) \wedge \big(\nabla^d(x) \notin V\big)$，其中 U 和 V 是 $T^d(S)$ 中 $\mathcal{N}$- 可定义的 Zariski 闭集，即 S的第 d 次迭代切空间。

设 $Y := \mathrm{loc}(\nabla^d c/\mathcal{N}) \subseteq T^d(S)(\mathcal{U})$。由于 c实现了 $\phi(x)$，我们必有$\nabla^d(c) \in U \setminus V$，因此 $Y \subseteq U \setminus V$。特别地，$Y_0 := Y \cap V$是 Y 的一个真 $\mathcal{N}$-可定义 Zariski 闭集。我们的目标是找到 $a \in S(\mathcal{N})$，使得 $\nabla^d(a) \in Y \setminus Y_0$；这样便足够了，因为这样的一个 a 将是 $(\mathcal{N},\nabla)$ 中 $\phi(x)$ 的一个实现。

设 $\overline{c} := \nabla^{d-1}(c)$，且 $X := \mathrm{loc}(\overline{c}/\mathcal{N})$。于是 $\nabla^d(c) = \nabla(\overline{c})$，因此 Y 包含于 τX 中，并支配地投影到 X 上。由此，根据 (GA)，存在一个 $\overline{a} \in X(\mathcal{N})$，使得 $\nabla(\overline{a}) \in Y \setminus Y_0$。考虑第一个坐标投影 $\pi\colon T^{d-1}(S) \to S$，并令 $a := \pi(\overline{a}) \in S(\mathcal{N})$。因此，只需证明 $\nabla^{d-1}(a) = \overline{a}$。

对于每个 $\ell \geq 0$，记 $\pi_\ell\colon T^{\ell+1}S \to T^\ell S$ 为典范投影。此外，对于每个 $\ell = 0, \ldots, d-1$，令 $\overline{a}_\ell$ 为 $\overline{a}$ 在 $T^\ell S$ 中的像。因此，特别地，$\overline{a}_0 = a$ 和 $\overline{a}_{d-1} = \overline{a}$。我们声称，只需证明

$$\overline{a}_{\ell+1} = \nabla(\overline{a}_\ell) \tag{5.1}$$

对所有 $\ell = 0, \ldots, d-2$ 都成立。事实上，这将推出 $\overline{a} = \overline{a}_{d-1} = \nabla(\overline{a}_{d-2}) = \nabla^2(\overline{a}_{d-3}) = \cdots = \nabla^{d-1}(a)$，正如所需。因此，固定 $\ell = 0, \ldots, d-2$，并证明 (5.1)。其思路是将 (5.1) 视为关于 $\nabla(\overline{a})$ 的 Zariski 闭条件。首先，注意到 $\pi_{\ell+1}(\nabla\overline{a}_{\ell+1}) = \overline{a}_{\ell+1}$ 且 $d\pi_\ell(\nabla a_{\ell+1}) = \nabla(\pi_\ell a_{\ell+1}) = \nabla(\overline{a}_\ell)$，我们看到 (5.1) 等价于

$$\pi_{\ell+1}(\nabla\overline{a}_{\ell+1}) = d\pi_\ell(\nabla\overline{a}_{\ell+1}). \tag{5.2}$$

接下来，令 $\rho\colon T^{d-1}S \to T^{\ell+1}S$ 为投影，我们有 $\rho(\overline{a}) = \overline{a}_{\ell+1}$，因此 $\nabla(\overline{a}_{\ell+1}) = \nabla(\rho\overline{a}) = d\rho(\nabla(\overline{a}))$。所以 (5.2) 等价于

$$\pi_{\ell+1} d\rho(\nabla\overline{a}) = d(\pi_\ell\rho)(\nabla\overline{a}). \tag{5.3}$$

这是关于 $\nabla\overline{a}$ 的一个 Zariski 闭条件；由于 $\nabla\overline{a}$ 属于 $Y = \mathrm{loc}(\nabla\overline{c}/\mathcal{N})$，只需验证该恒等式对 $\nabla\overline{c}$ 成立。但这可由以下事实推出：$\nabla\overline{c} = \nabla^d c$，

$$\begin{aligned}
\pi_{\ell+1} d\rho(\nabla\overline{c}) &= \pi_{\ell+1} d\rho(\nabla^d c) \\
&= \pi_{\ell+1}\nabla(\rho(\nabla^{d-1}c)) \\
&= \rho(\nabla^{d-1}c) \\
&= \nabla^{\ell+1}c \\
&= \nabla(\nabla^\ell c) \\
&= \nabla(\pi_\ell\rho(\nabla^{d-1}c)) \\
&= d(\pi_\ell\rho)(\nabla^d c)) \\
&= d(\pi_\ell\rho)(\nabla\overline{c})).
\end{aligned}$$

因此 (5.3) 成立，证毕。 □

命题 5.4 中的条件 (GA) 可用一阶语言表达，这是因为当 X 在一个 L-可定义族中变化时，按构造，τX 在一个 L_∇-可定义族中变化（见第 4 节）；并且在 CCM 中，不可约性和支配可由参数定义（见 [10, 第 2] 节）。因此，定理 5.5 给出了 $\mathrm{CCM}_{\forall,\,\nabla}$ 的一个模型伴随，即微分闭 CCM-结构理论，我们将其记作 DCCM。

