arXiv:2303.04227v1 [math.GT] 7 Mar 2023

过滤网格同调中的交叉变换映射

MATTHEW KENDALL

Abstract. 我们将 Ozsv´ath– Szab´o–Stipsicz 定义的网格复形之间的交叉变换映射推广到过滤网格复形，并给出 Alishahi– Eftekhary $\iota(K)$ 不变量的组合刻画。

1. Introduction

格点同调是结与链环的一种组合理论，最初由 Manolescu、Ozsv´ath 和 Sarkar [MOS09], 在 Sarkar 和 Wang 的思想 [SW10]启发下发展而来。它与结 Floer 同调同构；结 Floer 同调是不变量，用于研究三维流形中的纽结，由 Ozsv´ath 和 Szab´o 于 2003 年发现 [OS04]，Rasmussen [Ras03]也独立发现了它。格点同调可用于证明 Milnor 猜想 [Mil68], ，该猜想指出，(p,q) 环面结的解结数为 $(p-1)(q-1)$ 2。1993 年，Kronheimer 和 Mrowka [KM93] 首次运用光滑四维流形拓扑验证了这一猜想。受 Sarkar 的证明 [Sar11], 启发，Ozsv´ath、Szab´o 和 Stipsicz 在他们的著作 [OSS15] 中运用格点同调定义 τ 不变量，并计算环面结的 τ。他们使用的 τ 定义依赖于一对网格复形映射，这些复形所对应的纽结相差一次交叉变换。本文旨在说明，Ozsv´ath–Stipsicz–Szab´o [OSS15] 提出的这些交叉变换映射可以推广到过滤网格复形，并可用于给出 Alishahi–Eftekhary $\iota(K)$ 不变量的组合刻画 [AE20]„另请参见 [Ras03]。

对于纽结 $K \subset S^3$ 的网格图 $\mathbb{G}$，网格复形 $GC^-(\mathbb{G})$ 是域 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上多项式环 $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ 上的链复形。它带有 Maslov 分次和 Alexander 双分次。类似地，过滤网格复形 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 是 $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ 上的链复形，带有相同的 Maslov 分次，但其网格状态上的 Alexander 函数诱导的是过滤而非分次。过滤网格复形是标准网格复形的一种精化，具体而言，$GC^-(\mathbb{G})$ 是 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 的关联分次对象。它的关键性质是，$\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 的过滤链同伦类型仅取决于底层纽结 K。

设 K_+ 是一个带有指定正交叉的纽结，K_- 是改变该交叉后得到的纽结。用网格图 $\mathbb{G}_+$ 和 $\mathbb{G}_-$ 分别表示 K_+ 和 K_-，这两个网格图相差一次列交叉交换，见定义 2.2。我们先陈述希望精化的命题，参见 [OSS15] 的第6.2节。

命题 1.1. 存在链映射

$$C_- : GC^-(\mathbb{G}_+) \to GC^-(\mathbb{G}_-) \text{ and } C_+ : GC^-(\mathbb{G}_-) \to GC^-(\mathbb{G}_+)$$

其中 C_- 和 C_+ 的次数为 (0, 0) 和 $(-2,-1)$，且 $C_- \circ C_+$ 和 $C_+ \circ C_-$与乘以 V_1滤过链同伦。

我们证明的命题 1.1 的滤过类比是：

定理 1.2. 存在滤过链映射

$$\mathcal{C}_- : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_+) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_-) \text{ and } \mathcal{C}_+ : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_-) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_+)$$

其中 $\mathcal{C}_-$和 $\mathcal{C}_+$的次数分别齐次为 (0, 0) 和 $(-2,-1)$，且 $\mathcal{C}_- \circ \mathcal{C}_+$和$\mathcal{C}_+ \circ \mathcal{C}_-$ 在滤过链同伦意义下等价于乘以 V_1。

利用 $GC^-(\mathbb{G})$ 是 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 的关联分次对象这一事实，不难证明定理 1.2 蕴含命题 1.1，详情见第 3 节。

利用定理 1.2 中的交叉变换映射，我们得到一个纽结不变量 $\imath(K)$，它是解结数的下界，见定理 4.2。此外，我们证明 $\imath(K)$ 等于 Alishahi–Eftekhary 纽结不变量，见定理 5.2。Alishahi–Eftekhary 不变量在 [AE20]，的定义 3.1 中给出，它使用缝 Floer 同调的一种推广来定义；该推广最初由 Juh´asz [Juh06] 提出。在 [AE15]，中，本文尤其为他们的不变量提供了一种组合解释。在已知过滤网格复形的滤过链同伦类型 $\mathcal{GC}^-(K)$ 的情况下，可以计算 $\imath(K)$，详见第 4 节。

本文结构如下。第 2 节回顾格点同调中的必要构造。第 3 节证明定理 1.2。第 4 节基于定理 1.2 中的交叉变换映射定义一个纽结不变量，并证明该不变量是解结数的下界。第 5 节回顾 Alishahi–Eftekhary 纽结不变量的构造，并证明这两个不变量相等。

致谢。作者谨向 Peter Ozsv´ath 致以谢意，感谢他在整个项目过程中始终给予指导与支持。作者还要感谢 Ollie Thakar 和 Isabella Khan 的宝贵讨论。

2. Definitions and constructions

本节回顾格点同调所需的定义与构造。我们遵循 Ozsv´ath–Szab´o–Stipsicz 的著作 [OSS15]。

2.1. 网格图。

本节回顾网格图，以及一种关联两个网格的操作：这两个网格所表示的纽结相差一次交叉变换，该操作称为交叉交换。

定义 2.1. 平面网格图 $\mathbb{G}$ 是平面上的一个 $n\times n$ 网格，其中 n 个方格标有一个 X，n 个方格标有一个 O。这些标记须满足以下规则：

(1) 每一行恰有一个方格标有 X，且恰有一个方格标有 O。每一列也恰有一个方格标有 X，且恰有一个方格标有 O。(2) 没有方格同时标有 X 和 O。

数目 n 称为 $\mathbb{G}$ 的网格数。

网格图 $\mathbb{G}$ 通过以下步骤确定一个定向链环 L：

(1) 在每一列中，从标记为 X 的方格向标记为 O 的方格画有向线段。(2) 在每一行中，画有向线段连接标记为 O 的方格与标记为 X 的方格，使竖直线段始终在水平线段上方交叉。

S^3 中的每个定向链环都可以用网格图表示；证明见 [OSS15] 中的引理 3.1.3。例如，图 1 是右手三叶结的网格图。

我们将使用的网格图操作只有交叉交换。

定义 2.2. 固定网格图 $\mathbb{G}$ 中两列（分别地，两行）相邻的列（行），令 $\mathbb{G}'$ 为交换这两列（行）后得到的图。假设它们对应区间的内部有非空交集，但彼此均不包含于对方。此时称 $\mathbb{G}$ 与 $\mathbb{G}'$ 通过交叉交换相关。

列交叉交换变换的示例如图 2 所示。

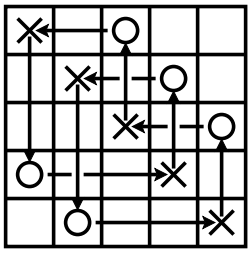


FIGURE 1. 右手三叶结的网格图。

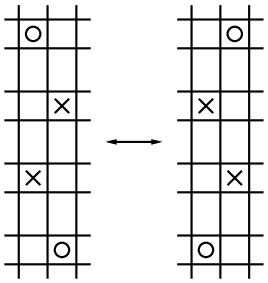


FIGURE 2. 一次交叉交换变换。

设 K_+ 是一个带有指定正交叉的纽结，K_- 是将该指定交叉变换后的同一纽结。那么，我们可以分别用网格图 $\mathbb{G}_+$ 和$\mathbb{G}_-$ 表示 K_+ 和 K_-，这两个网格图仅相差一次列交叉交换。

在定义网格复形之前，我们需要讨论该复形的生成元，称为网格状态，以及它们的性质。

2.2. 网格状态与相连的网格状态。考虑一个纽结 K 的环面网格图 $\mathbb{G}$，其网格数为 n。我们可以将水平圆标记为 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$，将垂直圆标记为 $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$。定义一个网格状态为由 n 个点组成的元组 $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$，使得每条水平圆恰好包含 $\mathbf{x}$ 中的一个元素，且每条垂直圆恰好包含 $\mathbf{x}$ 中的一个元素。令 $\mathbf{S}(\mathbb{G})$ 表示 $\mathbb{G}$ 的网格状态集合。

