arXiv:2303.04233v1 [math.GT] 7 Mar 2023

关于纽结同调理论的秩与协和

NATHAN M. DUNFIELD、SHERRY GONG、THOMAS HOCKENHULL、
MARCO MARENGON 和 MICHAEL WILLIS

Abstract. 对于带状纽结，一个 Folk 猜想认为，其纽结 Floer 同调的秩必为模 8 同余于 1；另一个 Folk 猜想则对约化 Khovanov 同调提出了相同的断言。我们给出了这两个 Folk 猜想的首批反例，但与此同时，也提出了令人信服的新猜想：对于任意带状纽结，这两种同调的秩都必须模 4 同余于 1。我们证明，每个修订后的猜想都等价于证明：将同调的秩对 4 取模，会给出纽结同痕群到相应群的一个同态。我们检验了 240 万个带状纽结的修订猜想，并且还证明这些猜想对于融合数 1 的带状纽结成立。

Contents

1. 引言 2 1.1. 支持我们猜想的证据 3 1.2. 与一些已知切片障碍的比较 4 1.3. 非局部性 5 1.4. 推广 5 1.5. 文章结构 6 1.6. 致谢 6 2. 背景 7 3. 无扭 Whitehead 双 8 4. 两个猜想的等价性 9 5. 定理 1.2 的计算与证明 9 5.1. Khovanov 同调计算 10 5.2. 纽结 Floer 同调计算 11 6. 融合数为 1 的带状纽结 $11\widehat{\ }6$ 1.1. 扭结阶为 1 的纽结的 HFK的秩 $11\widetilde{\ }6$ 2. X-扭结阶为 1 的纽结的 Kh 的秩 16 7. 非局部性 18 附录A. 多项式不变量与 Arf 不变量 19 A.1. Arf 不变量 19 A.2. 琼斯多项式的约化公式 20 A.3. Lickorish 关于亚历山大多项式的统一表述 23 A.4. 关于琼斯多项式的统一表述？ 23 附录 B. 反例的 PD 编码 24 参考文献 24

1. Introduction

过去二十年间，纽结的同调不变量在低维拓扑中发挥了重要作用，其中包括 Khovanov 同调 [Kho00] 和纽结 Floer 同调 [OS04，Ras03]。对于每一种同调理论，都可以取其分次欧拉示性数，从而得到经典的纽结多项式不变量（分别为琼斯多项式和亚历山大多项式）。此外，这些同调理论还可以导出若干同痕不变量和亏格界，通常是通过谱序列得到的 [OS03、Ras10、OSS17]。另一方面，这些同调理论的秩相关结果尚难捉摸，研究往往集中于确定哪些纽结可能具有给定秩的同调。（例如，参见 [KM11]和 [OS04，定理 1。2] 关于平凡纽结判别的结果。）然而，一个广为流传的猜想关注的是各同调的秩模 8。记

(1) 纽结 Floer 同调的帽型，系数为 $\mathbb{F}_2$，记作 $\widehat{\mathrm{HFK}}$；以及
(2) 约化 Khovanov 同调，系数为 $\mathcal{A}$，记作 $\widetilde{\mathrm{Kh}}_{\mathcal{A}}$。

民间猜想的一个版本如下：

猜想1.1 (1 mod 8 Folk 猜想)。设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{F}_p$ 或 $\mathbb{Q}$。给定一个带状纽结 $R \subset S^3$，有：

(a) 纽结 Floer 同调的秩$(R) \equiv 1$（模 8）；以及 (b) Khovanov 同调的秩$_{\mathcal{A}}(R) \equiv 1$（模 8）。

这一 Folk 猜想部分源于尝试对 Fox-Milnor 定理给出范畴化版本的努力。该定理指出，切片纽结$K \subset S^3$ 的行列式 K 为奇数平方，因此模 8 同余于 1；此外，还有大量实验性证据。然而，我们将证明这一 Folk 猜想是错误的：

定理 1.2。模 *8* 同余于 *1* 的 *Folk* 猜想*1.1*对于 纽结 Floer 同调和关于 Khovanov 同调$_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_p$ 对于 $p \neq 2$ 以及 $\mathcal{A} = \mathbb{Q}$均不成立。

我们在第 1.2 节5 中证明定理，通过构造显式的带状纽结，计算其同调秩，并证明这些秩模 8 不同余于 1。这些反例是在对猜想 1.1进行大量实验测试时发现的。在这个大型数据集中，所有此类反例的秩模 8 均为 5；因此，我们得到猜想 1.1的以下较弱形式：

猜想1.3。令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{F}_p$ 或 $\mathbb{Q}$。给定一个带状纽结 $R \subset S^3$，我们有：

(a) $\operatorname{rk} \widehat{\mathrm{HFK}}(R) \equiv 1 \pmod 4$;
(b) $\operatorname{rk} \widetilde{\mathrm{Kh}}_{\mathcal{A}}(R) \equiv 1 \pmod 4$.

因此，下面的猜想似乎是猜想1.3的一般化，但事实上，定理1.5 将表明它们是等价的。

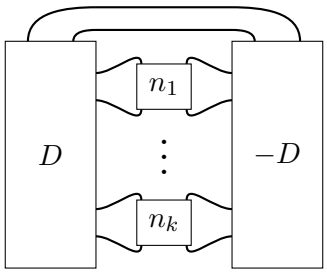

FIGURE 1. 纽结图的一个对称并 D。不同的 n_i 表示扭转区域，其中 n_i （带符号的）交叉点沿竖直方向连接。所有对称并都是带状的；反之目前尚不清楚。

猜想1.4。 设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{F}_p$ 或 $\mathbb{Q}$。给定一个纽结 $K \subset S^3$，以下数值是 K的同痕不变量：

$\widehat{\ }$ *(a)* 纽结 Floer 同调(K)（模4）； $\widetilde{\ }$ *(b)* Khovanov 同调$_{\mathcal{A}}(K)$（模4）。

因此，从共边群存在同态

$$\rho_{\widehat{\mathrm{HFK}}} : \mathcal{C} \to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \qquad \rho_{\widetilde{\mathrm{Kh}}_{\mathcal{A}}} : \mathcal{C} \to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$$
$$K \mapsto [\mathrm{rk}\,\widehat{\mathrm{HFK}}(K)]_4 \qquad K \mapsto [\mathrm{rk}\,\widetilde{\mathrm{Kh}}_{\mathcal{A}}(K)]_4$$

定理1.5。 我们有以下等价命题：

(a) 猜想 *1.4(a)* $\Leftrightarrow$ 猜想*1.3(a)*；***(b)*** 猜想 *1.4(b)* $\Leftrightarrow$ 猜想*1.3(b)*。

特别地，猜想 1.3 中的“带状”一词可以替换为“光滑切片”。

我们注意到，我们的数据中没有一个为关于 1.1(b) 的 Folk 猜想在 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$上产生反例，从而得到：

问题1.6。 当系数为 *1.1(b)* 时，*Folk* 猜想 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$是否成立？

1.1. 支持我们猜想的证据。 我们提供了两类支持我们猜想的证据。

1.1.1. 实验证据。我们针对来自 [DG] 的一份纽结清单检验了猜想 1.3，该清单包含 160 万个交叉数不超过 19 的带状纽结。我们还通过构造带有一个扭转区域的对称并，生成了 80 万个交叉点不超过 30 的纽结（这是一类特殊的带状纽结，由 Lamm [Lam00], 在 Kinoshita-Terasaka [KT57] 的构造基础上定义；见图1）。对于由 240 万个带状纽结组成的合并样本，我们使用经由 SnapPy[CDGW] 调用的 Szab´o 纽结 Floer 计算器 [Sza] ，发现猜想 1.3(a) 对这些纽结均成立。猜想 1.3(b) 对这些纽结也成立，且满足 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$、$\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_{211}$ （见注 2.2）。我们使用 KnotJob [Sch22] 进行了检验。

1.1.2. 融合数 *1* 的证据。 在 Hom-Kang-Park[HKP], 的工作基础上，我们证明更强的模 8 同余 Folk 猜想 1.1(a)对于融合数 1 的带状纽结成立（即通过将一条带连接到二分量平凡链环上而得到的纽结）。

定理 1.7. 若 R 是融合数为1的带状纽结，则

$$\operatorname{rk}\widehat{\mathrm{HFK}}(R) \equiv 1 \pmod 8,$$

特别是， R 满足猜想 *1.3(a)*。

这一结果更一般地适用于挠阶为 1 的带状纽结（参见定理 6.1）。证明的关键在于切片结的 CFK^∞ 的 Hom 分解（参见 [Hom17，定理 1]）。

与此同时，对于 Khovanov 同调，Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar 在一篇未发表的工作中证明了以下结果；经他们许可，我们在第6.2 节中给出其证明。

定理 1.8 (Lipshitz-Sarkar)。 若 R 是融合数为 *1* 的带状纽结，且 $\mathcal{A} = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{F}_p$ 对于 $p \neq 2$，则

$$\operatorname{rk}\widetilde{\mathrm{Kh}}_{\mathcal{A}}(R) \equiv 1 \pmod 4,$$

满足猜想 *1.3(b)*。

尽管定理 1.7 和 1.8 的证明似乎都无法推广为关于模 8 的 Khovanov 同调的陈述，但值得注意的是，我们发现的每个违反模 8 Folk 猜想1.1的反例，其融合数都是 2。类比定理 1.7，我们提出以下问题。