6. Basic model theory of DCCM

根据一般模型论，我们知道 DCCM 是模型完备的。本节证明 $\mathrm{CCM}_{\forall,\,\nabla}$ 具有 amalgamation 性质，由此可推出 DCCM 是完备的，并且允许进行量词消去。由此我们得到了代数闭包和可定义闭包的几何描述。

但首先，我们需要一个关于代数闭包的扩张引理，而迄今为止我们只在命题 3.3 中处理过可定义闭包。

引理 6.1。设 (A,∇) 是一个微分 CCM-结构，其中 $A\subseteq\mathcal{N}\models$ CCM，且 $b\in\mathrm{acl}(A)$。则在 $\mathrm{dcl}(Ab)$ 上存在唯一的取值于 $\mathcal{N}$ 的微分 CCM-结构，扩张了 ∇。此外，该扩张实际上取值于 $\mathrm{dcl}(Ab)$。

证明。设 $Y=\mathrm{loc}(b/A)$ 且 $c\in\tau_bY$。根据命题 5.2，我们可以将 ∇ 从A 扩张为定义在 $\mathrm{dcl}(Ab)$ 上、取值于 $\mathcal{N}$ 的微分 CCM-结构，方法是令 $\nabla(b):=c$。我们将证明 $\tau_bY=\{c\}$ 是单元素集，因此 $c\in\mathrm{dcl}(Ab)$，从而上述扩张实际上取值于 $\mathrm{dcl}(Ab)$，于是 $(\mathrm{dcl}(Ab)\ \nabla)\ \models\ \mathrm{CCM}_{\forall,\ \nabla}$。这也将证明其唯一性，因为根据引理 4.2，$\nabla$ 到 $\mathrm{dcl}(Ab)$ 的任何扩张都必须将 b 映到$\tau_bY=\{c\}$，因此必与我们刚构造的扩张一致。

设 $X:=\mathrm{loc}(b)$，并写作 $Y=Z_a$，其中 $Z=\mathrm{loc}(a,b)\subseteq S\times X$ 是一个 0-可定义的不可约 Zariski 闭集，且 S 是一种类型，其中 $a\in S(A)$ 是一般点。由于$b\in\mathrm{acl}(A)$，Y 是有限的，因此坐标投影 $\rho\colon Z\to S$ 一般有限纤维。由此可知，对于一般的 $p\in Z(\mathcal{M})$，$d_p\rho\colon T_pZ\to T_{\rho(p)}S$ 是同构。因此 $d_{(a,b)}\rho\colon T_{(a,b)}Z\to T_aS$ 是双射。若 $c,c'\in\tau_bY$，那么根据命题 5.2 的证明，我们知道 $(\nabla a,c)$、$(\nabla a,c')\in T_{(a,b)}Z$。但由于 $d\rho$ 将 $(\nabla a,c)$ 和 $(\nabla a,c')$ 都映到 $\nabla(a)\in T_aS$，我们必有 $c=c'$。因此 $\tau_bY=\{c\}$，如所需。□

CCM接下来我们证明独立粘合。我们将使用 $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ 表示 CCM 中的非分叉独立性。

引理 6.2. 设 A、B_1、B_2 是 $\mathcal{N}\models$CCM 的可定义闭子集，其中$\mathrm{CCM}A\subseteq B_1\cap B_2$ 和 $B_1\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B_2$。设 ∇_i 是 B_i 上的微分 CCM-结构，A 对于 $i=1$、2，使得 ∇_1 和 ∇_2 在 A 上一致。则存在 ∇_1 和 ∇_2 到 B 的公共扩张 $\nabla\colon=\mathrm{dcl}(B_1B_2)$，使得 $(B,\nabla)\ \models\ \mathrm{CCM}_{\forall,\ \nabla}$。

证明。利用引理 6.1，我们可以将 A、B_1、B_2 上的微分 CCM-结构唯一地扩张到它们在 $\mathcal{N}$ 中的代数闭包上。特别地，∇_1 和 ∇_2 将在 $\mathrm{acl}(A)$ 上一致。因此不妨设 $A=\mathrm{acl}(A)$，且对于 $i=1$、2，有 $B_i=\mathrm{acl}(B_i)$。A 为代数闭的一个推论是，关于 A 的扎里斯基轨迹是绝对不可约的，因此关于 A 的独立性具有如下扎里斯基拓扑刻画：

$$b_1\overset{\mathrm{CCM}}{\underset{A}{\smile\!\!\!\!\!\!|}}\ b_2\ \text{ if and only if }\ \mathrm{loc}(b_1,b_2/A)=\mathrm{loc}(b_1/A)\times\mathrm{loc}(b_2/A).$$

