arXiv:2303.04228v1 [math.DG] 7 Mar 2023

加权黎曼流形的粗糙里奇曲率

Marc Arnaudon [*]、Xue-Mei Li [†]、Benedikt Petko[‡]

2023年3月9日

摘要

我们证明，可以通过归一化加权局部体积测度之间的 Wasserstein 1-距离的缩放度量导数，渐近地恢复加权完备黎曼流形的广义里奇张量。作为应用，我们证明，从具有非均匀强度的泊松点过程中抽样得到的随机几何图，其极限粗糙曲率收敛于广义里奇张量。

目录

1 引言与结果 **1**

2 流形距离估计 **3**

2.1 逐点传输距离估计.42.2 投影距离估计.7

3 Wasserstein 距离近似 1 **1**

3.1 密度估计.123.2 一个近似传输计划.17

4 随机几何图的应用 2 **5**

1 引言与结果

我们重新审视 Ollivier 研究的粗糙里奇曲率概念 [Oll09]。考虑到其在随机几何图曲率研究中的应用，我们考察带有势的黎曼流形这一情形。作为一种新颖的处理方式，我们考察小测地球上加权体积测度的 Wasserstein 距离，以纳入流形上的光滑势，并通过这些测度的 Wasserstein 距离的缩放度量导数，恢复黎曼流形的光滑广义里奇曲率。

[*]波尔多大学，法国国家科学研究中心，波尔多国立高等工程学院，波尔多数学研究所，UMR 5251，法国塔朗斯 F-33400。marc.arnaudon@math.u-bordeaux.fr

[†]伦敦帝国理工学院数学系，英国；洛桑联邦理工学院，瑞士。xue-mei.li@imperial.ac.uk 或 xue-mei.li@epfl.ch

[‡]伦敦帝国理工学院数学系，英国。benedikt.petko15@imperial.ac.uk

文献中将利用概率测度的最优传输距离研究曲率的方法称为底层空间的“粗曲率”或“Wasserstein 曲率”。

设 M 是一个完备的 n 维黎曼流形。对于任意 $x \in M$ 和 ε, $\delta > 0$ 我们将支撑在测地球 $B_\varepsilon(x)$ 上的均匀概率测度记为

$$d\mu_x^\varepsilon(z) := \frac{\mathbb{1}_{B_\varepsilon(x)}(z)}{\mathrm{vol}(B_\varepsilon(x))} d\mathrm{vol}(z)$$

其中 vol 是标准的黎曼体积测度。

设 $V\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑势, $e^{-V(z)}d\mathrm{vol}(z)$ 是其在 M 上对应的权重测度。对于任意 $x \in M$，定义支撑在测地球 $B_\varepsilon(x)$ 上的（非均匀）概率测度，

$$d\nu_x^\varepsilon(z) := \mathbb{1}_{B_\varepsilon(x)}(z) \frac{e^{-V(z)}}{\int_{B_\varepsilon(x)} e^{-V(z')}dz'} d\mathrm{vol}(z).$$

我们的主要结果是定理1.1和定理 4.7。第一个结果允许我们从这类测度的 1-Wasserstein 距离中提取广义 Ricci 张量：

定理 1.1。对于任意点 $x_0 \in M$、向量 $v \in T_{x_0}M$，若 $\|v\| = 1$ 且 δ，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$W_1(\nu_{x_0}^\varepsilon, \nu_y^\varepsilon) = \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\left(Ric_{x_0}(v,v) + 2Hess_{x_0}V(v,v)\right)\right) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3) \tag{1.1}$$

其中 $y := \exp_{x_0}(\delta v)$。

将尺度 ε 下的粗曲率记为

$$\kappa_\varepsilon(x_0, y) := 1 - \frac{W_1(\nu_{x_0}^\varepsilon, \nu_y^\varepsilon)}{d(x_0, y)} \tag{1.2}$$

对展开式（1.1）重新整理并取极限后，可得

$$\lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \frac{2(n+2)}{\varepsilon^2}\kappa_\varepsilon(x_0, y) = \mathrm{Ric}_{x_0}(v,v) + 2\mathrm{Hess}_{x_0}(v,v). \tag{1.3}$$

定理1.1 推广了 Ollivier 的一个结果 [Oll09]，并且我们给出了详细证明。

作为一项应用，在定理 4.7中，我们推广了 Hoorn 等人 [vdHCL+21]的一个结果：从强度递增且与非均匀测度$e^{-V(z)}$体积(dz)成比例的泊松点过程中采样得到的随机几何图，其粗曲率收敛于经 V的 Hessian 修正后的光滑里奇曲率。我们的方法能够处理泊松过程强度的非均匀性，以及指数映射所导致的非均匀性。

注 1.2. 我们对定理 δ, ε 中的“充分小”一词作如下说明：1.1。在所有论证中，我们都假设 δ, ε 足够小，其取值仅取决于 $x_0 \in M$的一个紧邻域。作此限制有两个原因：

- 第 2 节的流形距离估计中，为确保所用变分中的所有测地线都是长度最短且唯一的，可以将 δ, ε限制在 x_0处一致单射半径的一个足够小的比例范围内。

- 在第3节的 Wasserstein 距离估计中，为了对传输映射应用反函数定理 T，其在 x_0处的行列式非零

在本文中，我们将始终假设这些限制均已满足，并且由针对 δ，ε 的“充分小”假设隐含涵盖。

注 1.3。 Ollivier [Oll09，例 5] 通过将均匀测度沿着 $-\nabla V(x)$ 的方向平移，并取以 $x \in M$为中心的均匀测度，给出了类似的结果。不过，要得到这一结果，平移的适当幅度是在事后选定的。这与我们采用非均匀测度的方法形成对比：我们的方法不允许这种自由度，因此可以认为它更具带权流形本身的内在性。我们强调两者的区别：我们的方法采用的是非均匀测度，而非均匀测度。此外，我们的方法更适用于将随机几何图应用于从具有非均匀强度的泊松点过程采样得到的情形。

接下来，我们将介绍证明定理 1.1所需的两个要素：流形距离估计和 Wasserstein 距离估计，分别在第 2 节和 3节中介绍。随机几何图的应用构成第 4节。文中清晰呈现的中间几何估计也可能具有独立的研究价值。

致谢。 本研究得到了 EPSRC 随机系统数学博士培训中心：分析、建模与模拟（EP/S023925/1）的支持。XML 获得了 EPSRC（EP/S023925/1 和 EP/V026100/1）的部分资助。

2 流形距离估计

测度的 1-Wasserstein 距离，按定义是流形上点对距离的平均值的最小值。测地线的变分是黎曼流形上局部距离估计的标准工具。本节先引入一些预备记号。

记号 2.1。 设 $v \in T_{x_0}M$为一个单位向量。映射 $c\colon [0,\varepsilon] \times [0,1] \to M$表示测地线 $\gamma\colon [0,1] \to M$ 的若干光滑变分，具体形式将在后文说明，

$$\gamma(t) := \exp_{x_0}(t\delta v)$$

使得 $c(0,t) = \gamma(t)$。将对应于变分 c 的雅可比场记为

$$J(t) := \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} c(s,t)$$

以及 J沿 γ相对于 $\dot\gamma$的协变导数，记为 $\frac{D}{dt}J(t)$ $\frac{D^2}{dt^2}J(t)$。回想一下，J满足雅可比方程

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) = -R(J(t),\dot\gamma(t))\dot\gamma(t)$$

其中 R 是黎曼曲率张量。对于沿 γ定义的任意向量场 X，我们将其垂直于 $\dot\gamma$ 的部分记为

$$X^\perp := X - \frac{1}{\delta^2}\langle X,\dot\gamma\rangle\,\dot\gamma.$$

记 $/\!\!/_t\colon T_{x_0}M \to T_{\gamma(t)}M$ 为沿测地线 γ 关于 Levi-Civita联络的平行移动，并记 $\mathrm{Hess}_{x_0}V^\#\colon T_{x_0}M \to T_{x_0}M$ 为满足下式的唯一线性映射

$$\left\langle \mathrm{Hess}_{x_0}V^\#(v), w\right\rangle = \mathrm{Hess}_{x_0}V(v,w) \quad \forall v,w \in T_{x_0}M.$$

为了得到距离估计，我们将用到长度的一阶和二阶导数的标准公式

$$L(\varepsilon,\delta) := \int_0^1 \left\| \frac{\partial c(\varepsilon,t)}{\partial t} \right\| dt$$

就 J（见 [Jos17，第 6]章）：

引理 2.2。 长度 L 关于第一个变量在0 处的一阶和二阶导数为

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} L(s,\delta) = \frac{1}{\delta}\left\langle J(t), \dot\gamma(t)\right\rangle|_{t=0}^{t=1}, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\bigg|_{s=0} L(s,\delta) &= \frac{1}{\delta}\left[\int_0^1 \left\langle \frac{D}{dt}J(t)^\perp, \frac{D}{dt}J(t)^\perp\right\rangle - \left\langle R(J(t)^\perp,\dot\gamma(t))\dot\gamma(t), J(t)^\perp\right\rangle dt\right] \\ &\quad + \frac{1}{\delta}\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} c(s,t), \dot\gamma(t)\right\rangle\bigg|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{\delta}\left\langle \frac{D}{dt}J(t)^\perp, J(t)^\perp\right\rangle\bigg|_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{\delta}\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} c(s,t), \dot\gamma(t)\right\rangle\bigg|_{t=0}^{t=1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

我们将考察测地线的两种不同变分 c_1 和 c_2 $\gamma(t) = \exp_{x_0}(t\delta v)$，它们将为定理1.1中的最优传输问题提供关键的距离估计。

2.1 逐点传输距离估计

我们继续定义 c_1，其目的是通过稍后定义的某个传输映射来近似逐点传输距离。利用这些逐点距离估计，我们将能够得出定理1.1中 Wasserstein距离的上界。

记号 2.3。 对于任意 v，$w \in T_{x_0}M$ 满足 $\|v\| = 1$ 和 $\|w\| \leqslant 1$，我们引入传输向量

$$w' := w - \frac{\varepsilon}{2}(1-\|w\|^2)(/\!\!/_1^{-1}\nabla V(y) - \nabla V(x_0)) = w + O(\delta\varepsilon), \tag{2.3}$$

其中我们滥用记号 $O(\delta\varepsilon)$ 来表示一个模长为 $\delta\varepsilon$ 阶的向量。考虑测地线

$$\theta(s) := \exp_y(s\,/\!\!/_1\, w'), \quad \eta(s) := \exp_{x_0}(sw) \tag{2.4}$$

其中 $y = \exp_{x_0}(\delta v)$，以及由 s 索引、以 t 参数化的一族测地线，它们从 $\eta(s)$ 出发，并在 $t=1$ 时到达 $\theta(s)$，即映射 c_1：$[0,\varepsilon]\times[0,1] \to M$ 定义为

$$c_1(s,t) = \exp_{\eta(s)}(t\exp^{-1}_{\eta(s)}(\theta(s)))$$

这是测地线的变分 $t \mapsto \exp_{x_0}(t\delta v)$。图1 展示了这一变分。注意

$$\theta(s) = c_1(s,1), \quad \eta(s) = c_1(s,0)$$

是图中底部和顶部的曲线 1，并且对每个 $s \in [0,\varepsilon]$，$t \mapsto c_1(s,t)$ 都是一条测地线。此外，$\gamma(t) = \exp_{x_0}(t\delta v) = c_1(0,t)$ 是图中最左侧的测地线。

该变分的目的是估计由从 η 到 θ 的测地线 γ 的变分 c_1 给出的两个角点 $\theta(\varepsilon)$ 和 $\eta(\varepsilon)$ 之间的距离。为强调其对 δ 和 ε 的依赖性，我们将长度记为

$$L_1(\varepsilon,\delta) := \int_0^1 \left\| \frac{\partial c_1(\varepsilon,t)}{\partial t} \right\| dt = d(c_1(\varepsilon,1), c_1(\varepsilon,0)) = d(\theta(\varepsilon),\eta(\varepsilon)). \tag{2.5}$$

我们先对变分 c_1的雅可比场进行初步估计。

引理 2.4. 雅可比场 $J(t) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} c_1(s,t)$ 满足

$$\left\| \frac{D}{dt} J(t) \right\| = O(\delta\varepsilon) + O(\delta^2) \tag{2.6}$$

and

$$/\!\!/_t^{-1}\, J(t) = J(0) + O(\delta\varepsilon) + O(\delta^2) \quad \forall t \in [0,1]. \tag{2.7}$$

证明。 回顾 $\dot\gamma(t) = \delta\, /\!\!/_t\, v$，由此雅可比方程可得

$$\left\| \frac{D^2}{dt^2} J(t) \right\| = \|R(J(t),\dot\gamma,(t))\dot\gamma(t)\| \leqslant C\delta^2 \|J(t)\| \tag{2.8}$$

其中 $C = \sup_{t\in[0,1]} \|R_{\gamma(t)}(\cdot, /\!\!/_t\, v)\ /\!\!/_t\, v\| < \infty$ 在算子范数意义下成立。 J 的展开至 $t=1$（含积分余项）为

$$/\!\!/_1^{-1}\, J(1) = J(0) + \frac{D}{dt}\bigg|_{t=0} J(t) + \int_0^1 (1-u)\, /\!\!/_u^{-1}\, \frac{D^2}{dt^2} J(u) du.$$

由于 $/\!\!/_1^{-1}\, J(1) - J(0) = w' - w$ 的量级为 $\delta\varepsilon$，这意味着

$$\left\| \frac{D}{dt}\bigg|_{t=0} J(t) \right\| \leqslant O(\delta\varepsilon) + C\delta^2\|J(t)\|$$

因此

$$\|J(t)\| \leqslant \|J(0)\| + \int_0^t \left\| \frac{D}{dt} J(u) \right\| du \leqslant 1 + O(\delta\varepsilon) + C\delta^2 \int_0^t \|J(u)\| du$$

由此根据格朗沃尔引理可得

$$\|J(t)\| \leqslant (1 + O(\varepsilon\delta)) e^{C\delta^2 t} = 1 + O(\delta^2) + O(\delta\varepsilon).$$

因此，我们由（2.8）可推出

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) = O(\delta^2)$$

因此

$$/\!\!/_t^{-1}\, \frac{D}{dt} J(t) = \frac{D}{dt}\bigg|_{t=0} J(t) + \int_0^t /\!\!/_u^{-1}\, \frac{D^2}{dt^2} J(u) du = O(\delta\varepsilon) + O(\delta^2)$$

最后

$$/\!\!/_t^{-1}\, J(t) = J(0) + \int_0^t /\!\!/_u^{-1}\, \frac{D}{dt} J(u) du$$

其中，第二项的范数具有所需的阶。 □

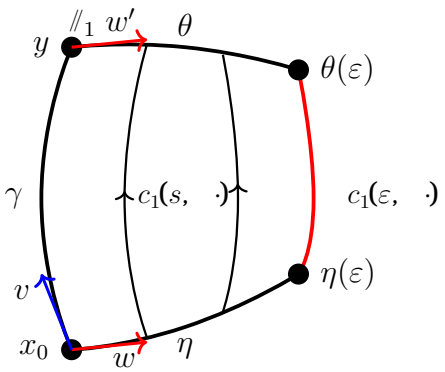

图1：测地线变分 c_1 （在具有正截面曲率的 v， w-平面上）

命题 2.5。 对于任意 v， $w \in T_{x_0}M$满足 $\|v\| = 1$， $\|w\| \leqslant 1$ 以及 δ， ε 充分小时，我们有 $\exp^{x_0}(\varepsilon w)$ 与 $\exp^{\exp_{x_0}(\delta v)}$之间的距离估计为 $\varepsilon\ /\!/_1\ w'$，其中w' 由 （2.3） 给出，并表示为测地线长度

$$\begin{aligned} L_1(\varepsilon,\delta) = \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[K_{x_0}(v,w)(\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2) + \textit{Hess}_{x_0}V(v,v)(1-\|w\|^2)\right]\right) \\ + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中， $O(\varepsilon^2\delta^2) + O(\delta\varepsilon^3)$ 项在 v 和 w中一致有界。