定义 2.3. 固定两个网格状态 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbf{S}(\mathbb{G})$。环面中的一个嵌入圆盘 r，其边界是四条弧的并，且每条弧都位于某个 α_j 或 β_j 中，若满足以下条件，则称为从 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的矩形

- 在 r 的任一角点 x 处，矩形恰好包含由 x 处两条相交曲线确定的四个象限之一。
- r 的所有角点都属于 $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$。
- 设 r 边界中属于 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ 的部分为 $\partial_a r$。那么 $\partial(\partial_a r) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$，其中 $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ 被视为点的形式和。

记从 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的矩 形集合为 $\mathbf{Rect}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$。若矩形为空矩形，则称其为 f

$$\mathbf{x} \cap \operatorname{int}(r) = \mathbf{y} \cap \operatorname{int}(r) = \emptyset.$$

从 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的空矩形集合记作 $\mathbf{Rect}^{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$。

2.3. 无阻塞网格复形。本文其余部分中，我们将在二元域上进行研究 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

定义 2.4. 设 $\mathbb{G}$ 是一个表示纽结 K、网格数为 n 的环面网格图。无阻塞网格复形 $GC^-(\mathbb{G})$ 是由网格状态生成的 $\mathbb{F}[V_1, \ldots, V_n]$ 上的自由模

S(𝔾) 配备了一个 $\mathbb{F}[V_1,\dots,V_n]$-模自同态 $\partial^-_{\mathbb{X}}$，将 $\mathbf{x} \in$ S(𝔾) 映射为

$$\partial^-_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{S}(\mathbb{G})} \sum_{\{r\in \mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y}) | r\cap\mathbb{X}=\emptyset\}} V_1^{O_1(r)}\cdots V_n^{O_n(r)}\cdot \mathbf{y}.$$

端同态 $\partial^-_{\mathbb{X}}$ 满足 $(\partial^-_{\mathbb{X}})^2 = 0$，因此 $GC^-(\mathbb{G})$ 构成一个复形，参见[OSS15]第 4 章。无阻塞网格复形具有 Maslov 分次和 Alexander 分次构成的双分次。现在定义这些分次，并给出它们的一些性质。

命题 2.5. Maslov 分次 $M = M_{\mathbb{O}}$ 是网格状态 S(𝔾) 上的唯一函数，其特征由以下条件唯一确定：

(M-1) 若 $\mathbf{x}^{NWO}$ 是一个分级状态，其分量为标记O的方格的左上角，则

$$M(\mathbf{x}^{NWO}) = 0.$$

(M-2) 若 x 和 y 可由一个矩形 $r \in$ Rect(x, y) 连接，则

$$M(\mathbf{x}) - M(\mathbf{y}) = 1 - 2\#(r\cap\mathbb{O}) + 2\#(\mathbf{x}\cap \mathrm{int}(r)).$$

Maslov 分次的存在性和唯一性见 [OSS15]第 4.3 节。类似地定义$M_{\mathbb{X}}$，将所有 O 替换为 X。

M还有另一种刻画方式。考虑 $\mathbb{R}^2$上的偏序，其定义为：若 $p_1 < q_1$ 且 $p_2 < q_2$，则$(p_1,p_2) < (q_1,q_2)$。对于两个有限点集 P,Q，令 $I(P,Q)$为满足 $p < q$的点对 $p \in P$和 $q \in Q$的数量。令 $\mathcal{J}(P,Q) = \frac{1}{2}(I(P,Q) + I(Q,P))$。将$\mathcal{J}$ 双线性地扩展到平面子集的形式和与差上。下述结论见 OSS15，引理 4.3。5]。

引理 2.6。

$$M(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}-\mathbb{O}, \mathbf{x}-\mathbb{O}) + 1.$$

定义 2.7。网格状态上的 Alexander 函数定义为

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(M_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - M_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})) - \left(\frac{n-1}{2}\right).$$

下述性质刻画了 Alexander 分次，且仅差一个加法常数；比较 [OSS15]中的命题 4.3.3。

命题 2.8。Alexander 函数由下述性质刻画，且仅差一个加法常数。对于任意矩形 $r \in$ Rect(x, y),

$$A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) = \#(r\cap\mathbb{X}) - \#(r\cap\mathbb{O}).$$

通过定义 $M(V_1^{k_1}\cdots V_n^{k_n}\cdot\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - 2\sum_{i=1}^n k_i$ 和 $A(V_1^{k_1}\cdots V_n^{k_n}\cdot\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n k_i$，将马斯洛函数和 Alexander 函数延拓到基 $V_1^{k_1}\cdots V_n^{k_n}$，其中 k_1、……、k_n 为任意非负整数。

特别地，乘以 V_i 给出了一个次数为（-2，-1）的链映射。

2.4. 过滤网格复形。设 k 为一个域，在我们的情形中始终为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

定义 2.9. 在 $k[V_1,\dots,V_n]$ 上的一个 $\mathbb{Z}$-过滤、$\mathbb{Z}$-分次链复形是一个 k-模 $\mathcal{C}$，满足

- 微分 $\partial\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$，即一个 $k[V_1,\dots,V_n]$-模同态，并且 $\partial^2 = 0$ 与 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathcal{C} = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}_d$ 相容，即 $\partial\mathcal{C}_d \subseteq \mathcal{C}_{d-1}$。
- 一个 $\mathbb{Z}$-过滤 $\mathcal{F}_s\mathcal{C}$，用于 $s\in\mathbb{Z}$，并且穷尽 $\mathcal{C}$，即$\bigcup_{s\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_s\mathcal{C} = \mathcal{C}$。该过滤与 $\mathbb{Z}$-分次相容，即如果 $\mathcal{F}_s\mathcal{C}_d = \mathcal{F}_s\mathcal{C}\cap\mathcal{C}_d$，则$\mathcal{F}_s\mathcal{C} = \bigcup_{s\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_s\mathcal{C}_d$。该过滤与微分相容，即$\partial(\mathcal{F}_s\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}_s\mathcal{C}$，从而使 $\mathcal{F}_s\mathcal{C}$ 成为一个子复形。该过滤下有界，即对于任意整数 d，存在一个整数 n_d，使得对于所有 $s \le n_d$都有 $\mathcal{F}_s\mathcal{C}_d = 0$。

- 存在 k-模自同态 $V_i:\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}$，它们满足：对于所有$1\le i,\ j\le n$与 $\partial V_i=V_i\partial,\ V_i(\mathcal{C}_d)\subseteq\mathcal{C}_{d-2}$，并且 $V_i(\mathcal{F}_s\mathcal{C})\subseteq\mathcal{F}_{s-1}\mathcal{C}$。

定义 2.10. 设 $\mathbb{G}$ 是一个网格数为 n 、表示纽结 K 的环面网格图。过滤网格复形 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 由 $\mathbb{F}[V_1,\dots,V_n]$ 上的 $\mathbf{S}(\mathbb{G})$ 生成，其微分为

$$\partial^-\mathbf{x}=\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{S}(\mathbb{G})}\sum_{r\in\mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y})}V_1^{O_1(r)}\cdots V_n^{O_n(r)}\cdot\mathbf{y}.$$

Maslov 分次由 $M(\mathbf{x})=d$ 给出，而 Alexander 过滤由 $A(\mathbf{x})=s$ 给出，其含义是，$\mathcal{F}_s\mathcal{C}$ 是由 Alexander 函数取值最大的生成元 $V_1^{k_1}\cdots V_n^{k_n}\cdot\mathbf{x}$ 张成的 $\mathbb{F}$- 线性空间。

请注意，现在微分计数的是包含 X-标记的矩形。$\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 作为链复形的性质已在 [OSS15] 的第 13 章中得到证明。最重要的性质是，$\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 的过滤准同构类型仅取决于其底层纽结 K，见 [OSS15] 的定理 13.2.9。

给定一个 $\mathbb{Z}$ 分次、 $\mathbb{Z}$ 过滤的链复形 $(\mathcal{C},\partial)$，其关联分次对象是链复-形 $\mathrm{gr}(\mathcal{C})=\bigoplus_{d,\ s\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}_s\mathcal{C}_d/\mathcal{F}_{s-1}\mathcal{C}_d)$，带有双分次 $\mathrm{gr}(\mathcal{C})_{d,\ s}=\mathcal{F}_s\mathcal{C}_d/\mathcal{F}_{s-1}\mathcal{C}_d$ 以及由 $\partial:\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 诱导的微分 $\mathrm{gr}(\partial)$，即 $\mathrm{gr}(\partial)=\sum_{d,\ s}\mathrm{gr}(\partial)_{d,\ s}$，其中 $\mathrm{gr}(\partial)_{d,\ s}:\ \mathcal{F}_s\mathcal{C}_d/\mathcal{F}_{s-1}\mathcal{C}_d\to\mathcal{F}_s\mathcal{C}_{d-1}/\mathcal{F}_{s-1}\mathcal{C}_{d-1}$。以下内容是 [OSS15] 中的命题 13.2.6。