详见 [10, 第 2]节。

来自 B 的每个元组都具有 $b=f(b_1,b_2)$的形式，其中每个 b_i 都来自 B_i，并且$f\colon\mathrm{loc}(b_1,b_2)\to\mathrm{loc}(b)$是一个可定义亚纯映射。我们唯一的选择是定义$\nabla(b)\colon=df(\nabla_1b_1,\nabla_2b_2)$。但要使其有意义，我们需要$(\nabla_1b_1,\nabla_2b_2)\in T_{(b_1,b_2)}\mathrm{loc}(b_1,b_2)$。这正是我们现在要验证的内容。

设 a 是来自 A 的一个元组，满足 $\mathrm{loc}(b_1,b_2/A)=\mathrm{loc}(b_1,b_2/a)$。记 ∇ 为 ∇_1 和 ∇_2 在 A上的公共限制。相对于微分 CCM-结构 (A,∇) 取延拓，并利用对于 $i=1$,2，我们

有 $(A,\nabla) \subseteq (B_i,\nabla_i)$，可知 $\nabla_i(b_i) \in \tau_{b_i}\mathrm{loc}(b_i/a)$。因此，

$$\begin{aligned}(\nabla_1 b_1, \nabla_2 b_2) &\in \tau_{b_1}\mathrm{loc}(b_1/a) \times \tau_{b_2}\mathrm{loc}(b_2/a)\\ &= \tau_{(b_1,b_2)}\big(\mathrm{loc}(b_1/a) \times \mathrm{loc}(b_2/a)\big)\\ &= \tau_{(b_1,b_2)}\mathrm{loc}(b_1,b_2/a) \qquad \text{as } b_1 \overset{\mathrm{CCM}}{\underset{a}{\downarrow}} b_2\\ &\subseteq T_{(b_1,b_2)}\mathrm{loc}(b_1,b_2)\end{aligned}$$

如所愿。

因此，将 $\nabla(b)$ 定义为 $= df(\nabla_1 b_1, \nabla_2 b_2)$（其中 $b = f(b_1,b_2)$）确实是有意义的。下一步是确保这一定义良好。如果我们还有 $b = f'(b_1',b_2')$ 呢？这与命题 3.3 中的处理完全相同。也就是说，令 $Z :=\mathrm{loc}(b_1,b_2,b_1',b_2')$，并考虑 $\bar{f} := (f,f') : Z \to \mathrm{loc}(b)^2$。由于 $\bar{f}$ 将 Z 的一个一般点映到对角线，我们有 $d\bar{f}: TZ \to T(\mathrm{loc}(b)^2) = (T\mathrm{loc}(b))^2$ 落在对角线上。现在，将上一段中的论证应用于 $b_i b_i'$，特别可知，$(\nabla_1(b_1b_1')\ \nabla_2(b_2b_2')) \in T\mathrm{loc}(b_1b_1', b_2b_2')$。因此，$(\nabla_1 b_1, \nabla_2 b_2, \nabla_1 b_1', \nabla_2 b_2') \in TZ$，从而得到 $df(\nabla_1 b_1, \nabla_2 b_2) = df'(\nabla_1 b_1', \nabla_2 b_2')$。

我们以这样的方式定义了 ∇ 在 B 上的定义，使得对于任意类型 S，它都是到 $TS \to S$ 的截面。剩下要验证定义 3.2 的公理（2）。也就是说，设$g: S \to S'$ 是类型之间的一个可定义亚纯映射，并且 $b \in S(B)$、$b' \in S'(B)$ 满足 $g(b) = b'$。我们需要证明 $dg(\nabla b) = \nabla b'$。不妨设存在b_1、b_2，分别来自 B_1、B_2，以及可定义亚纯映射 f、f'，使得$b = f(b_1,b_2)$ 且 $b' = f'(b_1,b_2)$。由此可得，$gf = f'$ 在 $\mathrm{loc}(b_1,b_2)$上成立，因此我们计算：

$$\begin{aligned}dg(\nabla b) &= dg(df(\nabla_1 b_1, \nabla_2 b_2)) \quad \text{by definition of } \nabla(b)\\ &= d(gf)(\nabla_1 b_1, \nabla_2 b_2)) \quad \text{by functoriality}\\ &= df'(\nabla_1 b_1, \nabla_2 b_2)) \quad \text{as } gf = f'\\ &= \nabla b' \quad \text{by definition of } \nabla(b').\end{aligned}$$

这就完成了对（B,∇）$\models \mathrm{CCM}^{\forall,\ \nabla}$的证明。 □

命题 6.3. $\mathrm{CCM}^{\forall,\ \nabla}$ 具有 amalgamation 性质。特别地，DCCM 允许量词消去且是完备的。

证明。假设 $(B_i,\nabla) \models \mathrm{CCM}^{\forall,\ \nabla}$，其中 $i = 1, 2$，且具有共同子结构 (A,∇)。我们要寻找一个模型 $(B,\nabla) \models \mathrm{CCM}^{\forall,\ \nabla}$，使得 (B_1,∇) 和 (B_2,∇) 都能在 A 上嵌入其中。令 $\mathcal{U} \supseteq B_1$ 为 CCM 的一个充分饱和模型。由普遍性可知，存在一个将 B_2 嵌入 $\mathcal{U}$ 且在 A 上的嵌入。此外，在 CCM 中取非分叉扩张后，我们可以找到这样的嵌入，使得 B_2 的像与 B_1 在 A上独立。因此，不妨假设 $B_2 \subseteq \mathcal{U}$ 已经是 CCM，并且 $B_1 \overset{}{\underset{}{\downarrow}} B_2$。应用引理 6.2，我们在 B 上得到一个微分 CCM-结构$_A\nabla :=$可定义闭包(B_1B_2)，它在 B_1 和 B_2 上都扩张了 ∇。