证明。 我们对第一变量展开长度 $L_1(\varepsilon,\ \delta)$,

$$L_1(\varepsilon,\delta) = L_1(0,\delta) + \varepsilon\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} L_1(s,\delta) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left.\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right|_{s=0} L_1(s,\delta) + O(\varepsilon^3) \tag{2.10}$$

并利用变分 $c_1(s,\ \cdot)$计算一阶和二阶系数。

雅可比场 $J(t) := \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} c_1(s,\ t)$ 满足边界条件

$$J(0) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\eta(s) = w, \qquad J(1) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\theta(s) = /\!/_1\ w'$$

其中 w' 由公式 (2.3) 给出。于是展开式 (2.10) 中的一阶系数为

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} L_1(s,\delta) &= \frac{1}{\delta}(\langle J(1),\dot\gamma(1)\rangle - \langle J(0),\dot\gamma(0)\rangle) \\ &= \langle /\!/_1\ w', /\!/_1\ v\rangle - \langle w, v\rangle \\ &= -\frac{\delta\varepsilon}{2}(1-\|w\|^2)\mathrm{Hess}_{x_0}V(v,v) \end{aligned}$$

由公式 (2.1) 并代入 w'。

长度的二阶变分公式 (2.2) 化简为

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right|_{s=0} L_1(s,\delta) = \frac{1}{\delta}\int_0^1 \left\langle \frac{D}{dt}J(t)^\perp, \frac{D}{dt}J(t)^\perp \right\rangle - \left\langle R(J(t)^\perp,\dot\gamma(t))\dot\gamma(t), J(t)^\perp\right\rangle dt$$

由于 $\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}c\ (s,\ 0) = \frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}c\ (s,\ 1) = 0$作为 $s \mapsto c\ (s,\ 0)$ $s \mapsto c\ (s,\ 1)$ 是测地线。由估计式（2.6），第一项为

$$\int_0^1 \left\langle \frac{D}{dt}J(t)^\perp, \frac{D}{dt}J(t)^\perp \right\rangle dt = O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta^3\varepsilon) + O(\delta^4).$$

此外，由于 R 关于基点是光滑的，我们有 $\| /\!\!/_t^{-1} \circ R \circ /\!\!/_t - R\| = O(\delta)$，因为平行移动沿长度为 δ 的测地线进行。然后，由于 R 的多重线性以及估计式（2.7），

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\langle R(J(t)^\perp, \dot\gamma(t))\dot\gamma(t), J(t)^\perp \right\rangle dt &= \delta^2 \int_0^1 \left\langle R(/\!\!/_t^{-1}\ J(t)^\perp, v)v, /\!\!/_t^{-1}\ J^\perp(t) \right\rangle dt + O(\delta^3) \\ &= \delta^2 \left\langle R(w, v)v, w \right\rangle + O(\delta^3)\end{aligned}$$

注意到 $\left\langle R(w^\perp,\ v)v,\ w^\perp \right\rangle = \left\langle R(w,\ v)v,\ w \right\rangle$，这是由曲率张量的反对称性以及根据定义 $w^\perp - w$ 平行于 v 得出的。

因此，回到二阶系数并代入，

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right|_{s=0} L_1(s,\delta) = \delta \left\langle R(w,v)v, w \right\rangle + O(\delta^2) = \delta K(v,w)(1 - \left\langle v, w \right\rangle^2) + O(\delta^2).$$

最后，$O(\varepsilon^3)$ 在（2.10）中的项实际上是 $O(\delta\varepsilon^3)$，因为 $L_1(\varepsilon,\ \delta) = O(\delta)$ 且 L_1 是光滑的。 □

注 2.6。我们将反复用到以下事实。设 $\phi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是在原点光滑的函数。若 $\phi(x,\ y) = O(x^a \wedge y^b)$，则 $\phi(x,\ y) = O(x^a y^b)$。对于 $a = b = 1$，将其展开至一阶即可看出，

$$\phi(x,y) = \phi(0,0) + \partial_x\phi(0,0)x + \partial_y\phi(0,0)y + R_{11}(x,y)x^2 + R_{12}(x,y)xy + R_{22}(x,y)y^2$$

其中 R_{11}、R_{12}、$R_{21} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 是一些光滑余项函数。于是，$\phi(x,y) = O(y)$ 蕴含 $\phi(0,0) = \partial_x\phi(0,0) = 0$ 且 $R_{11}(x,y) = O(y)$；而 $\phi(x,y) = O(x)$ 蕴含 $\partial_y\phi(0,0) = 0$ 且 $R_{22}(x,y) = O(x)$。于是，对于某个 $R' \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，有 $\phi(x,y) = R'(x,y)xy$。对于任意的 a、$b \in \mathbb{N}$，论证类似。

命题 2.5 与下述关于测地三角形的距离估计类似，参见例如 [Mey04] [LV10]。

引理 2.7。对于任意 $w_1, w_2 \in T_{x_0}M$ 线性无关且 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$d(\exp_{x_0}(\varepsilon w_1), \exp_{x_0}(\varepsilon w_2)) = \varepsilon\|w_1 - w_2\| - \frac{1}{6}\frac{\langle R(w_1,w_2)w_2, w_1\rangle}{\|w_1 - w_2\|}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

2.2 投影距离估计

我们构造变分 c_2，以估计到特定子流形的投影距离。此投影距离将作为合适的 1-利普希茨函数，通过 Kantorovich-Rubinstein 对偶为定理 1.1 中 Wasserstein距离的下界提供证明。

设 E 是黎曼流形 M中的光滑嵌入子流形。

定义 2.8。若存在法丛 $W \subset TE^\perp$ 的一个开子集，使得 $E \subset W$且$\exp\colon W \to U$ 是微分同胚，则称 E 在 M 中的开邻域 U 为管状邻域。

以下结果归功于 R. Foote [Foo84]:

引理 2.9. 对于任意紧集嵌入光滑子流形 E *of* M，存在 E 在 M 中的管状邻域 U，使得最短距离投影映射

$$p(x) := \mathit{argmin}_{z\in E} d(x,z). \tag{2.11}$$

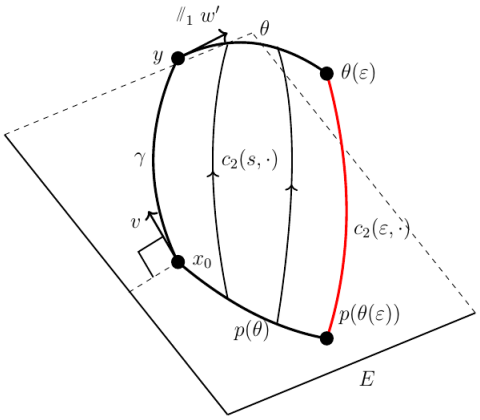

图 2：测地线变分 c_2

在 U 上定义良好，并且在 $U \setminus E$ 上光滑；到投影的距离 $z \mapsto d(z, p(z))$ 在 $U \setminus E$ 上也光滑。

此外，若 E 是余维一子流形，且 $\nu \in \Gamma(TE^{\perp})$ 是子流形的单位法向量场，则由下式定义的带符号投影距离

$$f(z) := \operatorname{sign}(\langle \exp_{p(z)}^{-1}(z), \nu(z)\rangle) d(z, p(z)) \tag{2.12}$$

在整个 U 上光滑。

现在考虑具体的余维一子流形，

$$E := \exp_{x_0}\{v^{\perp}\} := \{\exp_{x_0}(w) : w \in T_{x_0}M, \langle w, v\rangle = 0\} \subset M \tag{2.13}$$

并回顾一下，E 的第二基本形式是二阶协变张量场，在 x_0 处对两个向量 $u, v \in T_{x_0}E$ 定义为

$$\mathrm{II}(u, v) := \langle \nabla_u \nu, v\rangle = -\langle \nu, \nabla_u V\rangle$$

其中，V 右侧的是一个任意的局部向量场，它延拓了 v (参见 [Jos17，第 5]章)，而 $\nu \in \Gamma(TE^{\perp})$ 是一个单位法向量场，满足 $\nu(x_0) = v$。

注 2.10. 为方便读者，我们证明这个子流形上 II 在 $x_0 \in M$ 处消失这一事实，并将在下文中用到它。使用 M 在 $x_0 \in M$ 处的正规坐标 $(x^1, \ldots, x^n)$，我们可以假设 $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ 是 E 在 x_0 处的正规坐标。那么 $\Gamma_{ij}^k(x_0) = 0$（见 [Jos17，第 1 章.4]），且对于任意向量场 $X = \sum_{i=1}^{n-1} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TE)$，有

$$\begin{aligned}\nabla_X Y(x_0) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} X^i(x_0)\Gamma_{ij}^k(x_0)Y^j(x_0)\frac{\partial}{\partial x^k}(x_0) + X^i(x_0)\frac{\partial Y^j}{\partial x^j}(x_0)\frac{\partial}{\partial x^j}(x_0)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} X^i(x_0)\frac{\partial Y^j}{\partial x^j}(x_0)\frac{\partial}{\partial x^j}(x_0) \in T_{x_0}E\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{II}(X, Y)(x_0) = -\langle \nu(x_0), \nabla_X Y(x_0)\rangle = 0$，因为 ν 垂直于 E。

现在，我们定义测地线变分 c_2，如图 2所示。与之前一样，对于向量 $w \in T_{x_0}M$ 满足 $\|w\| \leqslant 1$ 测地线

$$\theta(s) := \exp_y(s /\!/_1 w')$$

其中 w' 由式（2.3）定义。令 $c_2\colon [0,\varepsilon]\times[0,1]\to M$ 为测地线变分$\gamma(t)=\exp^{x_0}(t\delta v)$，其定义如下：

$$c_2(s,t)=\exp_{p(\theta(s))}(t\exp^{-1}_{p(\theta(s))}(\theta(s)))$$

其中 p 是由式（2.11）给出的投影映射，并记其长度为

$$L_2(\varepsilon,\delta):=\int_0^1\left\|\frac{\partial c_2(\varepsilon,t)}{\partial t}\right\|dt=d(c_2(\varepsilon,1),c_2(\varepsilon,0))=d(\theta(\varepsilon),p(\theta(\varepsilon)))$$

以及有向长度

$$\tilde{L}_2(\varepsilon,\delta):=\operatorname{sign}(\langle\exp^{-1}_{x_0}(c_2(\varepsilon,\delta)),v\rangle)L_2(\varepsilon,\delta),\tag{2.14}$$

根据引理 2.9，它是光滑的。

命题 2.11。对于任意向量 v、$w\in T_{x_0}M$，若 $\|v\|=1$、$\|w\|\leqslant 1$ 以及 δ、ε 足够小，则$\exp^{\exp_{x_0(\delta v)}(\varepsilon\ /\!\!/_1\ w')}$ 与其在 E上的投影之间的有向距离可展开为

$$\begin{aligned}\tilde{L}_2(\varepsilon,\delta)=\delta+\varepsilon\langle v,w\rangle-\frac{\varepsilon^2\delta}{2}\left[K_{x_0}(v,w)(\|w\|^2-\langle v,w\rangle^2)+\boldsymbol{Hess}_{x_0}V(v,v)(1-\|w\|^2)\right]\\+O(\varepsilon^2\delta^2)+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中，$O(\varepsilon^2\delta^2)+O(\varepsilon^3)$ 项关于 v 和 w 一致有界。

˜证明。由于当 s 足够小时，$L_2(s,\delta)$ 与 $=L_2(s,\delta)$ 相等，它们在 $s=0$ 处的导数也相等。因此，我们可以再次运用测地线变分的方法，计算 $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}L_2(s,\delta)$ 和$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big|_{s=0}L_2(s,\delta)$，从而得到 $\tilde{L}_2(\varepsilon,\delta)$ 展开的系数。

雅可比场 $J(t)=\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}c_2(s,t)$ 满足边界条件 $J(1)=/\!\!/_1\ w'$。此外，$J(0)\in T_{x_0}E$，因为对所有 $s\in[0,\varepsilon]$，$c_2(s,0)\in E$，因此特别有 $\dot\gamma(0)\perp J(0)$ 且 $J^\perp(0)=J(0)$。由公式 (2.1)，ε 阶系数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}L_2(s,\delta)&=\frac{1}{\delta}(\langle J(1),\dot\gamma(1)\rangle-\langle J(0),\dot\gamma(0)\rangle)\\&=\frac{1}{\delta}\left\langle/\!\!/_1^{-1}\ J(1),/\!\!/_1^{-1}\ \dot\gamma(1)\right\rangle\\&=\langle v,w\rangle-\frac{\delta\varepsilon}{2}\mathrm{Hess}_{x_0}(v,v)(1-\|w\|^2).\end{aligned}\tag{2.16}$$

根据公式 (2.2)，阶 ε^2 系数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big|_{s=0}L_2(s,\delta)=\frac{1}{\delta}\left(\left\langle\frac{D}{dt}\Big|_{t=1}J^\perp(t),J^\perp(1)\right\rangle-\left\langle\frac{D}{dt}\Big|_{t=0}J^\perp(t),J^\perp(0)\right\rangle\right)\\+\frac{1}{\delta}\left(\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}c_2(s,1),\dot\gamma(1)\right\rangle-\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}c_2(s,0),\dot\gamma(0)\right\rangle\right).\end{aligned}\tag{2.17}$$

我们证明，右侧除第一项外的所有项均为零，接下来我们将进一步估计第一项。对于任意 $u\in T_{x_0}E$，

$$\left\langle\frac{D}{dt}\Big|_{t=0}J^\perp(t),u\right\rangle=\left\langle\left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=s=0}c_2(s,t)\right)^\perp,u\right\rangle=\delta\Pi\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}c_2(s,0),u\right)=0$$

因为第二基本形式在 x_0 处为零。由于 $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} c(s,0) \in T_{x_0}E$，这意味着 $\frac{D}{dt}\big|_{t=0} J^\perp(t) = 0$。类似地，

$$\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(s,0), \dot\gamma(0)\right\rangle = -\delta\Pi\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(s,0), \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(s,0)\right) = 0.$$

由于 $s \mapsto \theta(s)$是一条测地线，$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} c(s,1) = \frac{D}{ds}\theta(s) = 0$，第三项也为0。

现在我们估计式(2.17)中的第一项。对于任意 $t \in [0,1]$，我们有带积分余项的展开，

$$\begin{aligned}
/\!\!/_t^{-1}\, J^\perp(t) &= J^\perp(0) + \int_0^t (t-u)\, /\!\!/_t^{-1}\, \frac{D^2}{dt^2} J^\perp(t) dt \\
&= J^\perp(0) - \delta^2 \int_0^t (t-u)\, /\!\!/_t^{-1}\, R(J^\perp(t), /\!\!/_t\, v)\, /\!\!/_t\, v\, dt \\
&= J^\perp(0) + O(\delta^2).
\end{aligned}$$

特别地，这对 $t=1$也成立，因此我们推出

$$/\!\!/_1^{-1}\, J^\perp(1) - /\!\!/_t^{-1}\, J^\perp(t) = O(\delta^2).$$

此外，雅可比方程给出

$$/\!\!/_1^{-1}\, \frac{D}{dt}\Big|_{t=1} J^\perp(t) = -\delta^2 \int_0^1 /\!\!/_t^{-1}\, R(J^\perp(t), /\!\!/_t\, v)\, /\!\!/_t\, v\, dt$$