问题 1.9. 若 R 是融合数为1的带状纽结，我们是否必有

$$\operatorname{rk}\widetilde{\mathrm{Kh}}_{\mathcal{A}}(R) \equiv 1 \pmod 8$$

对某个（或所有？） $\mathcal{A}$成立？

1.2. 与若干已知切片障碍的比较。

1.2.1. s 不变量。如果猜想 1.4(b)成立，它将给出这一障碍：任何满足 rk Khovanov 同调$_{\mathcal{A}} \neq 1$ (模4)的纽结都不是光滑切片。自然会想知道这一障碍与现有方法相比如何，尤其是与 Rasmussen s 不变量 [Ras10]，相比；后者源自相同的底层纽结同调理论。在 [DG]，中考察的 380 万个纽结$\widetilde{\ }$里，存在满足 $s \neq 0$ 且 rk Khovanov 同调$_{\mathcal{A}} \equiv 1$ (模4)$\widetilde{\ }$ 的纽结，也存在满足 $s = 0$ 且 rk Khovanov 同调$_{\mathcal{A}} \neq 1$ (模4) 的纽结，这表明两种条件互不蕴含。不过，在这些纽结中，超过 99% 的纽结通过这两项$\widetilde{\ }$检验得到相同结果，其中 $s \neq 0$ 出现的频率略高于 rk Khovanov 同调$_{\mathcal{A}} \neq 1$(模4)。该样本中几乎所有纽结都满足 $|s| \leq 2$；随着 s 增大，我们预计 $s \neq 0$ 检验通常会比另一项更强。

s不变量是一种尤为微妙的同痕不变量，能够为光滑四维球亏格提供有力信息。它可用于证明

某些拓扑切片纽结并非光滑切片，例如 Piccirillo 纽结 K_P，参见 [Pic20], 。该事实曾被利用来证明康威纽结并非光滑切片。利用 [LL],，我们发现 rk Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_3}(K_P) =$ rk Khovanov 同调$_{\mathbb{Q}}(K_P) = 263 \equiv 3$ (模4)。因此，若猜想 1.4(b)成立，由此得到的障碍将是光滑范畴而非拓扑范畴的，并且足够灵敏，能够处理 K_P。因此，它有望在 [FGMW10] 和 [MP] 的策略中取代 s不变量，从而构造光滑四维庞加莱猜想的反例。

1.2.2. τ-不变量。同样，如果猜想 1.4(a)成立，它将给出这样的障碍：任何满足 rk HFK $\neq 1$ (模4)的纽结都不是光滑切片。这里，一个自然的比较对象是 [OS03], 中的 τ 不变量，它同样以 HFK 来定义。对于 [DG], 的样本，我们再次发现，这项检验对其中 99% 的纽结都与条件 $\tau \neq 0$ 相符，不过也并非任何一项检验都能涵盖另一项。已知 τ 不适用于 [Pic20], 之类的应用，因此 Piccirillo 结满足 rk HFK$(K_p) = 33 \equiv 1$ (模4)也就不足为奇了。然而，与 τ一样，rk HFK $\neq 1$ (模4)确实构成真正的光滑切片障碍。例如，[DG] 中有近 6,000 个亚历山大多项式平凡的纽结（因而在拓扑意义上是切片 [Fre82]），但它们满足 $\tau \neq 0$ 且 rk HFK $\equiv 3$ (模4)。我们在第 3 节给出无穷多个这类例子。

1.2.3. 在共边群中阶为 2 的纽结。 如果猜想 1.4的任一部分成立，就能得到一种可切性障碍，可用于检测共边群中的 2-挠。虽然目前已有能够检测 2-挠的障碍（例如 Fox–Milnor 障碍 [FM66]），但无法通过同态 $\mathcal{C} \to \mathbb{Z}$检测 2-挠，而这类同态通常出现在纽结同调的背景下。

1.3. **非局部性**。 我们的猜想有一处微妙之处：不可能存在局部证明，也就是说，不可能仅利用浸入带状圆盘的带状奇点附近的纽结投影来证明。我们将在第7节展示这一点；精确表述见命题7.1。

1.4. 推广。

1.4.1. 未约化 *Khovanov* 同调。 对于未约化 Khovanov 同调 $\mathrm{Kh}_{\mathcal{A}}$，我们有相应的猜想。

猜想 1.10。 设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{F}_p$，对应于 $p \neq 2$。给定一个带状纽结$R \subset S^3$, 我们有

$$\operatorname{rk} \mathrm{Kh}_{\mathcal{A}}(R) \equiv 2 \pmod 4.$$

猜想 1.11。 令 $\mathcal{A}$ 对于 $p \neq 2$ 而言为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{F}_p$。给定一个纽结 $K \subset S^3$, 其值

$$\operatorname{rk} \mathrm{Kh}_{\mathcal{A}}(K) \pmod 4$$

是 K的同痕不变量。

注意，在这种情形下，我们不知道这些猜想是否等价。与定理 1.2一致，我们无法将猜想1.10 加强为模8的陈述。特别地，存在一些带状纽结，使得 rk Khovanov 同调 $_{\mathbb{Q}} \equiv 2$(模 8)，也存在另一些使得 rk Khovanov 同调 $_{\mathbb{Q}} \equiv 6$(模8)，例如 $6_1 = K6a3$ 和 $K16n33000$ 分别对应上述两种情形。

注 1.12. 当 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$ 时，我们有 rk Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_2}(K) = 2$ rk Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_2}(K)$，参见 [Shu14，推论 3.2.C]。因此，由于 rk Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_2}(K)$ 始终为奇数，我们立即得到，对于任意纽结 K，rk Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_2}(K) \equiv 2$ (模4)，这使得猜想 1.10 的 $\mathbb{F}_2$类比失去了意义。rk Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_2}$ 与 rk Khovanov 同调$_{F_2}$ 之间的这种关系也意味着，我们的猜想 1.3(b) 和 1.4(b) 等价于相应的模8未约化 Khovanov 同调猜想。

我们检验了猜想 1.10 对第 1.1.1 节所述列表中的全部 240 万个带状纽结均成立，系数环为 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_{211}$。

1.4.2. *3*维流形。 我们的 Heegaard Floer 同调猜想最简单的 3维流形类比可能如下所示。

问题 1.13。 如果一个 $\mathbb{Z}HS^3$ Y 是某个 $\mathbb{Z}HB^4$的边界，是否有

$$\operatorname{rk} \widehat{\mathrm{HF}}(Y) \equiv 1 \pmod 4?$$

如果这个问题的答案为肯定，那么将会非常有趣，因为由此得到的障碍将适合检测整数配边群 $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$中的 2-挠。是否存在这样的 2-挠，目前仍是一个开放问题。（Rokhlin 不变量在此并不是一个有用的障碍，因为它在 $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$的 2-挠子群上消失，参见 [Man16]。）

1.5. **组织结构**。 在第 2 节中，我们为猜想 1.3 提供动机；随后在第 3 节中证明由此可能产生的切片性障碍是光滑的。在第 4 节中，我们证明关于猜想 1.5 所述定理，即猜想 1.3和1.4的等价性。在第 5 节中，我们讨论推翻 Folk 猜想 1.1 的计算。在第 6 节中，我们重点研究融合数 1 的带状纽结，对于这类纽结，猜想 1.3 成立。在第 7 节中，我们说明，无法通过结图上的简单局部论证获得猜想 1.3 的一般证明。在附录 A 中，我们讨论其与 Arf 不变量的关系（或缺乏这种关系）。最后，在附录 B 中，我们描述第 5 节中的一些反例。

1.6. **致谢**。 我们特别感谢 Adam S. Levine、Sucharit Sarkar 和 Andr´as I. Stipsicz，感谢他们进行了富有启发性的交流并分享了他们的想法。我们还要感谢 Jennifer Hom、Patrick Gilmer、Marco Golla、Lisa Piccirillo 和 Arunima Ray。初步计算中，我们使用了以下网站和计算机程序：SnapPy[CDGW], 结图集 [BNM], Khoca [LL], KnotInfo [LM23], 该程序

为 [SS18], KnotJob [Sch22], 和纽结弗洛尔同调计算器[Sza]。我们非常感谢它们的开发者。

Dunfield 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1811156 项目和 Simons 奖学金的资助。Gong 和 Willis 于 2022 年秋季驻留伯克利加利福尼亚州的 Simons Laufer 数学科学研究所期间，获得了美国国家科学基金会第 1440140 号资助。Gong 获得了美国国家科学基金会 DMS-2055736 项目的资助。在本研究开展的大部分时间里，Hockenhull 得到了马克斯·普朗克数学研究所的资助。Marengon 谨此说明：本项目获得了欧盟地平线 2020研究与创新计划的资助，资助形式为 Marie Sk-lodowska-Curie 资助协议第 893282 号。

2. Background

我们猜想的最初动机来自 Fox-Milnor 定理。该定理指出，若 $K \subset S^3$ 是一个切片结，则其亚历山大多项式可以分解为

$$\Delta_K(t) \doteq f(t) \cdot f(t^{-1})$$

对于某个 $f \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$。（符号‘$\doteq$’表示‘在环 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$中相差一个单位因子’。）如果 K 是带状的，那么可以将 $f(t)$选为纽结 K的带状圆盘 $D \subset B^4$ 的亚历山大多项式。

Fox-Milnor 定理的朴素范畴化会断言，对于$\widehat{\text{切片结}}$ K，HFK(K)作为双分次 $\mathbb{F}_2$-向量空间可分解为 $V \otimes V^*$，其中 V^* 表示向量空间 V的对偶。显然，这将$\widehat{\text{意味着}}$，如果 K 是切片结，那么 rk HFK(K) 必定是奇数平方。但众所周知，这一结论是错误的：对于 Kinoshita-Terasaka 结（它是切片结，事实上也是带状结和对称并），有 rk HFK $= 33$。

$\widehat{\text{尽管如此}}$，对于某些切片纽结族，仍可证明 rkHFK 是奇数平方：

- 若 K 是准交替切片纽结，则 $\widehat{\text{HFK}}(K) = V \otimes V^*$ 由[MO08]证明；
- 若 K 是某个纽结与其镜像结的连通和（这类纽结在$\widehat{\text{HMW}}$ 中称为矩形纽结 [HMW]），则根据 HFK 的连通和公式，$\widehat{\text{HFK}}(K) = V \otimes V^*$，参见$\widehat{\text{OS04}}$，公式 (5)]以及 [Ras03，命题 6。2]；
- 若 K 是 [HMW], 中所述族的一个$\widehat{\text{对称并}}$，K则 rk HFK([) 是奇数平方，参见 [HMW]。

然而，鉴于 Kinoshita-Terasaka 结是任何奇数平方秩猜想都难以处理的反例，这便引出了这样一个问题：数字 33 与奇数平方数有什么共同之处。一个答案是，所有这些数模 8 都同余于 1。上述纽结的约化 Khovanov 同调的秩同样是奇数平方数，因此