命题 2.11。$(\mathcal{GC}^-(\mathbb{G}),\ \partial^-)$ 的关联分次对象是 $(GC^-(\mathbb{G}),\ \partial^-_{\mathbb{X}})$。

3. Proof of Theorem 1.2

首先，我们证明定理 1.2 是命题 1.1 中 Ozsv´ath–Stipsicz–Szab´o 交叉映射的推广。回顾一下，$(GC^-(\mathbb{G}),\ \partial^-_{\mathbb{X}})$ 是 $(\mathcal{GC}^-(\mathbb{G}),\ \partial^-)$ 的关联分次对象，见命题 2.11。由函子性，我们得到两个映射

$$c_-:GC^-(\mathbb{G}_+)\to GC^-(\mathbb{G}_-)\ \text{ and }\ c_+:GC^-(\mathbb{G}_-)\to GC^-(\mathbb{G}_+)\tag{1}$$

使得 c_- 是双分次的，且 c_+ 是次数齐次的，次数为（$-2,-1$），并且 $c_-\circ c_+$ 和 $c_+\circ c_-$ 与乘以 V_1的映射链同伦。取同调后，即得命题 1.1。

现在我们开始证明定理 1.2。我们采用与 [OSS15] 第 5 章中类似的设置。在同一个环面上画出两个网格图 $\mathbb{G}_+$ 和 $\mathbb{G}_-$，其中 $\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{X}$ 标记固定。先取n 条水平圆、 $n-1$ 条垂直圆，再添加两个圆 β_i 和 γ_i，分别对应于 $\mathbb{G}_+$ 和 $\mathbb{G}_-$的第i条圆，使得 β_i 和 γ_i 相交于四个点。为了定义交叉变换映射，我们需要标记这四个交点中的两个，下面对此作出说明。网格环面中 $\beta_i\cup\gamma_i$ 的补集有五个分支，其中四个是双边形，每个双边形恰好包含一个 X 或一个 O。由于 $\mathbb{G}_+$ 和 $\mathbb{G}_-$ 相差一次交叉交换，两个标有 X的双边形在 $\beta_i\cap\gamma_i$上共享一个顶点；将此顶点记为 t。给两个 O标记编号，使得在我们的网格图中，O_1位于 O_2 上方。包含 O_2 的双边形与一个标有 X的双边形共享一个顶点，将其记为 s。这些记号约定如图3所示。

为了定义换交映射，我们需要计算网格状态之间的其他区域：五边形和六边形。

定义 3.1。固定网格状态 $\mathbf{x}_-\in\mathbf{S}(\mathbb{G}_-)$ 和 $\mathbf{x}_+\in\mathbf{S}(\mathbb{G}_+)$。环面中一个嵌入圆盘 p，其边界是五条弧的并集，且每条弧都位于某个 α_j、β_j 或 γ_i 中，称为从 $\mathbf{x}_+$ 到 $\mathbf{y}_-$ 的五边形，若其满足以下条件

- 在 p 的任一角点 x 处，五边形恰好包含由 x 处两条相交曲线确定的四个象限中的一个。
- p 的四个角位于 $\mathbf{x}_+\cup\mathbf{y}_-$ 中，另一个角点取自曲线 β_i 和 γ_i 的四个交点中的一个。
- 令 $\partial_\alpha p$为 p中属于 $\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_n$的边界部分。那么 $\partial(\partial_\alpha p)=\mathbf{y}_--\mathbf{x}_+$。

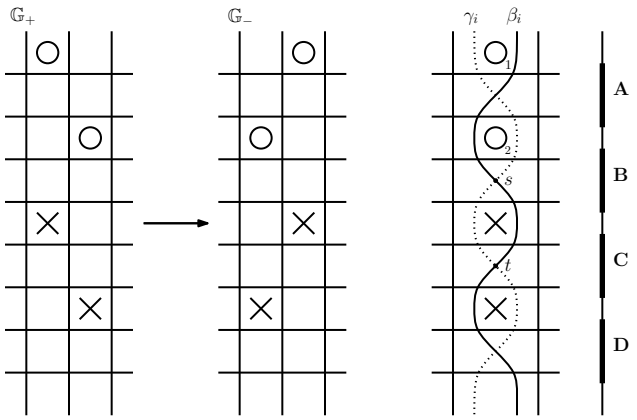


FIGURE 3. 用于交叉变换的网格图。

令 Pent(x+,y−) 为从 $\mathbf{x}_+ \in \mathrm{S}(\mathbb{G}_+)$ 到 $\mathbf{y}_- \in \mathrm{S}(\mathbb{G}_-)$ 的五边形集合。若五边形$p \in$Pent(x+,y−) 满足 int(p) $\cap \mathbf{x}_+ =$int(p) $\cap \mathbf{y}_- = \emptyset$，则称其为空。令 Pent°(x+, y−) 为从 x+ 到 y−的空五边形集合。令 Pent$^\circ_s$(x+, y−) 为从 x+ 到 y− 且有一个顶点位于 s的空五边形集合。对于两个网格状态 $\mathbf{x}_- \in \mathrm{S}(\mathbb{G}_-)$ 和 $\mathbf{y}_+ \in \mathrm{S}(\mathbb{G}_+)$，我们类似地定义 Pent(x−, y+)、Pent°(x−, y+) 和 Pent$^\circ_t$(x−, y+)。

定义 3.2。固定网格状态 x、y $\in$ S($\mathbb{G}$)。环面中的一个嵌入圆盘 h，其边界包含于 α_j、β_j（对于 $j = 1, \ldots\ldots, n$）的并集以及 γ_i中；若满足以下条件，则称其为从 x 到 y 的六边形：

- 在 h的六个角点 x 中的任意一个处，该六边形恰好包含由 x处的两条相交曲线确定的四个象限中的一个。
- h 的四个角点位于 $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ 中，另外两个角点为 a 和 b，其中 a、b 从曲线 β_i 与 γ_i的四个交点中选取。
- 设 h 边界中属于 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$的部分为 $\partial_\alpha h$。则 $\partial(\partial_\alpha h) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$。

令 Hex(x, y) 表示从 x 到 y 的六边形集合。若一个六边形 $h \in$Hex(x, y) 满足 int(h)$\cap$x =int(h) $\cap$y $= \emptyset$，则称其为空。令 Hex°(x, y) 表示从 x 到 y 的空六边形集合。令 Hex$^\circ_{s,t}$(x, y) 表示这样的空六边形集合：其两个相邻的角位于 s 和 t，且顺序与六边形的定向所指定的顺序一致。令 Hex$^\circ_{t,s}$(x, y) 表示类似的集合，其中 s 和 t 的顺序相反。

现在我们定义交叉变换映射。任取网格状态 $\mathbf{x}_+ \in \mathrm{S}(\mathbb{G}_+)$ 和 $\mathbf{x}_- \in \mathrm{S}(\mathbb{G}_-)$。回顾一下，Pent$^\circ_s$(x+, x−) 表示从 x+ 到 x− 、有一个顶点位于 s 的空五边形集合，而 Pent$^\circ_t$(x−, x+) 表示从 x− 到 x+ 、有一个顶点位于 t的空五边形集合。定义这两个$\mathbb{F}[V_1, \ldots, V_n]$-模映射

$$\mathcal{C}_- : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_+) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_-) \text{ and } \mathcal{C}_+ : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_-) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_+)$$

通过对包含顶点 s 或顶点 t 的五边形计数：

$$\mathcal{C}_-(\mathbf{x}_+) = \sum_{\mathbf{y}_- \in \mathbf{S}(\mathbb{G}_-)} \sum_{p \in \mathrm{Pent}^\circ_s(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-)} V_1^{O_1(p)} \cdots V_n^{O_n(p)} \cdot \mathbf{y}_-, \tag{2}$$

$$\mathcal{C}_+(\mathbf{x}_-) = \sum_{\mathbf{y}_+ \in \mathbf{S}(\mathbb{G}_+)} \sum_{p \in \mathrm{Pent}^\circ_t(\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_+)} V_1^{O_1(p)} \cdots V_n^{O_n(p)} \cdot \mathbf{y}_+. \tag{3}$$

此处 $O_i(p)$ 在 p 包含 O_i 时为 1，否则为 0，其中 O_1、.....、O_n 是 $\mathbb{O}$ 标记 .