因此，二阶导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big|_{s=0} L_2(s,\delta) &= \frac{1}{\delta}\left\langle \frac{D}{dt}\Big|_{t=1} J^\perp(t), J^\perp(1)\right\rangle \\
&= -\delta \int_0^1 \left\langle /\!\!/_t^{-1}\, R(J^\perp(t), /\!\!/_t\, v)\, /\!\!/_t\, v, /\!\!/_1^{-1}\, J^\perp(1)\right\rangle dt \\
&= -\delta \int_0^1 \left\langle R(/\!\!/_t^{-1}\, J^\perp(t), v)v, /\!\!/_1^{-1}\, J^\perp(1)\right\rangle dt + O(\delta^2) \\
&= -\delta \int_0^1 \left\langle R(/\!\!/_1^{-1}\, J^\perp(1) + O(\delta^2), v)v, /\!\!/_1^{-1}\, J^\perp(1)\right\rangle dt + O(\delta^2) \\
&= -\delta \left\langle R(w', v)v, w'\right\rangle + O(\delta^2) \\
&= -\delta \left\langle R(w, v)v, w\right\rangle + O(\delta^2)
\end{aligned}$$

这里使用了 $\| /\!\!/_t^{-1} \circ R \circ /\!\!/_t - R\| = O(\delta)$和 $\|w' - w\| = O(\delta\varepsilon)$。

因此，展开的系数 $\tilde L_2(\varepsilon, \delta)$ 在 ε 中符合要求。 □

我们可以推导出 ε 中有向长度之差的展开：

推论 2.12。对于任意向量 v、$w \in T_{x_0}M$，若 $\|v\| = 1$、$\|w\| \leqslant 1$ 以及 δ、ε 充分小，

$$\begin{aligned}
&\tilde L_2(\varepsilon,\delta) - \tilde L_2(\varepsilon, 0) \\
&\quad = \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[K_{x_0}(v,w)(\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2) + \mathit{Hess}_{x_0} V(v,v)(1 - \|w\|^2)\right]\right) \\
&\qquad + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3) \\
&\quad = L_1(\varepsilon,\delta) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

其中，$O(\varepsilon^2\delta^2) + O(\delta\varepsilon^3)$ 项在 v 和 w中一致有界。

证明。 根据前面的命题，先将两个长度相减，得到的展开几乎与上式相同，只是最后一项起初仅为 $O(\varepsilon^3)$；但由于该差趋于零，它也为 $O(\delta)$，因此实际上必为 $O(\delta\varepsilon^3)$，参见注 2.6。推论陈述中的第二个等式可通过与命题 2.5 比较得出，因为两个展开在 $O(\delta^2\varepsilon^2)+O(\delta\varepsilon^3)$项之前一致。 □

3 Wasserstein 距离近似

下面两个预备引理通过积分平均将里奇曲率与截面曲率联系起来，从而为上一节的距离估计与接下来将讨论的 Wasserstein 距离估计搭建桥梁。

标准的里奇曲率通常定义为黎曼曲率张量的缩并，也可等价地用截面曲率表示，

$$\mathrm{Ric}(v,v) := \sum_{i=1}^{n} \langle R(v,e_i)e_i, v\rangle = K(v,e_i)(1-\langle v,e_i\rangle^2).$$

里奇曲率也可以等价地表示为任意非零半径的球面或球上的平均值。我们用 B_r 表示 $T_{x_0}M$ 中以原点为中心、半径为 $r>0$ 的球，并用 σ 表示球面 ∂B_ε 上的均匀曲面测度。

引理 3.1（里奇曲率作为球面上的平均值）。 对于 $x_0\in M$，$v\in T_{x_0}M$ 满足$\|v\|=1$且 $\varepsilon>0$，有

$$\frac{\varepsilon^2}{n}Ric(v,v) = \fint_{\partial B_\varepsilon} K(v,w)(\varepsilon^2-\langle v,w\rangle^2)d\sigma(w). \tag{3.1}$$

证明。 里奇曲率的标准定义

$$\mathrm{Ric}(v,v) := \sum_{i=1}^{n} \langle R(v,e_i)e_i, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} K(v,e_i)(1-\langle v,e_i\rangle^2) \tag{3.2}$$

与标准正交基的选择无关(e_i) 属于 T_pM [Jos17，第 4 章。3]。我们利用这一点，对右侧的表达式在 $SO(n)$ 上关于 $SO(n)$的 Haar 测度 S^{n-1} 进行积分。记

$$SO(n)\times S^{n-1}\to S^{n-1},\quad (A,v)\mapsto Av$$

并且 $S^{n-1}\cong SO(n)/SO(n-1)$。

设 $(e_1,\dots e_n)$ 为 $T_{x_0}M$的任意标准正交基。(3.2) 右侧在 $SO(n)$上的平均积分为

$$\fint_{SO(n)}\sum_{i=1}^{n} K(v,Ae_i)(1-\langle v,Ae_i\rangle^2)dA = n\fint_{S^{n-1}} K(v,w)(1-\langle v,w\rangle^2)d\sigma(w).$$

等式成立是因为映射

$$SO(n)\to S^{n-1}, A\mapsto Ae$$

对任意 $e\in S^{n-1}$，在 $SO(n)$ 上的 Haar 测度的推前是 S^{n-1}上的黎曼体积测度的一个倍数，其中我们假设 S^{n-1}配备了齐性黎曼结构。取平均积分时，这个乘法常数会消失，因此对于 3.1，我们得到式 $\varepsilon=1$。变量代换 $\tilde{w}=\varepsilon w$ 给出了任意 $\varepsilon>0$的公式。 □

引理 3.2（里奇曲率作为球上的平均值）。对于任意 $x_0 \in M$、$v \in T_{x_0}M$、$\|v\| = 1$以及 $\varepsilon > 0$，有

$$\frac{\varepsilon^2}{n+2}\mathrm{Ric}(v,v) = \fint_{B_\varepsilon} K(v,w)\left(\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2\right) dw \tag{3.3}$$

其中 dw 表示 $T_{x_0}M$上的欧几里得体积测度。

证明。令 σ 表示 ∂B_r 上的标准曲面测度，并将右侧的积分写为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r} K(v,w)(\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2) d\sigma(w) dr \\
&\quad = \int_0^\varepsilon \frac{\sigma(\partial B_r)}{|B_\varepsilon|} r^2 \fint_{\partial B_r} K(v,w)\left(1 - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2}\right) d\sigma(w) dr \\
&\quad = n\int_0^\varepsilon \varepsilon^{-n} r^{n+1} dr \fint_{\partial B_1} K(v,w)(1-\langle v,w\rangle^2) d\sigma(w) \\
&\quad = \frac{\varepsilon^2}{n+2}\mathrm{Ric}(v,v)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中，第二个等式是因为 $d\sigma(w)$积分的被积函数与 r无关，所以可以在任意半径的球上取平均；而对 r 的积分则是基于以下事实：

$$|B_r| = \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^n |B_\varepsilon|, \quad \sigma(\partial B_r) = \frac{\partial |B_r|}{\partial r}$$

由此得到 $\frac{\sigma(\partial B_r)}{|B_\varepsilon|} = n\varepsilon^{-n} r^{n-1}$。最后一行由恒等式（3.1）得出。 □

3.1 密度估计

引理 3.2将里奇曲率表示为切空间中一个球上的平均值。由于考虑流形上的测度更为自然，我们将应用引理 3.8，比较流形中测地球上的均匀测度与切空间中球上的均匀测度经指数映射推前所得的测度。本节的密度估计是证明下一节中 Wasserstein 距离近似的辅助结果。

我们将反复使用下面关于行列式的一个简单观察，它会在使用变量替换公式时出现。

引理 3.3. 设 $A(\varepsilon) = (a_{ij}(\varepsilon)) = \delta_{ij} + b_{ij}(\varepsilon)$ 是一个光滑的 $n \times n$ 矩阵值函数，其中 $b_{ij}(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$。那么

$$\det A(\varepsilon) = 1 + \sum_i b_{ii}(\varepsilon) + O(\varepsilon^4).$$

证明。回顾

$$\det A = \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

并将置换 σ 分为两种情况考虑：

- 若 $\sigma \neq \mathrm{id}$，则 $\exists i, j$ 使得 $\sigma(i) \neq i, \sigma(j) \neq j$。那么 $a_{i\sigma(i)}a_{j\sigma(j)} = b_{i\sigma(i)}b_{j\sigma(j)} = O(\varepsilon^4)$，因此也有 $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = O(\varepsilon^4)$。

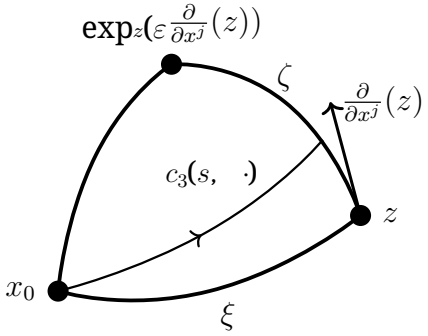

图 3：测地线变分 c_3

- 若 $\sigma = \mathrm{id}$，则 $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \dots a_{nn} = \prod_i (1 + b_{ii}(\varepsilon))^n = 1 + \sum_i b_{ii}(\varepsilon) + O(\varepsilon^4)$。

对所有置换 σ 求和可知，常数项为 1，$O(\varepsilon)$ 项消失，ε^2 项为 $\sum_i b_{ii}(\varepsilon)$，其余项的阶为 ε^4。 □

注 3.4. 类似地，若 $A(\varepsilon,\ \delta) = (a_{ij}(\varepsilon,\ \delta)) = \delta_{ij} + b_{ij}(\varepsilon,\ \delta)$ 满足 $b_{ij} = O(\delta\varepsilon)$，则

$$\det A(\varepsilon, \delta) = 1 + \sum_i b_{ii}(\varepsilon, \delta) + O(\delta^2\varepsilon^2).$$

引理 3.5. 在 $x_0 \in M$ 处的正规坐标 $(x^1, \dots, x^n)$ 中，有

$$g_{ij}(z) = \delta_{ij} + O(\varepsilon^2) \quad \forall z \in B_\varepsilon(x_0)$$

因此 $\det(g_{ij}(z)) = 1 + O(\varepsilon^2)$。

证明。 令 $z = \exp_{x_0}(sw)$，其中 $w \in T_{x_0}M, |w| = 1$ 和 $s > 0$，展开可得

$$\begin{aligned} g_{ij}(z) &= g_{ij}(\exp_{x_0}(sw)) \\ &= g_{ij}(x_0) + s\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x_0) w^k + r_{ij}(z, x_0) \\ &= \delta_{ij} + r_{ij}(z, x_0) \end{aligned}$$

其中 $r_{ij}(\cdot, x_0) = O(\varepsilon^2)$ 是余项，并且我们应用了正规坐标的性质：$g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ 且 $\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x_0) = 0$ (参见 [Jos17，第 1 章。4])。 □

引理 3.6。 在 $x_0 \in M$ 处的局部坐标 $(x^1, \dots, x^n)$ 下，有

$$\frac{\partial(\exp_{x_0}^{-1})^i}{\partial x^j}(z) = \delta_{ij} + O(\varepsilon^2) \quad \forall z \in B_\varepsilon(x_0)$$

因此

$$\det\left(\frac{\partial(\exp_{x_0}^{-1})^i}{\partial x^j}(z)\right)_{ij} = 1 + O(\varepsilon^2) \quad \forall z \in B_\varepsilon(x_0)$$

证明。 固定 $z \in B_\varepsilon^M(x_0)$，并定义两条测地线

$$\xi(t) := \exp_{x_0}\left(t \exp_{x_0}^{-1}(z)\right), \quad \zeta(s) := \exp_z\left(s\frac{\partial}{\partial x^j}(z)\right).$$

为计算 $\frac{\partial(\exp_{x_0}^{-1} z)^i}{\partial x^j}$，我们考虑由下式给出的测地线 ξ 的变分

$$c_3(s,t) := \exp_{x_0}\left(t \exp_{x_0}^{-1}(\zeta(s))\right)$$

（见图3）以及沿 ξ的相应雅可比场，

$$J(t) := \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} c_3(s,t)$$

它满足带边界条件的雅可比方程，

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) = -R(J(t),\dot{\xi})\dot{\xi}, \quad J(0)=0, \quad J(1) = \frac{\partial}{\partial x^j}(z).$$

记 $E_1(\xi(t)) := \xi(t)$，并考虑 $E_2,\dots,E_n$ 将 E_1 补全为沿 ξ的正交标架场。于是，对于某个光滑的 $J^i\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，有 $J(t) = J^i(t)E_i(t)$。记 $\dot{J}^i, \ddot{J}^i$ 为关于 t的导数，则雅可比方程写作

$$\ddot{J}(t)^i = -J^j(t)\|\dot{\xi}\|^2 \langle R(E_j,E_1)E_1, E_i\rangle = -J^j(t)\|\dot{\xi}\|^2 R^i_{1j1}. \tag{3.5}$$

显然，关于标架 (E_i) 的初始条件和终端条件分别为 $J^i(0) = 0$和 $J^i(1) = \delta^{ij}$。

此外，对于任意固定的 $z\in B_\varepsilon(x_0)$，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{D}{dt}\right|_{t=0} J(t) &= \left.\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0,t=0} c_3(s,t) = \left.\frac{D}{\partial s}\right|_{s=0}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} c_3(s,t)\\
&= \left.\frac{D}{ds}\right|_{s=0} \exp_{x_0}^{-1}(c_3(s,1)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp_{x_0}^{-1}(c_3(s,1))\\
&= D\exp_{x_0}^{-1}\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} c_3(s,1)\right) = D\exp_{x_0}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}(z)\right)\\
&= \frac{\partial \exp_{x_0}^{-1}}{\partial x^j}(z).
\end{aligned}$$

将雅可比方程（3.5）积分两次可得

$$J^i(1) - J^i(0) - \dot{J}^i(0) = -\int_0^1\int_0^t J^j(s)\|\dot{\xi}(s)\|^2 R^i_{1j1}(\xi(s))dsdt$$

因此

$$\frac{\partial(\exp_{x_0}^{-1})^i}{\partial x^j}(z) = \dot{J}^i(0) = \delta^{ij} + \int_0^1\int_0^t J^j(s)\|\dot{\xi}(s)\|^2 R^i_{1j1}(\xi(s))dsdt = \delta^{ij} + O(\varepsilon^2)$$

因为 $\|\xi\| = O(\varepsilon)$。 □

记号 3.7。对于 $x\in M$，记作

$$\tilde{B}_\varepsilon(x)\subset T_xM, \quad B_\varepsilon(x) := \exp_x\left(\tilde{B}_\varepsilon(x)\right)\subset M$$

ε在 T_xM 和 M中的球，以及概率测度

$$\begin{aligned}
d\tilde{\mu}_x^\varepsilon(w) &= \frac{\mathbb{1}_{\tilde{B}_\varepsilon(x)}(w)}{|\tilde{B}_\varepsilon(x)|}dw && \text{on } T_xM,\\
\bar{\mu}_x^\varepsilon(z) &= (\exp_x)_*\tilde{\mu}_x^\varepsilon(z) && \text{on } M,\\
d\tilde{\nu}_x^\varepsilon(w) &= \frac{e^{-V(\exp_x w)}}{\int_{\tilde{B}_\varepsilon(x)} e^{-V(\exp_x w')}d\tilde{\mu}_x^\varepsilon(w')}d\tilde{\mu}_x^\varepsilon(w) && \text{on } T_xM,\\
\bar{\nu}_x^\varepsilon(z) &= (\exp_x)_*\tilde{\nu}_x^\varepsilon(z) && \text{on } M,\\
d\nu_x^\varepsilon(z) &= \frac{e^{-V(z)}}{\int_{B_\varepsilon(x)} e^{-V(z')}d\mu_x^\varepsilon(z')}d\mu_x^\varepsilon(z) && \text{on } T_xM.
\end{aligned}$$

辅助测度 $\bar{\mu}_x^\varepsilon, \bar{\nu}_x^\varepsilon$ 将有助于近似 $W_1(\nu_{x_0}^\varepsilon, \nu_y^\varepsilon)$。