便引出了 Folk 猜想 1.1。然而，正如我们将在第5节中所展示的，存在同调秩模 8 同余于 5 的带状纽结，因此我们提出猜想 1.3 以及与之等价的猜想 1.4。

注2.1. 我们指出，不能指望将猜想$\widehat{\quad}$ $\widetilde{\quad}$加强到超出模4的程度。若 H 表示纽结 Floer 同调或 Khovanov 同调$_{\mathcal{A}}$，且 rk $H(\cdot)$ 对模 m 取约后的值是一个同痕不变量，那么 $m|8$。这是因为方结 $S := T_{2,3}\#T_{2,3}$ 是切片的，并且 rk $H(S) = 9$，因此必有$9 \equiv 1$ (模 m)，这就迫使 $m|8$成立。又由于 $m = 8$ 本身已由定理 1.2 排除，因此选择 $m = 4$ 是最优的。

注 2.2。 细心的读者会注意到，我们在猜想和计算实验中使用了各种系数环。以下几点值得牢记：

- 纽结 Floer 同调$_{\mathcal{A}}$ 可用 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_p$、 $\mathbb{Q}$、$\widehat{\quad}$或 $\mathbb{Z}$ 系数定义（至少可以非函子性地定义）。然而，迄今为止尚未在纽结 Floer 同调$_{\mathbb{Z}}$ 中发现挠元，因此，对于 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_p$ 和 $\mathcal{A} = \mathbb{Q}$，纽结 Floer 同调$_{\mathcal{A}}$的秩$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$猜想上相同。这就是我们只考虑纽结 Floer 同调 $=$ 纽结 Floer 同调$_{\mathbb{F}_2}$的原因。
- 作为 $\mathbb{Z}$上的模，（约化或非约化）Khovanov 同调$\widehat{\quad}$通常含有挠元。根据泛系数定理，rk HFK$^{\mathbb{Q}}$$\widehat{\quad}$等于 rkHFK$_{\mathbb{Z}}$的无挠部分的秩。

- 在某些情况下，出于计算复杂度的考虑，我们计算 Khovanov 同调时采用了 $\mathbb{F}_{211}$ 而非 $\mathbb{Q}$。对于我们发现的猜想 1.1(b) 的反例，我们先将其作为 $\mathbb{F}_{211}$ 上的反例找出，然后再验证它们在 $\mathbb{Q}$上同样是反例。

3. Untwisted Whitehead doubles

由于 Piccirillo 结是拓扑切片的，因此由 rkKh$^{\mathbb{Q}}$ 产生的潜在障碍$\widetilde{\quad}$将是光滑范畴中的，而非拓扑范畴中的。以下$\widehat{\quad}$示例表明，rk HFK 对应的障碍也将是光滑范畴中的。

Kirby 长期以来的一个问题（参见 [Kir97，问题 1。38]）是：一个纽结 K 是切片纽结，当且仅当它的无扭正 Whitehead 复合 $\mathrm{Wh}_0^+(K)$ 是切片纽结吗？（通过镜像变换，可以将“正”替换为“负”。）这个问题的微妙之处在于，$\mathrm{Wh}_0^+(K)$ 总是拓扑切片的。

Hedden 计算了 Whitehead 双纽结的完整纽结 Floer 同调，见[Hed07]。由他的定理 [Hed07，定理 1，2]可以很容易地推出

- 若 $\tau(K) \leq 0$ （例如，若 K 是切片纽结或负纽结），则 rk($\widehat{\quad}$ HFK($\mathrm{Wh}_0^+(K)$)) $\equiv 1$ （模4）；
- 如果 $\tau(K) > 0$（例如，如果 K是正纽结），那么 rk($\widehat{\quad}$纽结 Floer 同调($\mathrm{Wh}_0^+(K)$)) $\equiv 3$（模4）。

因此，证明猜想 1.4(a) 并不能对Kirby的问题给出否定答案。另一方面，它将重新得到Hedden的结果，即$Wh_0^+(K)$ 在拓扑意义下是切片的，但不是光滑切片的，前提是 $\tau(K) > 0$（参见 [Hed07，推论 1。6]）。

4. Equivalence of the two conjectures

本节证明了定理1.5 ，关于猜想1.3 和1.4等价性。

定理*1.5*的证明。 对于平凡纽结，两个命题的正向结论显然成立 $U \subset S^3$，rk(纽结 Floer 同调$(U)) = \mathrm{rk}($ Khovanov 同调$_{\mathcal{A}}(U)) = 1$。

对于另一个方向，我们令 $H(\cdot)$ 表示以下纽结同调理论之一 y

纽结 Floer 同调$(\cdot)$ 或 Khovanov 同调$_{\mathcal{A}}(\cdot)$，并假设对于任意带状纽结 R，有

$$\mathrm{rk}(H(R)) \equiv 1 \pmod 4.$$

现在 $H(\cdot)$ 满足连通和公式（参见 [OS04，公式 (2)] 以及[Ras03，命题 6。2] 对于纽结 Floer 同调，以及 [Kho03，命题 3.3 和第 3 节。1] 对于 Khovanov 同调），因此映射

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}\colon \{\text{knots}\} &\to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \\ K &\mapsto [\mathrm{rk}\, H(K)]_4 \end{aligned}$$

定义了一个幺半群同态。我们将证明，在我们的假设下，对于每个切片结 S，$\mathrm{rk}(H(S)) \equiv 1$ （模4），因此这些映射将下降为从共边群出发的（幺半群，因而也是群）同态。（如果G 和 H 是群，那么从 G 到 H 的幺半群同态与群同态是同一概念。）

给定一个切片结 S，存在某个带状纽结 R ，使得连通和 $S\#R$ 是带状的（例如参见 [Tei11，引理 2。5]），因此

$$\mathrm{rk}(H(S\#R)) \equiv 1 \pmod 4.$$

根据连通和公式，我们将上述表达式简化为

$$\mathrm{rk}(H(S)) \cdot \mathrm{rk}(H(R)) \equiv 1 \pmod 4.$$

我们已假设 $\mathrm{rk}(H(R)) \equiv 1$ (模4)，因此 $\mathrm{rk}(H(S)) \equiv 1$(模4)，如所需。□

5. Computations and proof of Theorem 1.2

在我们的计算中，我们考察了两组带状纽结。第一组是由两位作者汇编的一个列表，其中包含 160 万个最多有 19 个交叉点的带状纽结；该列表将与 [DG] 一同发表。（最多有 19 个交叉点的素结有 3.5 亿个 [Bur20]，，而 [DG] 的列表几乎完整，最多缺少 20,000 个带状纽结。）此外，我们编写了一个程序，通过随机生成结图并将其与一个

含有单个半扭转的单个扭转区域作对称并，以此构造带状纽结。我们用这种方法生成了 80 万个最多有 29 个交叉点的此类纽结。

对于这 240 万个纽结，我们使用 Szab´o 的纽结 Floer 计算器 [Sza] 通过 SnapPy [CDGW]，求得了纽结 Floer 同调的秩。我们还使用 KnotJob 计算了 Khovanov 同调的秩$_{\mathbb{F}_2}$，Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_3}$，以及 Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_{211}}$ (见注 2.2) [Sch22]。对于全部 240 万个纽结，所得的秩均符合猜想 1.3。

对于来自 [DG], 的带状纽结，需要指出的是，至少 80% 的纽结融合数为 1，因此适用于定理 1.7和1.8；我们猜测其余 20% 中的大多数融合数为 2 或更高，但能够证明这一点的纽结不足 20,000 个。这促使我们生成了第二份包含 800,000 个带状纽结的列表，其交叉数通常更高。因此，尽管猜想 1.3的有效样本量至多为 120 万个，但整个样本仍支持问题 1.9的肯定答案。此外，我们的所有纽结都满足更强的 Folk 猜想 1.1(b)关于 Khovanov 同调$_{\mathbb{F}_2}$。

下面我们分别进一步介绍 Khovanov 同调和纽结 Floer 同调的细节，展示反驳 Folk 猜想 1.1 的反例。

5.1. **Khovanov同调计算**。 在多达 19 个交叉点的 160 万个带状纽结中，我们发现了四个纽结，其约化 Khovanov 同调在 $\mathcal{A} = \mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{Q}$上的秩均为 5（模 8），从而违背了 Folk 猜想 1.1(b)。由于这些纽结中每一个的整数同调 $\mathrm{Kh}_{\mathbb{Z}}$ 仅含有 2-挠，泛系数定理推出，对于所有 $\mathbb{F}_p$ =，均有秩 $\mathrm{Kh}_{\mathbb{Q}}$，从而证明了 $p \neq 2$情况下的定理 1.2 。其中一个反例是纽结 18nh 00159590，采用 [Bur20]中的记号。该纽结绘于图 2中。我们找到的其他反例是纽结 18nh 00752242、19nh 000129633、19nh 000305767；四个纽结的平面图（PD）编码均见附录 B。

我们注意到，所有这些反例的融合数都是二（这促使我们提出问题1.9）。在这四种情况下， [DG] 的计算机程序都能够找到一种二带简化，将这些纽结化为三分支无链环，如图2所示，从而给出融合数的一个上界。随后，可以利用 Hom-Kang-Park障碍 [HKP命题3。6] 在第6.1节中将进一步讨论。

有趣的是，对于以对称并构造的 800,000 个带状纽结（其中一个扭转区域包含一个单独的半扭转），所有约化 Khovanov 同调的秩都是 1（模 8）。这表明:

问题5.1。 如果 K 是一个具有一个扭转区域（包含一个单独的半扭转？）的对称并，那么我们是否必然有

$$\operatorname{rk} \widetilde{\mathrm{Kh}}_{\mathcal{A}}(K) \equiv 1 \pmod 8$$

对某些（所有？） $\mathcal{A}$?