由此可得 DCCM 的量词消去，这是具有合并性质的普遍理论的模型伴随的一般推论。

完备性也可由存在一个素子结构推出：所有微分闭 CCM-结构都扩张了带有平凡微分结构的标准模型 $\mathcal{M} \models \mathrm{CCM}$（引理 3.5）。□

接下来，我们希望刻画 DCCM 中的可定义闭包和代数闭包。首先，给定 $(\mathcal{N}, \nabla) \models$ DCCM 和 $A \subseteq \mathcal{N}$，记由 A 生成的 L_∇-结构为 $\langle A\rangle$。若 A 已经是一个 L_∇-子结构，且 a 是一个元组，则记由 $A \cup \{a\}$ 生成的 L_∇-结构为 $A\langle a\rangle$。注意

$$A\langle a\rangle = A \cup \{a, \nabla(a), \nabla^2(a), \dots\}.$$

量词消去告诉我们，$\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(a'/A)$ 当且仅当存在一个L-同构 $\alpha : A\langle a\rangle \to A\langle a'\rangle$，它逐点固定 A，并且对所有 $n \geq 0$，将 $\nabla^n(a)$映到 $\nabla^n(a')$。

此前，我们一直用 acl 和 dcl 分别表示理论 L CCM 中的代数闭包和可定义闭包。今后我们也将沿用这一用法，用 acl_∇ 和 dcl_∇ 分别表示理论 L_∇ DCCM 中的代数闭包和可定义闭包。

命题 6.4. 设 $(\mathcal{N}, \nabla)$ 是一个微分闭 CCM 结构，且$A \subseteq \mathcal{N}$。则 $\mathrm{dcl}_\nabla(A) = \mathrm{dcl}(\langle A\rangle)$，并且 $\mathrm{acl}_\nabla(A) = \mathrm{acl}(\langle A\rangle)$。

证明. 根据命题 3.3，$\mathrm{dcl}(\langle A\rangle)$ 是 $(\mathcal{N}, \nabla)$ 的一个微分 CCM 子结构。用 $\mathrm{dcl}(\langle A\rangle)$ 替换 A 后，我们不妨假设 A 一开始就是一个微分 CCM 子结构，并证明 $\mathrm{dcl}_\nabla(A) = A$ 且 $\mathrm{acl}_\nabla(A) = \mathrm{acl}(A)$。从右到左的包含关系显然成立。

对于逆向结论，我们先假设 $b \notin \mathrm{acl}(A) =: B$。由引理 6.1，$(B, \nabla)$ 是 $(\mathcal{N}, \nabla)$ 的微分 CCM 子结构。我们可以在某个 $\mathcal{N} \succeq \mathcal{N}$ 中找到 $\mathcal{N}$ 在 B 上的一个 CCM 副本，记作 $\mathcal{N}'$，使得 $\mathcal{N} \downarrow \mathcal{N}'$。设 $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ 是一个 L-B CCM 同构，它在 B 上见证了这一点，并考察 $b' := \alpha(b')$。由于 $b \downarrow b'_B$，且 $b \notin B$，因此 $b \neq b'$。另一方面，令 $\nabla' := \alpha\nabla\alpha^{-1}$，则 $(\mathcal{N}', \nabla')$ 是 DCCM，并且 $\alpha : (\mathcal{N}, \nabla) \to (\mathcal{N}', \nabla')$ 是一个在 B 上的 L_∇-同构。现在，由引理 6.2，我们可以将 ∇ 和 ∇' 扩张为 $\mathcal{N}$ 中 $\mathrm{dcl}(\mathcal{N}\mathcal{N}')$ 的公共扩张，然后进一步扩张为模型 $(\mathcal{K}, \nabla) \models$ DCCM。因此，在 $(\mathcal{K}, \nabla)$ 中，我们构造出了 $\mathrm{tp}(b/B)$ 的至少两个不同实现，b 和 b'。重复这一过程，可以证明 $\mathrm{tp}(b/B)$ 有任意多个实现。也就是说，$b \notin \mathrm{acl}_\nabla(B) = \mathrm{acl}_\nabla(A)$，如所求。