引理 3.8. 对于充分小的 δ, ε， $\bar{\mu}_x^\varepsilon$ 和 μ_x^ε 是 M 上的等价测度，支撑于 $B_\varepsilon(x)$，其相互密度为

$$\frac{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(z) = 1 + h(z, x) \tag{3.6}$$

其中 $h: \ M \times M \to \mathbb{R}$ 是几乎处处光滑的函数，使得对于每个 $x \in M$， $h(\cdot, x) = O(\varepsilon^2)$，且 $\int h(z, x) d\mu_x(z) = 0$。

证明。 $B_\varepsilon(x)$ 和 $B_\varepsilon(x)$ 上的均匀测度可以表示为微分形式，

$$d\tilde{\mu}_x^\varepsilon := \tilde{C} \mathbb{1}_{B_\varepsilon(0)} de^1 \wedge \ldots \wedge de^n, \quad d\mu_x^\varepsilon := C \mathbb{1}_{B_\varepsilon^M(x)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{3.7}$$

其中 $(e^1, \ldots, e^n)$ 是 $0 \in T_x M$ 处的欧几里得坐标，$(x^1, \ldots, x^n)$ 是 $x_0 \in M$ 处的法坐标，而 $\tilde{C} := \left|\tilde{B}_\varepsilon(x)\right|^{-1}$、 $C := \mathrm{vol}(B_\varepsilon(x))^{-1}$ 是归一化常数。记 $(\exp_x^{-1})^i = e^i \circ \exp_x^{-1}$，则推前 $\bar{\mu}_x^\varepsilon$ 为

$$\begin{aligned} d\bar{\mu}_x^\varepsilon(z) = (\exp_x)_* d\tilde{\mu}_x^\varepsilon(z) &= \tilde{C} \mathbb{1}_{B_\varepsilon(x)}(z) d(e^1 \circ \exp_x^{-1}) \wedge \ldots \wedge d(e^n \circ \exp_x^{-1}) \\ &= \tilde{C} \mathbb{1}_{B_\varepsilon(x)}(z) \det\left(\frac{\partial (\exp_x^{-1})^i}{\partial x^j}(z)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

有关这一局部坐标表达式的细节，见 [Lee13，第 9] 章。比较（3.7）和（3.8），由于行列式不为零，我们看到这两个测度等价，且它们的相互密度由下式给出

$$\frac{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(z) = \frac{\tilde{C}}{C} \det\left(\frac{\partial (\exp_x^{-1})^i}{\partial x^j}(z)\right) \times \det(g_{ij}(z))^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

关于 x_0 的光滑性是显然的，并且由引理3.5 和3.6 可知，右侧的行列式对于每个 $1 + O(\varepsilon^2)$ 都是 $x \in M$。展开式 $(1+a)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}a + O(a^2)$ 还推出 $\det(g_{ij})^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(\varepsilon^2)$。

剩下需要验证的是，作为点 x 的函数，$\frac{\tilde{C}}{C}$ 是光滑的。将（3.9）两边关于 $B_\varepsilon(x)$ 进行积分，得到 μ_x^ε：

$$\bar{\mu}_x^\varepsilon(B_\varepsilon(x)) = \frac{\tilde{C}}{C} \mu_x^\varepsilon(B_\varepsilon(x))(1 + O(\varepsilon^2)). \tag{3.10}$$

概率测度 $\bar{\mu}_x^\varepsilon$、 μ_x^ε 都支撑在 $B_\varepsilon(x)$ 上，因此 $\bar{\mu}_x^\varepsilon(B_\varepsilon^M(x)) \ \mu_x^\varepsilon(B_\varepsilon^M(x)) = 1$，并且对（3.10）重新排列可得 $\frac{C}{\tilde{C}} = 1 + O(\varepsilon^2)$ 是 x 的光滑函数。由展开式 $\frac{1}{1+z} = 1 - z + O(z^2)$，我们同样得到逆比值 $\frac{C}{\tilde{C}}$ 的。

由于（3.9）中的所有因子均为 $1 + O(\varepsilon^2)$，其乘积也如此，即

$$\frac{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(u) = 1 + O(\varepsilon^2). \tag{3.11}$$

将 $O(\varepsilon^2)$ 项记为 $h(\cdot, x)$，我们有

$$1 = \int \frac{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(z) d\mu_x^\varepsilon(z) = 1 + \int h(z, x) d\mu_x^\varepsilon(z) \tag{3.12}$$

这意味着 $\int h(z, x) d\mu_x^\varepsilon(z) = 0$。

□

与引理3.8类似，我们有：

引理 3.9。对于每个 $x \in M$，

$$\frac{d\bar{\nu}_x^\varepsilon}{d\nu_x^\varepsilon}(z) = 1 + h(z,x)$$

其中 h： $M \times M \to \mathbb{R}$ 是几乎处处光滑的函数，满足 $h(\cdot, x) = O(\varepsilon^2)$ 对每个 $x \in M$ 成立，且 $\int h(z,x)d\bar{\mu}_x(z) = \int h(z,x)d\bar{\nu}_x(z) = 0$。

证明。由引理3.8，

$$\frac{d\bar{\nu}_x^\varepsilon}{d\nu_x^\varepsilon}(z) = \frac{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(z) = 1 + h(z,x).$$

□

引理 3.10。对于任意 $x \in M$，相互密度展开为

$$\frac{d\bar{\nu}_x^\varepsilon}{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}(z) = \mathbb{1}_{B_\varepsilon(x)}(z)(1 - \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z)\rangle + h_1(z,x)),$$
$$\frac{d\nu_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(z) = \mathbb{1}_{B_\varepsilon(x)}(z)(1 - \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z)\rangle + h_2(z,x))$$

其中 h_i： $M \times M \to \mathbb{R}$ 是几乎处处光滑的函数，满足 $h_i(\cdot, x) = O(\varepsilon^2)$ 对每个 $x \in M$ 成立，且 $\int h_i(z,x)d\bar{\mu}_x^\varepsilon(z) = 0$ 对 $i = 1$、2成立。

证明。由记号3.7，

$$\frac{d\bar{\nu}_x^\varepsilon}{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}(z) = \frac{d(\exp_x)_*\tilde{\nu}_x^\varepsilon}{d(\exp_x)_*\tilde{\mu}_x^\varepsilon}(z) = \frac{d\tilde{\nu}_x^\varepsilon}{d\tilde{\mu}_x^\varepsilon}(\exp_x^{-1} z) = \frac{e^{-V(z)}}{\int_{B_\varepsilon(x)} e^{-V(z)}d\bar{\mu}_x^\varepsilon(z)}. \tag{3.13}$$

将 3.13中的分子展开为

$$\begin{aligned} e^{-V(z)} &= e^{-V(x)}e^{V(x)-V(z)} \\ &= e^{-V(x)}(1 - \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z)\rangle + O(\varepsilon^2)) \end{aligned}$$

分母同理，

$$e^{-V(x)}\int_{B_\varepsilon(x)}(1 - \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z')\rangle + O(\varepsilon^2))d\bar{\mu}_x^\varepsilon(z') = e^{-V(x)}\left(1 + O(\varepsilon^2)\right)$$

其中 ∇V 项为零，因为

$$\int_{B_\varepsilon(x)} \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z')\rangle \, d\bar{\mu}_x^\varepsilon(z') = \langle \nabla V(x), \int_{B_\varepsilon(0)} w d\tilde{\mu}_x^\varepsilon(w)\rangle = 0. \tag{3.14}$$

约去因子 $e^{-V(x)}$后，密度（3.13）可写为

$$\frac{d\bar{\nu}_x^\varepsilon}{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}(z) = \frac{1 - \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z)\rangle + O(\varepsilon^2)}{1 + O(\varepsilon^2)} = 1 - \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z)\rangle + O(\varepsilon^2)$$

将 $O(\varepsilon^2)$ 项明确写为 $h(\cdot, x)$，可得

$$\begin{aligned} 1 = \int \frac{d\bar{\nu}_x^\varepsilon}{d\bar{\mu}_x^\varepsilon}(z)d\bar{\mu}_x(z) &= \int (1 - \langle \nabla V(x), \exp_x^{-1}(z)\rangle + h(z,x))d\bar{\mu}_x(z) \\ &= 1 + \int h(z,x)d\bar{\mu}_x(z) \end{aligned}$$

由于 ∇V 项再次为零，因此可推出 $\int h(z, x)d\bar{\mu}_x(z) = 0$。

密度 $\frac{d\nu_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(z)$ 的展开以相同方式得出，从

$$\frac{d\nu_x^\varepsilon}{d\mu_x^\varepsilon}(z) = \frac{e^{-V(z)}}{\int_{B_\varepsilon(x)} e^{-V(z)}d\mu_x^\varepsilon(z)}.$$

□

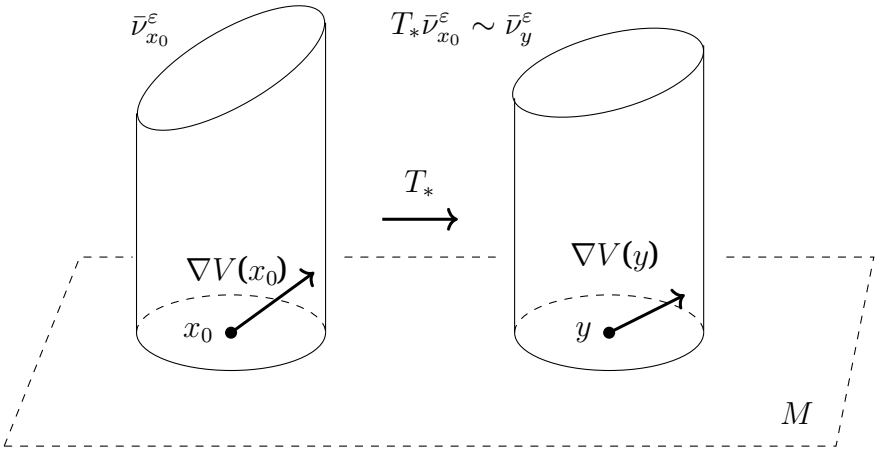

图 4：当 $\varepsilon > 0$ 较小时，非均匀测度 $\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}$，$\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}$ 的密度看起来像顶部倾斜的圆柱体，倾斜程度由 V 的梯度描述。这促使我们将 T 选为顶部梯度之差的缩放形式，并结合从 $B_\varepsilon(x_0)$ 到 $B_\varepsilon(y)$ 的平行平移。

3.2 一个近似传输计划

回顾一下，我们希望得到 $W_1(\nu^{\varepsilon}_{x_0}, \nu^{\varepsilon}_{y})$ 关于 ε 和 δ 的展开。为此，我们提出一个“近似”传输映射 T：$B_\varepsilon(x_0) \to B_\varepsilon(y)$，它以如下意义实现命题 2.5 中的距离：$d(z, Tz) = L_1(\varepsilon, \delta)$。我们首先利用切空间之间的一个 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ 映射 T 来定义这样的映射：$B_\varepsilon(x_0) \to B_\varepsilon(y)$。

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$**定义 3.11.** 定义映射 T：$B_\varepsilon(x_0) \to B_\varepsilon(y)$ 如下

$$\tilde{T}(w) := /\!/_1\, w - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - \|w\|^2)(\nabla V(y) - /\!/_1\, \nabla V(x_0))). \tag{3.15}$$

注记 3.12. 选择这个映射的动机来自引理 3.10，该引理指出，当 $\varepsilon > 0$ 较小时，$\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}$ 和 $\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}$ 的密度可分别由其支撑集上的仿射函数很好地近似。图 4 对此作了说明。因此，从 $\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}$ 到 $\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}$ 的任何近最优质量传输都应由从 $B_\varepsilon(x_0)$ 到 $B_\varepsilon(y)$ 的平移，以及根据梯度之差 $/\!/_1^{-1}\, \nabla V(y) - \nabla V(x_0)$ 重新对齐质量构成，并按距支撑集中心的距离进行缩放。这是因为，$B_\varepsilon(x_0)$ 边界上的点应当只发生平移，而靠近 x_0 的点除了平移，还应沿着 $-(/\!/_1^{-1}\, \nabla V(y) - V(x_0))$ 的方向移动。事实证明，以上乘以因子 $\frac{1}{2}(\varepsilon^2 - \|w\|^2)$ 的缩放足以定义一个良好的近似传输映射。

注 3.13. 下文中，线性映射的行列式始终是相对于定义域和陪域的一对标准正交基而言的。

$\tilde{}$**引理 3.14.** 当 $0 < \varepsilon < 1$ 和 $\delta > 0$ 充分小时，映射 T 是定义良好的微分同胚。

$\hat{}\tilde{}$ $\tilde{}$证明。定义 T：$B_\varepsilon(x_0) \to B_\varepsilon(x_0)$ 如下

$$\hat{T}(w) := w - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - \|w\|^2)(/\!/_1^{-1}\, \nabla V(y) - \nabla V(x_0)))$$

$\tilde{}\hat{}\tilde{}$ $\tilde{}$使得 $T = /\!/_1 \circ T$。由于 $/\!/_1$：$B_\varepsilon(x_0) \to B_\varepsilon(y)$ 是一个微分同胚，因此只需证明 $\hat{}T$ 是一个微分同胚。我们通过求出其光滑逆映射 $\hat{}T^{-1}$ 来证明后者。为进一步简化记号，我们写作

$$\hat{T}(w) = w - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - \|w\|^2)\alpha\mathbf{e}$$

with

$$\mathbf{e} := \frac{/\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0)}{\| /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0))\|}, \quad \alpha := \| /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0))\| = O(\delta) > 0.$$

将任意向量 $w \in \tilde{B}_\varepsilon(x_0)$ 分解为 $w = u + r\mathbf{e}$，其中 $u \perp \mathbf{e}$，且 $-\sqrt{\varepsilon^2 - \|w\|^2} \leqslant r \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 - \|w\|^2}$，使得

$$\hat{T}(u + r\mathbf{e}) = u + r\mathbf{e} - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - \|u\|^2 - r^2)\alpha\mathbf{e} = u + h_u(r)\mathbf{e}$$

其中 $h_u(r) := r - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - \|u\|^2 - r^2)\alpha$。显然，

$$h_u(\pm\sqrt{\varepsilon^2 - \|u\|^2}) = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - \|u\|^2}, \quad \frac{dh_u}{dr}(r) = 1 + \alpha r$$

因此，只要 $\alpha\varepsilon > -1$，映射

$$h_u : [-\sqrt{\varepsilon^2 - \|u\|^2}, \sqrt{\varepsilon^2 - \|u\|^2}] \to [-\sqrt{\varepsilon^2 - \|u\|^2}, \sqrt{\varepsilon^2 - \|u\|^2}]$$

是一个微分同胚。由于分解 $w = u + r\mathbf{e}$ 是唯一的，且 $(u, r) \mapsto h_u(r)$ 是光滑的，我们可以得出 T 是一个微分同胚。特别地，通过对 $h_u(r) = s$ 求解 r，我们可以将逆映射显式写为

$$\hat{T}^{-1}(u + s\mathbf{e}) = u + \frac{1}{\alpha}\left(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2(\varepsilon^2 - \|u\|^2) + 2\alpha y}\right)\mathbf{e},$$

证明完毕。 □

引理 3.15。 *T 的雅可比行列式满足对任意 $w \in B_\varepsilon(x_0)$*

$$\det D_w\tilde{T} = 1 + \left\langle /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0), w\right\rangle + O(\delta^2\varepsilon^2) \tag{3.16}$$