对于固定的网格状态 $\mathbf{x}_\pm \in \mathbb{G}_+$ 和 $\mathbf{y}_\mp \in \mathbb{G}_-$，从 $\mathbf{x}_\pm$ 到 $\mathbf{y}_-$ 的区域 ψ 是网格环面中去掉 α_j、β_j和 γ_i后的补集区域闭包的形式和，并取整数重数，使得 $\partial_\alpha\psi$（即边界在 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$中的部分）满足 $\partial(\partial_\alpha\psi) = \mathbf{y}_\mp - \mathbf{x}_\pm$。令 π(x±,y∓) 表示从 $\mathbf{x}_\pm$ 到 y∓的区域集合。

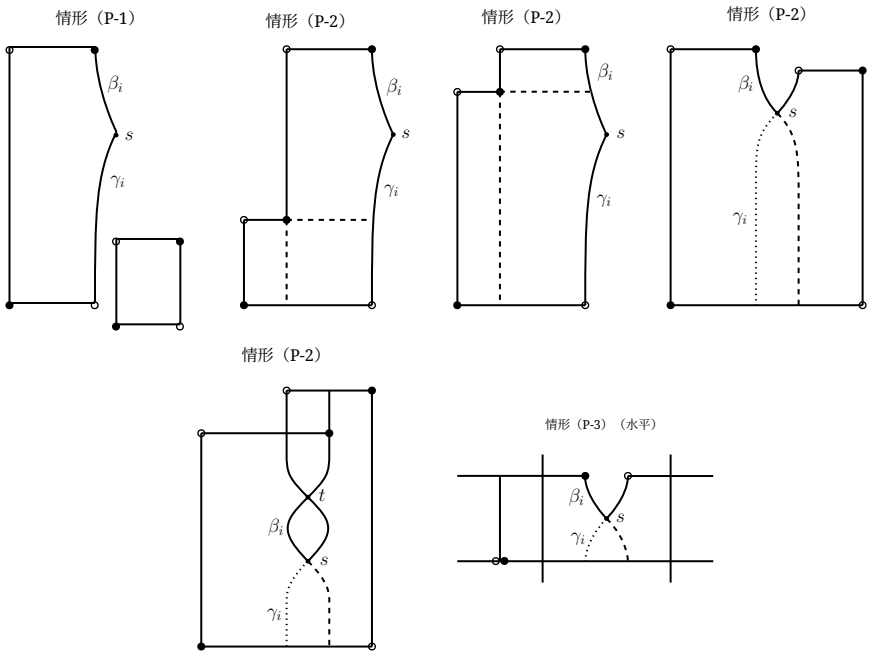


FIGURE 4. 区域分解。黑点包含在 $\mathbf{x}_+$ 中，白点包含在 $\mathbf{z}_-$中。

引理 3.3。 $\mathcal{C}_-$ 和 $\mathcal{C}_+$ 是链映射。

证明。此证明沿用了 [OSS15] 中引理5.1.4的证明，并补充了一些额外情形。

为了证明 $\mathcal{C}_-$ 是一个链映射，由于我们是在 $\mathbb{F}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上工作，只需证明 $\partial^-\circ\mathcal{C}_- + \mathcal{C}_-\circ\partial^-$ 恒为零。这个表达式可以写成

$$\partial^-\circ\mathcal{C}_- + \mathcal{C}_-\circ\partial^- = \sum_{\mathbf{z}_-\in\mathbf{S}(\mathbb{G})}\sum_{\psi\in\pi(\mathbf{x}_+,\mathbf{z}_-)} N(\psi)\cdot V_1^{O_1(\psi)}\cdots V_n^{O_n(\psi)}\cdot\mathbf{z}_-, \tag{4}$$

其中 $N(\psi)$ 是将 ψ 分解为 $r*p$ 或 $p'*r'$ 的方式数，其中 r、r' 是空矩形， p、p' 是空五边形。$\psi\in\pi(\mathbf{x}_+,\mathbf{z}_-)$ 有三种情形：

(P-1) $\mathbf{x}_+\setminus(\mathbf{x}_+\cap\mathbf{z}_-)$ 由4个点组成。在这种情形下， ψ 有两种分解，它们具有相同的底层矩形和五边形，唯一的区别在于它们连接的网格状态不同。参见图4中的情形（P-1）。因此， $N(\psi)=2$，所以这种情形下没有项作出贡献。

(P-2) $\mathbf{x}_+\setminus(\mathbf{x}_+\cap\mathbf{z}_-)$由3个点组成。这里需要考虑两种情形：要么 ψ 的所有局部重数都是0或1，要么某个局部重数为2。第一种情形下， ψ 有7个角，其中一个是 270° 角。沿两个方向切开这个角，可将 ψ 分别分解为矩形和五边形。第二种情形下， ψ在 a处有一个 270° 角，沿两种方式切开它，可将 ψ 分解为矩形和五边形。参见图4中的情形（P-2）。在所有情形下， $N(\psi)=2$，因此此情形下没有项作出贡献。

(P-3) $\mathbf{x}_+\setminus(\mathbf{x}_+\cap\mathbf{z}_-)$由1个点组成。在这种情形下，$\mathbf{z}_-$ 是唯一一个除 β_i分量外、在所有分量上都与$\mathbf{x}_+$一致的网格状态，而区域 ψ 绕环面一周，方向可以是水平或垂直。在水平方向的情形下，区域 ψ 是一个去掉小三角形后的水平细环带，可以有两种分解方式。参见图4中的情形（P-3）（水平）。

在垂直情形下，分解是唯一的。幸运的是，我们可以根据离区域 ψ的支撑位于 β_{i-1} 与 β_i之间，还是位于 β_i 与 β_{i+1}之间，对其进行配对。

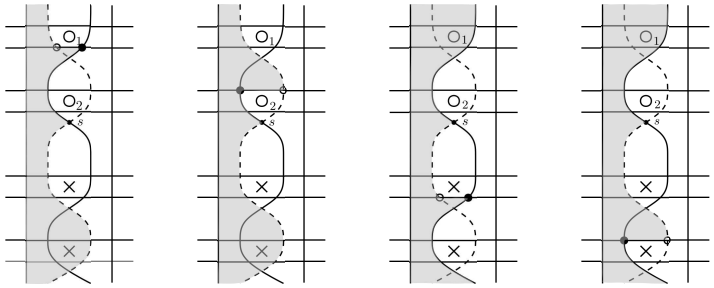


FIGURE 5. 根据 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$ 所在位置确定的竖直环带。

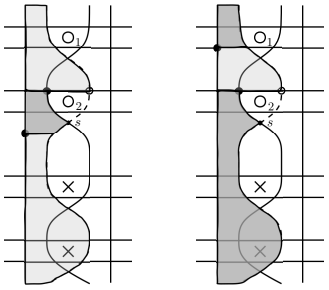


FIGURE 6. 根据 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$ 所在位置对环带 A_1 进行的分解。深灰色区域是分解中的第一部分。

有两个薄环状区域 A_1 和 A_2 各有三个角：一个角位于s，另一个角位于 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$，还有一个角位于 $\mathbf{x}_-$。根据 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$ 所在的双边形不同， A_1 有四种组合类型。我们在图5中展示这四种分解。

环带 A_1 可以唯一地分解为一个矩形和一个五边形，其顺序由 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_{i-1}$ 相对于 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$ 的位置决定。当 $\mathbf{x} \cap \beta_i$ 位于 O_2 双边形上时， A_1 的分解见图6。类似地， A_2 环带也可以唯一地分解为一个矩形和一个五边形之和。由于 A_1 环带和 A_2 环带穿过相同的 X 和O 标记，它们对方程（4）的贡献相互抵消。

这表明 $\mathcal{C}_-$ 是一个链映射。类似的论证可以用来证明 $\mathcal{C}_+$ 是一个链映射。□

固定两个 $\mathbb{Z}$-过滤、 $\mathbb{Z}$-分次的链复形 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{C}'$，它们定义在 $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$上。若链映射$f$：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$满足 $f(\mathcal{C}_d) \subseteq \mathcal{C}_{d+m}$且 $f(\mathcal{F}_s\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}_{s+t}\mathcal{C}'$，则称其次数齐次，次数为 (m, t)。

引理 3.4. $\mathcal{C}_-$ 的次数齐次，次数为 $(0, 0)$，而 $\mathcal{C}_+$ 的次数齐次，次数为 $(-2, -1)$。