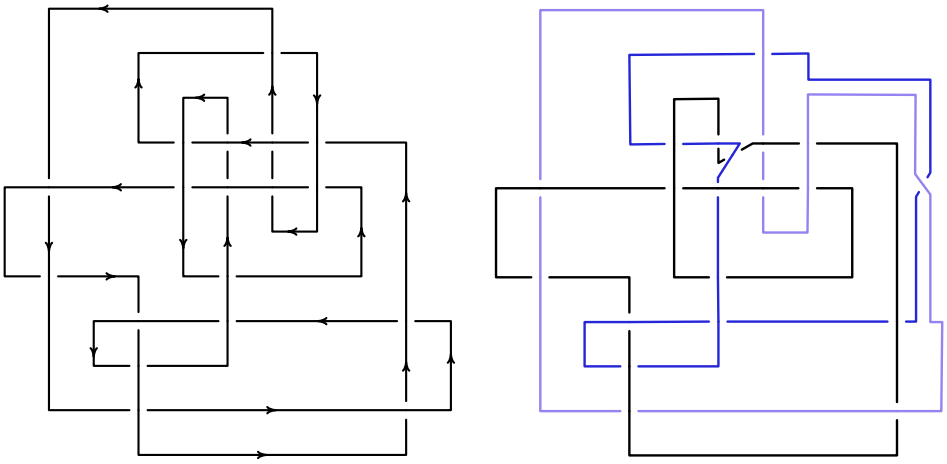

FIGURE 2. 左图是纽结18nh 00159590。右图是在该纽结上添加两条带（一条非常短）后得到的图形，从而构成一个三分量平凡纽结。相应的带状圆盘表明，18nh 00159590是一个融合数至多为二的带状纽结。

5.2. **纽结 Floer 同调计算**。 我们研究的所有交叉点不超过 19 个的带状纽结，其纽结 Floer 同调的秩均满足 Folk 猜想1.1(a) 关于纽结 Floer 同调的猜想。然而，在由对称并构造的 800,000 个纽结样本中，我们发现了八个例子，其纽结 Floer 同调的秩模 8 等于 5，违反了 Folk 猜想 1.1(a)，从而完成了定理 1.2 的证明。其中一个对称并如图 3 所示，它由一个 13交叉图构造而成，图中展示了 4_1 。这个对称并的纽结 Floer 同调总秩为 77，模 8 等于 5。按分次细分后的具体秩如图 4 所示。

我们发现了另外七个由对称并构造的纽结，其纽结 Floer 同调的秩为 5（模 8）。它们列于表 1。

6. 融合数为 1 的带状纽结

6.1. **扭结阶为 1 的纽结的** 纽结 Floer 同调 **的秩**。 本节证明，融合数为 1 的带状纽结满足更强的 1 模 8 Folk 猜想1.1(a)。实际上，我们将证明一个涉及以下量的更一般的陈述。回顾一下，纽结 *Floer* 挠阶$\mathrm{Ord}(K)$ 是纽结 K 的 U 挠元消去所需的最小幂次$\mathbb{F}[U]$-子模 $\mathrm{HFK}^-(K)$。根据 [JMZ20，推论 1，7],融合数为 1 的带状纽结的挠阶为 1。因此，引言中的定理 1.7是以下结果的直接推论：

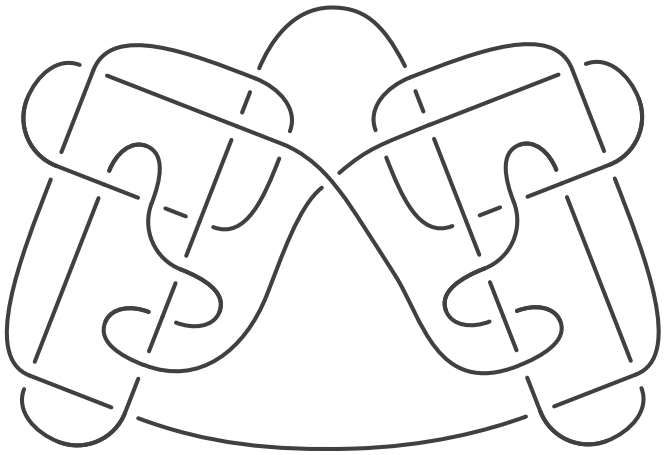

FIGURE 3. 由 13 个交叉点的纽结图构造的对称并 4_1，使用一个包含半扭转的扭转区域，该区域是图中央的交叉点。此纽结的 PD 编码见附录B。

原始纽结 rk	$\widehat{\text{对称}}$并的纽结 Floer 同调
K4a1	77
K3a1	2733
K13n2191	9357
K4a1	149
K5a1	117
K6a3	661
K15n52125	21269
K15n52125	24989

TABLE 1. 我们发现违反 Folk 猜想的对称并的结 Floer 同调的秩1.1(a)。所有这些秩模 8 均为 5，符合猜想1.3(a)。每种情况下，原始图都有 13 到 15 个交叉点；这些纽结的 PD 编码及相关数据见 [DGH+] 。

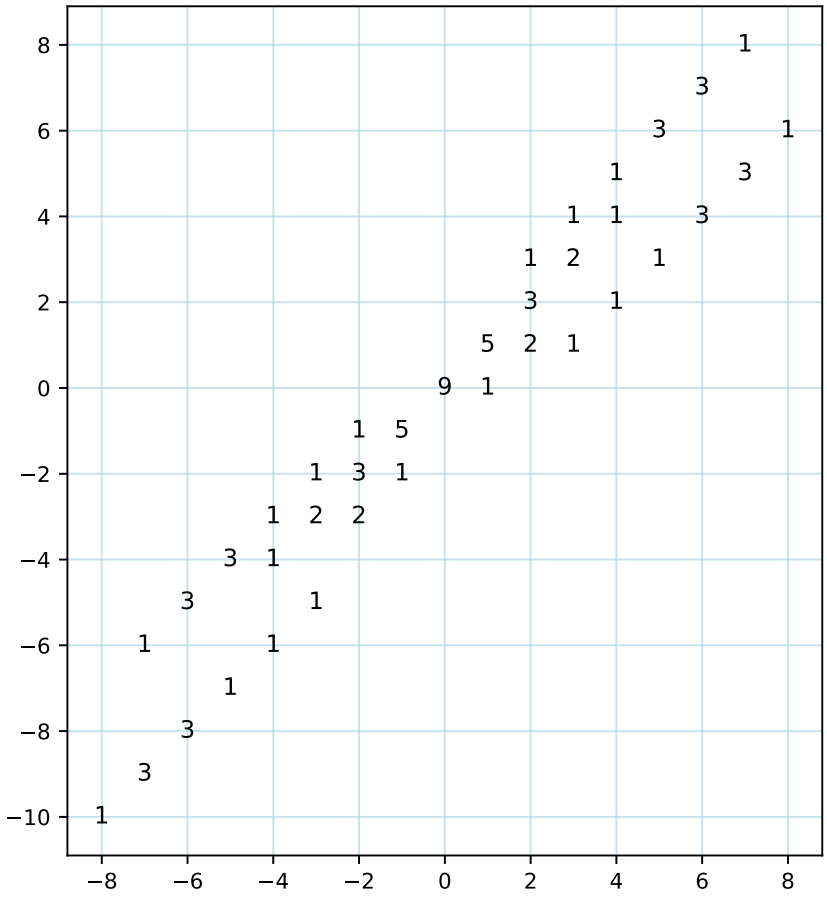

FIGURE 4. 图中描绘了对称并的纽结 Floer 同调3。水平轴表示Alexander分次，垂直轴表示马斯洛夫分次。

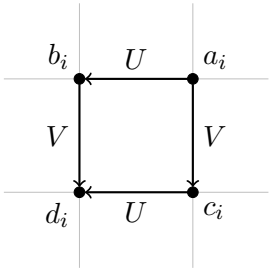

FIGURE 5. $U-V$ 平面中的一个单位盒。

定理 6.1。 若 K 是一个带状纽结，且 $\mathrm{Ord}(K) = 1$，则

$$\operatorname{rk} \widehat{\mathrm{HFK}}(K) \equiv 1 \pmod 8.$$

证明。 根据 [HKP，命题 3。6], 纽结 Floer 复形 $\mathrm{CFK}^{\mathbb{F}[U,V]}(K)$ 可分解为融合数 1 的带状纽结 K 如下形式：

$$\mathrm{CFK}_{\mathbb{F}[U,V]}(K) \simeq \mathbb{F}[U,V] \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_\ell,$$

其中每个 A_i 都是一个秩为 4 的自由 $\mathbb{F}[U,V]$-模，具有 4 个齐次生成元 a_i， b_i，c_i， d_i，微分由下式给出

$$\begin{aligned}
\partial a_i &= U \cdot b_i + V \cdot c_i; \\
\partial b_i &= V \cdot d_i; \\
\partial c_i &= U \cdot d_i; \\
\partial d_i &= 0.
\end{aligned}$$

(Hom-Kang-Park 将每个 A_i 称为 单位盒。示意图见图 5 。)$\widehat{}$每个单位盒对 HFK(K) 的秩贡献 4，因此我们立即$\widehat{}$得到 rk HFK(K) $\equiv 1$ (模 4)。为了得到更强的结论（模8），我们使用 Arf 不变量。

回顾一下，完整的结 Floer 复形带有两个分次，分别记为$\mathbf{gr_w}$ 和 $\mathbf{gr_z}$ [Zem19]。δ 分次定义为

$$\delta = \frac{\mathbf{gr_w} + \mathbf{gr_z}}{2}$$

由于 $\delta(\partial) = \delta(U) = \delta(V) = -1$，不难验证

$$\delta(a_i) = \delta(b_i) = \delta(c_i) = \delta(d_i).$$

因此， K 的 δ分次纽结 Floer 同调可写为

$$\widehat{\mathrm{HFK}}(K) = \mathbb{F}_{\delta_0} \oplus \mathbb{F}^4_{\delta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}^4_{\delta_\ell}, \tag{6.1}$$

对于某些 δ分次 δ_0， δ_1，……， $\delta_\ell \in \mathbb{Z}$。$\widehat{}$HFK($K$) 的 δ分次欧拉示性数为 $\pm \det K$。因此，根据方程 6.1，我们计算得

$$\pm \det K = (-1)^{\delta_0} + 4 \cdot (-1)^{\delta_1} + \cdots + 4 \cdot (-1)^{\delta_\ell}.$$