其中 $O(\delta^2\varepsilon^2)$ 项关于 w一致有界。

证明。 考虑 $T_{x_0}M$ 的一个标准正交基 $(e_i)_{i=1}^n$，以及与之对应的 T_yM的平行移动的标准正交基 $(/\!\!/_1\, e_i)_{i=1}^n$。相对于这些基， D_wT 在任意 $w \in B_\varepsilon(x_0)$处的分量写作

$$\begin{aligned}\left\langle D_w\tilde{T}(e_i), /\!\!/_1\, e_j\right\rangle &= \langle /\!\!/_1\, e_i, /\!\!/_1\, e_j\rangle + \langle /\!\!/_1\, w, /\!\!/_1\, e_i\rangle \langle \nabla V(y) - /\!\!/_1\, \nabla V(x_0), /\!\!/_1\, e_j\rangle \\ &= \delta_{ij} + \langle w, e_i\rangle \left\langle /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0), e_j\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Then

$$\det D_w\tilde{T} = \det\left(\delta_{ij} + \langle w, e_i\rangle \left\langle /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0), e_j\right\rangle\right)_{ij} \tag{3.18}$$

其中 δ_{ij}表示克罗内克δ。由于 $\langle w, e_i\rangle \left\langle /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0)\ e_j\right\rangle = O(\delta\varepsilon)$，我们可以推知（见注3.4）」

$$\begin{aligned}\det D_w\tilde{T} &= 1 + \sum_i \langle w, e_i\rangle \left\langle /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0), e_i\right\rangle + O(\varepsilon^2\delta^2) \\ &= 1 + \left\langle w, /\!\!/_1^{-1}\,\nabla V(y) - \nabla V(x_0)\right\rangle + O(\varepsilon^2\delta^2)\end{aligned} \tag{3.19}$$

正如所要求的。 □

注 3.16. 由定义（3.15）可知

$$\tilde{T}w = /\!\!/_1\, w + O(\delta\varepsilon^2) \quad \forall w \in \tilde{B}_\varepsilon(x_0) \tag{3.20}$$

and

$$\tilde{T}^{-1}\tilde{w} = /\!\!/_1^{-1}\, \tilde{w} + O(\delta\varepsilon^2) \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{B}_\varepsilon(y). \tag{3.21}$$

根据（3.16）和（3.21），我们还得到

$$\begin{aligned} \det D_{\tilde{w}}\tilde{T}^{-1} &= 1 - \left\langle \tilde{T}^{-1}\tilde{w}, /\!\!/_1^{-1}\, \nabla V(y) - \nabla V(x_0) \right\rangle + O(\varepsilon^2\delta^2) \\ &= 1 - \langle \tilde{w}, \nabla V(y) - /\!\!/_1\, \nabla V(x_0) \rangle + O(\delta^2\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.22}$$

˜指数映射在局部是微分同胚，并且 $B_\varepsilon(x) = \exp_x(B_\varepsilon(x))$。这使我们能够在流形上定义以下微分同胚，并将其用作 ν_{x_0} 与 ν_y 之间的近似传输映射。

定义 3.17。定义映射 $T\colon\ B_\varepsilon(x_0) \to B_\varepsilon(y)$ 如下

$$Tz := \exp_y(\tilde{T}\exp_{x_0}^{-1}(z)) \tag{3.23}$$

注 3.18。我们说明映射 T 与第 2 节的距离估计之间的关系。采用测地线变分的背景中引入的记号 c_1，c_2，若对任意单位向量 $w \in T_{x_0}M$ 记 $z\colon = \exp_{x_0}(\varepsilon w)$ 则

$$Tz = \exp_y(\varepsilon\tilde{T}w) = \exp_y(\varepsilon\, /\!\!/_1\, w')$$

其中 w' 由（2.3）给出。对于变分（2.4）的测地线记号，我们有$z = \eta(\varepsilon)$ 以及 $Tz = \theta(\varepsilon)$，因此特别有

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &= d(\eta(\varepsilon), \theta(\varepsilon)) = L_1(\varepsilon, \delta), \\ d(z, p(z)) &= d(p(\eta(\varepsilon)), \eta(\varepsilon)) = L_2(\varepsilon, 0), \\ d(Tz, p(Tz)) &= d(p(\theta(\varepsilon)), \theta(\varepsilon)) = L_2(\varepsilon, \delta). \end{aligned}$$

其中 $p\colon\ M \to E$ 是投影映射（2.11）。

虽然 T 并非从 $\nu_{x_0}^\varepsilon$ 到 ν_y^ε的精确传输映射，但事实证明，仍可用推前测度 $T_*\nu_{x_0}^\varepsilon$ 代替 ν_y^ε来近似相关的 Wasserstein 距离，而距离 $W_1(\nu_{x_0}^\varepsilon, T_*\nu_{x_0}^\varepsilon)$进而可用$W_1(\bar{\nu}_{x_0}^\varepsilon, T_*\bar{\nu}_{x_0}^\varepsilon)$近似。下面的命题 3.23 将对此进行形式化，因为其证明需要以下预备知识。这种近似的优点在于，可以利用上一节得到的距离估计来计算 $W_1(\bar{\nu}_{x_0}^\varepsilon, T_*\bar{\nu}_{x_0}^\varepsilon)$。$W_1(\bar{\nu}_{x_0}^\varepsilon, T_*\bar{\nu}_{x_0}^\varepsilon)$的上界由具体的传输计划 T给出，而下界则通过使用一个具体的 1-Lipschitz 函数计算得到。

记号 3.19。记 $z\colon = \exp_{x_0}(\varepsilon w)$ 使得 $Tz = \exp_y(\varepsilon\, /\!\!/_1\, w')$ 其中 w' 由（2.3）给出，并令 r_0 为 x_0的一个固定紧邻域上的一致单射半径。回想一下，在命题 2.11 的背景下，我们定义了子流形

$$E := \{\exp_{x_0}(w) : w \in T_{x_0}M, \langle w, v\rangle = 0\} \subset M,$$

投影 $p\colon\ M \to E$, $p(x) := \operatorname{argmin}_{z\in E} d(x,\ z)$, $\nu \in \Gamma(TE^\perp)$ 是一个满足 $\nu(x_0) = v$ 的单位法向量场，以及到投影的有向距离, $f\colon\ B_{r_0/3}(x_0) \to \mathbb{R}$,

$$f(z) := \operatorname{sign}(\langle \exp_{p(z)}^{-1}(z), \nu(z)\rangle) d(z, p(z)) \tag{3.24}$$

˜ ˜ ˜注意，$f(Tz) = L_2(\varepsilon, \delta)$ 以及 $f(z) = L_2(\varepsilon, 0)$ 其中 L_2 由（2.14）定义，是实现到投影的距离的测地线的有向长度。

引理 3.20。 带符号投影距离是 *1*-利普希茨的；对于任意向量 $v, w \in T_{x_0}M$，若 $\|v\| = 1, \|w\| \leqslant 1$ 和 $\delta, \varepsilon > 0$ 足够小，则

$$f(Tz) - f(z) = \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}K_{x_0}(v,w)(\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2) - \frac{\varepsilon^2}{2}\mathit{Hess}_{x_0}V(v,v)(1-\|w\|^2)\right) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3) \tag{3.25}$$

其中 $O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3)$ 在 z 中一致有界。

证明。 我们首先证明 f 是 1-利普希茨的。由于 $z \mapsto \langle \exp_{p(z)}^{-1}(z)\ \nu(z)\rangle$ 连续，$E \cap B_{r_0/3}(x_0)$ 是两个连通分支之间的边界

$$\{z \in B_{r_0/3}(x_0) : \langle \exp_{p(z)}^{-1}(z), \nu(z)\rangle > 0\}, \quad \{z \in B_{r_0/3}(x_0) : \langle \exp_{p(z)}^{-1}(z), \nu(z)\rangle < 0\}. \tag{3.26}$$

首先，考虑 $z_1, z_2 \in B_{r_0/3}(x_0)$，使得 $\langle \exp_{x_0}^{-1}(z_1)\ v\rangle \langle \exp_{x_0}^{-1}(z_2)\ v\rangle \geqslant 0$。这意味着 z_1, z_2 位于 $B_{r_0/3}(x_0)$ 的同一个连通分支中。由三角不等式，

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |d(z_1, p(z_1)) - d(z_2, p(z_2))| \leqslant d(z_1, z_2)$$

其次，考虑 $z_1, z_2 \in B_{r_0/3}(x_0)$，使得

$$\langle \exp_{x_0}(z_1), v\rangle \langle \exp_{x_0}(z_2), v\rangle < 0$$

这意味着 z_1, z_2 位于 $B_{r_0/3}(x_0)$ 的不同连通分支中。设 $\xi\colon [0,1] \to M$ 是连接 z_1 和 z_2 的长度最小化测地线。于是

$$\begin{aligned} d(\xi(t), x_0) &\leqslant d(\xi(t), z_1) + d(z_1, x_0) \leqslant d(z_2, z_1) + d(z_1, x_0) \\ &\leqslant d(z_2, x_0) + 2d(z_1, x_0) < \frac{1}{3}r_0 + \frac{2}{3}r_0 = r_0. \end{aligned}$$

这意味着，实现 z_1 与 z_2 之间距离的测地线位于 $B_{r_0/3}(x_0)$中，因此必定经过 $E \cap B_{r_0/3}(x_0)$，因为它是两个连通分支之间的边界（3.26）。因此，存在 $z_0 \in E \cap B_{r_0/3}(x_0)$ 使得

$$|f(z_1) - f(z_2)| = d(z_1, p(z_1)) + d(z_2, p(z_2)) \leqslant d(z_1, z_0) + d(z_2, z_0) = d(z_1, z_2).$$

最后，由推论 2.12，

$$\begin{aligned} f(Tz) - f(z) &= \tilde{L}_2(\varepsilon, \delta) - \tilde{L}_2(\varepsilon, 0) \\ &= \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[K_{x_0}(v,w)(\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2) + \mathrm{Hess}_{x_0}V(v,v)(1-\|w\|^2)\right]\right) \\ &\quad + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3). \end{aligned}$$

□

带符号投影距离为 $W_1(\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}, T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}$ 给出了正确的下界):

引理 3.21。 对于由（*3.24*）定义的 f，以及所有 $v \in T_{x_0}M$ 单位向量和 δ，$\varepsilon > 0$ 充分小，

$$\int_M (f(Tz) - f(z))d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) = \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}(\mathit{Ric}_{x_0}(v,v) + 2\mathit{Hess}_{x_0}V(v,v))\right) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3) \tag{3.27}$$

其中 $O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3)$ 在 z 中一致有界。

证明。 将积分变量换为 $w = \exp_{x_0}^{-1}(z)$，并回忆 $\bar{\mu}_{x_0}^{\varepsilon} := (\exp_{x_0})_* \tilde{\mu}_{x_0}^{\varepsilon}$。那么，根据前述引理，左侧的积分可写为

$$\int_{T_{x_0}M} \delta \left(1 - \frac{1}{2}K_{x_0}(v,w)(\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2) - \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{x_0}V(v,v)(\varepsilon^2 - \|w\|^2)\right) d\tilde{\mu}_{x_0}^{\varepsilon}(w) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3).$$

在球坐标中对 Hessian 项积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{T_{x_0}M}(\varepsilon^2 - \|w\|^2)d\tilde{\mu}_{x_0}^{\varepsilon}(w) &= \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{2|B_\varepsilon(x_0)|}\int_0^\varepsilon r^2 |\partial B_r(x_0)|dr \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{n\varepsilon^2}{2(n+2)} = \frac{\varepsilon^2}{n+2}\end{aligned}$$

而截面曲率项积分后，根据引理 3.2，得到 Ricci 项。

□

定理 3.22。 对于任意点 $x_0 \in M$、向量 $v \in T_{x_0}M$，满足 $\|v\| = 1$ 和 δ，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$W_1(\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}, T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}) = \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\left(\mathit{Ric}_{x_0}(v,v) + 2\mathit{Hess}_{x_0}V(v,v)\right)\right) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3) \tag{3.28}$$

证明。 利用传输映射（3.15），得到上界

$$\begin{aligned}&W_1(\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}, T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}) \leqslant \int_M d(Tz,z)d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) \\ &= \int_{T_{x_0}M} \delta\left(1 - \frac{1}{2}K_{x_0}(v,w)(\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2) - \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{x_0}V(v,v)(\varepsilon^2 - \|w\|^2)\right) \\ &\quad \times (1 - \langle \nabla V(x_0), w\rangle + h(\exp_{x_0}(w), x_0))d\tilde{\mu}_{x_0}^{\varepsilon}(w) + O(\delta\varepsilon^3) + O(\delta^2\varepsilon^2) \\ &= \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}\left(\mathrm{Ric}_{x_0}(v,v) + 2\mathrm{Hess}_{x_0}V(v,v)\right)\right) + O(\delta\varepsilon^3) + O(\delta^2\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{3.29}$$

其中，由于以下原因，我们消去了 h 和 ∇V 项：

$$\int \langle \nabla V(x_0), w\rangle \, d\tilde{\mu}_{x_0}^{\varepsilon}(w) = 0, \quad \int h(\exp_{x_0}(w), x_0)d\tilde{\mu}_{x_0}^{\varepsilon}(w) = 0$$

右侧的里奇曲率由引理 3.2 给出，而 Hessian 项则如引理 3.21 中那样得到。

对于逆向论证，我们使用 Kantorovich-Rubinstein 对偶，选取 1-Lipschitz 测试函数 f 由（3.24）定义，因此根据引理 3.21 我们得到下界

$$\begin{aligned}W_1(\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}, T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}) &\geqslant \int_M f(z)(dT_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) - d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z)) \\ &= \int_{B_\varepsilon(x_0)} (f(Tz) - f(z))d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) \\ &= \delta\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)}(\mathrm{Ric}_{x_0}(v,v) + 2\mathrm{Hess}_{x_0}V(v,v))\right) \\ &\quad + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3).\end{aligned}$$

这表明，上界和下界仅相差 $O(\delta\varepsilon^3) + O(\delta^2\varepsilon^2)$ 项，其值符合要求。

□

现在我们证明上述近似性质，并参见记号 3.7其中涉及的测度。

命题 3.23. 对于 $x_0 \in M$ 和 δ，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$W_1(\nu^\varepsilon_{x_0}, \nu^\varepsilon_y) = W_1(\nu^\varepsilon_{x_0}, T_*\nu^\varepsilon_{x_0}) + O(\delta\varepsilon^3) + O(\delta^2\varepsilon^2),$$
$$W_1(\nu^\varepsilon_{x_0}, T_*\nu^\varepsilon_{x_0}) = W_1(\bar\nu^\varepsilon_{x_0}, T_*\bar\nu^\varepsilon_{x_0}) + O(\delta\varepsilon^3) + O(\delta^2\varepsilon^2)$$

其中 $y = \exp^{x_0}(\delta v)$。

证明中需要用到以下两个引理的密度估计。

引理 3.24.

$$\frac{d(T_*\bar\nu^\varepsilon_{x_0})}{d\bar\nu^\varepsilon_y}(z) = \mathbb{1}_{B_y(\varepsilon)}(z)(1 + h'(z, y))$$

其中 $h' : \ M \times M \to \mathbb{R}$ 几乎处处光滑，并且满足 $h'(\cdot, y) = O(\delta\varepsilon^2)$ 且 $\int_{B_\varepsilon(y)} h'(z, y)d\bar\nu^\varepsilon_y(z) = 0$ 对所有 $y \in M$均成立。

证明。 我们首先证明密度估计

$$\frac{d(T_*\bar\nu^\varepsilon_{x_0})}{d\bar\mu^\varepsilon_y}(z) = (1 - \left\langle \nabla V(y), \exp_y^{-1}(z)\right\rangle + h(T^{-1}z, x_0))\mathbb{1}_{B_\varepsilon(y)}(z). \tag{3.30}$$