最后，为了导出矛盾，假设 $b \in \mathrm{dcl}_\nabla(A) \setminus A$。这一次，我们通过构造 $\mathrm{tp}(b/A)$ 的两个不同实现来导出矛盾。由于 $\mathrm{dcl}_\nabla(A) \subseteq \mathrm{acl}_\nabla(A) = \mathrm{acl}(A)$，因此 $b \in \mathrm{acl}(A) \setminus A$。于是，$\mathrm{tp}_L(b/A)$ 有第二个实现，即 $b' \in \mathrm{acl}(A)$，且 $b' \neq b$。因此，我们有一个 L-同构 $\alpha : \mathrm{dcl}(Ab) \to \mathrm{dcl}(Ab')$，它逐点固定 A，并将 b 映射到 b'。然而，根据引理 6.1，$\mathrm{dcl}(Ab)$ 和 $\mathrm{dcl}(Ab')$ 是 $(\mathcal{N}, \nabla)$ 的微分 CCM 子结构；又因为它们各自都具有唯一的微分结构可将 ∇ 延拓到 A上，所以 α 必为一个 L_∇-同构。根据量词消去，这意味着 $\mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(b'/A)$。□

7. Stability and elimination of imaginaries

现在，我们在一个固定的充分饱和模型 $(\mathcal{U}, \nabla) \models$ DCCM 中进行研究，并采用通常的约定：假设所有参数集的基数都小于饱和度。

为了证明 DCCM 是一种稳定理论，并把握其中非分叉独立性的含义，我们将采用公理化方法。也就是说，

我们首先引入一种自然的独立性概念，然后证明它具备稳定理论中刻画非分叉独立性的所有性质。

定义 7.1. 给定集合 A，B，C，我们称 A 在 B 之上与 C 独立，CCM 记作 $A \downarrow_C B$，意为可定义闭包$_\nabla(A) \downarrow$ 可定义闭包$_\nabla(B)$。

可定义闭包$_\nabla(C)$

注意，我们尚不知道 $\downarrow$ 是非分叉独立性，但我们先采用这一记号，因为很快就会看到它确实如此。

我们先来验证，$\downarrow$ 是 Kim 和 Pillay [8] 所引入意义下的一种独立性概念。首先，它显然在 $(\mathcal{U}, \nabla)$ 的自同构作用下保持不变。局部特征、有限特征、对称性和传递性CCM都可由 $\downarrow$ 的相应性质轻易推出。

引理 7.2（扩张）。给定 $a, C \subseteq B$，存在 $a' \models \mathrm{tp}(a/C)$，使得 $a' \downarrow_C B$。

证明。我们可以假设 $C =$ 属于$_\nabla(C)$的可定义闭包，且 $B =$ 属于$_\nabla(B)$的可定义闭包。由 CCMCCM中的扩张，存在序列 $(a'_n : n \geq 0) \downarrow_C B$ 以及一个 L-同构$_C$

$$\alpha : C\langle a\rangle \to C \cup \{a'_n : n \geq 0\}$$

该同构逐点固定 C，并对所有 $n \geq 0$ 将 $\nabla^n(a)$映至 a'_n。将 α 扩张为一个L-同构

$$\alpha : A := \mathrm{dcl}(C\langle a\rangle) \to A' := \mathrm{dcl}(C \cup \{a'_n : n \geq 0\}).$$

令 $\nabla' := \alpha\nabla\alpha^{-1}$ 定义在 A' 上，使得 (A', ∇') 与 (A, ∇) 同构于一个微分 CCM-结构。另一方面，由于 $A' \downarrow_C B$，引理 6.2 给出了 (A', ∇') 和 (B, ∇) 到模型 $(\mathcal{N}, \nabla')$ 的一个共同$_C$扩张，其中 $\models$DCCM。由泛性质可知，存在嵌入 $\iota : (\mathcal{N}, \nabla') \to (\mathcal{U}, \nabla)$，其在 B 上。于是，$\beta := \iota \circ \alpha : A \to \mathcal{U}$是一个 L-同构，映至其像，逐点固定 C，并对 CCM 中所有 $n \geq 0$ 将 $\nabla^n(a)$ 映至 $\nabla^n(\beta(a))$。因此，由量词消去可得，$a' := \beta(a) \models \mathrm{tp}(a/C)$。现在，$A' \downarrow_C B$CCM 蕴含 $\iota(A') \downarrow_C B$，因为 ι 是在 B 上的。但 $\iota(A') = \beta(A) =$ 属于可定义闭包 $\mathrm{dcl}(C\langle a'\rangle)$。所以，$a' \downarrow_C B$，如所求。□

引理 7.3（代数闭集上的驻定性）。设 $C =$acl$_\nabla(C) \subseteq B$，且 a、a' 是元组。若 $\mathrm{tp}(a/C) = \mathrm{tp}(a'/C)$，并且 a 和 a' 都与 B 在 C 上独立，则 $\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(a'/B)$。

证明。我们不失一般性地假设 $B = \mathrm{dcl}_\nabla(B)$。由于 $\mathrm{tp}(a/C) = \mathrm{tp}(a'/C)$，存在一个 L-同构 $\alpha : C\langle a\rangle \to C\langle a'\rangle$，它逐点固定 C，并对所有 $n \geq 0$ 将 $\nabla^n(a)$ 映至 $\nabla^n(a')$。由于 C 是代数闭的，且序列 $(\nabla^n a : n \geq 0)$ 和 $(\nabla^n a' : n \geq 0)$ 都与 B 在 C 上 CCM-独立，CCM 中代数闭集上的驻定性意味着存在一个L-同构 $\beta : B\langle a\rangle \to B\langle a'\rangle$，它逐点固定 B，并对所有 $n \geq 0$ 将 $\nabla^n(a)$ 映至 $\nabla^n(a')$。由量词消去，$\mathrm{tp}(a/B) =$t$\mathrm{p}(a'/B)$。□