模 8 化简后得到

$$\det K \equiv 4\ell \pm 1 \pmod 8.$$

通过与 Levine 公式（参见定理 A.1）比较，并利用 Arf $K = 0$ （因为 K 是切片）这一事实，我们得到 ℓ 必为偶数。因此，$\widehat{}$由方程 6.1可得，rk 纽结 Floer 同调(K) $\equiv 1$ （模 8）。 □

注6.2。事实上，定理1.7 可以进一步细化，以证明融合数为 1 的带状结 K 满足

$$\operatorname{rk} \widehat{\mathrm{HFK}}(K) \equiv \det K \pmod{16}.$$

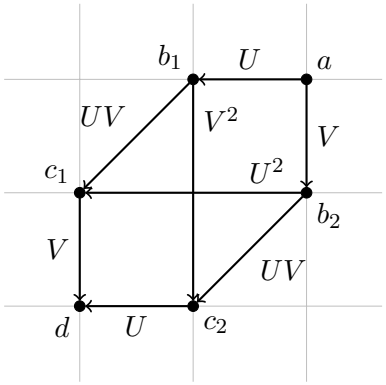

FIGURE 6. $\mathbb{F}[U,V]$平面中的 $U-V$- A 链复形。

这一论证是 Adam Levine 在与我们的通信中指出的，它运用了对合 Heegaard Floer 技术（具体而言，是 [HM17]中的命题 8.1 的证明），事实上还证明了更强的结果：扭结阶为 1 的纽结满足

$$\operatorname{rk}\widehat{\mathrm{HFK}}(K) \equiv (-1)^{\tau(K)} \cdot \det K \pmod{16}.$$

注 6.3. 定理 6.1的证明所采用的策略依赖于 $\mathrm{CFK}^{\mathbb{F}[U,V]}$无环直和项的代数结构；从表 1中的反例可以看出，这种策略对于挠阶更高的纽结必然失效。事实上，这种方法似乎也无法阐明针对更高挠阶纽结的较弱猜想1.3(a) 。例如，挠阶为 2 的纽结的 $\mathrm{CFK}^{\mathbb{F}[U,V]}$ 可能含有一个直和项 A ，它在$\mathbb{F}[U,V]$ 上由 a、 b_1、 b_2、 c_1、 c_2、 d自由生成，分次为 $\mathbf{gr} = (\mathbf{gr_w}, \mathbf{gr_z})$，微分定义如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{gr}(a) &= (0,0); & \partial a &= U\cdot b_1 + V\cdot b_2;\\
\mathbf{gr}(b_1) &= (1,-1); & \partial b_1 &= UV\cdot c_1 + V^2\cdot c_2;\\
\mathbf{gr}(b_2) &= (-1,1); & \partial b_2 &= U^2\cdot c_1 + UV\cdot c_2;\\
\mathbf{gr}(c_1) &= (2,0); & \partial c_1 &= V\cdot d;\\
\mathbf{gr}(c_2) &= (0,2); & \partial c_2 &= U\cdot d;\\
\mathbf{gr}(d) &= (1,1); & \partial d &= 0.
\end{aligned}$$

参见图6 以作说明。链复形 A 满足纽结 Floer 同调$\widehat{\ }$的形式对称性，其对纽结 Floer 同调的贡献将是一个秩为 6 的直和项。此外，所得的 δ-分次欧拉示性数为 0，因此A 不会影响 Arf 不变量。因此，我们不知道存在挠阶为 2 且满足 K 的带状纽结

$$\mathrm{CFK}_{\mathbb{F}[U,V]}(K) \cong \mathbb{F}[U,V] \oplus A,$$

而这将不满足猜想1.3(a)。

$\mathcal{A}$ \ $\mathbf{gr_w}$	-1	0	1
1			$\mathbb{F}$
0		$\mathbb{F}^2$	
-1	$\mathbb{F}$		

FIGURE 7. 平面中的 $(\mathbf{gr_w}, \mathcal{A})$-双分次 $\mathbb{F}$-向量空间 B {style id='10'>$\mathbf{gr_w} - \mathcal{A}$ 。

注 6.4。 用于证明定理 6.1 的策略也不太可能被调整用于（约化） Khovanov 同调，以期回答问题 1.9。该证明的关键要素是 Hom 的分解 [Hom17，定理 1]，，而目前尚未发现 Khovanov 同调的类似结果。

此外，Hom 分解中出现的每个单位盒都会对 纽结 Floer 同调 的一个直和项 B 作出贡献，其分次为 $(\mathbf{gr_w}, \mathbf{gr_z}, \mathcal{A})$，相差一个整体平移，

$$B = \mathbb{F}_{(-1,1,-1)} \oplus \mathbb{F}^2_{(0,0,0)} \oplus \mathbb{F}_{(1,-1,1)}.$$

(回忆一下，Alexander分次 $\mathcal{A}$ 可由 $\mathcal{A} = \mathbf{gr_w} - \mathbf{gr_z}$ 恢复。参见图 7。

然而，Khovanov 同调 $\mathcal{A}(6_1)$（其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{Z}$，或任意域 $\mathbb{F}_p$）不允许分解为一个一维直和项和若干具有 1-2-1 模式的直和项的双重分次直和，如 B所示。见图 8。注意， 6_1, 又称 Stevedore结，是融合数为 1 的带状纽结。

6.2. **关于 Khovanov 同调 的秩，适用于 X-挠阶为 1 的纽结**。 本节给出 Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar 对定理1.8 的证明。该定理指出，融合数为 1 的带状纽结满足猜想 1.3(b)。与第6.1节一样，该证明更一般地适用于一类由以下定义刻画的纽结：

定义6.5 ([Sar20, AD19])。 纽结 $\mathcal{A}$的- *extortion* 阶，记作 xo K，记作 $\mathrm{xo}_{\mathcal{A}}(X)$，是 Lee 同调某个提升中的 X-挠元的最大阶数 $LH(K)$（通过在定义 Khovanov 同调的 Frobenius代数中令 $X^2 = t$，而非 $X^2 = 1$; 参见 [Kho06]），并将其视为 $\mathcal{A}[X]$上的模。

Lipshitz 和 Sarkar 运用这一概念证明了以下定理；我们将看到，它是定理 1.8 的推广；经他们许可，我们收录了这份未发表的证明。

q \ h	-4	-3	-2	-1	0	1	2
4							$\mathbb{Z}$
2						$\mathbb{Z}$	
0					$\mathbb{Z}^2$		
-2				$\mathbb{Z}^2$			
-4			$\mathbb{Z}$				
-6		$\mathbb{Z}$					
-8	$\mathbb{Z}$						

FIGURE 8. 平面中的（h，q）双分次阿贝尔群 Khovanov 同调$_{\mathbb{Z}}$（6_1）。注意，由于 Khovanov 同调$_{\mathbb{Z}}$（6_1）是自由阿贝尔群，只需将 Khovanov 同调$_{\mathbb{Z}}$（6_1）与 $\mathbb{F}_p$ 张量积，即可恢复 Khovanov 同调$^{\mathbb{F}_p}$（6_1）。

定理 6.6 (Lipshitz-Sarkar)。 若 $\mathcal{A}$ 是一个域，且 K 是一个带状纽结，满足 $\widetilde{\text{xo}}_{\mathcal{A}}(K) = 1$，则rk Khovanov 同调$_{\mathcal{A}}(K) \equiv 1$ (模4)。

证明。 将 Lee 复形 $LC(K)$ 视为主理想整环 $\mathcal{A}[X]$ 上的模，它必定可分解为

$$LC(K) \cong \mathcal{A}[X]^r \oplus (\mathcal{A}[X] \xrightarrow{X^{a_1}} \mathcal{A}[X]) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{A}[X] \xrightarrow{X^{a_k}} \mathcal{A}[X]).$$

如果 xo$_{\mathcal{A}}(K) = 1$，则必有

$$r = a_1 = \cdots = a_k = 1$$

在上文中。

的约化 Khovanov 复形 K 可通过令 $X = 0$，从该 Lee 复形中恢复。在这种情况下，每个直和项（$\mathcal{A}[X] \xrightarrow{0} \mathcal{A}[X]$）都会对总约化 Khovanov 同调贡献一个二维向量空间 V。考虑为 Khovanov 同调选取一种混合分次 $\delta = \frac{q}{2} - h$ （此处q 表示通常的量子分次，而 h 表示通常的同调分次），使得分次欧拉示性数能够还原纽结的行列式（见 [MO08]）。由于 $a_i = 1$，因此 V 必定包含在单一的δ分次中。

现在我们令 k_e （分别为 k_o）表示在偶（分别为奇） δ分次中 V 的个数。取分次欧拉示性数后，

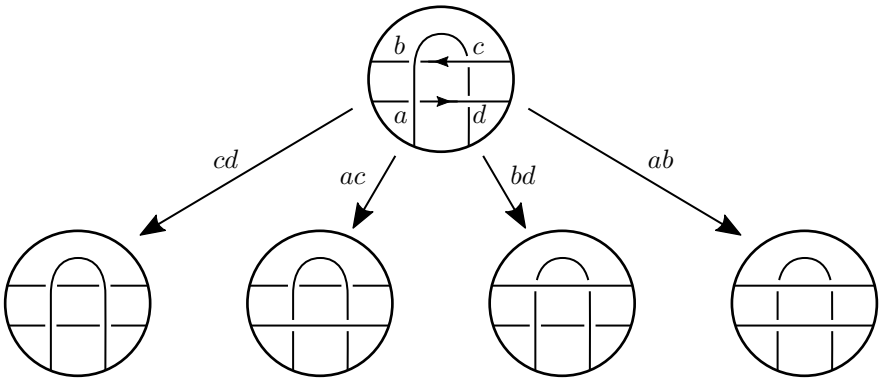

FIGURE 9. 给定一个带状纽结 K 和一个带状圆盘 D，存在 K 的一个投影，其局部形状如图上方的缠结，并且 D 在该缠结上的限制是显然的局部带状曲面。所得的带状奇点可以通过 2 次交叉变换以 4 种不同方式消解。