对于任意有界的博雷尔可测 $f : \ M \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_M f(z)d(T_*\bar\nu^\varepsilon_{x_0})(z) &= \int_M f(Tz)d\bar\nu^\varepsilon_{x_0}(z) = \int_M f(Tz)\frac{d\bar\nu^\varepsilon_{x_0}}{d\bar\mu^\varepsilon_{x_0}}(z)d\bar\mu^\varepsilon_{x_0}(z)\\ &= \int_M f(Tz)(1 - \left\langle \nabla V(x_0), \exp_{x_0}^{-1}(z)\right\rangle + h(z, x_0))d\bar\mu^\varepsilon_{x_0}(z)\\ &= \int_{T_{x_0}M} f(\exp_y \tilde T w)(1 - \langle \nabla V(x_0), w\rangle + h(\exp_{x_0}(w), x_0))d\tilde\mu^\varepsilon_{x_0}(w)\end{aligned}$$

˜其中第二行用到了引理3.10 。代入 $\tilde w : = Tw$ 并使用变量替换公式，得到

$$\begin{aligned}&\int_{T_yM} f(\exp_y \tilde w)\left(1 - \left\langle \nabla V(x_0), \tilde T^{-1}\tilde w\right\rangle + h(\exp_{x_0}(\tilde T^{-1}\tilde w), x_0)\right)\left|\det D_{\tilde w}\tilde T^{-1}\right| d\tilde\mu^\varepsilon_y(\tilde w)\\ &\quad = \int_M f(z)\left(1 - \left\langle \nabla V(x_0), \tilde T^{-1}\exp_y^{-1}(z)\right\rangle + h(T^{-1}z, x_0)\right)\\ &\qquad \times \left(1 - \left\langle \nabla V(y) - /\!\!/_1 \nabla V(x_0), \exp_y^{-1}(z)\right\rangle + O(\delta^2\varepsilon^2)\right) d\bar\mu^\varepsilon_y(z)\end{aligned}$$

应用行列式公式（3.22）后。利用

$$\tilde T^{-1}\exp_y^{-1}(z) = /\!\!/_1^{-1}\exp_y^{-1}(z) + O(\delta\varepsilon^2)$$

并将 $O(\delta\varepsilon^2)$ 项吸收到 h中，化简得

$$\int_M f(z)\left(1 - \left\langle \nabla V(y), \exp_y^{-1}(z)\right\rangle + h(T^{-1}z, x_0)\right) d\bar\mu^\varepsilon_y(z)$$

以获得密度（3.30）。

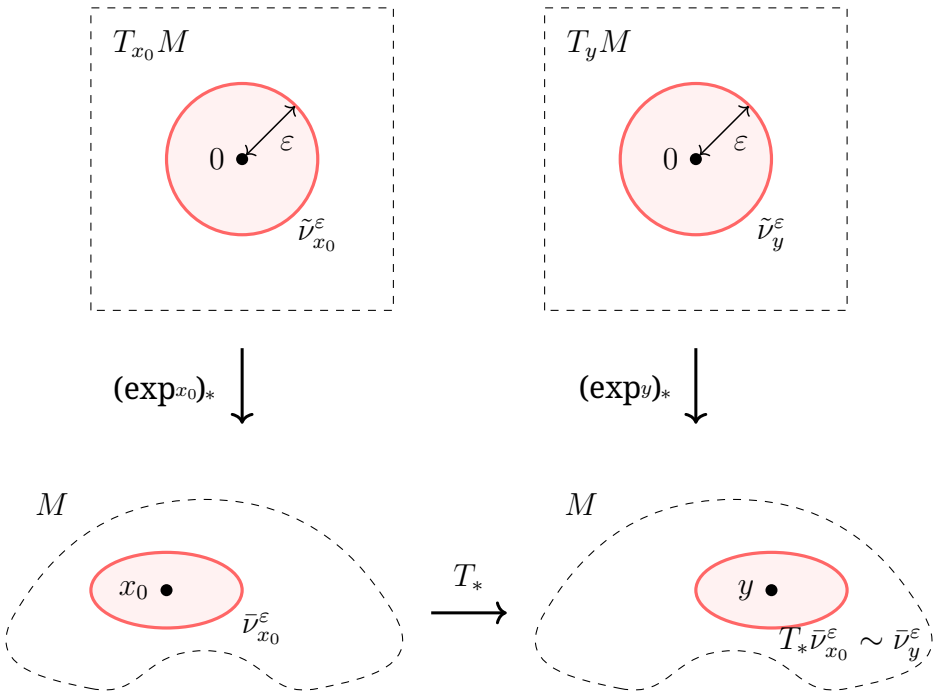

图5：说明 $T_*\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}$ 与 $\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}$之间的关系。这两个测度等价，其相互密度具有 $1+O(\delta\varepsilon^2)$ 的形式。

最后，利用引理 3.10 和（3.30），我们得到

$$\begin{aligned}\frac{dT_*\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}}{d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}}(z) &= \frac{d\bar{\mu}^{\varepsilon}_{y}}{d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}}(z)\frac{dT_*\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}}{d\bar{\mu}^{\varepsilon}_{y}}(z) = \left(\frac{d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}}{d\bar{\mu}^{\varepsilon}_{y}}(z)\right)^{-1}\frac{dT_*\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}}{d\bar{\mu}^{\varepsilon}_{y}}(z)\\ &= \mathbb{1}_{B_y(\varepsilon)}(z)(1+\langle\nabla V(y),\exp_y^{-1}(z)\rangle - h(z,y))\\ &\qquad\times(1-\langle\nabla V(y),\exp_y^{-1}(z)\rangle + h(T^{-1}z,x_0))\\ &= \mathbb{1}_{B_y(\varepsilon)}(z)(h(T^{-1}z,x_0)-h(z,y)).\end{aligned} \tag{3.31}$$

函数 $(y,z)\mapsto h(T^{-1}z,x_0)-h(z,y)$ 在 $M\times M$上几乎处处光滑，并且 $z\mapsto h(T^{-1}z,x_0)-h(z,y)$ 对每个 y 都是 ε^2 阶，并在 $y=x_0$ 上消失（即 $\delta=0$）。因此 $h(T^{-1}z,x_0)-h(z,y)=O(\delta\wedge\varepsilon^2)$，且由 h 的光滑性可知其为 $\delta\varepsilon^2$ 阶，参见注 2.6。 □

注记3.25. （3.31）中的抵消是由于 T 的特定选择所致，并且对于 $O(\delta\varepsilon^2)$ 估计至关重要。

引理 3.24 中的估计可推广到 ν_{x_0} 和 ν_y，如下文所证。

引理3.26。

$$\frac{d(T_*\nu^{\varepsilon}_{x_0})}{d\nu^{\varepsilon}_{y}}(z) = \mathbb{1}_{B_y(\varepsilon)}(z)(1+h(z,y))$$

其中 h'： $M\times M\to\mathbb{R}$ 几乎处处光滑，并且满足 $h'(\cdot,y)=O(\delta\varepsilon^2)$ 以及

$$\int_{B_\varepsilon(y)} h'(z,y)d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{y}(z) = 0$$

对所有 $y\in M$。

证明。 由引理 3.9 可写为

$$d\nu_{x_0}^{\varepsilon}(z) = (1 + h(x_0, z))d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z), \quad d\nu_y^{\varepsilon}(z) = (1 + h(y, z))d\bar{\nu}_y^{\varepsilon}(z)$$

对于函数 h： $M \times M \to \mathbb{R}$ 几乎处处光滑，并且使得 $h(\cdot, x) = O(\varepsilon^2)$ 且 $\int h(z, x)d\bar{\mu}_x(z)$ 对每个 $x \in M$ 都成立。于是

$$\begin{aligned}
d(T_*\nu_{x_0})(z) &= T_*[(1 + h(x_0, z))d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z)] \\
&= (1 + h(x_0, T^{-1}z))d(T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon})(z) \\
&= (1 + h(y, z) + O(\delta\varepsilon^2))d(T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon})(z) \\
&= (1 + h(y, z) + O(\delta\varepsilon^2))\frac{d(T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon})}{d\bar{\nu}_y^{\varepsilon}}(z)d\bar{\nu}_y^{\varepsilon}(z) \\
&= (1 + h(y, z) + O(\delta\varepsilon^2))(1 + O(\delta\varepsilon^2)d\bar{\nu}_y^{\varepsilon}(z) \\
&= (1 + h(y, z) + O(\delta\varepsilon^2))d\bar{\nu}_y^{\varepsilon}(z) \\
&= (1 + O(\delta\varepsilon^2))d\nu_y^{\varepsilon}(z).
\end{aligned}$$

在第三行，我们用到了 $h(y, z) - h(x_0, T^{-1}z) = O(\delta\varepsilon^2)$ 这一点，这与引理 3.24的证明采用了相同的论证。 $h'(\cdot, y)$ 的零均值性质再次可由$1 + h(\cdot, y)$ 是相对于某个概率测度的密度这一点推出。 □

命题 *3.23*的证明。 对于第一个等式， $\forall f \in \mathrm{Lip}_1(M)$:

$$\begin{aligned}
\int f(z)(d(T_*\nu_{x_0}^{\varepsilon})(z) - d\nu_{x_0}^{\varepsilon}(z)) &= \int f(z)\left(\frac{d(T_*\nu_{x_0}^{\varepsilon})}{d\nu_y^{\varepsilon}}(z)d\nu_y^{\varepsilon}(z) - d\nu_{x_0}^{\varepsilon}(z)\right) \\
&= \int f(z)((1 + h'(y, z))d\nu_y^{\varepsilon}(z) - d\nu_{x_0}^{\varepsilon}(z)) \\
&= \int f(z)(d\nu_y^{\varepsilon}(z) - d\nu_{x_0}^{\varepsilon}(z)) \\
&\quad + \int (f(z) - f(y))h'(y, z)d\nu_y^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

根据前述引理，最后一项的阶为 $\delta\varepsilon^3$ ，当 $h' = O(\delta\varepsilon^2)$ 时。

对于第二个等式，由定理 3.22 和等式（3.29）可知 T满足

$$\int d(z, Tz)d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) = W_1(\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}, T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3)$$

此外，由引理 3.21 可知存在 $f \in \mathrm{Lip}_1(M)$ 使得

$$\int f(z)(d(T_*\bar{\nu}_{x_0})(z) - d\bar{\nu}_{x_0}(z)) = W_1(\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}, T_*\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3). \tag{3.32}$$

Pro位置 2.5 给出 $d(Tz, z) = d(y, x_0)(1 + O(\varepsilon^2))$，因此我们得到上界

$$\begin{aligned}
W_1(\nu_{x_0}^{\varepsilon}, T_*\nu_{x_0}^{\varepsilon}) &\leqslant \int d(Tz, z)d\nu_{x_0}^{\varepsilon}(z) \\
&= \int d(Tz, z)(1 + h(x_0, z))d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) \\
&= \int d(Tz, z)d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) + \int d(y, x_0)(1 + O(\varepsilon^2))h(x_0, z)d\bar{\nu}_{x_0}^{\varepsilon}(z) \\
&= W_1(\bar{\nu}_{x_0}, T_*\bar{\nu}_{x_0}) + O(\delta^2\varepsilon^2) + O(\delta\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

在最后一行应用了性质 $\int h(x_0,z)d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}(z) = 0$。

根据命题 2.11，对于 δ，ε 充分小时，f 由引理 3.21 可得

$$\begin{aligned} f(Tz)-f(z) &= \tilde{L}_2(\varepsilon,\delta)-\tilde{L}_2(\varepsilon,0) \\ &= L_1(\varepsilon,\delta)+O(\delta^2\varepsilon^2)+O(\delta\varepsilon^3) \\ &= d(Tz,z)+O(\delta^2\varepsilon^2)+O(\delta\varepsilon^3) \\ &= d(x_0,y)(1+O(\varepsilon^2))+O(\delta^2\varepsilon^2)+O(\delta\varepsilon^3) \end{aligned}$$

这给出了下界

$$\begin{aligned} W_1(\nu^{\varepsilon}_{x_0},T_*\nu^{\varepsilon}_{x_0}) &\geqslant \int f(z)(d(T_*\nu^{\varepsilon}_{x_0})(z)-d\nu^{\varepsilon}_{x_0}(z)) \\ &= \int (f(Tz)-f(z))d\nu^{\varepsilon}_{x_0}(z) \\ &= \int (f(Tz)-f(z))(1+h(x_0,z))d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}(z) \\ &= \int (f(Tz)-f(z))d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}(z)+\int d(y,x_0)(1+O(\varepsilon^2))h(x_0,z)d\bar{\nu}^{\varepsilon}_{x_0}(z) \\ &= W_1(\bar{\nu}_{x_0},T_*\bar{\nu}_{x_0})+O(\delta^2\varepsilon^2)+O(\delta\varepsilon^3) \end{aligned}$$

最后一行再次应用了 h 的零均值性质。 □

定理 3.22和命题 3.23 共同推出定理 1.1。

4 随机几何图的应用

Hoorn 等人 [vdHLTK20] 证明，当过程的强度增加时，从黎曼流形上的均匀泊松点过程中抽样得到的随机几何图的粗曲率在期望意义下收敛于光滑里奇曲率。

定理 1.1 使我们能够将他们的结果推广到配备光滑势的流形上 $V: M \to \mathbb{R}$，现在从强度不断增加、与非均匀测度成正比的泊松点过程中进行采样 $e^{-V(z)}$体积(dz)。这里的采样是指将泊松点过程的经验测度用作随机几何图的顶点。我们提出的新方法既能处理这种非均匀性，也能处理指数映射带来的非均匀性。

为陈述推广后的结果——定理4.7——我们先回顾几个定义。关于泊松点过程和随机几何图的背景知识，分别参见 [LP18] 和 [Pen03] 。

定义 4.1。设 $(\mathcal{X},\mathcal{B},\mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，$\mathcal{M}(\mathcal{X})$ 表示 $\mathcal{X}$ 上的测度集，而 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 是一个概率空间。若随机测度 $\mathcal{P}:\Omega \times \mathcal{B} \to [0,\infty]$，或等价地 $\mathcal{P}:\Omega \to \mathcal{M}(\mathcal{X})$，满足以下条件，则称其为 $\mathcal{X}$ 上强度为 μ 的泊松点过程：

(i) $\forall A \in \mathcal{B}$ 对于 $\mu(A) < \infty$, $\mathcal{P}(\cdot,\ A)$ 是一个服从 Poisson($\mu(A)$) 分布的随机变量，(ii) $\forall A,\ B \in \mathcal{B}$ 两两不交且为 μ-有限，随机变量 $\mathcal{P}(\cdot,\ A)$ 和 $\mathcal{P}(\cdot,\ B)$ 相互独立，(iii) $\forall \omega \in \Omega:\ \mathcal{P}(\omega,\ \cdot)$ 是 $(\mathcal{X},\ \mathcal{M})$ 上的一个测度。

给定一个测度 μ，泊松点过程可按如下方式构造。令 $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{X}$ 的一个可数划分，使得 $\mu(W_k) < \infty$，并令 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为服从 $N_k \sim \text{Poisson}(\mu(W_k))$ 分布的独立随机变量。此外，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $(X_i^{(k)})_{i\in\mathbb{N}}$ 为相互独立的随机变量，它们也与 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 相互独立，且服从将 μ 限制在 W_k 上并归一化为概率测度后得到的分布。定义随机经验测度

$$\mathcal{P}^{(k)} : \Omega \to \mathcal{M}(\mathcal{X}), \quad \omega \mapsto \sum_{i=1}^{N_k(\omega)} \delta_{X_i^{(k)}(\omega)}. \tag{4.1}$$

总和 $\mathcal{P} := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^{(k)}$ 由单调收敛定义良好，满足定义4.1中的性质，并且 $\mathcal{P}(A) < \infty$ 几乎处处成立，当且仅当 $\mu(A) < \infty$。可以证明，所有具有 σ- 有限强度测度的泊松点过程都具有这种形式，参见 [LP18，第 6]。