推论 7.4. DCCM 是一种稳定理论，且 $\downarrow$ 是非分叉独立性。

证明. 根据上述观察以及简单理论（因而也是稳定理论）中非分叉独立性的刻画，这一点即可得出，见 [8]。□

我们也可以通过计数类型来推出稳定性。事实上，我们得到完全超越性：

定理 7.5。对于每个基数 $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$，DCCM 都是 λ-稳定的。

证明。我们对类型进行计数。固定 $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$ 以及一个基数至多为 λ 的子集 $A \subseteq \mathcal{U}$。我们证明，A 上至多有 λ 个完全类型。我们可以假设 $A = \mathrm{dcl}_\nabla(A)$ 是一个微分 CCM 子结构。

设 X 是一个类型，$a \in X(\mathcal{U})$，并考虑 $\mathrm{tp}(a/A)$。由量词消去，它由类型序列 $\big(\mathrm{tp}_L(\nabla^n a/A) : n \geq 0\big)$（在 CCM 中）所确定。令

$$Z_n := \mathrm{loc}(\nabla^n a/A\nabla^{n-1}a).$$

我断言，存在某个 $N \geq 0$，使得对所有 $n \geq N$，都有 $Z_{n+1} = \tau_{\nabla^n a}(Z_n)$。这就足够了，因为此时 $\mathrm{tp}(a/A)$ 由二元组 $\big(N, \mathrm{tp}_L(\nabla^N a/A)\big)$ 所确定；根据 CCM 的 λ-稳定性，这样的可能性至多有 λ 个。

注意到 $\nabla^{n+1}(a) \in \tau_{\nabla^n a}(Z_n)$，因此 $Z_{n+1} \subseteq \tau_{\nabla^n a}(Z_n)$。但根据引理 4.3，$\dim(\tau_{\nabla^n a}(Z_n)) = \dim(Z_n)$。所以 $\dim(Z_{n+1})$ 是关于 n 的非增函数，最终必定稳定下来。由 $\tau_{\nabla^n a}(Z_n)$ 的不可约性可知，对于足够大的 n，必有 $Z_{n+1} = \tau_{\nabla^n a}(Z_n)$，如所需。□

定理 7.6. DCCM 具有虚元消去。

证明. 稳定理论中虚元消去的一般判据是：有限集具有编码，且全局类型在本原类型域中具有典范基；例如参见 [7, 第 3] 节。DCCM 中的有限集在本原类型域中具有编码，这一点可由 CCM 中的虚元消去推出，参见 [15] 和 [12, 附录]。

因此，我们固定一个饱和的 $\mathcal{N} \preceq \mathcal{U}$ 和一个完全类型 $p = \mathrm{tp}(a/\mathcal{N})$，并证明 p 在 $\mathcal{N}$ 中有一个典范基。令 N 如定理 7.5 的证明中所述；也就是说，

$$\mathrm{loc}(\nabla^{n+1}a/\mathcal{N}\nabla^n a) = \tau_{\nabla^n a}\big(\mathrm{loc}(\nabla^n a/\mathcal{N}\nabla^{n-1}a)\big),$$

对所有 $n \geq N$ 都成立。根据 CCM 的虚元消去，存在一个代码 c，表示 $\mathcal{N}$ 中的 $\mathrm{loc}(\nabla^N a/\mathcal{N})$。我们断言 c 是 p 的典范基。

固定 σ，它是 $\mathcal{N}$ 的一个 L_∇-自同构。我们需要证明 $p^\sigma = p$ 当且仅当 $\sigma(c) = c$。一个方向显然成立：若 $p^\sigma = p$，则 $\mathrm{tp}_L(\nabla^N a/\mathcal{N})^\sigma = \mathrm{tp}_L(\nabla^N a/\mathcal{N})$，因此 $\mathrm{loc}(\nabla^N a/\mathcal{N})^\sigma = \mathrm{loc}(\nabla^N a/\mathcal{N})$，所以 $\sigma(c) = c$。

反过来，假设 $\sigma(c) = c$。将 σ 扩张为 $\mathcal{U}$ 的一个 L_∇-自同构 $\hat{\sigma}$，并令 $\hat{a} := \hat{\sigma}(a)$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tp}_L(\nabla^N \hat{a}/\mathcal{N}) &= \mathrm{tp}_L(\nabla^N a/\mathcal{N}) \qquad \text{since } \sigma(c) = c \\
\mathrm{loc}(\nabla^{N+1}a/\mathcal{N}\nabla^N a) &= \tau_{\nabla^N a}\big(\mathrm{loc}(\nabla^N a/\mathcal{N}\nabla^{N-1}a)\big) \text{ by choice of } N, \text{ and} \\
\mathrm{loc}(\nabla^{N+1}\hat{a}/\mathcal{N}\nabla^N \hat{a}) &= \tau_{\nabla^N \hat{a}}\big(\mathrm{loc}(\nabla^N \hat{a}/\mathcal{N}\nabla^{N-1}\hat{a})\big) \text{ by applying } \hat{\sigma}.
\end{aligned}$$