可得

$$1 + 2k_e - 2k_o \equiv \det(K) \equiv 1 \pmod 8,$$

因此 $k_e \equiv k_o$ （模4）。这意味着总秩为

$$1 + 2k_e + 2k_o \equiv 1 \pmod 4. \qquad \square$$

定理的证明 *1.8*。设 K 是融合数为 1 的带状纽结，并且$\mathcal{A} = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{F}_p$ 对于 $p \neq 2$。那么 [Sar20，推论 1。2] 表明 $\mathrm{xo}_{\mathcal{A}}(K) = 1$，因此定理6.6完成了证明。 $\square$

7. NON-LOCALITY

证明猜想 1.3 的一种诱人方法，是对带状奇点的数量进行归纳，并希望将带状纽结 K 的模4的秩与更简单的带状纽结的模4的秩联系起来。每个带状纽结 K 连同一个带状圆盘 D 都有一个如图 9所示的局部投影，其中可以看到 D 的一个带状奇点。可以用四种不同方式改变四个局部交叉点中的两个，以消解该带状奇点，并得到一个新的带状纽结及其带状圆盘，且带状奇点的数量减少一个。

人们或许会希望基于这一局部变换，找到猜想 1.3的局部证明。接下来的命题表明，除非在归纳步骤中实质性地使用带状圆盘，否则这是不可能的。

命题 7.1. 存在一些纽结，可以通过一系列如图 U 所示的局部变换*9* 变成平凡纽结，但不满足猜想 *1.3*中的等式。

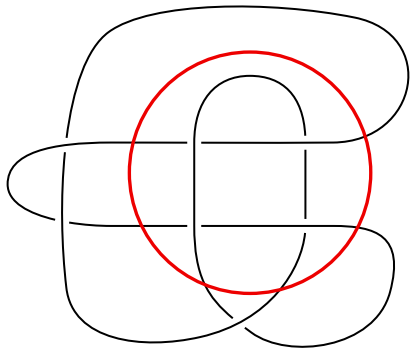

FIGURE 10. 纽结 6_2 可以通过图 9 中的局部移动解开，但其纽结 Floer 同调和 Khovanov 同调的秩都不与 1 模4同余。

证明。 图 10展示了纽结 6_2 的一个投影，其中包含一个与图 9 完全相同的局部缠结（包括定向）。图 9 所述的 4 种简化方式中的任一种都能将 6_2 变成平凡纽结。纽结 6_2 是交替纽结，行列式为 11。因此，由 [MO08], 可知，其纽结 Floer 同调和约化 Khovanov 同调（取任意环 $\mathcal{A}$上的系数）的秩均为 11，即模 4 余 3。当然， 6_2 不是带状纽结（也不是切片纽结）。□

APPENDIXA. POLYNOMIAL INVARIANTS AND THE ARF INVARIANT

A.1. **Arf 不变量**。 一个经典的纽结不变量，众所周知它与模8约化以及亚历山大多项式和琼斯多项式有关，这就是 Arf 不变量。回想一下，Arf K 是一个取值于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的同痕不变量，可以通过纽结的带符号行列式利用 Levine 公式求得：

定理 A.1 ([Lev66，第 544]页。对于任意纽结 $K \subset S^3$,

$$\det K \equiv 4 \cdot \operatorname{Arf} K + 1 \pmod 8.$$

回忆一下，$\det K$ 可通过（Conway 规范化的）Alexander 多项式或琼斯多项式，利用恒等式 $\det K = \Delta_K(-1) = V_K(-1)$ 得到。若改用 $|\det K|$，则 Levine 公式中的 $+1$ 应替换为 ± 1。

问题 A.2。 设 H 表示纽结 *Floer* 同调或约化 *Khovanov* 同调（系数取自 $\mathbb{F}_p$ 或 $\mathbb{Z}$）。是否对每个纽结 $K \subset S^3$都有

$$\operatorname{rk} H(K) \equiv 4 \cdot \operatorname{Arf} K \pm 1 \pmod 8? \tag{A.1}$$

注意，方程（A.1）由 Levine 公式适用于所有准交替纽结；当 $H = \mathrm{HFK}$（见第 3节）时，也适用于所有无扭 Whitehead 双。

回答A.3. 不。定理1.2的反例在这里同样适用。

备注 A.4。 事实上， [MM20] 中的 Knight Move 结也为问题 A.2提供了一个反例。不过，定理 1.2实际上证明了一个更强的结论：也就是说，不存在任何同痕不变量能够代入方程（A.1）以替代 Arf(K）。

A.2. **琼斯多项式的约化公式**。从（对称化的）亚历山大多项式中恢复 Arf 不变量的另一种方法，是使用下面的 Robertello约化公式。

定理 A.5 ([Rob65，定理 6])。对于任意纽结 $K \subset S^3$,

- $\mathrm{Arf}(K) = 0$ *if and only if* $\Delta_K(t) \equiv 1 \pmod{2, 1+t^4}$;
- $\mathrm{Arf}(K) = 1$ *if and only if* $\Delta_K(t) \equiv t^{-1}+1+t \pmod{2, 1+t^4}$.

由于我们在文献中没有找到琼斯多项式的类似结果，因此在此陈述并证明该结果。

定理 A.6。对于任意纽结 $K \subset S^3$,

- Arf(K) $= 0$ 当且仅当 $V_K(t) \equiv 1$ (模 2， $1+t^4$);
- Arf(K) $= 1$ 当且仅当 $V_K(t) \equiv t^{-1}+1+t$ (模 2， $1+t^4$)。

回顾一下，链环 L 的琼斯多项式 $V_L(t)$ 满足辫 skein 关系

$$t^{-1} \cdot V_{L_+}(t) - t \cdot V_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V_{L_0}(t), \tag{A.2}$$

其中 L_0 表示在给定交叉点处的定向平滑。

如果 L_+ 是一个纽结，那么

$$\mathrm{Arf}\, K_+ + \mathrm{Arf}\, K_- \equiv \mathrm{lk}\, L_0 \pmod{2}, \tag{A.3}$$

其中 $\mathrm{lk}\, L_0$ 表示 L_0的两个分支的链接数。

以下定理立即推出定理A.6。

定理 A.7。 对于任意纽结 $K \subset S^3$,

- $\mathrm{Arf}(K) = 0$ *if and only if* $V_K(t) \equiv 1 \pmod{2, 1+t^4}$;
- $\mathrm{Arf}(K) = 1$ *if and only if* $V_K(t) \equiv t^{-1}+1+t \pmod{2, 1+t^4}$.

对于任意二分支链环 $L \subset S^3$,

- $\mathrm{lk}(L) \equiv 0$ (模 2) 当且仅当 $t^{1/2} \cdot V_L(t) \equiv u^2 \cdot (1+t)$ (模 $2, 1+t^4$) 对某个可逆元 $u \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$成立;
- $\mathrm{lk}(L) \equiv 1$ (模 2) 当且仅当 $t^{1/2} \cdot V_L(t) \equiv u \cdot (1+t^2)$ (模 $2, 1+t^4$) 对某个可逆元 $u \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$成立。

我们用 $a \equiv b$ (模 $2, 1+t^4$) 表示 a和 b在环 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(2, 1+t^4)$ 中的像相同。

引理 A.8。 线性映射

$$\phi_{1+t} \colon \mathbb{F}_2[t]/(1+t^4) \to \mathbb{F}_2[t]/(1+t^4)$$

由乘以 $1+t$ 给出，其秩为 3，其核由$1+t+t^2+t^3$生成。

证明。 证明是在线性代数中进行的一项直接计算。 □

定理的证明 *A.7*。我们对图中交叉点的数量进行归纳论证，该图对应于 D 所讨论的纽结或链环。若没有交叉点，则D 是平凡纽结或二分量平凡链环的图，证毕。

现在假设定理对所有具有含 $< n$ 个交叉点的图的纽结或二分支链环都成立。首先我们将证明，定理对所有具有含 n 个交叉点的图的纽结都成立，然后再讨论二分支链环。

对于每个具有 n 个交叉点的纽结图 D，都存在一系列交叉变换，可将 D 变成平凡纽结的图；因此，存在有限个图组成的序列 $D_0, D_1, \ldots, D_k = D$，使得 D_0 是平凡纽结的图，且 D_i 与 D_{i+1} 仅相差一次交叉变换。我们对 k进行嵌套归纳论证：定理对由图 D_0 表示的纽结成立（即平凡纽结）。对于归纳步骤，假设 L_+和 L_- 是与 D_{k-1} 和 D_k 相关联的两个纽结（顺序不一定如此），并令 L_0 为与该投影的定向光滑化相关联的链环。注意， L_0 有一个含 $< n$ 个交叉点的图。假设 $\mathsf{lk}(L_0) = 0$，那么 $\mathsf{Arf}\, L_+ = \mathsf{Arf}\ L_-$。根据辫 skein 关系 (A.2) 和主要归纳假设，化简后得到

$$t^{-1} \cdot V_{L_+} + t \cdot V_{L_-} \equiv t + t^3 \pmod{2, 1 + t^4}.$$

例如，解出 V_{L_+} 可得

$$V_{L_+} \equiv t^2 \cdot V_{L_-} + 1 + t^2 \pmod{2, 1 + t^4}. \tag{A.4}$$

由此容易验证

- $V_{L_-}(t) \equiv 1 \pmod{2, 1 + t^4}$ implies $V_{L_+}(t) \equiv 1 \pmod{2, 1 + t^4}$, and
- $V_{L_-}(t) \equiv t^{-1} + 1 + t \pmod{2, 1 + t^4}$ implies $V_{L_+}(t) \equiv t^{-1} + 1 + t \pmod{2, 1 + t^4}$.

解出 V_{L_-} 后得到与式（A.4）相同的方程，其中 V_{L_-} 和 V_{L_+} 互换。因此，将 L_- 和 L_+ 分别与 D_{k-1}和 D_k关联时，顺序并不重要。

反之，假设 $\mathsf{lk}(L_0) = 1$，则 $\mathsf{Arf}\ L_+ \neq \mathsf{Arf}\, L_-$。按照上述方法（例如解出 V_{L_+}），我们得到

$$V_{L_+} \equiv t^2 \cdot V_{L_-} + 1 + t + t^2 + t^3 \pmod{2, 1 + t^4}.$$

由此我们很容易看出

- $V_{L_-}(t) \equiv 1 \pmod{2, 1+t^4}$ implies $V_{L_+}(t) \equiv t^{-1}+1+t \pmod{2, 1+t^4}$, and
- $V_{L_-}(t) \equiv t^{-1}+1+t \pmod{2, 1+t^4}$ implies $V_{L_+}(t) \equiv 1 \pmod{2, 1+t^4}$.