证明. 存在一个一一对应

$$I : \mathbf{S}(\mathbb{G}_-) \to \mathbf{S}(\mathbb{G}_+)$$

称为最近点映射，它将网格状态 $\mathsf{z}_- \in \mathsf{S}(\mathbb{G})$ 映射到唯一的网格状态 $\mathsf{z}_+ = I(\mathsf{z}_-)$，该状态除一个分量外，在其他所有分量上都与 z_- 一致（参见 [OSS15] 的引理 5.1.3）。

为计算分次变化，我们通过最近点映射为每个五边形关联一个矩形。固定一个网格状态 $\mathsf{x}_+ \in \mathsf{S}(\mathbb{G}_+)$。对于每个满足存在五边形 $p \in \mathrm{Pent}^\circ_s(\mathsf{x}_+, \mathsf{y}_-)$ 的网格状态 $\mathsf{y}_- \in \mathsf{S}(\mathbb{G}_-)$，我们考虑与之关联的矩形 $r = r(p) \in \mathrm{Rect}^\circ(\mathsf{x}_+, \mathsf{y}_+)$。

定义以下依赖于 $\mathbf{x}_+$ 和 $\mathbf{y}_- \in S(\mathbb{G}_-)$ 的常数：

$$\begin{aligned}\Delta_r(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) &= \#(p \cap \mathbb{O}) - \#(r \cap \mathbb{O}),\\ \Delta_M(\mathbf{y}_-) &= M(\mathbf{y}_-) - M(\mathbf{y}_+),\\ \Delta_A(\mathbf{y}_-) &= A(\mathbf{y}_-) - A(\mathbf{y}_+).\end{aligned}$$

首先，注意到 $\Delta_r(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-)$只取决于 $\mathbf{y}_- \cap \beta_i$的位置：$\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$ 的位置不会改变差值 $\#(p \cap \mathbb{O}) - \#(r \cap \mathbb{O})$。因此，我们可以略去对 $\mathbf{x}_+$ 的依赖，并写作$\Delta_r(\mathbf{y}_-) = \Delta_r(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-)$。

为简单起见，令 $\Delta_M(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-)$表示差值 $M(V_1^{O_1(p)} \cdots V^{O_n)(p)n} \cdot \mathbf{y}_-) - M(\mathbf{x}_+)$，即 Maslov 分次的变化。类似地，定义 $\Delta_A(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-)$为 Alexander 分次的差值。于是，我们可以用这些常数重写 Maslov 分次的变化：

$$\begin{aligned}\Delta_M(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) &= M(V_1^{O_1(p)} \cdots V_n^{O_n(p)} \cdot \mathbf{y}_-) - M(\mathbf{x}_+)\\ &= M(\mathbf{y}_-) - 2\#(p \cap \mathbb{O}) - M(\mathbf{x}_+)\\ &= (M(\mathbf{y}_+) + \Delta_M(\mathbf{y}_-)) - 2\#(p \cap \mathbb{O}) - M(\mathbf{x}_+)\\ &= M(\mathbf{y}_+) + \Delta_M(\mathbf{y}_-) - 2(\Delta_r(\mathbf{y}_-) + \#(r \cap \mathbb{O})) - M(\mathbf{x}_+)\\ &= -(1 - 2\#(r \cap \mathbb{O})) + \Delta_M(\mathbf{y}_-) - 2\Delta_r(\mathbf{y}_-) - 2\#(r \cap \mathbb{O})\\ &= \Delta_M(\mathbf{y}_-) - 2\Delta_r(\mathbf{y}_-) - 1.\end{aligned}$$

（性质（M-2））

类似地，我们用这些常数表示 Alexander 分次的变化：

$$\begin{aligned}\Delta_A(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) &= A(V_1^{O_1(p)} \cdots V_n^{O_n(p)} \cdot \mathbf{y}_-) - A(\mathbf{x}_+)\\ &= A(\mathbf{y}_-) - \#(p \cap \mathbb{O}) - A(\mathbf{x}_+)\\ &= (A(\mathbf{y}_+) + \Delta_A(\mathbf{y}_-)) - (\#(r \cap \mathbb{O}) + \Delta_r(\mathbf{y}_-)) - A(\mathbf{x}_+)\\ &= (\#(r \cap \mathbb{O}) - \#(r \cap \mathbb{X})) + \Delta_A(\mathbf{y}_-) - \#(r \cap \mathbb{O}) - \Delta_r(\mathbf{y}_-)\\ &= \Delta_A(\mathbf{y}_-) - \Delta_r(\mathbf{y}_-) - \#(r \cap \mathbb{X}).\end{aligned}$$

（命题 2. 8）

因此，接下来只需根据 $\mathbf{y}_-$ 的位置计算 $\Delta_r(\mathbf{y}_-)$ $\Delta_M(\mathbf{y}_-)$ 和 $\Delta_A(\mathbf{y}_-)$。为此，我们根据 $\mathbf{y}_-$ 的分量 i 所在的位置进行分类讨论。我们将第 i 个圆上的 n 个点分为四个特殊标记 A 、 B 、 C 、 D，如图3右侧所示。表 1 的第二、第三和第四列展示了 $\Delta_r(\mathbf{y}_-)$ 的变化。注意， $\Delta_r(\mathbf{y}_-)$ 的变化与矩形是右矩形还是左矩形无关。

为计算 Maslov 分次的变化（即表 1 的第四列），我们使用方程 $\Delta_M(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) = \Delta_M(\mathbf{y}_-) - 2\Delta_r(\mathbf{y}_-) - 1$。Alexander 分次的变化是第五列。对于标记为 A、B、D 的行，使用上界 $\Delta_A(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) \leq \Delta_A(\mathbf{y}_-) - \Delta_r(\mathbf{y}_-)$ 进行计算；对于 C 行，我们注意到 $\#(r \cap \mathbb{X}) \geq 1$，因此得到更强的上界 $\Delta_A(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) \leq \Delta_A(\mathbf{y}_-) - \Delta_r(\mathbf{y}_-) - 1$。

	$\Delta_r(\mathbf{y}_-)$ $= \#(p \cap \mathbb{O}) - \#(r \cap \mathbb{O}) =$	$\Delta_M(\mathbf{y}_-)$ $M(\mathbf{y}_-) - M(\mathbf{y}_+) = A(\mathbf{y}_-) - A(\mathbf{y}_+)$	$\Delta_A(\mathbf{y}_-)$	$\Delta_M(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-)$	$\Delta_A(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-)$
A	-1	-1	-1	0	≤ 0
B	0	1	0	0	≤ 0
C	0	1	1	0	≤ 0
D	0	1	0	0	≤ 0

TABLE 1. 局部变化取决于 $\mathbf{y}_- \cap \gamma_i$ 是否位于 A、B、C、D 上。

现在我们展示变化量 $\Delta_M(\mathbf{y}_-) = M(\mathbf{y}_-) - M(\mathbf{y}_+)$ 的计算。令 $\mathbb{O}_-, \mathbb{X}_-$ 表示 $\mathbb{G}_-$ 中的 O 和 X 的集合，并令 $\mathbb{O}_+, \mathbb{X}_+$ 表示 $\mathbb{G}_+$ 中的 O 和 X 的集合。

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\mathbf{y}_-, \mathbf{y}_-) - \mathcal{J}(\mathbf{y}_+, \mathbf{y}_+) &= 0,\\
\mathcal{J}(\mathbf{y}_-, \mathbb{O}_-) - \mathcal{J}(\mathbf{y}_+, \mathbb{O}_+) &= \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{y}_- \cap \gamma_i \in \mathbf{A}, \\ 0 & \text{if } \mathbf{y} \cap \gamma_i \in \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}, \end{cases}\\
\mathcal{J}(\mathbb{O}_-, \mathbb{O}_-) - \mathcal{J}(\mathbb{O}_+, \mathbb{O}_+) &= 1.
\end{aligned}$$

现在利用引理 2.6，我们计算

$$\begin{aligned}
\Delta_M(\mathbf{y}_-) = M(\mathbf{y}_-) - M(\mathbf{y}_+) &= \mathcal{J}(\mathbf{y}_- - \mathbb{O}_-, \mathbf{y}_- - \mathbb{O}_-) - \mathcal{J}(\mathbf{y}_+ - \mathbb{O}_+, \mathbf{y}_+ - \mathbb{O}_+)\\
&= \begin{cases} -1 & \text{if } \mathbf{y}_- \cap \gamma_i \in \mathbf{A}, \\ 1 & \text{if } \mathbf{y} \cap \gamma_i \in \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}. \end{cases}
\end{aligned}$$