由此可得，$\mathrm{tp}_L(\nabla^{N+1}\hat{a}/\mathcal{N}) = \mathrm{tp}_L(\nabla^{N+1}a/\mathcal{N})$。我们可以通过迭代证明，对所有 $n \geq 0$，$\mathrm{tp}_L(\nabla^n \hat{a}/\mathcal{N}) = \mathrm{tp}_L(\nabla^n a/\mathcal{N})$。由量词消去可知，

$$p^\sigma = \mathrm{tp}(\hat{a}/\mathcal{N}) = \mathrm{tp}(a/\mathcal{N}) = p,$$

如预期。□

8. Meromorphic vector fields and finite-dimensional types

在最后这一节中，我们回到最初引发研究兴趣的对象：亚纯向量场。我们的目标是证明，在 DCCM 中，它们在双亚纯等价意义下可由“有限维”类型刻画。

我们继续在一个固定的、充分饱和的模型 $(\mathcal{U}, \nabla) \models$ DCCM 中工作。

定义 8.1. 假设 A 是一个 L_∇-子结构，且 $p = \mathrm{tp}(b/A)$ 是一个完全类型。称 p 的维数为 $\dim_\nabla(p)$ 或 $\dim_\nabla(b/A)$，意指非负非递减整数序列 $\big(\dim(\mathrm{loc}(\nabla^n b/A)) : n \geq 0\big)$ 按字典序排列。若 $\dim_\nabla(p)$ 最终为常数，则称 p 是有限维的，并再次用 $\dim_\nabla(p)$ 表示该最终的有限数值。

注意，维数只取决于类型 p，而不取决于实现方式 b。另一方面，该维数在可定义双射下并非不变——例如，b 和 $\nabla(b)$ 在空集上互可定义，但它们的维数序列并不总是相同（其中一个是另一个的平移）。尽管如此，一个类型是否为有限维，以及在其为有限维时该有限维数的取值，在可定义双射下是不变的。

维数见证分叉：

命题 8.2。设 a 是一个元组，且 $C \subseteq B$ 是 L_∇-子结构。那么 $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ 当且仅当 $\dim_\nabla(a/B) = \dim_\nabla(a/C)$。

证明。我们不妨设 $B = \mathrm{dcl}_\nabla(B)$ 且 $C = \mathrm{dcl}_\nabla(C)$。根据命题 6.4，我们有 $\mathrm{dcl}_\nabla(Ca) = \mathrm{dcl}(C\langle a\rangle)$。因此，对于所有 $n \geq 0$，$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ 等价于 $\nabla^n(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$。但是，由于维数在 CCM 中见证分叉，对于所有 $n \geq 0$，这等价于 $\dim(\mathrm{loc}(\nabla^n a/B)) = \dim(\mathrm{loc}(\nabla^n a/C))$。□

由此可知，如果 p 是有限维的，那么它具有有限的 U-秩；事实上，$U(p) \leq \dim_\nabla(p)$。

定义 3.1 意义下的亚纯向量场，是空集上有限维类型的一个自然来源。假设 (X, v) 是这样的亚纯向量场。考虑空集上的类型 $p(x)$，它断言 $x \in X$ 是一般点，且 $\nabla(x) = v(x)$。由命题 5.4 的几何公理可知，该类型是一致的。事实上，给定任意真 Zariski 闭集 $X_0 \subseteq X$，将 (GA) 应用于 Y 在 $TX = \tau X$ 中的像的扎里斯基闭包，以及 Y_0 对 X_0 的限制，可得一个 $\mathcal{U}$-点 $a \in X \setminus X_0$，满足 $\nabla(a) = v(a)$。此外，由量词消去可知，该类型是完备的：x 的 L-类型由 x 在 X 中为一般点这一条件决定，而 $\nabla(x) = v(x)$ 蕴含 $\nabla^n(x) = v_n(x)$，其中适当的可定义亚纯截面 $v_n : X \to T^n X$ 对所有 n 均成立。我们称 p 为 (X, v) 的泛型类型。注意，p 是有限维的；事实上，$\dim_\nabla(p) = \dim X$。确实，对所有 $n \geq 0$，都有 $\nabla^n(b) = v_n(b)$，且 v_n 是到 $T^n X \to X$ 的可定义亚纯截面，因此，由于 b 在 X 中是一般点，我们得到 $\dim(\mathrm{loc}(\nabla^n b/A)) = \dim X$。