解出 V_{L_-} 的推理完全类似。

现在我们将注意力转向具有 $\leq n$ 个交叉点的二分支链环。如果给定链环 L 中不存在涉及两个分支的交叉点，那么该链环是一个分裂并 $K_1 \sqcup K_2$（因此 $\mathrm{lk}\, L = 0$），其琼斯多项式为

$$V_L(t) = -(t^{1/2} + t^{-1/2}) \cdot V_{K_1}(t) \cdot V_{K_2}(t).$$

因此，我们得到

$$t^{1/2} \cdot V_L(t) \equiv (1+t) \cdot V_{K_1}(t) \cdot V_{K_2}(t) \pmod{2, 1+t^4}.$$

两者 K_1 都有 K_2 交叉点，因此根据归纳假设，乘积$V_{K_1}(t) \cdot V_{K_2}(t)$ 要么是 1，要么是 $t^{-1}+1+t$。显然，前者是 $\mathbb{F}_2[t]/(1+t^4)$ 中某个可逆元的平方；而后者可替换为 t^2，因为 $(t^{-1}+1+t) + t^2 \in$ 的核 ϕ_{1+t} (见引理 A.8)。无论哪种情况，我们都得到如下公式

$$t^{1/2} \cdot V_L(t) \equiv u^2 \cdot (1+t) \pmod{2, 1+t^4}.$$

最后，我们考虑这样的情形：二分量链环图 D 有 $\leq n$个交叉点，且两个分支之间至少有一个交叉点。与处理纽结时一样，我们嵌套一个归纳论证，这次以将 D 变为分裂链环图所需的交叉变换次数为归纳参数。归纳基础由前一段给出。在归纳步骤中，取一列链环图 D_0、.....、 $D_k = D$，使得每个图都通过涉及两个链环分量的交叉变换与前一个图相关联。假设 D_k 是 L_+ 的图，而 D_{k-1} 是 L_- 的图（另一种情形稍后讨论）。将辫 skein 关系对 V_{L_+} 求解，可得

$$t^{1/2} \cdot V_{L_+}(t) \equiv t^2 \cdot (t^{1/2} \cdot V_{L_-}(t)) + (t+t^2) \cdot V_{L_0}(t) \pmod{2, 1+t^4}. \tag{A.5}$$

注意，$\operatorname{lk} L_+ + \operatorname{lk} L_- \equiv 1$ (模 2)，且 L_0 是一个纽结。若 $\operatorname{lk} L_- \equiv 0$(模 2)（因此 $\operatorname{lk} L_+ \equiv 1$ (模 2)），则方程（A.5）中的第一项为 $1+t$ 或 t^2+t^3，而第二项为 $t+t^2$ 或 $1+t^3$（取决于 L_0的 Arf 不变量）。无论哪种情况，都有

$$t^{1/2} \cdot V_{L_+}(t) \equiv 1+t^2 \text{ or } t+t^3,$$

如所需。反之，若 $\operatorname{lk} L_- \equiv 1$ (模 2)（因此 $\operatorname{lk} L_+ \equiv 0$ (模 2)），则方程（A.5）中的第一项为 $1+t^2$ 或 $t+t^3$，而第二项为 $t+t^2$ 或 $1+t^3$（同样取决于 L_0的 Arf 不变量）。无论哪种情况，都有

$$t^{1/2} \cdot V_{L_+}(t) \equiv 1+t \text{ or } t^2+t^3,$$

如所需。最后，若 D_k 是 L_- 的一个图，且 D_{k-1} 是 L_+的一个图，通过对辫 skein 关系求解 V_{L_-}，可得

$$t^{1/2} \cdot V_{L_-}(t) \equiv t^2 \cdot (t^{1/2} \cdot V_{L_+}(t)) + (1+t^3) \cdot V_{L_0}(t) \pmod{2, 1+t^4}$$

而不是（A.5），证明完全类似。 □

下述推论是 [Rob65定理 7]的琼斯多项式类比。由定理A.7的陈述可立即得出其证明。

推论 A.9。对于纽结 $K \subset S^3$，设 $V_K(t) = \sum_i c_i t^i$。那么

$$\operatorname{Arf} K \equiv \sum_{i \equiv 1 \pmod 4} c_i \equiv \sum_{i \equiv -1 \pmod 4} c_i \pmod 2.$$

A.3. **Lickorish 关于亚历山大多项式的统一陈述**。回忆一下，链环的康威势函数 L 是一个多项式

$$\nabla_L(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

若 K 是一个纽结，则

$$\nabla_K(z) = 1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

代入 $z \mapsto t^{-1/2} - t^{1/2}$ 后，可得到（Conway 规范化的）亚历山大多项式

$$\Delta_K(t) = \nabla_K(t^{-1/2} - t^{1/2}).$$

回顾一下，Arf 不变量可以通过 Levine 公式（定理 A.1）或 Robertello 约化公式（定理 A.5）从亚历山大多项式中以两种方式求得。事实证明，这两个公式都可以很容易地从 Lickorish 的以下统一结果推导出来。

定理A.10 （[Lic97，定理10。7]）。对于纽结 K，$a_2 \equiv \operatorname{Arf}(K)$（模2），其中 a_2 是康威势函数中 z^2 的系数。

A.4. **琼斯多项式的统一表述?** 与亚历山大多项式的情形一样，我们可以通过约化公式（参见定理 A.6），以及利用通常的 Levine 公式（参见定理 A.1），从琼斯多项式中恢复 Arf 不变量；这里使用了纽结的行列式可以通过如下恒等式由琼斯多项式恢复这一事实：$\det K = V_K(-1)$。

自然会问，是否存在像亚历山大多项式情形中的统一表述。作为这两种表述之间关系的一点说明，我们注意到，定理 A.7 的证明策略可以逐步沿用，但使用辫 skein 关系

$$\det L_+ - \det L_- = 2i \det L_0,$$

来证明 Levine 公式：

$$\det K \equiv 4 \operatorname{Arf} K + 1 \pmod 8 \qquad \text{and} \qquad \det L \equiv 2i \operatorname{lk} L \pmod 2,$$

其中 K 是任意纽结，L 是任意二分支链环。

对于琼斯多项式，还有一条与 Arf 不变量相关的额外结论，它不仅适用于纽结，也适用于链环。

回顾一下，链环 L 是适当的，如果对于 L 的每个分支 K

$$\operatorname{lk}(K, L \setminus K) \equiv 0 \pmod 2.$$

特别地，任意纽结都是适当链环。

对于适当链环 L，我们用 Arf L 表示其 Arf 不变量。非适当链环没有定义这样的不变量。

定理 A.11 ([Lic97，定理 10。6])。对于一个链环 $L \subset S^3$,

$$V_L(i) = \begin{cases} (-\sqrt{2})^{\#L-1} \cdot (-1)^{\operatorname{Arf} L} & \textit{if } L \textit{ is proper} \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

问题 A.12。 是否存在一个统一的表述，涵盖定理*A.6*、*A.1*和*A.11*?

Appendix B. PD codes of the counter-examples

以下是第5~节中四个纽结的平面图（PD）编码，其中 rk Khovanov 同调$\mathbb{Q}$ 模 8 余 5：

18nh_00159590:
```
[[16, 2, 17, 1], [2, 7, 3, 8], [10, 3, 11, 4], [23, 4, 24, 5],
 [5, 24, 6, 25], [6, 11, 7, 12], [27, 8, 28, 9], [9, 28, 10, 29],
 [12, 32, 13, 31], [32, 14, 33, 13], [14, 36, 15, 35], [36, 16, 1, 15],
 [17, 21, 18, 20], [33, 19, 34, 18], [19, 35, 20, 34], [26, 21, 27, 22],
 [22, 29, 23, 30], [30, 25, 31, 26]]
```

18nh_00752242: [[10, 2, 11, 1], [2, 26, 3, 25], [3, 32, 4, 33], [33, 4, 34, 5],
[20, 5, 21, 6], [6, 23, 7, 24], [7, 15, 8, 14], [15, 9, 16, 8],
[36, 10, 1, 9], [11, 17, 12, 16], [17, 13, 18, 12], [13, 19, 14, 18],
[24, 19, 25, 20], [21, 28, 22, 29], [29, 22, 30, 23], [26, 31, 27, 32],
[34, 27, 35, 28], [30, 35, 31, 36]]19nh_000129633:
[[30, 2, 31, 1], [2, 21, 3, 22], [3, 33, 4, 32], [33, 5, 34, 4],
[5, 29, 6, 28], [6, 15, 7, 16], [16, 7, 17, 8], [8, 27, 9, 28],
[36, 9, 37, 10], [25, 10, 26, 11], [11, 38, 12, 1], [12, 17, 13, 18],
[18, 13, 19, 14], [14, 19, 15, 20], [29, 21, 30, 20], [22, 32, 23, 31],
[34, 24, 35, 23], [24, 36, 25, 35], [37, 27, 38, 26]]19nh_000305767:
[[1, 9, 2, 8], [11, 3, 12, 2], [3, 30, 4, 31], [21, 5, 22, 4],
[34, 5, 35, 6], [6, 24, 7, 23], [7, 15, 8, 14], [26, 10, 27, 9],
[10, 28, 11, 27], [12, 31, 13, 32], [32, 13, 33, 14], [15, 36, 16, 37],
[37, 16, 38, 17], [17, 38, 18, 1], [18, 25, 19, 26], [19, 29, 20, 28],
[29, 21, 30, 20], [22, 34, 23, 33], [24, 35, 25, 36]]此外，图3中的纽结的 PD 编码如下。
[[7, 37, 8, 36], [40, 34, 41, 33], [31, 13, 32, 12], [8, 16, 9, 15],
[14, 6, 15, 5], [35, 7, 36, 6], [32, 40, 33, 39], [26, 47, 27, 48],
[46, 19, 47, 20], [41, 24, 42, 25], [44, 3, 45, 4], [25, 20, 26, 21],
[48, 27, 1, 28], [2, 43, 3, 44], [23, 4, 24, 5], [38, 12, 39, 11],
[42, 45, 43, 46], [21, 28, 22, 29], [10, 30, 11, 29], [37, 31, 38, 30],
[13, 35, 14, 34], [16, 10, 17, 9], [17, 22, 18, 23], [18, 1, 19, 2]]表1 中其余纽结的 PD 编码见 [DGH+]。