为了计算 $\Delta_A(\mathbf{y}_-) = A(\mathbf{y}_-) - A(\mathbf{y}_+)$，我们计算 $M_{\mathbb{X}}(\mathbf{y}_-) - M_{\mathbb{X}}(\mathbf{y}_+)$，并使用 Alexander 函数的定义 2.7。按照上述相同的计算，我们得到

$$M_{\mathbb{X}}(\mathbf{y}_-) - M_{\mathbb{X}}(\mathbf{y}_+) = \begin{cases} -1 & \text{if } \mathbf{y}_- \cap \gamma_i \in \mathbf{C}, \\ 1 & \text{if } \mathbf{y} \cap \gamma_i \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{D}. \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned}
\Delta_A(\mathbf{y}_-) = A(\mathbf{y}_-) - A(\mathbf{y}_+) &= \frac{1}{2}((M(\mathbf{y}_-) - M(\mathbf{y}_+)) - (M_{\mathbb{X}}(\mathbf{y}_-) - M_{\mathbb{X}}(\mathbf{y}_+)))\\
&= \begin{cases} -1 & \text{if } \mathbf{y}_- \cap \gamma_i \in \mathbf{A}, \\ 0 & \text{if } \mathbf{y}_- \cap \gamma_i \in \mathbf{B} \cup \mathbf{D}, \\ 1 & \text{if } \mathbf{y}_- \cap \gamma_i \in \mathbf{C}. \end{cases}
\end{aligned}$$

这证明了 $\mathcal{C}_-$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次、 $\mathbb{Z}$-过滤的链映射。

证明 $\mathcal{C}_+$ 是 $(-2,-1)$ 次数齐次的论证是类似的。在这种情况下，我们定义常数

$$\begin{aligned}
\Delta_r(\mathbf{y}_+) &= \#(p \cap \mathbb{O}) - \#(r \cap \mathbb{O}),\\
\Delta_M(\mathbf{y}_+) &= M(\mathbf{y}_+) - M(\mathbf{y}_-),\\
\Delta_A(\mathbf{y}_+) &= A(\mathbf{y}_+) - A(\mathbf{y}_-),
\end{aligned}$$

类似的计算得到

$$\begin{aligned}
\Delta_M(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) &= M(V_1^{O_1(p)} \cdots V_n^{O_n(p)} \cdot \mathbf{y}_+) - M(\mathbf{x}_-) = \Delta_M(\mathbf{y}_+) - 2\Delta_r(\mathbf{y}_+) - 1,\\
\Delta_A(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_-) &= A(V_1^{O_1(p)} \cdots V_n^{O_n(p)} \cdot \mathbf{y}_+) - A(\mathbf{x}_-) = \Delta_A(\mathbf{y}_+) - \Delta_r(\mathbf{y}_-) - \#(r \cap \mathbb{X}).
\end{aligned}$$

记录上述各常数随 $\mathbf{y}_+ \cap \beta_i$ 位置变化的表格见表 2。对于行 A、B、D，我们注意到 $\#(r \cap \mathbb{X}) \geq 1$，因此得到更强的上界$\Delta_A(\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_+) \leq \Delta_A(\mathbf{y}_+) - \Delta_r(\mathbf{y}_+) - 1$。证明至此完成。□

	$\Delta_r(\mathbf{y}_+)$ $= \#(p \cap \mathbb{O}) - \#(r \cap \mathbb{O}) =$	$\Delta_M(\mathbf{y}_+)$ $M(\mathbf{y}_+) - M(\mathbf{y}_-) = A(\mathbf{y}_+) - A(\mathbf{y}_-)$	$\Delta_A(\mathbf{y}_+)$	$\Delta_M(\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_+)$	$\Delta_A(\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_+)$
A	1	1	1	-2	≤ -1
B	0	-1	0	-2	≤ -1
C	0	-1	-1	-2	≤ -1
D	0	-1	0	-2	≤ -1

TABLE 2. 局部变化取决于 $\mathbf{y}_+ \cap \beta_i$ 是否位于 A、B、C、D 上。

定理 1.2 证明的其余部分与 [OSS15] 中命题 6.1.1 和引理 5.1.6 的证明基本相同。

定理 1.2 的证明。由引理 3.3 和引理 3.4， $\mathcal{C}_-$ 是一个 $\mathbb{Z}$分次、 $\mathbb{Z}$过滤的链映射，而$\mathcal{C}_+$ 是一个次数为（-2, -1）齐次的链映射。现在只需验证 $\mathcal{C}_- \circ \mathcal{C}_+$ 和$\mathcal{C}_+ \circ \mathcal{C}_-$ 与乘以 V_1过滤链同伦。

定义同伦算子

$$\mathcal{H}_- : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_-) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_-) \text{ and } \mathcal{H}_+ : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_+) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_+)$$

通过计数从给定点出发的某些六边形（见定义 3.2）来定义：

$$\mathcal{H}_-(\mathbf{x}_-) = \sum_{\mathbf{y}_- \in \mathbf{S}(\mathbb{G}_-)} \sum_{h \in \mathrm{Hex}^\circ_{s,t}(\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-)} V_1^{O_1(h)} \cdots V_n^{O_n(h)} \cdot \mathbf{y}_-,$$

$$\mathcal{H}_+(\mathbf{x}_+) = \sum_{\mathbf{y}_+ \in \mathbf{S}(\mathbb{G}_+)} \sum_{h \in \mathrm{Hex}^\circ_{t,s}(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_+)} V_1^{O_1(h)} \cdots V_n^{O_n(h)} \cdot \mathbf{y}_+.$$

我们声称， $\mathcal{H}_+$（分别为 $\mathcal{H}_-$）是从 $\mathcal{C}_+ \circ \mathcal{C}_-$（分别为 $\mathcal{C}_- \circ \mathcal{C}_+$）到 V_1的链同伦算子。显然， $\mathcal{H}_+$和 $\mathcal{H}_-$是 $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$-模同态。

现在我们证明 $\mathcal{H}_+$ 的次数为（-1, 0）齐次，即 $\mathcal{H}_+(\mathcal{F}_s\mathcal{C}_d) \subseteq \mathcal{F}_s\mathcal{C}_{d+1}$。对于一个空六边形 $h \in \mathrm{Hex}^\circ_{s,\,t}(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}_+)$，存在一个对应的空矩形 r，从 $\mathbf{x}_+$ 到 $\mathbf{y}_+$，它包含的 X标记比 h 多一个，且其 O标记的数量与 h相同。于是我们可以计算

$$\begin{aligned} M(V_1^{O_1(h)} \cdots V_1^{O_n(h)} \cdot \mathbf{y}_+) - M(\mathbf{x}_+) &= M(\mathbf{y}_+) - M(\mathbf{x}_+) - 2\#(h \cap \mathbb{O}) \\ \text{（性质（ M-2））} \qquad &= M(\mathbf{y}_+) - M(\mathbf{x}_+) - 2\#(r \cap \mathbb{O}) = -1. \end{aligned}$$

现在我们计算亚历山大分次之差：

$$A(V_1^{O_1(h)} \cdots V_1^{O_n(h)} \cdot \mathbf{y}_+) - A(\mathbf{x}_+) = A(\mathbf{y}_+) - A(\mathbf{x}_+) - \#(h \cap \mathbb{O}) = -\#(h \cap \mathbb{X}) \le 0.$$

我们也可以类似地证明， $\mathcal{H}_-$ 是次数为（-1, 0）的齐次元素。

接下来只需证明 $\mathcal{H}_+$ 和 $\mathcal{H}_-$ 满足同伦公式

$$\partial^- \circ \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_+ \circ \partial^- = \mathcal{C}_+ \circ \mathcal{C}_- - V_1, \tag{5}$$

$$\partial^- \circ \mathcal{H}_- + \mathcal{H}_- \circ \partial^- = \mathcal{C}_- \circ \mathcal{C}_+ - V_1. \tag{6}$$

由于我们正在 以 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$为系数进行运算，要证明等式（5），证明以下内容会更方便

$$\partial^- \circ \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_+ \circ \partial^- + \mathcal{C}_+ \circ \mathcal{C}_- = V_1. \tag{7}$$

(7) 的左侧可展开为

$$(\partial^- \circ \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_+ \circ \partial^- + \mathcal{C}_+ \circ \mathcal{C}_-)(\mathbf{x}_+) = \sum_{\mathbf{z}_+ \in \mathbf{S}(\mathbb{G})} \sum_{\psi \in \pi(\mathbf{x}_+, \mathbf{z}_+)} N(\psi) \cdot V_1^{O_1(\psi)} \cdots V_n^{O_n(\psi)} \cdot \mathbf{z}_+,$$