事实证明，所有有限维类型都以这种方式产生：

定理 8.3. DCCM 中每个定义在空集上的有限维类型，在互定义性意义下，都是某个亚纯向量场的泛型类型。

证明。假设 $p = \mathrm{tp}(b)$ 是有限维的。设 $d \geq 0$ 满足

$$\dim(\mathrm{loc}(\nabla^{d+1} b)) = \dim(\mathrm{loc}(\nabla^d b)).$$

由于投影 $\mathrm{loc}(\nabla^{d+1}b) \to \mathrm{loc}(\nabla^d b)$ 是支配的，这意味着它必为一般有限纤维。因此，令 $c := \nabla^{d+1}(b)$，我们有 $c \in \mathrm{acl}(\nabla^d(b))$。仿照引理 6.1 的证明可知，若 $Y = \mathrm{loc}(c/\nabla^d(b))$，则 $\tau_c Y$ 是单元素集。由于 Y 在 $\nabla^d(b)$ 上定义，延拓空间 τY 在 $\nabla^{d+1}(b) = c$ 上定义，因此 $\tau_c Y$ 也在 c 上定义。根据引理 4.2，$\nabla(c) \in \tau_c Y$。所以 $\nabla(c) \in \mathrm{dcl}(c)$。根据 CCM 中的量词消去，我们可以将 $\nabla(c)$ 写成 $= v(c)$，其中 v 是某个可定义亚纯映射。接着，令 $X := \mathrm{loc}(c)$，则 $v\colon X \to TX$ 是 X 的切空间的一个截面。也就是说，(X, v) 是一个亚纯向量场，而 $q = \mathrm{tp}(c)$ 是它的泛型类型。最后注意到，b 与 $c = \nabla^{d+1}(b)$ 在空集上互可定义，因此 p 与 q 是互可定义类型。□

最终结果是，在空集之上，DCCM 的有限维片段恰好刻画了亚纯向量场的双亚纯几何。

注 8.4. 为求简洁，本讨论中我们只考虑了空集；也可以更一般地在任意参数 A 上进行讨论。结果将是：在互定义性的意义下，A 上的有限维类型恰好是关于亚纯 D 簇的泛型类型。我们将这一论断的准确表述及其验证留给读者。

References

[1] Martin Bays、Martin Hils 和 Rahim Moosa。带自同构的紧复流形的模型论。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(6):4485–4516, 2017. [2] Zo

´ *Ann. Pure Appl.* e Chatzidakis *Logic* 95 1 3 71 92, 1998
和 Anand Pillay。泛结构与简单理论。 , (-): – . [3] Gerd Fischer。 *Complex analytic geometry*。数学讲义，第 538 卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1976。[4] James Freitag、R´emi Jaoui 和 Rahim Moosa。任意三个解彼此独立。*Invent. Math.*, 230(3):1249–1265, 2022. [5] Fhud Hrushovski。几何模型论。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. I (Berlin, 1998)* 281 302, 1998 ，第 Extra

Vol. I 号，页码 – 。[6] R´emi Jaoui 和 Rahim Moosa。微分代数几何与双亚纯几何中的阿贝尔约化。arXiv:2207.07515, 2022。[7] Will Johnson。关于代数闭赋值域中虚元消去的证明。*Notre Dame J. Form. Log.*, 61(3):363–381, 2020. [8] Byunghan Kim 和 Anand Pillay。简单理论。第 88 卷，页码 149–164。1997。AILA-KGS模型论会议（佛罗伦萨，1995）。[9] Shoshichi Kobayashi。
Transformation groups in differential geometry。数学经典丛书。Springer-Verlag，柏林，1995。1972 年版重印。[10] Rahim Moosa。一个非标准的黎曼存在定理。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356 5 1781 1797, 2004 ( ): – . [11] Rahim Moosa。紧复空间的模型论。载于 *Logic Colloquium '01*, *Lect. Notes Log.* 第 20 卷，页码 317–349。符号逻辑协会，伊利诺伊州厄巴纳，2005。[12] Rahim Moosa。关于紧 K

¨ *J. Reine* ahler 流形的饱 *Angew. Math.* 586 1 20, 2005
和与模型论。, : – .[13] Rahim Moosa。模型论与微分代数几何六讲。arXiv:2210.16684, 2022。[14] Rahim Moosa 和 Anand Pillay。模型论与 K

¨ *Model theory with* ahler 几何。载 *applications to algebra and analysis. Vol. 1* 349 *London Math. Soc. Lecture Note* 于 , *Ser.* 第 卷，页码 167–195。剑桥大学出版社，剑桥，2008。[15] Anand Pillay。紧复空间的一些模型论。载于 *relations with arithmetic and algebraic geometry (Ghent, 1999)* 270 *Hilbert's tenth problem.* ,

Contemp. 第 卷，页码 – 。 *Math.* 323 338 2000
美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。[16] Anand Pillay 和 Martin Ziegler。微分域与差分域上的簇的喷射空间。*Selecta Math. (N.S.)*, 9(4):579–599, 2003. [17] Boris Zilber。模型论与代数几何。载于 Martin Weese 和 Helmut Wolter 编，

Proceedings of the Tenth Easter Conference on Model Theory 93 *Seminar-* , 第 卷，页码 *berichte [Seminar Reports]* +222
¨ vi。洪堡大学数学系，柏林，1993。会议于 1993 年 4 月 12–17 日在 Wendisch Rietz 举行。

Rahim Moosa, University of Waterloo, Department of Pure Mathematics, 200 University Avenue West, Waterloo, Ontario N2L 3G1, Canada*Email address*: rmoosa@uwaterloo.ca