References

[AD19] Akram Alishahi 和 Nathan Dowlin。Lee谱序列、解结数与骑士步猜想。 *Topology Appl.*，254：29–38，2019。 arXiv:1710.07875, doi:10.1016/j.topol.2018.11.020。 [BNM] Dror Bar-Natan 和 Scott Morrison。《结图集》。网址： http://www. katlas.org。 [Bur20] Benjamin A. Burton。《下一个三亿五千万个纽结》。载于 *36th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2020)* 164 *Leibniz* ，第 卷，页 *International Proceedings in Informatics (LIPIcs)* 25 1 25 17，2020 码：–：。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2020.25。

[CDGW] Marc Culler、Nathan M. Dunfield、Matthias Goerner 和 Jeffrey R. Weeks。SnapPy：用于研究三维流形几何与拓扑的计算机程序。3.0 版。网址：http://snappy.computop.org。[DG] Nathan M. Dunfield 和 Sherry Gong。带状同痕与切片障碍：实验与实例。准备中。[DGH+] Nathan M. Dunfield、Sherry Gong、Thomas Hockenhull、Marco Marengon 和 Michael Willis。随本文 arXiv 版本附带的辅助文件。[FGMW10] Michael Freedman、Robert Gompf、Scott Morrison 和 Kevin Walker。关于光滑四维庞加莱猜想的人机思考。*Quantum Topol.*，1(2)：171–208，2010。arXiv:0906.5177，doi:10.4171/QT/5。[FM66] Ralph H. Fox 和 John W. Milnor。四维空间中二维球面的奇点与纽结协边。*Osaka Math. J.*，3：257–267，1966。[Fre82] Michael Hartley Freedman。四维流形的拓扑。 *J.*， *Differential Geometry* 17 3 357 453, 1982 （）：–。[Hed07] Matthew Hedden。Whitehead 双纽结的纽结 Floer 同调。 *Geom.*，：–。 *Topol.* 11 2277 2338, 2007 0606094， 10 2140 2007 arXiv:math.GT/ doi: . /gt. . 11.2277。[HKP] Jennifer Hom、Sungkyung Kang 和 JungHwan Park。带状纽结、缆绕与手柄分解。2020 年预印本，共 11 页。arXiv:2003.02832。[HM17] Kristen Hendricks 和 Ciprian Manolescu。对合 Heegaard Floer 同调。 *Duke Math. J.*，166(7)：1211–1299，2017。arXiv:1507.00383，doi:10.1215/00127094-3793141。[HMW] Thomas Hockenhull、Marco Marengon 和 Michael Willis。将 Fox-Milnor 对一类对称并的障碍范畴化。准备中。[Hom17] Jennifer Hom。Heegaard Floer 同调与协和综述。 *J.*， （）：。 *Knot Theory Ramifications* 26 2 1740015, 24, 2017 1512 00383, arXiv: . doi: 10.1142/S0218216517400156。[JMZ20] Andr´as Juh´asz、Maggie Miller 和 Ian Zemke。纽结协边、桥指数及 Floer 同调中的挠元。 *J. Topol.*，13(4)：1701–1724，2020。arXiv:1904.02735，doi:10.1112/topo.12170。[Kho00] Mikhail Khovanov。琼斯多项式的范畴化。*Math. J.* 101 3 359 426, 2000 9908171， 10 1215 *Duke* ，（）：–。arXiv:math/ doi: . / S0012-7094-00-10131-7。[Kho03] Mikhail Khovanov。纽结上同调中的模式 I。 *Experiment. Math.*，12 3 365 0201306 ( ): –374，2003。arXiv:math/ 。[Kho06] Mikhail Khovanov。链环同调与 Frobenius扩张。 *Fund. Math.*，190 179 190，2006 0411447：–。arXiv:math/ 。[Kir97] Rob Kirby。低维拓扑中的问题。载于 *Geometric topology (Athens, GA, 1993)* 2 *AMS/IP Stud. Adv. Math.* 35 473 ，第 卷，页码 –。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。网址：https://math.berkeley.edu/~kirby/problems.ps.gz，doi:10.1090/amsip/002.2/02。[KM11] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。Khovanov 同调是平凡纽结的探测器。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，(113)：97–208，2011。arXiv: 1005.4346，doi:10.1007/s10240-010-0030-y。[KT57] Shin'ichi Kinoshita 和 Hideteka Terasaka。论纽结并。 *Osaka Math.*，：–。[Lam00] *J.* 9 131 153, 1957 Christoph Lamm。对称并与带状纽结。 *Osaka J. Math.*，37 3 537 550，2000 ( )：–。[Lev66] J. Levine。余维二纽结的多项式不变量。 *Ann. of Math.*，：–。doi: . /。 *(2)* 84 537 554, 1966 10 2307 1970459

[Lic97] W. B. Raymond Lickorish。 *An introduction to knot theory*，第175卷，*Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，1997年。doi:10.1007/978-1-4612-0691-0.[LL] Lukas Lewark 和 Andrew Lobb。Khoca，纽结同调计算器。网址：http://www.lewark.de/lukas/khoca.html。[LM23] Charles Livingston 和 Allison H. Moore。Knotinfo：纽结不变量表，2023年2月。网址：https://knotinfo.math.indiana.edu。[Man16] Ciprian Manolescu。Pin(2)等变塞伯格-维滕弗洛尔同调与三角剖分猜想。 *J. Amer. Math. Soc.*，29(1)：147–176，2016年。arXiv:1303.2354，doi:10.1090/jams829。[MM20] Ciprian Manolescu 和 Marco Marengon。骑士步猜想是错误的。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，148(1)：435–439，2020年。arXiv:1809.09769，doi: 10.1090/proc/14694。[MO08] Ciprian Manolescu 和 Peter Ozsv´ath。准交替链环的 Khovanov 同调与纽结 Floer 同调，载于 *Proceedings of Gokova Geometry-Topology Conference 2007* 60 81 ¨ ，页码 –。

Gokova 几何/拓扑会议 (GGT)，G¨okova，2008年。arXiv:0708.3249。[MP] Ciprian Manolescu 和 Lisa Piccirillo。从零手术到奇异定号四维流形的候选对象。预印本，2021年，30页。arXiv:2102.04391。[OS03] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。纽结 Floer 同调与四球亏格。 *Geom. Topol.*，7：615–639，2003年。arXiv:math/0301149，doi:10.2140/gt.2003.7.615。[OS04] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。全纯圆盘与纽结不变量。*Adv. Math.*，186(1)：58–116，2004年。arXiv:math/0209056，doi:10.1016/j.aim.2003.05.001.[OSS17] Peter S. Ozsv´ath、Andr´as I. Stipsicz 和 Zolt´an Szab´o。由纽结 Floer 同调导出的协和同态。 *Adv. Math.*，315：366–426，2017年。arXiv:1407.1795，doi:10.1016/j.aim.2017.05.017。[Pic20] Lisa Piccirillo。康威纽结不是切片结。*Ann. of Math. (2)*，191(2)：581–591，2020年。arXiv:1808.02923，doi:10.4007/annals.2020.191.2.5。[Ras03] Jacob Andrew Rasmussen。*Floer homology and knot complements*。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2003年。博士论文——哈佛大学。arXiv:math/ 0306378.[Ras10] Jacob Rasmussen。Khovanov 同调与切片亏格。*vent. Math.* 182 2 419 447, 2010 0402131, Im ，( )：–。arXiv:math/ doi: 10.1007/s00222-010-0275-6.[Rob65] Raymond A Robertello。纽结协边的不变量。*Communications on Pure and Applied Mathematics* 18 3 543 555, 1965 ，( )：–。[Sar20] Sucharit Sarkar。带状距离与 Khovanov 同调。*Algebr. Geom.*，( )：–。*Topol.* 20 2 1041 1058, 2020 1903 11095, 10 2140 2020 arXiv: . doi: . /agt. . 20.1041.[Sch22] Dirk Sch¨utz。Knotjob软件（蓝色版本），2022年。网址：https://www. maths.dur.ac.uk/users/dirk.schuetz/knotjob.html。[Shu14] Alexander N. Shumakovitch。Khovanov 同调的挠元。 *Fund. Math.*，225 1 343 364, 2014 0405474 ( )：–。arXiv:math/。[SS18] Christopher Scaduto 和 Matthew Stoffregen。双重准交替链环、Khovanov 同调与瞬子同调。 *Quantum Topol.*，9 1 167 205，2018 10 4171 106 ( )：–。doi: . /QT/ .[Sza] Zolt´an Szab´o。纽结弗洛尔同调计算器，https://web.math. princeton.edu/~szabo/HFKcalc.html。[Tei11] Peter Teichner。切片纽结：四维中的纽结理论，2011年。Justin Roberts、Julia Collins 和 Mark Powell 的讲义。网址：https: //people.mpim-bonn.mpg.de/teichner/Math/surveys.html。

[Zem19] Ian Zemke。链环配边与链环 Floer 同调上的绝对分次。*Quantum Topol.*，10(2)：207–323，2019年。arXiv:1701.03454，doi:10.4171/QT/ 124。

Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801, USA*Email address*: nathan@dunfield.info

Department of Mathematics, Texas A & M University, College Station, TX77840, USA
Email address: sgongli@tamu.edu

Frome, Somerset, UK*Email address*:
thomas.hockenhull@gmail.com

Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary*Email address*: marengon@renyi.hu

Department of Mathematics, Texas A & M University, College Station, TX 77840, USA
Email address: msw188@tamu.edu