其中 $N(\psi)$ 是将 ψ 分解为以下任一形式的方法数：

- $\psi = r * h$，其中 r 是一个空矩形， h 是一个空六边形，
- $\psi = h * r$，其中 h 是一个空六边形， r 是一个空矩形，
- $\psi = p * p'$，其中 p 是一个从 $\mathbb{G}_+$ 到 $\mathbb{G}_-$ 的空五边形， p' 是一个从 $\mathbb{G}_-$ 到 $\mathbb{G}_+$ 的五边形。

$\psi \in \pi(\mathbf{x}_+, \mathbf{z}_+)$ 有三种情形。

（H-1）$\mathbf{x}_+ \setminus (\mathbf{x}_+ \cap \mathbf{z}_+)$由4个点组成。 ψ 的两种分解分别为 $r_1 * h_1$ 和 $h_2 * r_2$，其中 r_1 和 r_2 是支撑相同的矩形， h_1 和 h_2 是支撑相同的六边形。参见图3中的情况（H-1）。因此， $N(\psi) = 2$。

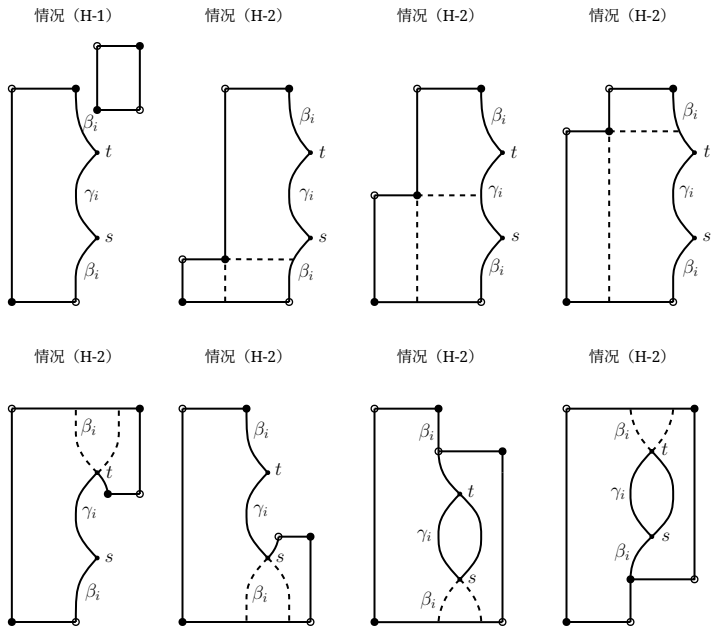


FIGURE 7. 六边形区域分解。黑点包含在 $\mathbf{x}_+$ 中，白点包含在 $\mathbf{z}_+$ 中。

（H-2）$\mathbf{x}_+ \setminus (\mathbf{x}_+ \cap \mathbf{z}_+)$由3个点组成。在这种情况下， ψ 有八个角。七个角为 $90°$ 且一个角为 $270°$，或者五个角为 $90°$ 且三个角为 $270°$。在第一种情况下，沿 $270°$ 角切割可得到 ψ的两种分解；在第二种情况下，我们可以在标记为 s 或 t 的一个角处以两种方式切割。参见图3中的情况（H-2）。在所有情况下，$N(\psi) = 2$。

(H-3) $\mathbf{x} = \mathbf{z}$。在此情况下， ψ 支撑在 β_i 与相邻垂直圆 β_{i-1} 和 β_{i+1}之一之间的环带内。在此情况下， $N(\psi) = 1$，并根据 $\mathbf{x}_+$的位置唯一分解为矩形-六边形、六边形-矩形或五边形-五边形之一，见下一段。在每种情况下， ψ 都包含 O_1，因此（7）式左侧贡献$V_1\mathbf{x}_+$。这与（7）式右侧一致。

为了更具体地描述 ψ 的分解，我们根据 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$的位置分情况讨论。如果 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$ 位于 s 和 t之间的短弧上，那么 β_i 以东且 β_{i+1} 以西的环带有唯一的分解。如果 $\mathbf{x}_+ \cap \beta_i$ 不在连接 s 和 t的较短弧上，那么 β_i 以西且 β_{i-1} 以东的环带有唯一的分解（参见 [OSS15]第119和120页）。

对 (6) 中 $\mathcal{H}_-$ 的同伦公式的验证也类似。 □

4. CROSSING-CHANGE INVARIANT

本节中，我们利用定理 1.2 中的交叉变换映射得到一个纽结不变量，并证明它是解结数的下界。

设 K 和 K' 是两个纽结，就本文而言，它们总是位于 S^3中。 K 和 K' 之间的戈尔迪安距离$u(K, K')$是将 K 变为K'所需的最少交叉变换次数。我们可以假设存在一个平面图 K，切换其中的 m 个交叉后，它与 K'同胚。将解纽结序列标记为 $K = K_0, K_1, \dots, K_{m-1}, K_m = K'$，其中 $m = u(K, K')$，且每一对相邻的纽结都相差一次交叉变换。对于每个 $i = 0, \dots, m$，我们都可以用一个网格 $\mathbb{G}_i$表示 K_i，使得每个网格的大小都相同；对于 $i = 0, \dots, m-1$，网格$\mathbb{G}_i$ 和 $\mathbb{G}_{i+1}$ 相差一次列交叉交换（参见 OSS15], 第6.2节）。根据定理 1.2,

存在映射

$$\mathfrak{f}_i^+ : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_i) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_{i+1}) \text{ and } \mathfrak{f}_i^- : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_{i+1}) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_i)$$

使得 $\mathfrak{f}_i^+ \circ \mathfrak{f}_i^-$和 $\mathfrak{f}_i^- \circ \mathfrak{f}_i^+$与乘以 V_1同伦于滤过链映射。因此，存在映射

$$\mathfrak{f}^+ : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_0) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_m) \text{ and } \mathfrak{f}^- : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_m) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}_0)$$

使得 $\mathfrak{f}_i^+ \circ \mathfrak{f}_i^-$和 $\mathfrak{f}^- \circ \mathfrak{f}^+$ 与乘以 V_1^m同伦于滤过链映射。

我们作如下定义。

定义 4.1. 设 K 和 K' 为两个纽结，$\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{G}'$ 为大小相同的网格，分别表示K 和 K'。考虑所有满足以下条件的映射对

$$\mathfrak{f}^+ : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}') \text{ and } \mathfrak{f}^- : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}') \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$$

使得 $\mathfrak{f}^+$ 和 $\mathfrak{f}^-$ 是齐次滤过链映射，且 $\mathfrak{f}^+ \circ \mathfrak{f}^-$ 和 $\mathfrak{f}^- \circ \mathfrak{f}^+$ 与乘以某个正整数 V_1^m同伦于滤过链映射。令 $\mathfrak{l}(K,K')$为满足上述条件的所有映射对 $\mathfrak{f}^+,\mathfrak{f}^-$ 中最小的 m。令 $\mathfrak{l}(K) = \mathfrak{l}(K,U)$，其中 U为平凡结。

根据 定义，解结数 $u(K) = u(K,U)$。上述讨论表明

定理 4.2. $\mathfrak{l}(K,K') \le u(K,K')$ 且 $\mathfrak{l}(K) \le u(K)$。

注。对于过滤网格复形的链同伦类型已知的纽结，例如交错纽结，可以计算不变量 $\mathfrak{l}(K)$。参见 [OSS15] 的第 14.2 节。

5. Comparison with Alishahi–Eftekhary knot invariant

Alishahi 和 Eftekhary 定义了一个不变量 $\mathfrak{l}_{AE}(K)$，它是解结数 $u(K)$ 的下界，也是纽结协和不变量 $\nu^+(K)$ 的上界，同时还是 $\widehat{\mathfrak{t}}(K)$ 的上界，其中 $\widehat{\mathfrak{t}}(K)$ 是结 Floer 同调 $\mathrm{HFK}^-(K)$ 中 U-挠元的最大阶，参见 [AE20] 的定义 3.1。我们在定义 5.1 中照录 Aliashahi–Eftekhary 不变量的定义。关于 $\mathfrak{l}(K)$ 的更多性质，参见 [AE20] 的定理 1.1 和推论 1.2。本节的目标是证明 $\mathfrak{l}$ 的两个定义一致：对于任意两个纽结 $K \subset S^3$, $\mathfrak{l}(K) = \mathfrak{l}_{AE}(K)$。