下面将用到泊松过程的变换性质：

引理 4.2。 *[LP18]* 设 $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}')$ 是另一个可测空间，且 $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个可测映射。那么，由 $\mathcal{P}' : \Omega \times \mathcal{B}' \to [0, \infty]$ 定义的推前过程$\mathcal{P}'(\omega, \cdot) := \psi_* \mathcal{P}(\omega, \cdot)$ 是 $\mathcal{Y}$上强度为 $\psi_*\mu$的泊松点过程。将过程 $\mathcal{P}$ 写成（*4.1*）的形式，推前过程可写为

$$\mathcal{P}' = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}'^{(k)}, \quad \mathcal{P}'^{(k)}(\omega, \cdot) = \sum_{i=1}^{N_k(\omega)} \delta_{\psi(X_i^{(k)}(\omega))}$$

证明。 随机变量 $\mathcal{P}'(\cdot, A) = \mathcal{P}(\cdot, \psi^{-1}(A))$ 服从参数为 $\mu(\psi^{-1}(A))$ 的泊松分布，这意味着 $\mathcal{P}'$ 的强度为 $\psi_*\mu$。推前保留性质 (ii) 和 (iii)。

□

设 $\mathcal{P}$ 是完备可定向黎曼流形M 上的一个泊松点过程，其黎曼距离为 d，x_0，$y \in M$ 为两个点。我们默认将泊松点过程中的每个狄拉克测度 δ_x 与点 x等同。

定义 4.3。 从 $\mathcal{P}$ 中抽样得到、以 x_0，y 为根且连通半径为 $\varepsilon > 0$ 的随机几何图，是记作 $G(x_0, y, \varepsilon)$ 的加权图，其节点定义为

$$\mathcal{V}(\omega) = \{X_i^{(k)}(\omega) : 1 \leqslant i \leqslant N_k(\omega), k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0, y\}$$

其中，变量 $X_i^{(k)}$ 由泊松过程 $\mathcal{P}$ 根据 (4.1) 产生，而边

$$\{(u, v) : u, v \in \mathcal{V}(\omega), d(u, v) < \varepsilon\}.$$

每条边 (u, v) 的边权由流形距离 $d(u, v)$ 给出。将图距离记为

$$d_G(x, z) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{m} d(x_i, x_{i+1}) : x_0 = x, x_m = z, (x_i, x_{i+1}) \text{ edge}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

记号 4.4. 设 $V : M \to \mathbb{R}$ 是 M 上的光滑势，固定 $x_0 \in M$，并将强度测度为 $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的泊松点过程点列记为

$$ne^{-V(z)+V(x_0)} d\text{vol}(z). \tag{4.2}$$

对于满足 $\delta_n, \varepsilon_n \to 0$ 为 $n \to \infty$ 的序列 $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$，将从固定方向 $v \in T_{x_0}M$ 趋近 x_0 的点列 $y_n := \exp_{x_0}(\delta_n v)$ 标记为。这将根据定义 4.3 产生一列有根随机图 $G_n(x_0, y_n, \varepsilon_n)$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，将节点集合

$$\mathcal{V}_n(\omega) := \{X_i^{(k,n)}(\omega) : 1 \leqslant i \leqslant N_{k,n}(\omega), k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0, y\}$$

其中变量 $X_i^{(k,n)}$ 来自过程 $\mathcal{P}_n$ （4.1），并假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$均相互独立。对于图距离 d_{G_n}，定义 δ_n-邻域 x在 G_n 中为

$$B_{\delta_n}^{G_n}(x) := \{z \in \mathcal{V}_n : d_{G_n}(x, z) < \delta_n\}.$$

对于任意节点 $x \in \mathcal{V}_n$，记归一化经验测度为

$$\eta_x^{\delta_n}(z) := \begin{cases} \frac{1}{\#(B_{\delta_n}^{G_n}(x))}, & z \in B_{\delta_n}^{G_n}(x) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.3}$$

记 $G_n(x_0, y_n, \varepsilon_n)$ 在 x_0 处沿 $v = \delta_n^{-1}\exp_{x_0}^{-1}(y_n)$ 方向的图曲率为

$$\kappa_n(x_0, y_n) := 1 - \frac{W_1^{G_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n}, \eta_{y_n}^{\delta_n})}{d_{G_n}(x_0, y_n)}. \tag{4.4}$$

注 4.5。因此，对于图序列 $G_n(x_0, y_n, \varepsilon_n)$，我们得到相应的随机经验测度集合 $(\eta_x^{\delta_n})_{x\in\mathcal{V}_n}$ 以及在 x_0 处的粗曲率 $\kappa_n(x_0, y_n)$，其极限正是我们将在下文中证明存在的极限。我们强调，这些都是随机对象，即依赖于 $\omega \in \Omega$，尽管我们在记号中省略了这一点。

在图参数 δ_n，ε_n 趋于零的速率满足某一假设的条件下，可以证明粗图曲率收敛于广义里奇曲率。对于两个序列 (a_n)，(b_n)，若存在 c，$C > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$均有 $cb_n \leqslant a_n \leqslant Cb_n$，则记 $a_n \sim b_n$为 $n \to \infty$。

假设 4.6。记 $N = \dim M$，假设 $\varepsilon_n \leqslant \delta_n$且

$$\varepsilon_n \sim \log(n)^a n^{-\alpha}, \quad \delta_n \sim \log(n)^b n^{-\beta}$$

其中常数 α，β，a，b 满足

且在等号成立时，还满足 $\begin{cases} 0 < \beta \leqslant \alpha, & \alpha + 2\beta \leqslant \frac{1}{N} \\ a \leqslant b \text{ 若 } \alpha = \beta, & a + 2b > \frac{2}{N} \end{cases}$

若 $\alpha + 2\beta = \frac{1}{N}$.

下面给出本节的主要结果，相关对象已在记号4.4中定义。

定理 4.7。设 $\kappa_n(x_0, y)$ 为与根随机图 $G_n(x_0, y_n, \varepsilon_n)$ 对应的图曲率，该图由强度测度为 $y_n = \exp_{x_0}(\delta_n v)$ 的一系列泊松过程生成

$$ne^{-V(z)+V(x_0)}\mathit{vol}(dz)$$

在假设 4.6下，存在 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ 且

$$\mathbb{E}\left[\left|W_1^{G_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n}, \eta_{y_n}^{\delta_n}) - W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n}, \nu_{y_n}^{\delta_n})\right|\right] \leqslant c_n\delta_n^3 \tag{4.5}$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{2(N+2)}{\delta_n^2}\kappa_n - (\mathit{Ric}_{x_0}(v) + 2\mathit{Hess}_{x_0}V(v))\right|\right] = 0. \tag{4.6}$$

注记 4.8. 渐近界（4.5）确实足以推出（4.6），因为结合定理 1.1 并利用三角不等式，我们得到后者的上界为

$$\frac{2(N+2)}{\delta_n^2}\mathbb{E}\left[\left|\kappa_n(x_0,y_n)-\left(1-\frac{W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n})}{\delta_n}\right)\right|\right]$$
$$+\left|\frac{2(N+2)}{\delta_n^2}\left(1-\frac{W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n})}{\delta_n}\right)-(\mathrm{Ric}_{x_0}(v)+2\mathrm{Hess}_{x_0}V(v))\right|.$$

第二项根据（1.3）收敛于 0，而第一项可写为

$$\frac{2(N+2)}{\delta_n^3}\mathbb{E}\left[\left|W_1^{G_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_{y_n}^{\delta_n})-W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n})\right|\right]$$

当 $n\to\infty$且（4.5）成立时趋于 0。

下文我们将专注于证明（4.5）。我们遵循[vdHCL+21]中提出的方法，即证明图距离 d_{G_n} 可以扩展到流形上，从而给出黎曼距离 d的良好近似，然后利用这一扩展来估计差值（4.5）。

令（λ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 为下式给出的序列

$$\lambda_n := (\log n)^{\frac{2}{N}} n^{-\frac{1}{N}}$$

whi根据以下定义，ch 可以被视为“距离扩展半径 ".

定义 4.9。令 $G_n = G_n(x_0, y_n, \delta_n)$ 为定理 4.7 中的有根随机几何图，并且对于任意 $x, y \in M$，记 $G_n \cup \{x, y\}$ 为通过节点 $\{x, y\}$ 扩展并通过边 $\{(x, z)$ 扩展的图：$z \in B_{\lambda_n}(x) \cap G_n\} \cup \{(y, z)$：$z \in B_{\lambda_n}(y) \cap G_n\}$，其扩展半径为 λ_n。进一步，令（d_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 为如下定义的随机函数d_n：$M \times M \to \mathbb{R}$

$$d_n(x, y) := d(x, \tilde{x}) + d(y, \tilde{y}) + d_{G_n}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

其中

$$\tilde{x} = \operatorname*{argmin}_{z\in B_{\lambda_n}(x)\cap G_n} d(x, z), \quad \tilde{y} = \operatorname*{argmin}_{z\in B_{\lambda_n}(y)\cap G_n} d(y, z).$$

若二者均存在，则定义 $d_n(x, y) = \infty$；否则。

虽然对于每个 $\omega \in \Omega$，$\tilde{x}$，$\tilde{y}$ 可能并不存在，导致 $d_n(x, y) = \infty$，但以下结论表明，存在一个概率很高的事件，使得这种情况不会发生，并且 d_n 还是一个度量。

引理 4.10。 在假设 4.6下，对于所有 $Q > 0$，存在一个事件序列$(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 以及一个实数序列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$，$\mathbb{P}(\Omega_n) \geqslant 1 - c_n\delta_n^3$，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \Omega_n$，以下性质均成立：

(i) $(B_{\delta_n Q}(x_0)\ d_n)$ 是一个度量空间，

(ii) for all $x, y \in B_{\delta_n Q}(x_0) : |d_n(x, y) - d(x, y)| \leqslant c_n\delta_n^3$,

(iii) 对所有 $x, y \in B_{\delta_n Q}(x_0)$，在 $G_n \cup \{x, y\}$ 中存在一条路径连接 x 和 y。

证明。事件 Ω_n 的构造与均匀测度的情形相同，参见 [vdHLTK20]中的引理 5.1 和推论 5.2。 □

注 4.11。 这些性质的含义是，在事件 Ω_n 上，随机图以一种允许将图距离扩展为流形上的距离的方式覆盖 $B_{\delta_n Q}(x_0)$，而且这种距离以高概率紧密近似原始黎曼距离。

事实上，除了使用相连顶点之间的黎曼距离，也可以使用满足引理 4.10 中性质的任意图度量。文献[vdHLTK20] 将这类图度量称为“δ_n-good approximations”（良好逼近），即对黎曼度量的良好逼近。

分别用 W、W^{d_n} 和 W^{G_n} 表示对应于黎曼距离 d、逼近流形距离 d_n 和图距离 d_{G_n}的 Wasserstein 距离。下面的结论说明，Wasserstein 距离 W^{d_n} 和 W 在 Ω_n 上相近，这是 Ω_n的性质的直接推论。

引理 4.12. 存在一个序列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $c_n \to 0$，并且对所有 μ，$\nu \in P(B_{\delta_n Q}(x_0))$，

$$\mathbb{E}\left[\left|W_1(\mu,\nu) - W_1^{d_n}(\mu,\nu)\right| \middle| \Omega_n\right] \leqslant c_n \delta_n^3.$$

证明。 这是上述性质 (ii) 的直接推论，参见 [vdHLTK20，引理 5。4]。 □

为证明定理 4.7，我们现在沿用 [vdHLTK20]中的思路。在事件Ω_n上，式 (4.5) 中的被积函数可以拆分为三部分：

$$\begin{aligned}\left(W_1^{G_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_{y_n}^{\delta_n}) - W_1^{d_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_{y_n}^{\delta_n})\right) + \left(W_1^{d_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_{y_n}^{\delta_n}) - W_1^{d_n}(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n})\right)\\ + \left(W_1^{d_n}(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n}) - W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n})\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

第一项为 0，因为测度 $\eta_{x_0}^{\delta_n}$、$\eta_y^{\delta_n}$分别支撑在图G_n和 $d_n(x,\ y) = d_{G_n}(x,\ y)$ 的节点上 $x,\ y \in \mathcal{V}_n$因为 d_n 从图扩展到 d_{G_n} 流形。根据引理 4.12，最后一项在 $o(\delta_n^3)$ 上为 Ω_n，若取任意 $Q > 3$，则成立。我们还可以将条件期望中的第二项估计为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|W_1^{d_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_{y_n}^{\delta_n}) - W_1^{d_n}(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n})\right| \middle| \Omega_n\right]\\ &\qquad\leqslant \mathbb{E}\left[W_1^{d_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\nu_{x_0}^{\delta_n}) + W_1^{d_n}(\eta_{y_n}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n}) \middle| \Omega_n\right]\\ &\qquad\leqslant \mathbb{E}\left[W_1(\eta_{x_0}^{\delta_n},\nu_{x_0}^{\delta_n}) + W_1(\eta_{y_n}^{\delta_n},\nu_{y_n}^{\delta_n}) \middle| \Omega_n\right] + 2c_n\delta_n^3.\end{aligned} \tag{4.8}$$

对于某个满足 $\lim_n c_n' = 0$ 的序列 $(c_n')_{n\in\mathbb{N}}$，总期望因此为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|W_1^{G_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_y^{\delta_n}) - W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_y^{\delta_n})\right|\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left|W_1^{G_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_y^{\delta_n}) - W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_y^{\delta_n})\right| |\Omega_n\right]\mathbb{P}(\Omega_n)\\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left|W_1^{G_n}(\eta_{x_0}^{\delta_n},\eta_y^{\delta_n}) - W_1(\nu_{x_0}^{\delta_n},\nu_y^{\delta_n})\right| |\Omega\setminus\Omega_n\right](1-\mathbb{P}(\Omega_n))\\ &\leqslant \mathbb{E}[W_1(\eta_{x_0}^{\delta_n},\nu_{x_0}^{\delta_n})] + \mathbb{E}[W_1(\eta_y^{\delta_n},\nu_y^{\delta_n})] + c_n'\delta_n^3.\end{aligned} \tag{4.9}$$

这里我们用到了第二行的第二个加项一致有界于 $3\delta_n$。剩下的工作是证明右侧（4.9）中的各项随着 $c_n''\delta_n^3$，当 $n \to\infty$ 时，以快于该量的速度衰减，其中存在某个序列 $(c_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim_n c_n'' = 0$。这需要将 vdHLTK [的原始论证推广到非均匀测度。具体而言，我们将提出上述文献中命题 5.6–5.9 的一个推广。

我们的方法是将均匀测度变形为与均匀性偏差较小的非均匀测度，然后证明相应的距离扰动足够小，从而使 Wasserstein距离的变化也很小。我们将使用的变形映射来自下一个引理。

对于 $U \subset \mathbb{R}^N$（一个开子集），$k \in \mathbb{N}$和 $\alpha \in (0,1)$表示范数为下式的函数的霍尔德空间 $C^{k,\alpha}(U)$

$$\|g\|_{C^{k,\alpha}(U)} := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in U} \|\nabla^i g(x)\| + \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \frac{\|\nabla^k g(x) - \nabla^k g(y)\|}{\|x-y\|^\alpha}.$$

结合 [DM90] 的定理1和定理2，我们注意到：

引理4.13。设 $U \subset \mathbb{R}^N$ 是一个具有 $C^{3+k,\alpha}$ 边界和 $g \in C^{k,\alpha}(U)$ 的开集，满足 $\int_U g(w)\,dw = 0$。那么存在一个向量场 $F \in C^{k+1,\alpha}(U, \mathbb{R}^N)$，使得映射 $\psi: U \to U$ 由 $\psi(x) = x + F(x)$ 给出，且是一个微分同胚，满足

$$\begin{aligned} \det D\psi(x) &= 1 + g(x) \quad && \text{in } U \\ \psi(x) &= x && \text{on } \partial U \end{aligned} \tag{4.10}$$

并且存在 $C(U,k,\alpha) > 0$，使得$\|F\|_{C^{k+1,\alpha}(U)} \leqslant C\|g\|_{C^{k,\alpha}(U)}$。