$\mathfrak{l}_{AE}(K)$ 的定义依托于纽结 Floer 复形 $\mathrm{CF}(K)$，该复形是在他们的构造 [AE15]，中由缝合流形得到的，是对 Juh´asz 构造 [Juh06] 的一种改进。纽结链复形 $\mathrm{CF}(K)$ 是一个 $\mathbb{F}[u,w]$ is $\mathbb{Z}$–双分次模，其 Maslov 分次和 Alexander 分次的定义见 [OS04]。复形 $\mathrm{CF}(K)$ 与复形 $\mathrm{CF}(\mathcal{H})$ 具有相同的链同伦类型，其中 $\mathcal{H}$ 是与该纽结相关的缝合流形的 Heegaard 图。与该纽结相关的缝合流形是 S^3 中纽结邻域的补空间，其边界环面上有两条方向相反的缝合线。

如果纽结 $K' \subset S^3$ 是由纽结 $K \subset S^3$ 经过一次交叉变换得到的，Alishahi–Eftekhary 证明存在齐次链映射

$$\mathfrak{f}^- : \mathrm{CF}(K) \to \mathrm{CF}(K') \text{ and } \mathfrak{f}^+ : \mathrm{CF}(K') \to \mathrm{CF}(K)$$

这些映射保持 Maslov 分次，并且 $\mathfrak{f}^+\circ\mathfrak{f}^-$ 和 $\mathfrak{f}^-\circ\mathfrak{f}^+$ 与乘以 w 的映射链同伦，见 [AE20] 的定理 2.3。

我们在下文定义 Alishahi–Eftekhary 纽结不变量。

定义 5.1. 给定两个纽结 K、K'，考虑所有齐次映射对

$$\mathfrak{f}^- : \mathrm{CF}(K) \to \mathrm{CF}(K') \text{ and } \mathfrak{f}^+ : \mathrm{CF}(K') \to \mathrm{CF}(K)$$

它们是齐次的，保持 Maslov 分次，并且 $\mathfrak{f}^+ \circ \mathfrak{f}^-$ 和 $\mathfrak{f}^- \circ \mathfrak{f}^+$ 与乘以 w^m链同伦。于是，$\mathfrak{l}_{AE}(K,K')$ 是满足此前条件的映射 $\mathfrak{f}^-$、$\mathfrak{f}^+$ 存在时的最小非负整数 m。若 U是平凡结，令 $\mathfrak{l}_{AE}(K) = \mathfrak{l}_{AE}(K,U)$。

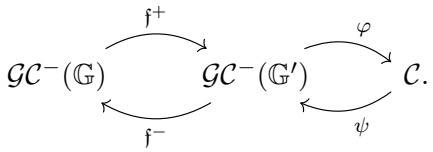
本节的目标是证明，定义 4.1 中的我们的不变量 $\mathfrak{l}(K)$ 对应于 Alishahi–Eftekhary 的 $\mathfrak{l}$-不变量：

定理 5.2. 对任意两个纽结 K, K', $\mathfrak{l}(K, K') = \mathfrak{l}_{AE}(K, K')$。特别地，$\mathfrak{l}(K) = \mathfrak{l}_{AE}(K)$。

证明. 固定两个图 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{G}'$，它们的大小为 n，分别对应 K 和 K'。首先我们证明，$\mathfrak{l}(K, K')$ 仅取决于 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 和 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G}')$ 的过滤链同伦类型。固定两个映射

$$\mathfrak{f}^+ : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}) \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}') \text{ and } \mathfrak{f}^- : \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}') \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$$

使得对于 $m = \mathfrak{l}(K, K')$，我们有 $\mathfrak{f}^+ \circ \mathfrak{f}^- \simeq V_1^m$和 $\mathfrak{f}^- \circ \mathfrak{f}^+ \simeq V_1^m$，其中 $\simeq$是过滤链同伦等价。令 $\mathcal{C}$ 为与 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G}')$ 属于同一过滤拟同构类的过滤链复形。由于 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 是一个由多项式环上的自由生成元生成的链复形，过滤拟同构与过滤链同伦在过滤链复形上是等价关系，例见 [OSS15] 的附录 A.8。因此存在映射 $\varphi\colon \mathcal{GC}^-(\mathbb{G}') \to \mathcal{C}$ 和 $\psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$，使得 $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 和 $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})}$。总之，我们有如下图



考虑 $\mathfrak{g}^+ = \varphi \circ \mathfrak{f}^+$ 和 $\mathfrak{g}^- = \mathfrak{f}^- \circ \psi$。那么 $\mathfrak{g}^+ \circ \mathfrak{g}^- = (\varphi \circ \mathfrak{f}^+) \circ (\mathfrak{f}^- \circ \psi) \simeq \varphi \circ V_1^m \circ \psi = V_1^m \circ \varphi \circ \psi \simeq V_1^m$和 $\mathfrak{g}^- \circ \mathfrak{g}^- = (\mathfrak{f}^- \circ \psi) \circ (\varphi \circ \mathfrak{f}^+) \simeq \mathfrak{f}^+ \circ \mathfrak{f}^- \simeq V_1^m$。类似地，将 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 替换为其过滤拟同构类中的任意过滤链复形，都不会改变 m。因此，$\mathfrak{l}(K, K')$ 只取决于 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 和 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G}')$ 的过滤链同伦类型。

现在我们证明，过滤链同伦类 $\mathcal{GC}^-(K)$ 与链同伦类 $\mathrm{CF}(K)$ 一致。我们有一个过滤链复形的同构 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G}) \cong \mathrm{CFK}^{-,*}(\mathcal{H})$，其中$\mathcal{H}$ 是对应于 $\mathbb{G}$ 的 Heegaard 图，并且两个复形都定义在多项式环 $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$上，参见 [OSS15]中的定理 16.4.1。根据 [MOS09], 中的命题 2.3，$2n$-基点纽结 Floer 复形 $\mathrm{CFK}^{-,*}(\mathcal{H})$ 的过滤链同伦类型与标准纽结 Floer 复形 $\mathrm{CFK}^-(K)$ 的过滤链同伦类型一致，后者是 $\mathbb{F}[U]$ 上的一个过滤模。如果我们改为将 $\mathrm{CFK}^-(K)$ 视为二元环 $\mathbb{F}[u, v]$ 上的双分次复形，并令第二个变量表示过滤层级，则得到纽结 Floer 复形 $\mathrm{CF}(K)$。

根据定义，$\mathfrak{l}_{AE}(K, K')$ 仅取决于 $\mathrm{CF}(K)$ 和 $\mathrm{CF}(K')$；正如我们上文所示，$\mathfrak{l}(K, K')$ 仅取决于滤过链同伦类 $\mathcal{GC}^-(K)$ 和 $\mathcal{GC}^-(K')$。滤过链同伦类 $\mathcal{GC}^-(\mathbb{G})$ 与链同伦类 $\mathrm{CF}(K)$ 之间的对应关系意味着 $\mathfrak{l}(K, K') = \mathfrak{l}_{AE}(K, K')$。□

References

[AE15] Akram S. Alishahi 和 Eaman Eftekhary。缝 Floer 同调的一个精化。 *J. Symplectic Geom.*，13 3 609( ): – 743，2015。[AE20] Akram Alishahi 和 Eaman Eftekhary。结 Floer 同调与解结数。 *Geom. Topol.*，24 5 2435 2469，2020 ( ): – 。[Juh06] Andr´as Juh´asz。全纯圆盘与缝合流形。 *Algebr. Geom. Topol.*，6:1429–1457，2006。[KM93] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。嵌入曲面的规范理论。I。 *Topology*，32(4):773–826，1993。[Mil68] John Milnor。 *Singular points of complex hypersurfaces*。《Annals of Mathematics Studies》，第 61 号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1968。[MOS09] Ciprian Manolescu、Peter Ozsv´ath 和 Sucharit Sarkar。结 Floer 同调的组合描述。 *Ann. of Math. (2)*，169(2):633–660，2009。[OS04] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。全纯圆盘与结不变量。 *Adv. Math.*，186(1):58–116，2004。[OSS15] Peter S. Ozsv´ath、Andr´as I. Stipsicz 和 Zolt´an Szab´o。 *Grid homology for knots and links*，*Mathematical Surveys and Monographs*第 208 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。[Ras03] Jacob Andrew Rasmussen。 *Floer homology and knot complements*。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2003。博士论文——哈佛大学。

[Sar11] Sucharit Sarkar。网格图与 Ozsv

18 6 1239 1257, ath-Szabo tau 不变量。

2011
Math. Res. Lett., ( ): – 。[SW10] Sucharit Sarkar 和 Jiajun Wang。计算若干 Heegaard Floer 同调的一种算法。

Ann. of , ( ): – 。

Math. (2) 171 2 1213 1236, 2010