对于我们的应用，令 $k = 0, \alpha \in (0,1)$任意，且 $U = B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^N$ 随参数 $\delta > 0$变化。我们强调，一般而言，常数 $C(U,k,\alpha)$确实依赖于U，但对于 $U = B_\delta(0)$，可以推导出以下关于 δ的一致估计。

引理4.14。存在一个 $C > 0$，使得对于所有 $\delta > 0$ 以及每个 $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ 满足$\int_{B_\delta(0)} g(z)dz = 0$ 的情形，都存在 $F \in C^1(B_\delta(0)\ \mathbb{R}^N)$，使得由$\psi(w) = w + F(w)$ 给出的 $\psi: B_\delta(0) \to B_\delta(0)$ 满足

$$\begin{aligned} \det D\psi(w) &= 1 + g(w) \quad && \text{in } B_\delta(0) \\ \psi(w) &= w && \text{on } \partial B_\delta(0) \end{aligned} \tag{4.11}$$

and

$$\sup_{w\in B_\delta(0)} \|\nabla F(w)\| \leqslant C\Big(\sup_{w\in B_\delta(0)} |g(w)| + \delta \sup_{w\in B_\delta(0)} \|\nabla g(w)\|\Big). \tag{4.12}$$

证明。令 C为引理4.13 中针对 $U = B_1(0)$ $k = 0$及任意 $\alpha \in (0,1)$给出的常数，并考虑收缩微分同胚

$$\phi_\delta : B_1(0) \to B_\delta(0), \quad \phi_\delta(w) := \delta w$$

对于任意 $g' \in C^{k,\alpha}(B_\delta(0))$，若满足$\int_{B_\delta(0)} g'(w)dw = 0$，则有 $g := g' \circ \phi_\delta \in C^{k,\alpha}(B_1(0))$，且$\int_{B_1(0)} g'(\phi_\delta(w))dw = 0$。因此，存在 $F \in C^{k+1,\alpha}(B_1(0)\ \mathbb{R}^N)$，使得$\psi(w) = w + F(w)$满足带有 $g = g' \circ \phi_\delta$的（4.10）。定义 $F' := \delta F(\frac{\cdot}{\delta}) \in C^{k,\alpha}(B_\delta(0))$并

$$\psi' : B_\delta(0) \to B_\delta(0), \quad \psi'(w) := w + F'(w)$$

因此

$$D\psi'(\delta w) = D\psi(w) \quad \forall w \in B_1(0)$$

从而

$$\det D\psi'(\delta w) = \det D\psi(w) = g'(\delta w) \quad \forall w \in B_1(0)$$

这等价于

$$\det D\psi'(w) = g'(w) \quad \forall w \in B_\delta(0).$$

此外，

$$\begin{aligned}\sup_{w\in B_\delta(0)}\|\nabla F'(w)\| = \sup_{w\in B_1(0)}\|\nabla F(w)\| &\leqslant \sup_{w\in B_1(0)}|g(w)| + \sup_{\substack{w_1,w_2\in B_1(0)\\ w_1\neq w_2}}\frac{|g(w_1)-g(w_2)|}{\|w_1-w_2\|^\alpha}\\ &\leqslant \sup_{w\in B_1(0)}|g(w)| + \sup_{w\in B_1(0)}|\nabla g(w)|\\ &= \sup_{w\in B_\delta(0)}|g'(w)| + \delta\sup_{w\in B_\delta(0)}|\nabla g'(w)|.\end{aligned}$$

□

对于任意点 $x\in M$，令 $T_xM\cong\mathbb{R}^N$。

推论 *4.15.* 假设存在一个 $C>0$，使得对所有 $\delta>0$ 和 $x\in M$，$g_\delta\in C^1(\tilde{B}_\delta(x))$ 满足 $\int_{B_\delta(0)} g_\delta(w)dw = 0$，且 $\sup_{w\in\tilde{B}_\delta(x)}|g_\delta(w)|\leqslant C\delta$。那么，对所有$x\in M$和 $\delta>0$，存在 $F\in C^1(\tilde{B}_\delta(x)\ \mathbb{R}^N)$，使得 $\psi\colon \tilde{B}_\delta(x)\to\tilde{B}_\delta(x)$ 由 $\psi(w)=w+F(w)$ 给出，并满足

$$\begin{aligned}\det D\psi(w) &= 1+g_\delta(w) \qquad \text{in } \tilde{B}_\delta(x)\\ \psi(w) &= w \qquad\qquad\quad \text{on } \partial\tilde{B}_\delta(x)\end{aligned}$$

并且存在 $C'>0$，满足

$$\sup_{w\in\tilde{B}_\delta(x)}\|\nabla F(w)\|\leqslant C'\delta \quad \forall x\in M,\delta>0. \tag{4.13}$$

证明。 g_δ 的导数必须满足

$$\sup_{w\in\tilde{B}_\delta(0)}\|\nabla g_\delta(w)\|\leqslant C''$$

对某个常数 C''对所有 $x\in M$，$\delta>0$，否则 $\sup_{w\in\tilde{B}_\delta(x)}|g_\delta(w)|\leqslant C\delta$可能会被例如中值定理违反。因此，界（4.12）变为 $C'\delta$对某个 $C'>0$。

□

现在考虑应用中定义的具体函数

$$g_\delta(w) := \left(\frac{d(\exp_x^{-1})_*\nu_x^{\delta_n}}{d\tilde{\mu}_x^{\delta_n}}(w)-1\right)\mathbb{1}_{\tilde{B}_\delta(x)}(w). \tag{4.14}$$

与引理3.10类似，我们有

$$\frac{d(\exp_x^{-1})_*\nu_x^{\delta_n}}{d\tilde{\mu}_x^{\delta_n}}(w) = \frac{d\nu_x^{\delta_n}}{d\bar{\mu}_x^{\delta_n}}(\exp_x w) = \frac{e^{-V(\exp_x w)}}{\int_{\tilde{B}_\delta(x)}e^{-V(\exp_x w')}d\tilde{\mu}(w')} = 1+O(\delta) \tag{4.15}$$

其中 $O(\delta)$ 中的常数取决于 x_0 的一个固定紧邻域，因此推论 4.15 适用于 g_δ。

推论 4.16。 微分同胚 $\psi: B_{\delta_n}(x)\to B_{\delta_n}(x)$ 由推论 *4.15* 应用于 g_δ 并由（*4.14*）给出，满足 $(\exp x)_*\psi_*\tilde{\mu}_x^{\delta_n}=\nu_x^{\delta_n}$。

证明。 由变量替换公式以及 g_δ 的定义可得

$$\begin{aligned}d(\psi_*\tilde{\mu}_x^{\delta_n})(w) &= |\det D_w\psi|\, d\tilde{\mu}_x^{\delta_n}(w)\\ &= (1+g_\delta(w))d\tilde{\mu}_x^{\delta_n}(w)\\ &= \frac{d(\exp_x^{-1})_*\nu_x^{\delta_n}}{d\tilde{\mu}_x^{\delta_n}}(w)d\tilde{\mu}_x^{\delta_n}(w)\\ &= d((\exp_x^{-1})_*\nu_x^{\delta_n})(w)\end{aligned}$$

再通过指数映射推前，即可得到结果。 □

现在我们开始用泊松点过程所产生的经验测度来逼近 $\nu_x^{\delta_n}$最优传输距离下的测度 $\mathcal{P}_n$，旨在求得（4.8）的一个上界。这一结果已在欧几里得空间中得到证明，[vdHLTK20，命题 5。9], 该证明建立在 Talagrand 的工作之上 [Tal92]:

引理 4.17. 设$(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上、强度为 $n(1+b_n)\,\mathit{vol}(dx)$ 的泊松点过程序列，其中 $b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *with* $\lim_n b_n = 0$, $\tilde{\eta}^{\delta_n}$ 的序列；对应于 $\mathcal{P}_n$ 的 $B_{\delta_n}(0) \subset \mathbb{R}^N$ 上的随机经验测度，以及 $B_{\delta_n}(0)$ 上的均匀概率测度。则存在一个序列 (c_n)，使得$\lim_n c_n = 0$，并且

$$\mathbb{E}[W_1(\tilde{\eta}^{\delta_n}, \mu^{\delta_n})] \leqslant c_n \delta_n^3.$$

以下结论表明，若双射 ψ 引起的距离变化很小，那么任意两个测度经 ψ 推前后，其 Wasserstein 距离至多略有增加。

引理 4.18. 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 为波兰空间。对每个 $\delta > 0$，设 $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个可测映射，使得对于所有 $K \subset M$，都存在一个 $C(K) > 0$，满足

$$|d(\psi(x), \psi(y)) - d(x, y)| \leqslant \delta C(K) d(x, y) \quad \forall x, y \in K.$$

那么，对每个 $\mu, \nu \in P(K)$,

$$W_1(\psi_*\mu, \psi_*\nu) \leqslant W_1(\mu, \nu)(1 + C(K)\delta).$$

证明。设 π 为实现 $W_1(\psi_*\mu,\ \psi_*,\ \nu)$的一个最优耦合。则推前$\psi_*\pi := \pi(\psi^{-1}\cdot,\ \psi^{-1}\cdot)$是 μ 与 ν之间的一个（不一定最优的）耦合，因此

$$\begin{aligned} W_1(\psi_*\mu, \psi_*\nu) &\leqslant \int d(x, y) d(\psi_*\pi)(x, y) = \int d(\psi(x), \psi(y)) d\pi(x, y) \\ &\leqslant \int d(x, y)(1 + C(K)\delta) d\pi(x, y) = W_1(\mu, \nu)(1 + C(K)\delta). \end{aligned}$$

□

引理 4.19。 存在一个序列$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得$\lim_n c_n = 0$ 且

$$\mathbb{E}[W_1(\eta_x^{\delta_n}, \nu_x^{\delta_n})] \leqslant c_n \delta_n^3 \quad \forall x \in B_{\delta_n}(x_0).$$

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in B_{\delta_n}(x_0)$，令 $F \in C^1(\tilde{B}_\delta(x)\ \mathbb{R}^N)$为该向量场，并令$\psi(w) := \exp_x(w + F(w))$为该微分同胚，使得$\det D_w\psi = 1 + g_\delta(w)$，因此特别地，根据推论 4.16，$(\exp_x)_*\psi_*\tilde{\mu}_x^{\delta_n} = \nu_x^{\delta_n}$。记归一化常数

$$Z_1 := \int_{\tilde{B}_{\delta_n}(x)} e^{-V(\exp_x w) + V(x)} dw, \quad Z_2 := \int_{B_{\delta_n}(x)} e^{-V(z) + V(x)} d\mathrm{vol}(z)$$

并令$\tilde{\eta}_x^{\delta_n}$为一个强度测度在 w中均匀的泊松点过程的归一化经验测度

$$\frac{Z_2}{Z_1} n e^{-V(x) + V(x_0)} \mathbb{1}_{\tilde{B}_{\delta_n}}(w) dw = n(1 + O(\delta_n)) \mathbb{1}_{\tilde{B}_{\delta_n}}(w) dw$$

以下内容说明了该常数的选取依据。注意，根据记号 3.7,

$$d\tilde{\mu}_x^{\delta_n}(w) = \frac{1}{Z_1} \mathbb{1}_{\tilde{B}_{\delta_n}(x)}(w) dw, \quad d\nu_x^{\delta_n}(z) = \frac{e^{-V(z) + V(x)}}{Z_2} d\mathrm{vol}(z).$$

于是，根据引理 4.2，$(\exp x)_*\psi_*\tilde{\eta}_x^{\delta_n}$是强度为某值的泊松点过程的归一化经验测度

$$\begin{aligned}(\exp_x)_*\psi_*(\frac{Z_2}{Z_1}ne^{-V(x)+V(x_0)}\mathbb{1}_{\tilde{B}_{\delta_n}}(w)dw) &= Z_2ne^{-V(x)+V(x_0)}d((\exp_x)_*\psi_*\tilde{\mu}_x^{\delta_n})(z)\\ &= Z_2ne^{-V(x)+V(x_0)}d\nu_x^{\delta_n}(z)\\ &= Z_2ne^{-V(x)+V(x_0)}\frac{e^{-V(z)+V(x)}}{Z_2}d\mathrm{vol}(z)\\ &= ne^{-V(z)+V(x_0)}d\mathrm{vol}(z)\end{aligned}$$

因此（$\exp_x$）$_*\psi_*\tilde{\eta}_x^{\delta_n} = \eta_x^{\delta_n}$依分布收敛。

应用 ψ 后，距离满足以下界

$$\begin{aligned}d(\psi(w_1),&\psi(w_2)) = \|w_1 + F(w_1) - w_2 - F(w_2)\|(1 + O(\delta_n^2))\\ &\leqslant \left(\|w_1 - w_2\| + \left\|\int_0^1 \nabla F(w_1 + t(w_2 - w_1)(w_2 - w_1)dt\right\|\right)(1 + O(\delta_n^2))\\ &\leqslant \|w_1 - w_2\|(1 + O(\sup_{t\in[0,1]}\|\nabla F(w_1 + t(w_2 - w_1)\|))(1 + O(\delta_n^2))\\ &\leqslant \|w_1 - w_2\|(1 + C\delta_n)\end{aligned}$$

利用引理 2.7 处理第一行，并利用（4.13）处理最后一行。因此，引理 4.18适用，故结合引理 4.17，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_1(\eta_x^{\delta_n}, \nu_x^{\delta_n})] &= \mathbb{E}[W_1((\exp_x)_*\psi_*\tilde{\eta}_x^{\delta_n}, (\exp_x)_*\psi_*\tilde{\mu}_x^{\delta_n})]\\ &\leqslant \mathbb{E}[W_1(\tilde{\eta}_x^{\delta_n}, \tilde{\mu}_x^{\delta_n})](1 + C\delta_n)\\ &\leqslant c_n'\delta_n^3(1 + C\delta_n) \leqslant c_n\delta_n^3\end{aligned}$$

其中（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $c_n \to 0$，且 $n \to \infty$。 □

这补上了最后一个缺失环节，即（4.9）收敛到 0 的速度足够快，从而完成了定理 4.7 的证明。

参考文献

[DM90] Bernard Dacorogna 和 Jürgen Moser。关于一个涉及雅可比行列式的偏微分方程。《亨利·庞加莱研究所年刊 *C*辑：非线性分析》，7(1):1–26，1990年。[Foo84] Robert L. Foote。距离函数的正则性。《美国数学会会刊》，92(1):153–155，1984年。[Jos17] Jürgen Jost。黎曼几何与几何分析。Universitext。Springer，瑞士库尔，第二版，2017年。[Lee13] John M. Lee。光滑流形导论，载于《数学研究生教材》第218卷。Springer，纽约，第二版，2013年。[LP18] Günter Last 和 Mathew Penrose。泊松过程讲义，载于《数学统计学会教材》第7卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。

[LV10] Grégoire Loeper 和 Cédric Villani。曲率几何中最优传输的正则性：非焦点情形。《杜克数学杂志》，151(3):431–485，2010年。[Mey04] Wolfgang Meyer。Toponogov 定理及其应用，2004年。[Oll09] Yann Ollivier。度量空间上马尔可夫链的里奇曲率。《函数分析杂志》，256(3):810–864，2009年。[Pen03] Mathew Penrose。随机几何图，载于牛津概率研究丛书第5卷。牛津大学出版社，牛津，2003年。[Tal92] Michel Talagrand。高维空间中的随机样本匹配。《应用概率年刊》，2(4):846–856，1992年。[vdHCL+21] Pim van der Hoorn、William J. Cunningham、Gabor Lippner、Carlo Trugenberger 和 Dmitri Krioukov。随机几何图中 Ollivier-里奇曲率的收敛。《物理评论研究》，3:013211，2021年3月。[vdHLTK20] Pim van der Hoorn、Gabor Lippner、Carlo Trugenberger 和 Dmitri Krioukov。随机几何图的 Ollivier 曲率收敛到其黎曼流形的里奇曲率，2020年。